DISCUSSÕES COLETIVAS EM MATEMÁTICA: UM OLHAR SOBRE A PRÁTICA DE TRÊS PROFESSORES

Cátia Rodrigues

Agrupamento de Escolas de Canas de Senhorim

catiamat@gmail.com

Luís Menezes

Escola Superior de Educação de Viseu e CI&DETS

menezes@esev.ipv.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo: As discussões matemáticas coletivas são uma ferramenta poderosa a que os professores podem recorrer para proporcionar aos alunos uma aprendizagem da Matemática com compreensão. Essa prática revela-se uma atividade exigente para o professor, colocando-lhe sérios desafios. Neste estudo, procuramos descrever e compreender como três professores de Matemática do Ensino Básico (EB) dinamizam discussões coletivas envolvendo tarefas algébricas, focando os desafios que enfrentam. O estudo, de cunho qualitativo e interpretativo, assenta em estudos de caso de três professores. Os resultados mostram que os professores dinamizam a discussão segundo três componentes principais: i) apresentação; ii) comparação, avaliação e filtragem; e iii) conclusão, revelando flexibilidade na sua atuação, como forma de responder a algumas tensões com que se defrontam.

Palavras-chave: Discussão coletiva; Ensino da Álgebra; Professores; Discurso de sala de aula.

Introdução

Em Portugal, nos últimos anos, tem-se assistido a diversas mudanças nos programas de Matemática. Segundo um recente documento curricular – *Aprendizagens Essenciais para o Ensino Básico* – o ensino da Matemática, ao longo da escolaridade básica, deve permitir que os alunos “desenvolvam capacidade de abstração e generalização (…) adquiram o vocabulário e linguagem próprios da Matemática e desenvolvam a capacidade de comunicar em Matemática, por forma a serem capazes de descrever, explicar e justificar, oralmente e por escrito, as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões que obtêm” (DGE, 2018). As discussões matemáticas podem ser um instrumento didático do professor para alcançar essas aprendizagens, na medida em que pressupõem que os alunos se envolvam na apresentação, justificação e argumentação sobre diversas estratégias de resolução de uma tarefa e na sistematização das principais ideias emergentes dessa partilha.

O professor desempenha nessa abordagem ao ensino um papel importante, ao ser responsável por criar oportunidades de aprendizagem aos alunos. Para tal, o professor, apoiado no seu conhecimento didático (Ponte, 2012), seleciona tarefas que favoreçam o envolvimento dos alunos em discussão e, simultaneamente, promovam a aquisição de conceitos e procedimentos e a generalização de relações matemáticas; e prepara e conduz discussões produtivas (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). Nesta comunicação, pretendemos descrever e compreender como três professores de Matemática do EB dinamizam a discussão coletiva no ensino da Álgebra, focando os desafios que enfrentam nessa prática.

Dinamização da discussão coletiva

O envolvimento dos alunos numa discussão coletiva pode ser um momento rico de aprendizagem ou uma atividade pouco significativa, dependendo da forma como o professor prepara e conduz a discussão. Os professores podem estruturar a discussão em sala de aula em três momentos principais (Sherin, 2002): i) apresentação; ii) comparação e avaliação; e iii) filtragem. O primeiro momento procura levar os alunos a partilhar as suas ideias com a turma. Para isso, o professor coloca questões, como "Porquê?", "O que pensam os colegas?". O professor pode iniciar a apresentação das estratégias de resolução pelas incorretas, de modo a que o erro seja discutido com todos; pelas mais frequentes, já que foram realizadas por grande parte dos alunos; ou pelas de fácil compreensão, para que todos sejam capazes de acompanhar os raciocínios envolvidos (Stein et al., 2008). No segundo momento, os alunos são incentivados a comparar resoluções próximas e distantes e o professor começa a focar a atenção dos alunos no conteúdo da discussão. Por último, o professor leva os alunos a pensarem sobre uma ideia específica que foi partilhada e/ou introduz novas ideias matemáticas que os levem a progredir no assunto em estudo, ajudando-os a estabelecer conexões entre as ideias apresentadas.

O discurso gerado durante a discussão segue um processo de estreitamento e ampliação de ideias, já que inicia com o professor a solicitar e discutir ideias – *solicitação e discussão de muitas ideias* – prossegue com o foco em algumas ideias particulares – *filtragem* – e continua com o professor a incentivar a partilha de mais ideias – *solicitação e discussão de muitas ideias*. Esse processo mostra que, primeiro, o professor está mais preocupado com a partilha de ideias – *conteúdo matemático não filtrado* – e só posteriormente em atingir os objetivos estipulados, enfatizando o conteúdo das ideias apresentadas – *conteúdo matemático filtrado*.

O professor é, assim, responsável por incentivar os alunos a apresentar o seu trabalho, a comparar e avaliar as suas ideias; a filtrar ideias importantes focando aí a sua atenção e assegurar o envolvimento de todos na discussão, mantendo a harmonia entre a comunicação gerada e o conteúdo das ideias partilhadas. É na tentativa de encontrar o equilíbrio entre um ambiente de sala de aula que incentiva as ideias dos alunos e cujo propósito é aprender conteúdos matemáticos que os professores enfrentam tensões, como ouvir um aluno em particular e manter a turma em atividade, conciliar a explicação de regras e procedimentos com a resolução de outros alunos e encontrar conteúdos que permitam promover a discussão e ao mesmo tempo ensinar competências básicas (Yerushalmy & Shulamit, 2010). A essas tensões podem, ainda, juntar-se outras, como a decisão sobre quem deve falar, quando e porquê (NCTM, 2007). Os professores podem apoiar-se no modelo das *cinco práticas* de Stein et al. (2008) para prepararem as discussões coletivas.

Para analisar essas tensões, Speer e Wagner (2009) sugerem o recurso ao *scaffolding* social e analítico. O primeiro diz respeito ao apoio a normas de discurso e participação dos alunos e o segundo ao apoio ao avanço da discussão em direção aos objetivos matemáticos, selecionando criteriosamente as contribuições dos alunos. O sucesso do *scaffolding* analítico depende do reconhecimento pelo professor: i) dos raciocínios dos alunos (corretos ou não); e ii) das ideias que contribuem para atingir os objetivos e o desenvolvimento da compreensão matemática. Segundo Nathan e Knuth (2003), quando os professores se afastam do *scaffolding* analítico para fomentar uma maior participação dos alunos, valorizando o *scaffolding* social, isso promove nas discussões falta de rigor na argumentação. Como forma de vencer essas tensões, Leikin e Dinur (2007) propõem que o professor seja flexível na sua atuação na aula, sendo essa flexibilidade influenciada por três fatores relacionados com o seu conhecimento matemático: *diversidade* (atua de forma flexível se considera que determinada ideia pode levar os alunos a ampliar o seu pensamento e de forma inflexível se entende que essa ideia pode confundir os alunos), *reciprocidade* (aprende com os alunos na discussão, em consequência da partilha de diferentes estratégias) e *intencionalidade* (leva ou não para a discussão determinadas ideias).

Metodologia

O estudo segue uma abordagem interpretativa e qualitativa (Bodgan & Biklen, 1994), já que procura descrever e compreender como três professores de Matemática do EB dinamizam a discussão coletiva relativa a tarefas algébricas, focando os desafios que enfrentam. O *design* é de estudo de caso, ao pretender compreender as suas práticas de discussão (Ponte, 2006).

O estudo decorre no contexto de um trabalho colaborativo com três professores de Matemática que integram o *Projeto Práticas de discussão matemática no ensino da Álgebra* (PPDMEA), assumido como uma estratégia poderosa de desenvolvimento profissional, quando se pretende concretizar mudanças na prática de ensino (Hargreaves, 1998). Para isso, a investigadora dinamizou o PPDMEA organizado em dez sessões conjuntas (SC), com a duração de três horas, a fim de criar dinâmicas de trabalho colaborativo e desenvolver a prática de discussão matemática. Os participantes do estudo são os professores Ana, Afonso e Jorge (nomes fictícios) a lecionar os 7.º e 8.º anos de escolaridade e com percursos profissionais distintos (Quadro 1):

Quadro 1 – Caracterização dos participantes

Professora Ana	**Professor Afonso**	**Professor Jorge**
22 anos de serviço Participa em Encontros de Professores de Matemática; projetos de investigação e curriculares Com o seu envolvimento neste estudo procura novas respostas para o que considera ser o formalismo da linguagem que caracteriza o trabalho em Álgebra Leciona ao 7.º ano	25 anos de serviço Não participa em Encontros de Professores nem em projetos de investigação Decide participar no projeto, porque identifica potencial no temas em estudo, principalmente, a Álgebra enquanto tema que levanta grandes dificuldades aos alunos, fundamentalmente, na simbologia Leciona aos 7 e 8.º anos	30 anos de serviço Formador na especialidade do uso de tecnologias na sala de aula Participa em Encontros de Professores de Matemática; projetos de investigação e curriculares Reconhece potencialidades neste projeto, em particular, porque lhe permite aprofundar um tema matemático tão importante como a Álgebra e que levanta dificuldades aos alunos, nomeadamente, a simbolização e a generalização Leciona ao 8.º ano

A recolha de dados é feita através de: observação participante (OP) de aulas (identificadas por Aula_tema_data) e das sessões conjuntas (identificadas por n.º SC_data) do grupo colaborativo (GC); entrevista inicial (EI) semiestruturada e análise documental dos trabalhos dos alunos. A OP permitiu obter dados da prática dos professores na sua atuação em sala de aula e da sua participação nas sessões de trabalho no GC. A EI possibilitou recolher dados sobre aspetos profissionais, através da voz dos professores. A EI e as sessões do GC foram gravadas em áudio e as aulas em vídeo. A investigadora (primeira autora) assume o papel de observadora participante enquanto elemento ativo do GC e apoiando, pontualmente, os professores na aula e os alunos no seu trabalho individual. Os trabalhos dos alunos completam os dados fornecidos pelos outros instrumentos de recolha.

A análise de dados tem por base a análise de conteúdo e a definição de categorias de codificação. Os dados foram analisados, à luz dos modelos teóricos revistos, com vista à identificação de regularidades que levaram à formulação de categorias (Bodgan & Biklen, 1994). Seguidamente, fez-se uma primeira tentativa de organizar os dados recolhidos nessas categorias para verificar a sua viabilidade e proceder a ajustamentos, que culminaram no abandono de algumas categorias e na definição de outras, até se alcançar as fixadas no Quadro 2, resultantes de um processo de articulação recursivo de categorias *a priori* e *a posteriori* como concretizações de temas estabelecidos para a dimensão: Dinamização da discussão coletiva.

Quadro 2 – Dimensões, Temas e Categorias de análise

	Dimensão	Temas	Categorias de análise
Desafios *Scaffolding* social e analítico; Diversidade e intencionalidade	**Dinamização da discussão coletiva**	Componentes da discussão, discurso	Apresentação; comparação, avaliação e filtragem; conclusão Solicitação e discussão de muitas ideias; filtragem; solicitação e discussão de muitas ideias; conteúdo matemático filtrado; conteúdo matemático não filtrado

No tema componentes da discussão, fez-se um reajustamento do modelo de Sherin (2002) agrupando as duas últimas componentes numa só e incluindo uma terceira designada, neste estudo, de conclusão, por se olhar para a discussão no seu todo e não como um conjunto de vários segmentos e porque a análise preliminar dos dados indicou ser um modelo que se ajustava bem à prática dos professores. Recorre-se aos modelos de Speer e Wagner (2009) e Leikin e Dinur (2007), para analisar os desafios que os professores enfrentam na orquestração da discussão.

Na apresentação de resultados, quando existem várias evidências para uma mesma categoria de análise, mostra-se a título de exemplo dados da aula de um professor, para algumas tarefas usadas nas discussões promovidas, que seguem em Anexo 1 e são brevemente descritas no Quadro 3.

Quadro 3 – Breve descrição das tarefas usadas nas discussões

Tema	Tarefas
Sequências e Regularidades	***Palitos*** Esta tarefa apresenta uma sequência pictórica de vários retângulos construídos com palitos. Os alunos são convidados a determinarem termos próximos e distantes da sequência de figuras apresentada; a verificarem se um determinado elemento é ou não termo da sequência dada; a escreverem uma expressão para o termo geral da sequência apresentada; e a analisarem e explicarem uma expressão dada para o termo geral da sequência. ***Cubos com autocolantes*** Esta tarefa surge num contexto de um jogo com cubos e autocolantes. Os alunos são chamados a determinarem termos próximos e distantes da sequência dada e a escreverem e explicarem uma expressão para o termo geral da sequência de figuras apresentada.
Funções	***Inscrição no ginásio*** A tarefa surge num contexto próximo dos alunos, onde são convidados a preencher uma tabela que relaciona o número de meses de frequência de dois ginásios com o valor total gasto; a elaborar um gráfico que relacione essa informação; a conjeturar sobre o ginásio mais vantajoso; e a traduzir por uma expressão a relação entre as duas variáveis.
Equações	***A cantina da escola*** Esta tarefa apresenta um conjunto de informação em linguagem natural relacionada com o número de almoços servidos pela cantina de uma escola. Pretende-se que os alunos resolvam problemas envolvendo equações. ***A Família Rosa*** Com esta tarefa pretende-se que os alunos resolvam problemas com equações. Esta tarefa surge num contexto de um desafio, a partir do qual os alunos conseguem determinar a idade de cada um dos filhos de uma senhora conhecendo pequenas pistas, como a soma das idades dos quatro filhos e algumas relações entre as suas idades. ***Eleição do delegado de turma*** Com o trabalho nesta tarefa, os alunos resolvem problemas envolvendo equações com denominadores. A tarefa aparece num contexto de eleição do delegado de turma, onde se conhecem informações relativas ao número de votos de três candidatos. ***Sacos e bolas*** Esta tarefa envolve os alunos na resolução de problemas envolvendo equações com denominadores. A tarefa surge num contexto em que os alunos têm que passar bolas de um saco para o outro, de forma a verificarem as condições estabelecidas.

As tarefas *Palitos*, *Cubos com autocolantes*, *Inscrição no ginásio*, *A cantina da escola* e *A família Rosa* são exploradas pelos professores Ana e Afonso e as tarefas *Eleição do delegado de turma* e *Sacos e bolas* são exploradas pelos professores Afonso e Jorge.

Apresentação e discussão de resultados

A apresentação de resultados organiza-se em duas partes: i) componentes da discussão; e ii) discurso da discussão.

Componentes da discussão. Os professores estruturam a discussão coletiva em três componentes: i) apresentação; ii) comparação, avaliação e filtragem; e iii) conclusão.

Apresentação. Os professores iniciam sempre a discussão coletiva com a escolha dos alunos que pretendem que apresentem as suas estratégias de resolução. Essa forma de atuação é assumida por Afonso como uma mudança na sua prática letiva, já que anteriormente privilegiava a participação voluntária dos alunos: “Primeiro procuro saber se há algum voluntário (...) Quando não há (...) vou sempre para aqueles que têm mais competências, ou que eu penso que são melhores alunos, pronto, abrindo sempre discussão” (EI_set 2013). Em resultado da sua participação no GC, Afonso compreende que essa forma de atuação poderia comprometer o sucesso de uma discussão, não alcançando o seu propósito: “Se há uma que tem tudo [refere-se à estratégia algébrica], então as outras não precisam [de ser apresentadas]” (4.ª SC_9 jan 2014).

A alteração da prática de Afonso para dar início à apresentação das resoluções, selecionando os alunos que pretende que partilhem a sua estratégia em oposição à sua participação voluntária, mostra uma opção ao alcance do professor que favorece a promoção da linguagem algébrica.

Em linha com o exposto, os professores iniciam a apresentação das estratégias pelas que recorrem a linguagem matemática informal – estratégias de tentativa e erro. Apoiados nesse critério, ora começam pelas estratégias mais frequentes, ora pelas que surgem de forma isolada. Ana, nas tarefas *Palitos* e *Inscrição no ginásio* inicia pela mais frequente, assim como Jorge na tarefa *Sacos e bolas*, à semelhança de uma outra tarefa:

> **Ana:** Depois na segunda questão houve cinco grupos que fizeram uma continha, porque vocês, a maior parte de vocês tinha dito que já tinha pensado nas operações inversas quando estavam no 5.º ou 6.º ano. Por exemplo, tenho só aqui dois grupos que não fizeram, que fizeram de outra maneira. (Aula_Sequências_nov 2013) (A_S_nov 2013)

Já nas tarefas relacionadas com o tópico das equações, Ana começa pelas resoluções singulares, embora recorrendo também à estratégia de tentativa e erro. Os raciocínios que os alunos mobilizam neste tipo de estratégia são distintos. Na tarefa *A família Rosa*, as tentativas dos alunos consistem em experimentações de números aleatórios, iniciando por um número redondo, 10:

> **Rui:** Então, fui outra vez por tentativas. (...) E experimentei primeiro com o 10 e não deu, tentei baixar mais um bocadinho, fui para o 8, voltou a não dar, fui para o 7 e já deu.
>
> **Ana:** Então, e o 10? Por que é que começaste com o 10?
>
> **Rui:** (...) Foi pura tentativa. (Aula_Equações_abr 2014) (A_E_abr 2014)

Na tarefa *A cantina da escola*, na turma de Ana, o número que os alunos escolhem para iniciar as suas tentativas resulta da manipulação das condições do enunciado e consiste na divisão equitativa do número de almoços sobrantes pelos quatro dias da semana:

> **Rui:** Na semana toda foram servidos 666 almoços e nós tirámos logo 156 que foi o da sexta, que deu 510. Depois dividimos 510 por 4.
>
> **Ana:** Porquê? Explica lá. (...)

Rui: Começámos com 128 na segunda. (A_E_abr 2014)

Afonso também começa a apresentação das resoluções para a tarefa *Eleição do delegado de turma* por uma singular, estando as tentativas organizadas em tabela e consistindo na experimentação arbitrária de um número redondo, 10. No caso de Jorge, as tentativas que os alunos fazem surgem organizadas num texto:

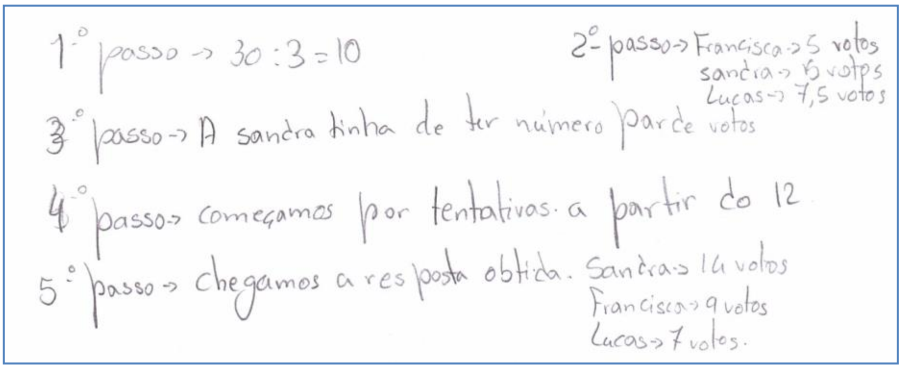


Figura 1 – Resolução baseada na produção de um texto matemático

Os alunos iniciam as suas tentativas por um número redondo (10), mas que corresponde à divisão equitativa do número de votos pelos concorrentes e não à experimentação aleatória, como noutras estratégias escolhidas para dar início à discussão.

Na tarefa *Palitos*, Afonso também inicia por uma estratégia singular e que recorre à tentativa e erro:

Afonso: Como é que justificaram se era possível construir uma figura com 76 palitos? (...)

Aluno: Fiz a contagem, se adicionarmos sempre 3 ao termo anterior acabamos por ver que dá 76. (A_S_dez 2013)

Só de seguida avança para a estratégia mais frequente:

Ricardo: 76 palitos. Fiz 76 menos 1 que vai dar 75 e depois dividi por 3.

Afonso: Fizeste a inversa, não foi? (A_S_dez 2013)

Seguindo um critério diferente para escolha das estratégias que dão início à apresentação, Afonso, na tarefa *A cantina da escola*, começa pelas estratégias algébricas, porque não surgiram outras nas resoluções dos alunos, em virtude do momento em que introduz a tarefa – a concluir a temática da resolução de problemas envolvendo equações. Contudo, em linha com outras discussões, seleciona a estratégia mais frequente para fomentar a apresentação das resoluções dos alunos: "Portanto, quem vai apresentar é quem considerou x na segunda-feira" (A_E_mai 2014).

Um olhar sobre a prática de Ana e Jorge denota que o primeiro critério tem em conta a promoção da linguagem algébrica e o segundo baseia-se no que consideram potenciar o envolvimento dos alunos na discussão, selecionando para apresentação as estratégias seguidas por um maior número de alunos. Acreditam, assim, que terão os alunos envolvidos na discussão, acrescentando contributos importantes e participando ativamente nas explicações, justificações e argumentações oferecidas, já que desenvolveram o mesmo tipo de raciocínio. Já Afonso também apoia a sua prática na promoção da linguagem algébrica, iniciando pelas estratégias de tentativa e erro, contudo, na tarefa *Palitos*, fá-lo da estratégia singular para a mais frequente, face aos raciocínios dos alunos mobilizados nas resoluções. Na estratégia mais frequente, os alunos recorrem às operações inversas para verificar a pertença de um termo a uma sequência, em oposição à determinação de todos os termos da sequência até chegar ao pretendido, como apresentava a estratégia singular.

Comparação, avaliação e filtragem: Os professores dão continuidade à apresentação de estratégias introduzindo outras para análise, com propósitos claros e carregados de intencionalidade matemática e não pela simples razão de que todas as estratégias de resolução devem ser apresentadas em coletivo, apoiando normas de discurso (articulação entre o *scaffolding* social e o analítico). É característica da prática de Ana justificar aos alunos as opções que toma no decorrer da discussão, como mencionar as razões que a levam a introduzir mais uma resolução para análise:

> **Ana:** Esta é a resolução aqui deste grupo da frente e eu fiquei muito confusa. (...) Então, 15 é igual a 46? 20 é igual a 61? E 25 é igual a 76? (...) é só para vos dizer que isto ficou assim escrito, não puseram mais nada. (...) Então os meninos deste grupo têm agora oportunidade para se defenderem. (A_S_nov 2013)

Com esta ação, a professora alerta os alunos para a importância de apresentarem com rigor os seus raciocínios. Na tarefa *A cantina da escola*, a sua intervenção serve para clarificar os alunos da possibilidade de traduzirem a mesma informação apresentada em linguagem verbal em linguagem matemática de diversas formas: “Pronto, então agora se calhar ia-vos só apresentar a primeira parte, depois a resolução é idêntica à deste grupo. (...) Só para vocês verem que pode ter outra leitura do problema, está bem?” (A_E_abr 2014).

Na tarefa *Cubos com autocolantes*, o propósito da professora é despertar a curiosidade dos alunos para analisarem duas expressões distintas para o termo geral de uma mesma sequência pictórica, destacando que uma delas é mais frequente na turma: “Eu queria aqui falar em dois casos, porque há aqui dois casos que têm regras diferentes (...). Na segunda questão, qual é a regra que a maior parte de vocês faz?” (A_S_nov 2013).

Os objetivos matemáticos que os professores procuram atingir com a introdução de novas estratégias de resolução para comparação e avaliação são diversos. Ana promove a comparação de estratégias na tarefa *Palitos*, a partir da filtragem, isto é, aproveita uma ideia que estava a ser valorizada na apresentação das estratégias (verificação da pertença de um termo à sequência a partir da escrita da expressão do termo geral) para os levar a concluir que não é necessário conhecer o termo geral de uma sequência para verificar se um termo pertence ou não a essa sequência, embora sendo uma ideia menos potente do ponto de vista do uso da linguagem algébrica:

Constança: Nós já sabíamos que a lei de formação era $3n + 1$ e então fizemos a operação inversa, fizemos $76 - 1$ a dividir por 3.

Ana: Porque já tinham a lei de formação. (...) Então e quem não tem a lei de formação como é que resolveria? Não resolve? (...)

Aluno: Fizemos por tentativas. (A_S_nov 2013)

A professora, ao interromper a explicação da aluna para seguir uma ideia que lhe parece importante, mostra o quanto é importante saber o que agarrar e deixar cair numa discussão, como foi o caso desta em que não deixa a aluna concluir a sua intervenção (faltava a explicação da verificação da resposta), para seguir uma ideia que reconheceu ser importante, revelando, assim, flexibilidade na sua atuação – diversidade e intencionalidade. Este episódio permite refletir sobre a imprevisibilidade de uma discussão e os desafios que o professor enfrenta na sua condução.

Jorge recorre à transição entre linguagens matemáticas diferentes (não algébrica para algébrica), na tarefa *Sacos e bolas*, para incitar a comparação, através da atribuição da incógnita a designações distintas, assim como Afonso na tarefa *Eleição do delegado de turma*:

Afonso: [Primeiro tinha sido apresentada a resolução apoiada numa tabela] Então e depois como é que surgiu a outra parte? (...) Talvez, este grupo que fez uma maneira um bocadinho diferente, não foi? (...)

Aluna: Nós escolhemos a Sandra, em que x era o número de votos da Sandra.

Afonso: x. A vossa colega anterior considerou o x como sendo o número de votos da Francisca, este grupo considerou o x o número de votos da Sandra, portanto o resultado vai ter que dar diferente, certo? (A_E_jan 2014)

Nesta tarefa, Jorge recorre à análise de um passo errado numa resolução que está a ser apresentada para estimular a comparação, com a finalidade de levar os alunos a compreenderem a importância do rigor da linguagem matemática:

Jorge: Por que é que aquele segundo passo está mal?

Mafalda: Então porque não há meios votos.

Jorge: A conclusão está correta, mas esse segundo passo não está muito correto, o segundo passo em si. (...)

Aluno: Não podemos ter 7 votos e meio. (...)

Aluno: Não, é porque 5 mais 15 mais 7 e meio dá 27 e meio e não vai dar 30. (...)

Mafalda: 5 votos de diferença. (...)

Jorge: Deixa ficar o 7 e meio, não há problema nenhum. Assim, já está mais de acordo, apesar de que não são 30 votos. Pronto, mas o que o grupo pensou foi o seguinte: bem, pelo menos eu já sei que a Sandra nunca pode ter um número ímpar de votos, portanto e já restringiu nos 30 votos, deitou logo ali uma série de votos fora, tornou mais fácil a conclusão e depois fizeram por tentativas, não foi? (A_E_jan 2014)

A análise e discussão de erros é um aspeto que Jorge valoriza bastante numa discussão e que o distingue dos outros casos deste estudo. A oportunidade que reconhece na partilha destas situações é possível graças à sua preparação da discussão, em particular da seleção e sequenciação das resoluções dos alunos, aprendizagem alcançada com a sua participação no GC. Na sua prática letiva anterior, a discussão decorria em função das respostas dos alunos. Embora o primeiro aluno apresente um argumento válido para justificar o erro cometido, no passo em análise, o professor continua a insistir no erro, de forma a levar os alunos a introduzirem mais justificações, até alcançar a que considera mais importante e que relaciona informação do enunciado. O professor revela uma atuação flexível, na medida em que tem ideias claras do que pretende seguir e aprofundar com o raciocínio em análise – diversidade e intencionalidade.

Na tarefa *A família Rosa*, a comparação que Ana promove tem como objetivo alertar os alunos para a importância de apresentarem a resposta ao problema e não apenas a solução da equação resolvida:

> **Ana:** Pronto, está a explicar a resolução da equação, não é? Pronto, e então quando chegaste ao fim obtiveste.
>
> **Paulo:** 2.
>
> **Ana:** 2, mas não resolveste o nosso problema. Pois não?
>
> **Paulo:** Não, saltei a última parte.
>
> **Ana:** Pois foi. Conclusão, chegámos ao fim: F é 2, batemos palmas e não chegou. (...) É só para dizer: o Augusto teve o cuidado de pôr ali. Vocês tiveram o cuidado de pôr isso no vosso papel? (A_E_abr 2014)

Ana, na tarefa *Cubos com autocolantes*, usa a comparação para analisar com os alunos a emergência de duas expressões distintas para o termo geral da sequência:

> **Mara:** Então. Na figura com 10 cubos os 2 do canto tem sempre 5 autocolantes e os 10 menos 2 dá 8. Como os cubos do meio tem 4 autocolantes faço 4 vezes 8 igual a 32 mais 10, 42. (...)
>
> **Vera:** Como é sempre de 4 em 4, acrescentam-se sempre 4 autocolantes, depois por exemplo o número, no segundo caso 4 vezes 2, 4 vezes que é o segundo termo. (...) Dá 8. Para chegar a 10, mais 2. (A_S_nov 2013)

A professora usa, também, a comparação, na tarefa *Inscrição no ginásio*, para prevenir para o uso da linguagem matemática com rigor e para levar os alunos a compreender raciocínios que podem e não podem desenvolver numa certa resolução, isto é, podem recorrer à ideia de dobro numa situação envolvendo uma relação de proporcionalidade direta, mas não o podem fazer em casos em que relação entre as variáveis não é desse tipo. Analisa, ainda, com os alunos o raciocínio que poderiam desenvolver de forma a usar a ideia de dobro numa função afim, promovendo, assim, a avaliação de ideias:

> **Tomás:** Nós até aos 4 meses fizemos tal e qual como a Íris disse, nos *100 calorias* aos 8 meses também. No *Em forma* dos 4 meses para os 8, como a mensalidade era gratuita fizemos vezes 2. Pronto. (...)

> **Ana:** Então e porque é que eu não posso, e agora se calhar o grupo ali da frente. O Tomás está aqui a dizer que para passar dos 4 meses para os 8 pode duplicar no ginásio *Em forma* mas não pode fazer o dobro no *100 calorias*, mas tenho ideia que o grupo ali da frente duplicou. (...)
>
> **Vicente:** Mas depois subtraímos os 50.
>
> **Ana:** Será que pensou bem? (...) Ele diz que pode chegar aos 4 duplicar e tirar os 50.
>
> **Tomás:** Pode. (Aula_Funções_mar 2014) (A_F_mar 2014)

Ana leva, também, os alunos a avaliar os raciocínios em jogo através do questionamento que dirige aos que estão a acompanhar a explicação que está a decorrer no quadro. A avaliação surge, também, através de reações dos alunos face a interpretações que a professora oferece para raciocínios apresentados, como foi o caso da tarefa *A cantina da escola*, onde menciona que as equações escritas para o problema são idênticas e onde leva os alunos a relacionar o conjunto solução de equações diferentes com a unicidade da resposta ao problema:

> **Ana:** Hã? Idêntica, mas diferente. Reparem, o que é que está diferente? Tem um denominador e tem parêntesis, que a outra não tinha. (...) Então, o que é que tu achas, de acordo com o resultado que ali está, o que é que vai ter que dar o nosso x?
>
> **Guilherme:** 180.
>
> **Ana:** Pronto. Foi isso que aconteceu. (A_E_abr 2014)

Conclusão. Os professores usam o fecho da discussão para focarem, relacionarem ou generalizarem ideias importantes discutidas ao longo da apresentação e comparação das diversas estratégias. Na tarefa *Inscrição no ginásio*, Ana leva os alunos a relacionarem a expressão da função linear e afim com o respetivo nome:

> **Ana:** Que tipo de função?
>
> **Alunos:** Linear.
>
> **Ana:** Linear. (...) Qual é a constante? (...) Então e aquela daquele lado? Também é linear?
>
> **Vários:** Não.
>
> **Íris:** Tem ali o mais 50.
>
> **Ana:** Então e como se chamavam aquelas?
>
> **Alunos:** Afim. (A_F_mar 2014)

Afonso aproveita, também, esta tarefa para relacionar representações, nomeadamente, a gráfica e a algébrica e para atribuir significado aos parâmetros envolvidos em cada uma das expressões:

> **Afonso:** Qual das retas é que lhe corresponde? À preta ou à vermelha?
>
> **Alunos:** À preta.
>
> **Afonso:** Então na preta podes pôr y igual a...

Aluno: kx. (...)

Afonso: Quanto é que é o k?

Aluno: Ah! 45.

Afonso: 45. $45x$. E a vermelha?

Aluno: $y = 40x + 50$.

Afonso: Isso. (...) Por que é que começa no 50?

Aluno: Porque é o valor da inscrição. (A_F_mar 2014)

Na tarefa *Cubos com autocolantes*, Ana usa a conclusão para generalizar e explicar uma relação encontrada para os diversos termos da sequência:

Ana: Vamos tentar generalizar esta fórmula. E se eu quisesse para o caso geral? (...) Se tivéssemos a figura número n.

Aluno: Era 4 vezes n menos 2.

Ana: n menos 2. Muito bem, por que tiras 2?

(um aluno faz uma pergunta mas é impercetível)

Então se eu tiro 2 da ponta, quantos ficam por dentro? Ficam menos 2. E na figura 10? Então não é? Tenho 10 cubinhos seguidos. Ele tira os 2 da ponta, tira este e tira aquele e fica com 8 cubos aqui no meio. Então o que é que ele faz? Tem 4 autocolantes para 8 cubos mais 5 deste e 5 deste que dá 10. Muito bem. Está bem? É outra técnica. A maior parte dos alunos foi pela outra. (A_S_nov 2013)

Nas tarefas do tema das equações, a conclusão permite, aos três professores, focar ideias importantes como, sensibilizar os alunos para a escrita de diferentes equações para a tradução da mesma informação apresentada em linguagem natural. Jorge reforça, ainda, as alterações de procedimentos e de conceitos entre as diferentes equações escritas e relembra os passos a seguir na resolução de uma equação, na tarefa *Sacos e bolas*, alertando para a relação entre a solução da equação e a resposta ao problema:

Jorge: Esta é ligeiramente mais simples que aquela equação. Aquela tem parêntesis e denominadores. Não se esqueçam que ele primeiro ali tirou os parêntesis (...) Depois é que foi aos denominadores. (...) Portanto, dependendo do que eu chamo à variável assim eu tenho uma equação diferente. De certeza que se tudo estiver bem, a solução do problema fica exatamente igual. Ou seja, resolver um problema não tem que ser sempre da mesma maneira. A abordagem pode ser feita de maneiras diferentes, está bem? (A_E_jan 2014)

A conclusão da discussão é o aspeto mais frágil da prática de condução da discussão coletiva dos três professores estudados, em particular da prática de Afonso. É possível que os professores assumam que, com os anteriores momentos de discussão proporcionados aos alunos, os conceitos matemáticos que pretendiam discutir tenham sido alcançados, não sentido necessidade de valorizar este último momento. É, contudo, importante que os professores reflitam sobre a importância deste momento para alunos desta idade, pois a falta de sistematização das principais ideias pode levar a que elas se percam face às dificuldades que os alunos demonstram no reconhecimento do que é realmente importante de tudo o que foi apresentado e analisado.

Discurso da discussão. Na discussão, o discurso segue um processo de estreitamento seguido de ampliação, e assim sucessivamente, em consonância com as componentes da discussão. Os professores começam por solicitar a um grupo de alunos para apresentar a sua estratégia de resolução – *solicitação e discussão de muitas ideias* – correspondendo ao momento de apresentação das estratégias de resolução. Seguidamente, focam a atenção dos alunos em alguma característica particular – *filtragem* – de modo a promoverem a comparação, avaliação e filtragem. A análise desses raciocínios específicos pretende levar à introdução de mais ideias na discussão, através da inclusão de mais estratégias para comparação, originando, em termos de discurso, uma nova *solicitação e discussão de mais ideias*. Esse encadeamento continua até à conclusão da discussão. Olhando, também, para o conteúdo do discurso, a prática dos professores denota que, numa primeira fase, a sua preocupação reside, essencialmente, no início da discussão, tendo uma resolução para analisar – *conteúdo matemático não filtrado*. Face a essa estratégia, a sua preocupação evolui para a análise de raciocínios especiais – *conteúdo matemático filtrado* – como um erro, uma explicação que precisa ser melhorada, uma ideia que necessita ser desconstruída... Com este tipo de atuação, os professores revelam flexibilidade, ao decidirem levar para a discussão essas ideias – intencionalidade e diversidade. O afunilamento que fazem aos raciocínios dos alunos é para alcançar o propósito que definem para a discussão e para o estabelecimento de conclusões importantes. Os professores apoiam normas de discurso que articulam *scaffolding* social e analítico, já que evidenciam mudança de preocupação para o conteúdo das ideias matemáticas quando já conseguem ter os alunos a participar no discurso.

Conclusão

Os professores do estudo dinamizam a discussão coletiva segundo três componentes principais: i) apresentação; ii) comparação, avaliação e filtragem; e iii) conclusão, à semelhança do proposto por Sherin (2002). Dão início à discussão com práticas muito semelhantes, com a escolha de um aluno para apresentar a sua resolução, privilegiando, para começar, as resoluções que envolvem linguagem informal e foram realizadas por muitos alunos. Evoluem, imediatamente, para o convite aos alunos que seguiram outras estratégias envolvendo linguagem mais formal, garantido assim a promoção da linguagem algébrica. Deixam para último a apresentação das estratégias singulares, com recurso a linguagem algébrica. A forma como transitam da apresentação para a comparação, promovendo o discurso entre os alunos, é distinta nos três casos: Ana leva os alunos a analisar uma estratégia menos frequente, ou resoluções que recorram a representações diferentes; Afonso desafia os alunos a comparar designações diferentes para a incógnita e Jorge encaminha os alunos para a análise de um erro ou para a explicação de uma estratégia. Com estas opções, Ana leva os alunos a: analisar duas expressões distintas para o termo geral de uma sequência; compreender raciocínios que podem ou não desenvolver para as funções lineares e afins; relacionar a solução de uma equação com a resposta ao problema, destacando a importância da apresentação da resposta. Jorge e Afonso promovem a conexão entre linguagens. Adicionalmente, Ana contribui com a sua atuação para desconstruir erros e Jorge para levar os alunos a analisar um passo errado de uma resolução. Jorge, em oposição ao professor *Gage*, do estudo de Speer e Wagner (2009), reconhece potencial nos erros dos alunos para aprofundar ideias matemáticas, não se limitando a responder às incorreções.

O discurso promovido pelos professores sofre um afunilamento desde o momento de apresentação das estratégias até à conclusão, onde as ideias são por eles sistematizadas em colaboração com os alunos. Os professores sensibilizam os alunos para a escrita de diferentes equações para a mesma informação em linguagem natural. Jorge recorda, ainda, aos alunos, no tema das equações, os passos a seguir na respetiva resolução. Já Ana leva os alunos a generalizar e explicar relações matemáticas e a relacionar a expressão das funções afim e linear com a sua representação gráfica e com a sua designação, à semelhança de Afonso.

Enquanto no estudo de Leikin e Dinur (2007), a flexibilidade de *Anat* favoreceu a introdução de uma solução nova para o problema, nestas discussões os professores revelam flexibilidade de atuação na promoção do discurso em sala de aula, em particular na justificação da introdução de determinadas resoluções para análise e na interrupção de explicações dos alunos para seguir certas ideias.

Referências

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

DGE (2018). *Aprendizagens essenciais: Ensino básico*. Consultado em 5 de setembro de 2018 através: http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico

Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempos de mudança: o trabalho e a cultura dos professores na idade pós-moderna.* Lisboa: McGraw-Hill.

Leikin, R., & Dinur, S. (2007). Teacher flexibility in mathematical discussion. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 328-347.

Nathan, M.J., & Knuth, E. J. (2003). A Study of whole classroom mathematical discourse and teacher change. *Cognition and Instruction*, *21*(2), 175–207.

NCTM (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ponte, J.P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Educación matemática: teoría, crítica y prática* (pp. 83-98). Barcelona: Graó.

Ponte, J.P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105-132.

Sherin, M.G. (2002). A balancing act: developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5,* 205-233.

Speer, N.M., & Wagner, J.F. (2009). Knowledge needed by a teacher to provide analytic scaffolding during undergraduate mathematics classroom discussions. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(5), 530-562.

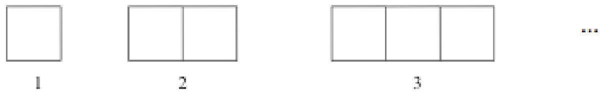
Stein, M.K., Engle, R.A., Smith, M.S., & Hughes, E.K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313-340.

Yerushalmy, M., & Shulamit, E. (2010). Examples of learning through teaching: Mathematical pedagogy. In R. Leikin, & R. Zazkis (Eds.), *Learning through teaching mathematics* (pp. 191-207). New York, NY: Springer.

ANEXO 1

Tarefa: Palitos

Considera a seguinte sequência de figuras construídas com palitos que continua da forma que a imagem sugere:



1. Quantos palitos terá a 5.ª figura? E a 15.ª?

2. Será possível construir uma figura desta sequência com 76 palitos? Explica como pensaste.

3. Escreve uma regra que te permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explica como a obtiveste.

4. A Aurora, que também resolveu esta tarefa, diz que o número de palitos de qualquer figura, T, desta sequência pode ser obtido a partir da seguinte regra:

$$\boldsymbol{T = 4 \times n - (n - 1)}$$

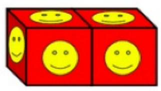
Explica como poderá ter pensado.

Como se relaciona esta regra com a que escreveste na questão número 3?

Tarefa: Cubos com autocolantes

A Joana está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um autocolante em cada uma das faces.

A imagem mostra a construção que a Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 autocolantes.



1. Descobre quantos autocolantes a Joana usa numa construção com: três cubos; quatro cubos; dez cubos; cinquenta e dois cubos.

2. Consegues descobrir qual é a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos? Explica como pensaste.

TAREFA: Inscrição no ginásio

O Santiago pretende inscrever-se num dos dois ginásios ***100 calorias*** ou ***Em forma*** que existem na sua cidade. Os preços praticados são os seguintes:

100 Calorias
Inscrição: 50 €
Mensalidade: 40 €

Em Forma
Inscrição: Gratuita
Mensalidade: 45 €

1. Completa a tabela, tendo em conta o número de meses e os dois tipos de preços referentes a cada ginásio.

	meses	**1**	**3**		**8**		**11**	**12**
Total (em euros)	***100 calorias***			210				
	Em forma					450		

2. Representa, no mesmo referencial, os gráficos correspondentes à evolução do preço a pagar em cada um dos ginásios, nos primeiros 6 meses.

3. Durante quanto tempo será vantajosa a inscrição no ginásio *Em forma*? Justifica.

4. Escreve uma expressão analítica que te dê o preço a pagar em cada um dos ginásios, de acordo com o tempo de frequência.

TAREFA: A cantina da escola

No final de cada semana, e de forma a preparar a próxima, a responsável pela cantina dá indicação aos serviços da *Escola Azul* do número de alunos que almoçaram na cantina, durante essa semana. Na informação enviada aos serviços pode ler-se:

Na terça-feira a cantina serviu mais 100 almoços do que na segunda, na quarta-feira metade dos almoços servidos na terça, na quinta-feira o dobro dos almoços servidos na segunda e na sexta serviu 156 almoços.

Quantos almoços serviu a cantina da escola em cada um dos dias, durante essa semana? Explica como pensaste.

TAREFA: Família Rosa	

A D. Miquelina Rosa tem 4 filhos, dois rapazes e duas raparigas. No dia em que festejou o seu 47.º aniversário, apercebeu-se que a soma das idades dos seus 4 filhos era igual à sua. A Maria tem 5 anos de diferença da irmã mais nova, a Sara. Um dos irmãos da Maria, o João, tem o triplo da sua idade e o outro, o Manuel, tem mais 10 anos do que a Maria. Qual é a idade de cada um dos filhos da família Rosa? Explica como pensaste.

Tarefa 1 – "Eleição para o delegado de turma"

A diretora de turma que coordenou o processo de eleição do delegado de turma, informou no final que:

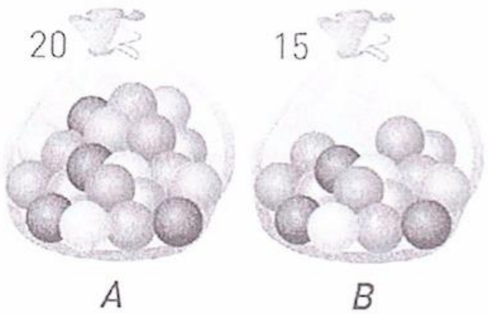
- ✓ Os 30 alunos da turma votaram e não houve votos brancos ou nulos;
- ✓ Apenas três alunos receberam votos: a Francisca, o Lucas e a Sandra;
- ✓ A Sandra recebeu mais cinco votos que a Francisca;
- ✓ O Lucas recebeu metade dos votos que recebeu a Sandra.

Quem ganhou as eleições? Com quantos votos?

Não te esqueças de apresentar e explicar o teu processo de resolução.

Tarefa 2 – "Sacos e bolas"

Na figura estão representados dois sacos com bolas. O saco A tem 20 bolas e o saco B tem 15 bolas.



Determina o número de bolas que devem passar do saco A para o saco B para que este fique com $\frac{3}{2}$ do número de bolas que ficam no saco A.

Não te esqueças de apresentar e explicar o teu processo de resolução.