

Controlo de Robots Redundantes

FERNANDO DUARTE

Departamento de Matemática,
Escola Superior de Tecnologia de Viseu

1. Introdução

Um *robot* redundante é um sistema que pode apresentar várias (ou, até, uma infinidade de) configurações para uma determinada posição do órgão terminal no espaço cartesiano.

Assim, sob o ponto de vista cinemático, estes mecanismos introduzem uma grande versatilidade pois permitem a resolução de tarefas minimizando esforços, evitando eventuais obstáculos e eliminando singularidades indesejáveis.

Embora estes *robots* apresentem as vantagens referidas, a utilização destes mecanismos ainda é pouco frequente. De facto, o controlo destes sistemas envolve modelos matemáticos sofisticados, aumentando a sua complexidade com o número de graus de liberdade.

2. Cinemática de um *Robot Planar*:

2.1. Cinemática directa do *robot 2R (não redundante)*

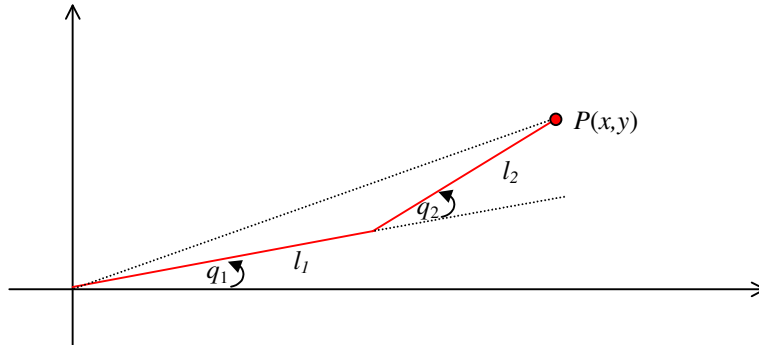


Figura 1: Estrutura de um *robot* planar 2R

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (1)$$

2.2. Cinemática inversa do *robot 2R (não redundante)*

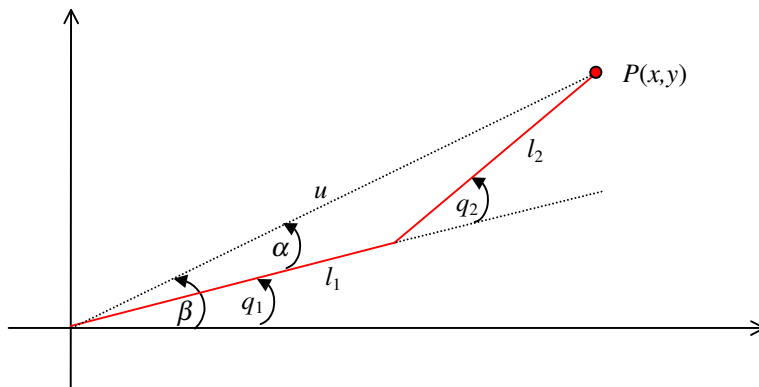


Figura 2: Estrutura de um *robot* planar 2R

$$u^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos(\pi - q_2); \quad u^2 = x^2 + y^2 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos(q_2) \quad (3)$$

$$\cos(q_2) = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}$$

$$\sin(q_2) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(q_2)} \quad q_2 = \arctg\left(\frac{\sin(q_2)}{\cos(q_2)}\right) \quad (4)$$

$$q_1 = \hat{\alpha} - \hat{\alpha}; \quad \text{tg}(\alpha) = \frac{l_2 \sin(q_2)}{l_1 + l_2 \cos(q_2)}; \quad \text{tg}(\beta) = \frac{y}{x} \quad (5)$$

$$\text{tg}(q_1) = \text{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\text{tg}(\beta) - \text{tg}(\alpha)}{1 + \text{tg}(\beta)\text{tg}(\alpha)} = \frac{\frac{y}{x} - \frac{l_2 \sin(q_2)}{l_1 + l_2 \cos(q_2)}}{1 + \frac{y}{x} \frac{l_2 \sin(q_2)}{l_1 + l_2 \cos(q_2)}} \quad (6)$$

$$q_1 = \arctg\left(\frac{y(l_1 + l_2 \cos(q_2)) - x(l_2 \sin(q_2))}{x(l_1 + l_2 \cos(q_2)) + y(l_2 \sin(q_2))}\right) \quad (7)$$

2.3. Cinemática directa do robot kR ($k > 2$, redundante)

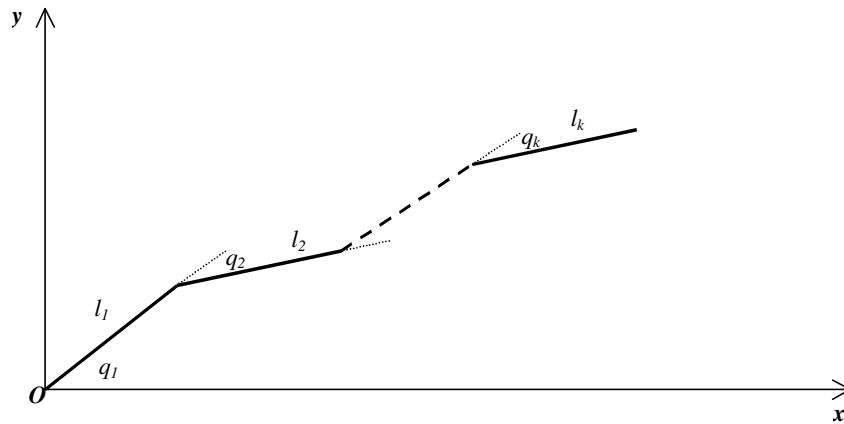


Figura 3: Estrutura de um *robot* planar redundante *kR*

Estes *robots* são considerados redundantes (Fig 3) já que têm mais do que duas juntas ($n > 2$) e pretende-se que executem trajectórias no espaço cartesiano ($m = 2$).

Para este tipo de *robot* kR ($k \in N$) a cinemática directa é dada pelas relações:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 C_1 + l_2 C_{12} + l_3 C_{123} + \Lambda + l_k C_{12\dots k} \\ l_1 S_1 + l_2 S_{12} + l_3 S_{123} + \Lambda + l_k S_{12\dots k} \end{bmatrix} \quad (8)$$

l_i é o comprimento do braço i , $S_{i\Lambda k} = \text{Sin}(q_1 + \Lambda + q_k)$ e $C_{i\Lambda k} = \text{Cos}(q_1 + \Lambda + q_k)$.

O modelo cinemático para um *robot*, deste tipo, pode ser descrito pela seguinte relação:

$$x = f(q) \quad (9)$$

onde q é um vector ($n \times 1$) das posições nas juntas, x é o vector ($m \times 1$) das posições do órgão terminal no espaço cartesiano e f é a função vectorial que descreve a estrutura cinemática do *robot*.

2.4. Cinemática inversa do *robot* kR ($k > 2$, redundante)

Para uma determinada posição do órgão terminal no espaço operacional $x(t)$, a cinemática inversa do *robot* tem como objectivo a determinação de um conjunto de valores de variáveis nas juntas $q(t)$ tal que a relação $f(q(t)) = x(t)$ seja verificada. A resolução da cinemática inversa de posição é, geralmente, uma relação algébrica não linear e não há uma solução analítica geral. Alguns autores propõem o uso de uma forma diferencial para se obter os valores das juntas a partir do movimento cartesiano do órgão terminal.

Assim quando as posições das juntas variam com o tempo, a velocidade do órgão terminal é calcula por:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} \quad (10)$$

A matriz $\frac{\partial x}{\partial q}$, é chamada a matriz Jacobiana da relação $f(q)$, é uma matriz de dimensão $(m \times n)$ ($m < n$) e é representada por $J \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, isto é,

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} - \Lambda & -l_k S_{1\Lambda k} & \Lambda & -l_k S_{1\Lambda k} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} + \Lambda & +l_k C_{1\Lambda k} & \Lambda & l_k C_{1\Lambda k} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Então o modelo cinemático inverso pode ser representado a partir de:

$$\dot{x} = J(q)\dot{q} \quad (12)$$

pela relação:

$$\dot{q} = K(q)\dot{x} \quad (13)$$

onde K é uma matriz $(n \times m)$, “inversa” de J .

Alguns autores propõem o uso da matriz pseudoinversa de *Moore-Penrose* para a matriz K , vindo a relação da forma:

$$\dot{q} = J^+(q)\dot{x} \quad (14)$$

onde J^+ é a matriz *PseudoInversa de Moore-Penrose* da matriz J .

À primeira vista esta solução é interessante, tanto mais que a matriz pseudoinversa gera um vector solução (de posição de juntas) que admite norma mínima, no sentido dos mínimos quadrados.

Um aspecto importante deste tipo de robots, consiste na possibilidade de se evitarem as singularidades cinemáticas, que ocorrem quando a matriz J , para certas soluções $q(t)$, tem característica inferior a m . Nestas situações o *robot* perde a capacidade de se mover numa determinada direcção, significando isto que a sua “manipulabilidade” foi reduzida. A medida da “manipulabilidade” de um *robot* foi definida por Yoshikawa como, $\hat{i} = \sqrt{\det(JJ^T)}$.

O índice de manipulabilidade máxima (μ_{max}) melhora à medida que o número de graus de liberdade aumenta (Fig. 4).

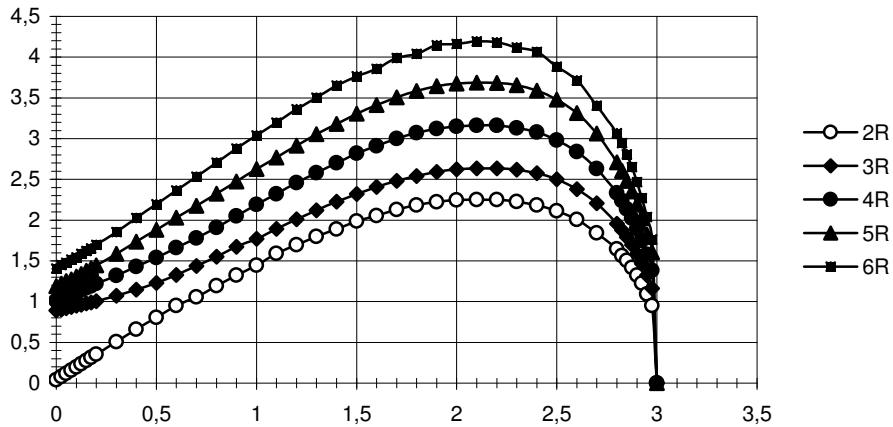


Figura 4: Índice de manipulabilidade máxima (μ_{max}) versus a distância radial

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ para os robots 2R, 3R, 4R e 5R.}$$

3. Matrizes Inversas Generalizadas

3.1. Definições

Para as matrizes $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e $X \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ a fim de definir a matriz inversa generalizada (A^-) , a matriz inversa generalizada reflexiva (A_r^-) e a matriz pseudoinversa $(A^\#)$ de A são usadas as relações:

$$AXA = A \quad (15)$$

$$XAX = X \quad (16)$$

$$(AX)^T = AX \quad (17)$$

$$(XA)^T = XA \quad (18)$$

As condições (15) a (18) são chamadas as *condições de Penrose*. Uma matriz inversa generalizada da matriz $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ é uma matriz $X = A^- \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ que satisfaz a condição (15). Por outro lado, uma matriz inversa generalizada reflexiva da matriz $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ é uma matriz $X = A_r^- \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ que satisfaz as condições (15) e (16). Por último, uma matriz pseudoinversa da matriz $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ é uma matriz $X = A^\# \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ que satisfaz as condições (15) a (18). A matriz pseudoinversa é normalmente designada por matriz de *Moore-Penrose*.

3.2. Cálculo das matrizes pseudoinversas

Nesta sub-seção serão referidos três métodos de cálculo para as matrizes pseudoinversas.

3.2.1. Cálculo por decomposição em valores singulares

Se $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, então $A^T A$ é uma matriz não negativa cujos valores próprios (i.e., as soluções de $\det(\lambda I - A^T A) = 0$) são números reais não negativos. Sejam os valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$) e faça-se:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, i = 1, 2, \dots, \min(m, n) \quad (19)$$

Obviamente resulta $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{\min(m, n)} \geq 0$. Agora a matriz A pode exprimir-se como o produto de três matrizes

$$A = U \Sigma V^T \quad (20)$$

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathfrak{R}^{m \times m} \text{ e } V = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathfrak{R}^{n \times n} \quad (21)$$

onde U e V são matrizes ortogonais e $\Sigma \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ é definida por:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \text{O} & \\ 0 & & \sigma_n \\ \text{-----} & & \\ & & 0 \end{bmatrix} \text{ se } m \geq n \quad (22)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 & | & \\ & \text{O} & & | & 0 \\ 0 & & \sigma_n & | & \\ \text{-----} & & & | & \end{bmatrix} \text{ se } m < n \quad (23)$$

Esta decomposição de A oferece um esquema para o cálculo da pseudoinversa. Quando A é decomposta em valores singulares como em (20) a sua pseudoinversa $A^\#$ pode ser representada por:

$$A^\# = V \Sigma^\# U^T \quad (24)$$

onde $\Sigma^\#$ é a matriz $(n \times m)$ definida por (onde p é o número de valores singulares não nulos):

$$\Sigma^\# = \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p^{-1} & 0 \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right] \quad (25)$$

3.2.2. Pseudoinversas de matrizes com característica máxima

Quando a matriz $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ admite característica máxima, a respectiva pseudoinversa é calculada usando a matriz inversa de uma matriz não singular. Assim, o cálculo da matriz pseudoinversa será:

i) Se $m < n$ e $r(A) = m$, então

$$A^\# = A^T (AA^T)^{-1} \quad (26)$$

ii) Se $m > n$ e $r(A) = n$, então

$$A^\# = (AA^T)^{-1} A^T \quad (27)$$

Será $A^\# = A^{-1}$, se $m = n$ e $r(A) = m$.

3.2.3. Algoritmo de Greville

Para o cálculo da pseudoinversa da matriz $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ admita-se que a_i e A^i representam, respectivamente, a coluna i de A e a matriz que consiste nas primeiras i colunas de A . Assim, o cálculo da matriz pseudoinversa será:

- 1 $A^{1\#} = 0$ se $a_1 = 0$
 $A^{1\#} = (a_1^T a_1)^{-1} a_1^T$ se $a_1 \neq 0$
 $i = 2$
- 2 $d_i = A^{i-1\#} a_i$
 $c_i = a_i - A^{i-1} d_i$
- 3 Se $c_i \neq 0$, então $b_i^T = c_i^{\#}$
 Se $c_i = 0$, então $b_i^T = (I + d_i^T d_i)^{-1} d_i^T A^{i-1\#}$
- 4 $\text{prepara } A \text{ para a próxima iteração}$

$$A^{i\#} = \begin{bmatrix} A^{i-1\#} & -d_i b_i^T \\ & b_i^T \end{bmatrix}$$
- 5 Se $i=n$, então $A^{\#} = A^{n\#}$ e TERMINA
 Se $i < n$, então $i=i+1$, vai para 2

(28)

4. Controlo de Trajectórias de Robots Redundantes e Hiper-Redundantes

Nesta secção aplica-se a formulação matemática desenvolvida anteriormente no controlo de trajectórias de robots planares com três, quatro e cinco graus de liberdade. As posições das juntas podem ser calculadas através da integração, em relação ao tempo, das velocidades de acordo com o descrito no diagrama de blocos da Figura 5

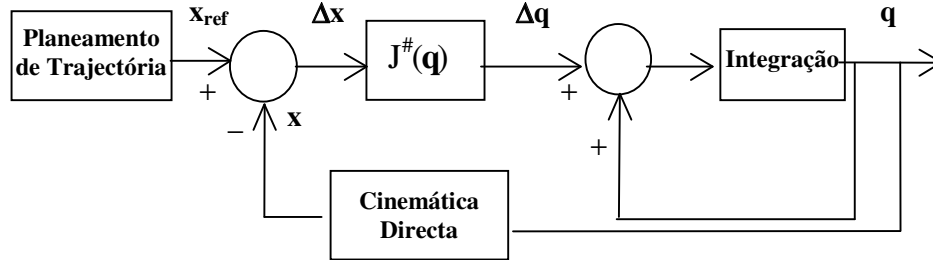


Figura 5: Diagrama de blocos para cálculo da cinemática inversa usando a pseudoinversa.

Baseado neste algoritmo, a que chamamos “Closed-Loop Pseudoinverse” (CLP) foi analisado o desempenho do controlo de trajectórias para diferentes tipos de *robots*. Estudaram-se as trajectórias para o *robot* 2R (não redundante), 3R (redundante) e para o 4R e 5R (hiper-redundantes) impondo-se ao órgão terminal uma trajectória circular repetitiva no espaço operacional definida por:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} [\sqrt{2} - \cos(\pi t)] \\ \frac{1}{2} [\sqrt{2} + \sin(\pi t)] \end{bmatrix}, 0 \leq t \leq 30 \quad (29)$$

Em todas as experiências, para todos os *robots*, considerou-se $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_k = 3$, $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l_k$ e $dt=0.001s$.

4.1. Cinemática de

4.1.1. Robot Não Redundante

Numa primeira experiência considerou-se um *robot* 2R com uma posição inicial $q(0) = [0.89\pi \quad -0.78\pi^T]$. Os resultados da Figura 6 mostram as posições das juntas para o algoritmo de determinação da cinemática inversa usando a matriz jacobiana “standard” 2×2 .

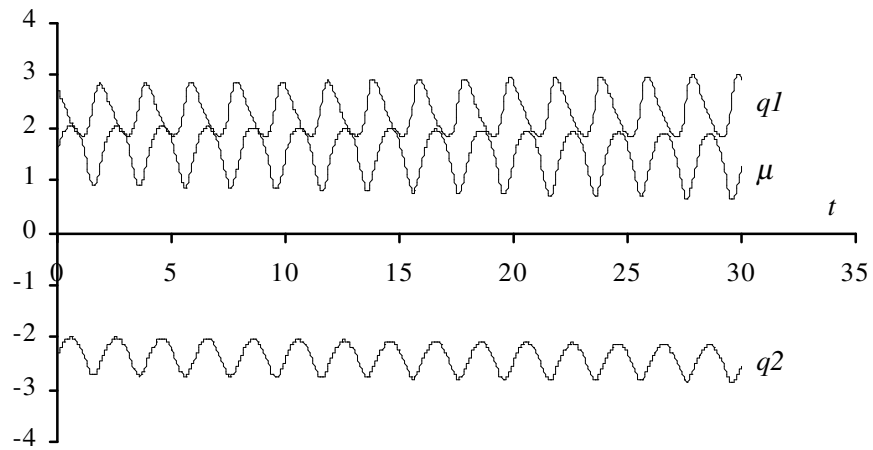


Figura 6: Posições das juntas para o *robot 2R*

Como era esperado, nesta experiência a trajetória das juntas e o índice de manipulabilidade são repetitivos ao longo do movimento circular em xy .

4.1.2. Robot Redundante

Numa segunda experiência usou-se o *robot 3R* com uma posição inicial $q(0) = [\pi - \pi/2 - \pi/2]^T$. A Figura 7 mostra as posições das juntas quando se usa o método CLP.

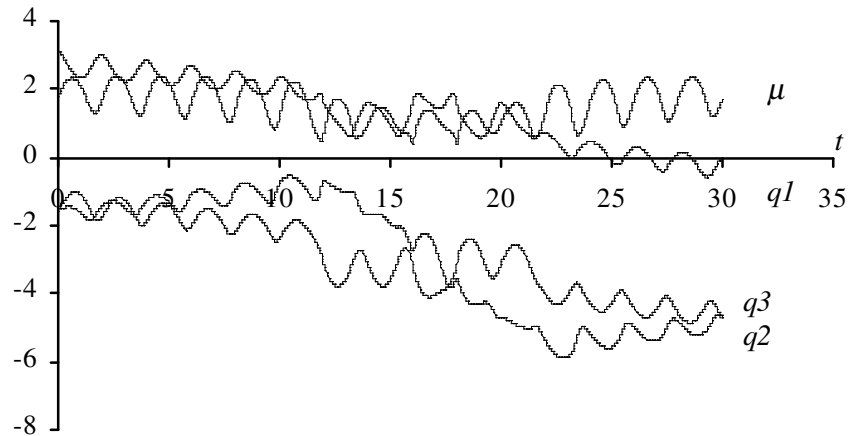


Figura 7: Posições das juntas para o *robot 3R*, usando o método CLP.

Note-se que a manipulabilidade não é ótima durante toda a experiência e que as trajetórias das juntas exibem mudanças bruscas, o que provoca altas velocidades. Além disso, vê-se que as trajetórias não são repetitivas, apresentando um comportamento **quase caótico**.

Para tentar solucionar esta falta de repetitividade desenvolveu-se um novo método de otimização, a que chamamos **Open-Loop Manipulability**, (OLM). Para um determinado ponto do espaço operacional (x,y) , este método consiste em calcular o ponto no espaço das juntas (q_1, q_2, \dots, q_n) que maximiza o valor de μ . Atendendo à simetria da cinemática, para este tipo de robots, μ apenas depende da distância radial (r) entre o ponto considerado e a origem das coordenadas. Assim é calculado um conjunto $n-m$, de pontos no espaço das juntas que maximizem μ . A partir desses valores e usando o método dos mínimos quadrados, são calculadas $n-m$ funções polinomiais (ou outras) que aproximem esses valores.

Uma vez fixadas essas $n-m$ variáveis, as restantes m posições das juntas podem ser calculadas através do algoritmo normal para o cálculo da cinemática inversa.

Usando este método (OLM) para o robot 3R e considerando a aproximação $q_3 = 0.51r - 2.09$ para a junta 3, as posições das juntas são mostradas na Fig.8.

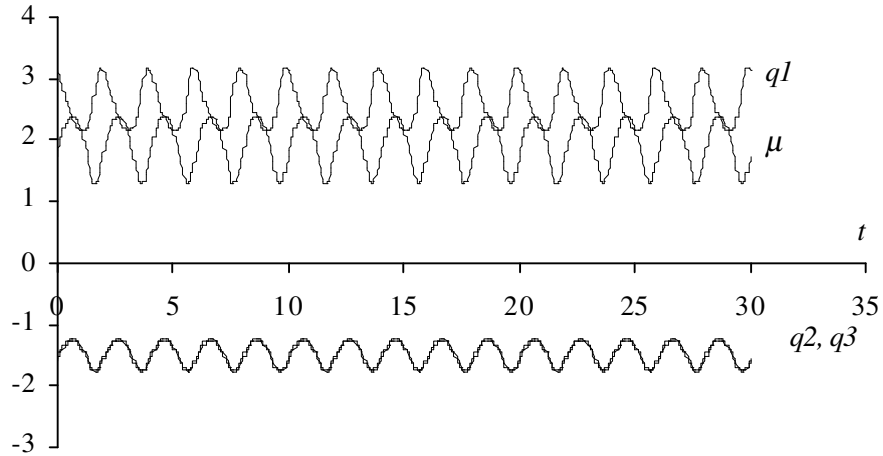


Figura 8: Posições das juntas para o *robot 3R*, usando o método OLM

4.1.3. Robots Hiper-Redundantes

Por último consideram-se os *robots* hiper-redundantes 4R e 5R. Tal como anteriormente, adoptou-se o método CLP da cinemática inversa.

As posições iniciais, para o robo 4R são: $q(0) = [0.97\pi \quad -0.28\pi \quad -0.4\pi \quad -0.39\pi]^T$.

A Figura 9 mostra os resultados das experiências

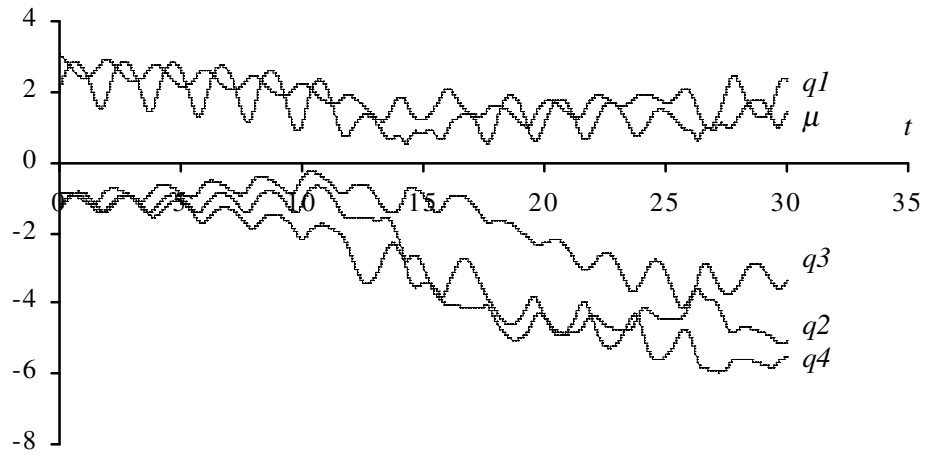


Figura 9: Posições das juntas para o *robot 4R*, usando o método CLP

Usando o método OLM e, para as juntas 3 e 4, as aproximações:

- $q_3 = 0.41r^2 - 0.60r - 1.62$, $q_4 = -0.24r^2 + 1.13r - 1.78$, obtemos os resultados da Fig. 10.

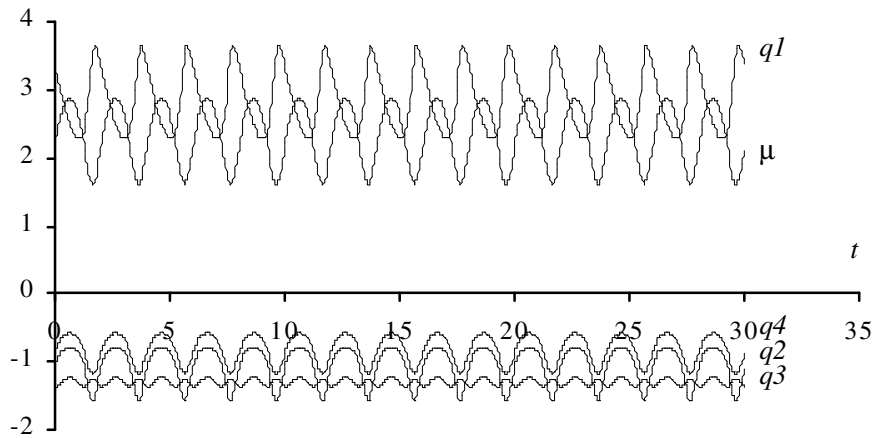


Figura 10: Posições das juntas para o *robot 4R*, usando o método OLM

Considerando a posição inicial, para o robot 5R, $q(0) = [-0.86\pi \ -0.34\pi \ -0.26\pi \ -\pi/3 \ -0.22\pi]^T$ e aplicando o método CLP, obtêm-se os resultados expressos na Fig. 11

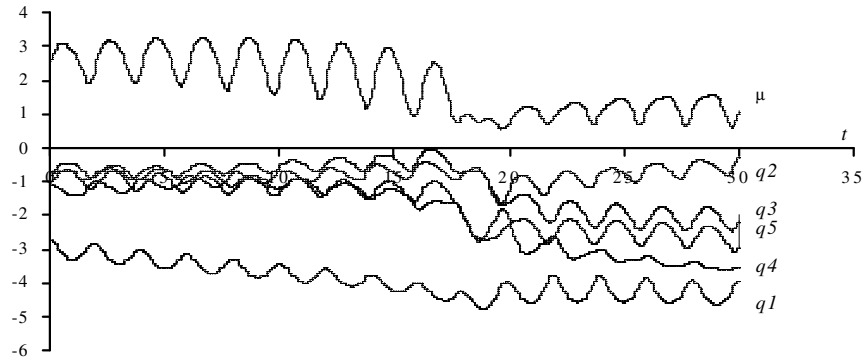


Figura 11: Posições das juntas para o robot 5R, usando o método CLP

Usando o método OLM e, para as juntas 3, 4 e 5 do robot 5R, as aproximações:

- $q_3 = 0.18r^3 - 0.64r^2 + 0.87r - 1.10$
- $q_4 = 0.14r^3 - 0.09r^2 - 0.04r - 1.41$
- $q_5 = 0.26r^3 - 1.22r^2 + 1.93r - 1.31$

obtemos os resultados da Fig. 12.

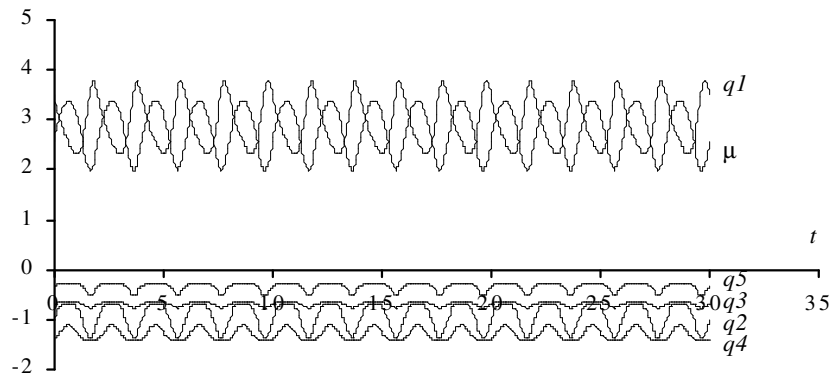


Figura 12: Posições das juntas para o *robot 5R*, usando o método OLM

Em todos os casos observa-se um desempenho sub-ótimo semelhante ao verificado para o *robot 3R*. Comparando para os robots 3R, 4R e 5R, as transformadas de Fourier das velocidades das juntas, para ambos os métodos, CLP e OLM, conclui-se que o método OLM apresenta, em módulo, valores mais elevados para o harmónico fundamental ($\omega = \pi$) e para os seus múltiplos, enquanto o método CLP revela valores altos para todas as frequências.

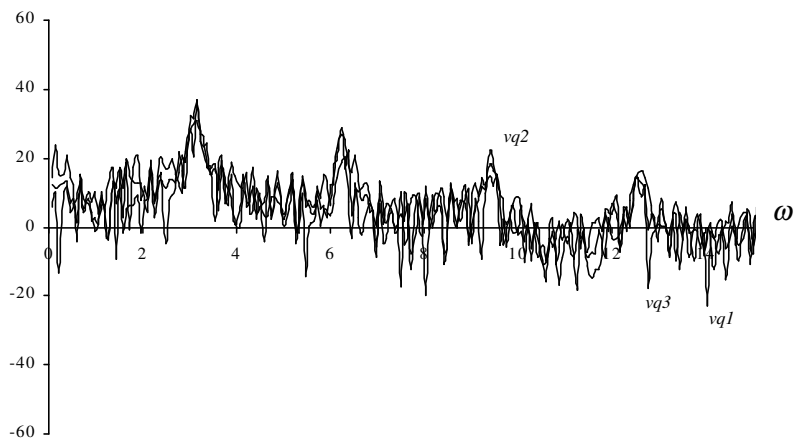


Figura 13: Espectro da Transf. de Fourier de $\dot{q}(t)$, para *robot 3R*, usando o método CLP

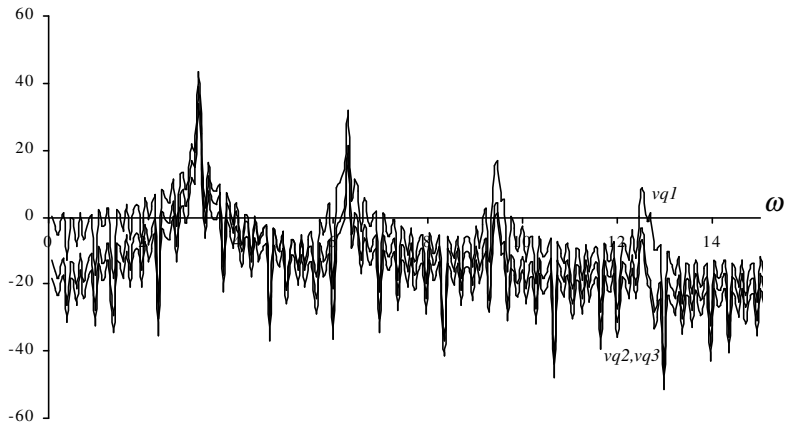


Figura 14: Espectro da Transf. de Fourier de $q(t)$, para robot 3R, usando o método OLM.

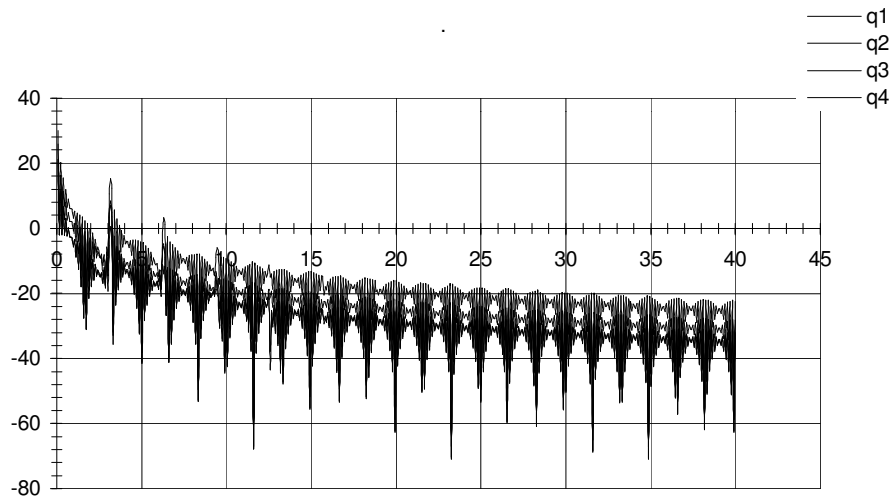


Figura 15: Espectro da Transf. de Fourier de $q(t)$, para robot 4R, usando o método CLP

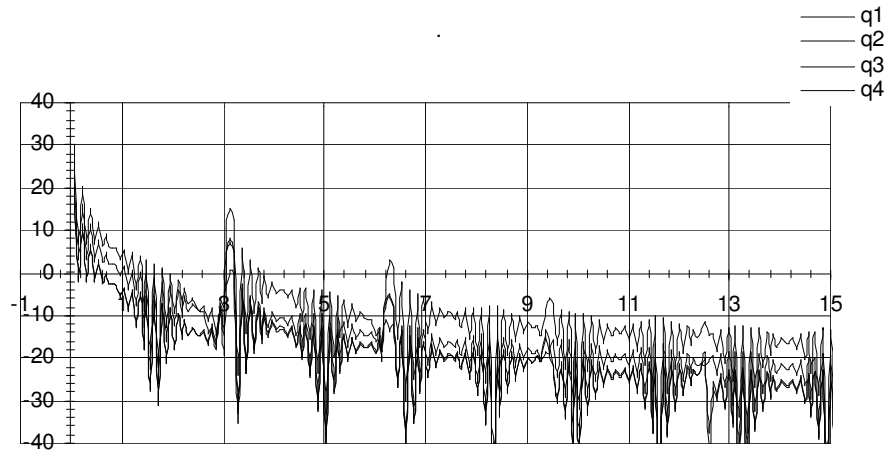


Figura 16: Espectro da Transf. de Fourier de $q(t)$, para robot 4R, usando o método OLM

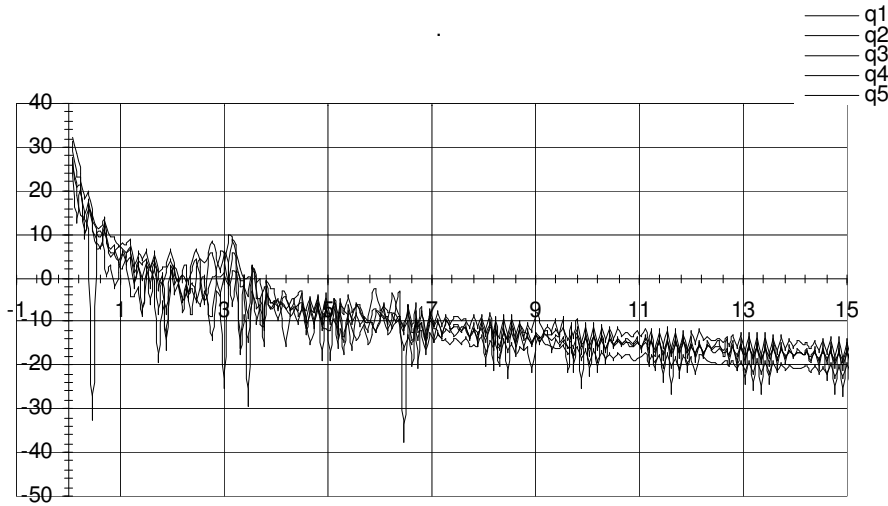


Figura 17: Espectro da Transf. de Fourier de $q(t)$, para robot 5R, usando o método CLP

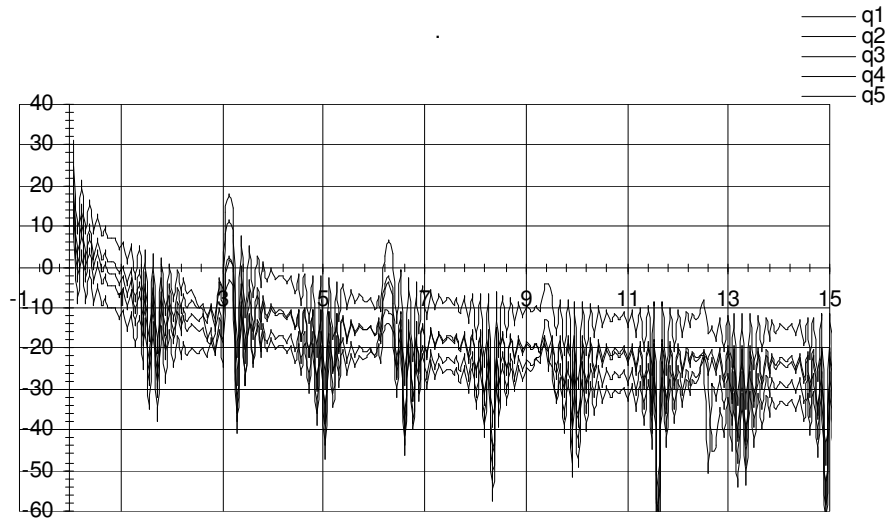


Figura 18: Espectro da Transf. de Fourier de $q(t)$, para robot 5R, usando o método OLM

4.2. Dinâmica

Numa segunda fase faremos a análise dinâmica para o mesmo tipo de robots.

A formulação simbólica para a dinâmica inversa de robot- kR planar, pode ser obtida recursivamente de acordo com:

$$\begin{aligned}
 T = & \sum_{i=1}^n (m_i (\sum_{p=1}^{i-1} (If [j > p, B1 = 0, B1 = 1] l_p^2 \sum_{u=1}^p \ddot{\phi}_u B1) \\
 & + r_i^2 \sum_{u=1}^i \ddot{\phi}_u + \sum_{p=2}^i (\sum_{k=1}^{p-1} (If [p > i - 1, B2 = 0, B2 = 1] \\
 & [If [p = i, B3 = 1, B3 = 0]] : If [j > k, B4 = 0, B4 = 1] : \\
 & If [j >= k + 1 \& j <= p], B5 = 1, B5 = 0] : \\
 & l_k (l_p B2 + r_p B3) (- S_{k+1..p} ((\sum_{u=k+1}^p \ddot{\phi}_u)^2 + \\
 & 2 \sum_{u=1}^k \ddot{\phi}_u \sum_{u=k+1}^p \ddot{\phi}_u) + C_{k+1..p} (\sum_{u=1}^p \ddot{\phi}_u + \sum_{u=1}^k q_u)) B4 + \\
 & (S_{k+1..p} (\sum_{u=1}^k \ddot{\phi}_u)^2 + C_{k+1..p} \sum_{u=1}^k \ddot{\phi}_u) B5 + \\
 & g (\sum_{p=1}^{i-1} (If [j > p, B1 = 0, B1 = 1] l_p C_{1..p} B1) + r_i C_{1..i}))
 \end{aligned}$$

onde T são os torques nas juntas, $B1$ a $B5$ são condições lógicas, m_i é a massa do braço i , r_i é a distância do eixo do braço até ao centro de massa do braço e g é a aceleração da gravidade.

4.2.1. Robot Redundante

A Fig 19 mostra o resultado dos torques, nas juntas, para um robot 3R, quando se usa o método CLP. É claro que a dinâmica segue o mesmo tipo de comportamento verificado na cinemática, isto é, respostas não repetitivas

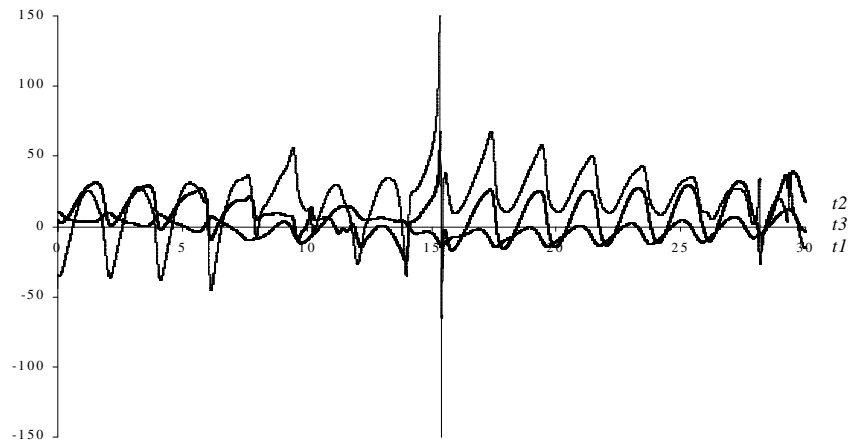


Figura 19: Torques nas juntas para robot 3R usando o método CLP.

Por outro lado, Fig 20 mostra o resultado dos torques nas juntas para o robot 3R, usando o método OLM. Com este método a dinâmica é, de acordo com o esperado, repetitiva e sem oscilações grandes e bruscas.

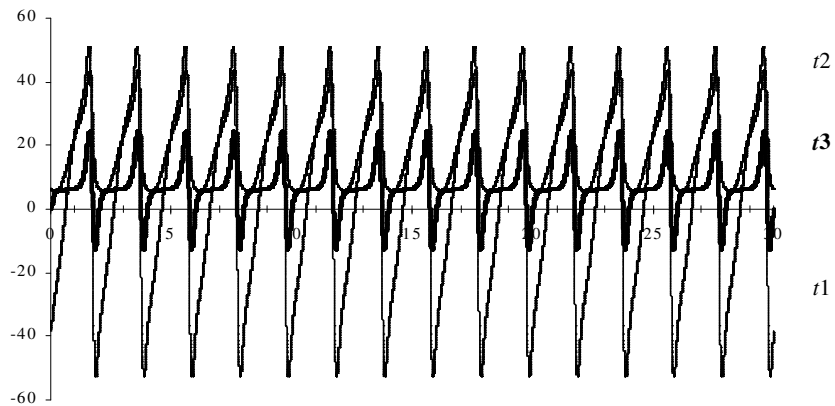


Figura 20: Torques nas juntas para robot 3R usando o método OLM.

4.2.2. Robots Hiper- Redundantes

Para os robots 4R e 5R (hiper-redundantes) analisaram-se também os torques nas juntas, usando ambos os métodos (CLP e OLM). As Figs 21 a 24 mostram os resultados.

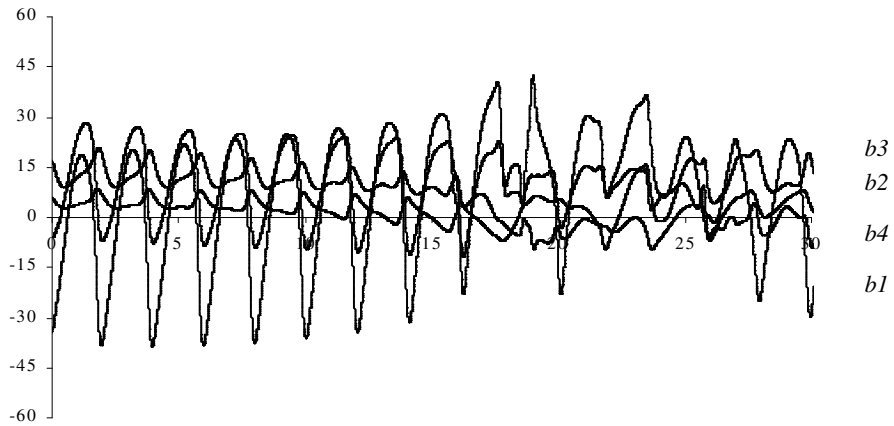


Figura 21: Torques nas juntas para robot 4R usando o método CLP.

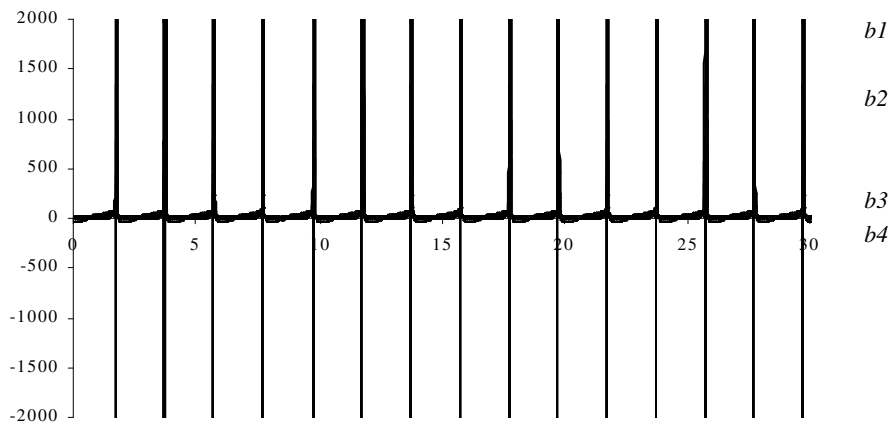


Figura 22: Torques nas juntas para robot 4R usando o método OLM.

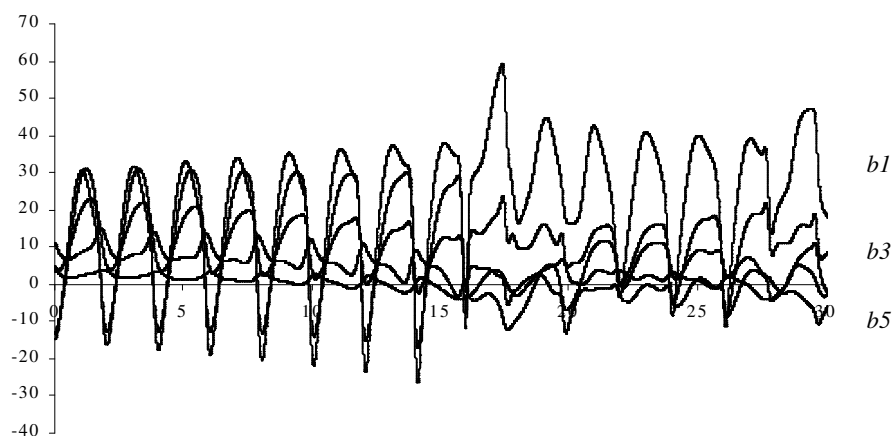


Figura 23: Torques nas juntas para robot 5R usando o método CLP.

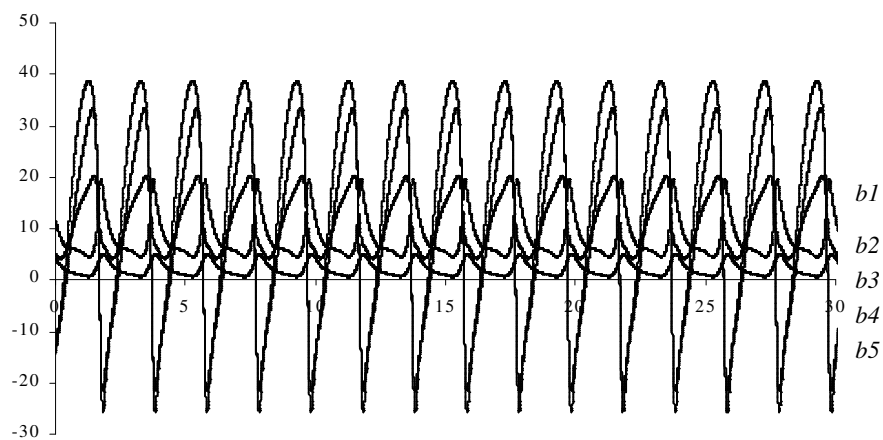


Figura 24: Torques nas juntas para robot 5R usando o método OLM.

Como se pode observar em todas as experiências observaram-se resultados semelhantes aos revelados pelo robot 3R.

Podemos então concluir que o método OLM é de simples implementação e que, na prática, apresenta uma melhor “performance” em relação ao método CLP, nos aspectos cinemáticos embora o mesmo não seja tão evidente nos aspectos dinâmicos.

5. Análise das Respostas Quase-Caóticas do Método CLP

Como já foi referido as respostas do método CLP têm um comportamento não repetitivo e imprevisível, o que se pode considerar um comportamento quase caótico.

As Fig. 25-27 e 28-30 mostram o plano de fase das trajectórias e torques das três juntas (q_1, q_2, q_3) do robot 3R quando controlado usando-se o método CLP.

Pode verificar-se um “drift” na relação posição/velocidade e é visível que há pontos que são “evitados”.

Esses pontos são os que correspondem a uma configuração onde os vários “elos” estão alinhados o que provoca que o valor do *índice de manipulabilidade* μ seja muito baixo.

Esta característica é inerente ao uso da matriz pseudoinversa, já que a mesma experiência feita usando o método de controlo OLM, não apresenta as mesmas características.

Com o objectivo de estudar melhor a natureza quase caótica do fenómeno, os robots cujo comportamento se investiga foram “obrigados” a seguir uma trajectória circular repetitiva, para várias distâncias radiais do centro (r) e para vários raios, usando os métodos CLP e OLM.

Os planos de fase das trajectórias das juntas foram analisados e a respectiva dimensão fractal (dim) foi estimada, usando o método das “box-counting”:

$$\dim S = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (30)$$

onde $N(\varepsilon)$ representa o menor numero de “caixas” bidimensionais de lado ε necessárias para “cobrir” completamente a superfície S .

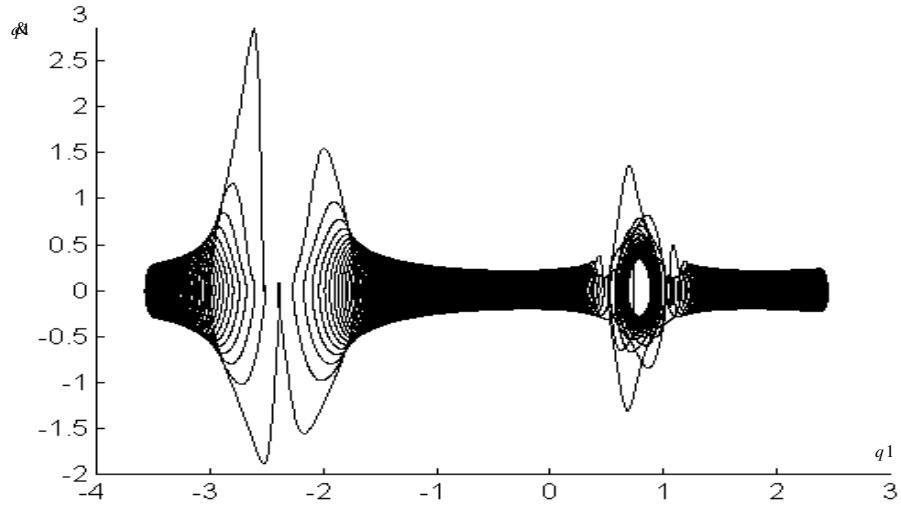


Figura 25: Plano de fase do robot 3R - junta 1, Usando o método CLP para $r = 1$,
 $\dim = 1.62$

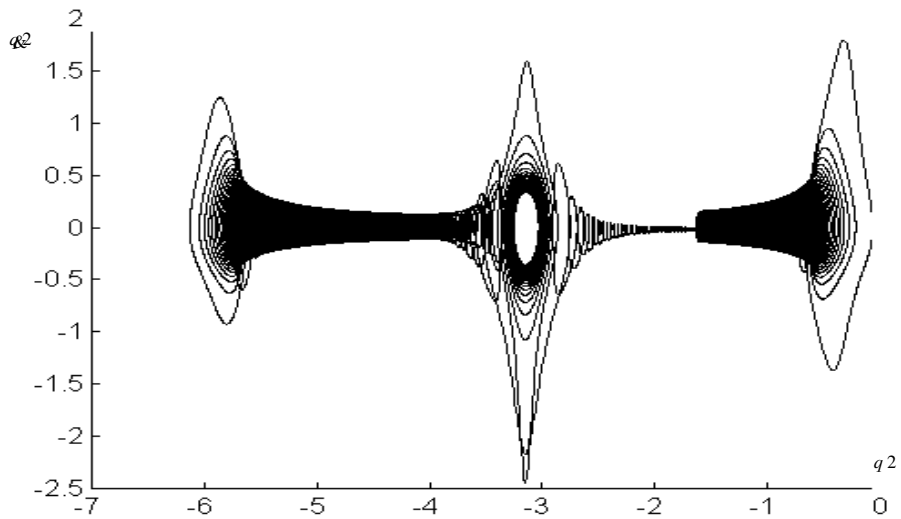


Figura 26: Plano de fase do robot 3R - junta 2, usando o método CLP para $r = 1$,
 $\dim = 1.60$

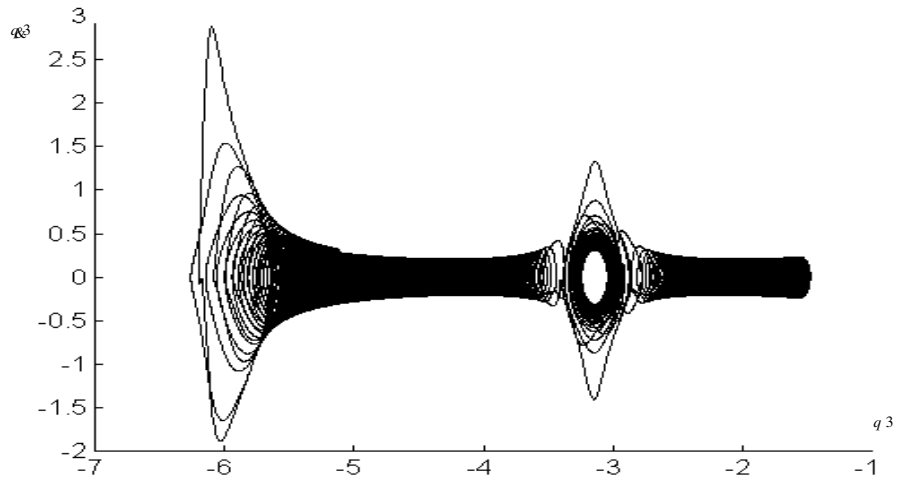


Figura 27: Plano de fase do robot 3R – junta 3, usando o método CLP para $r = 1$,
 $dim = 1.63$

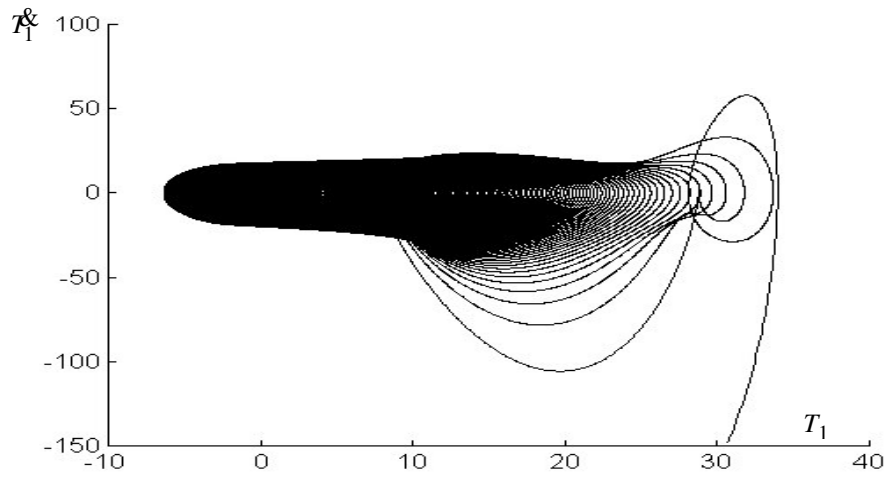


Figura 28: Plano de fase do robot 3R – torque 1, usando o método CLP para $r = 1$,
 $dim = 1.70$

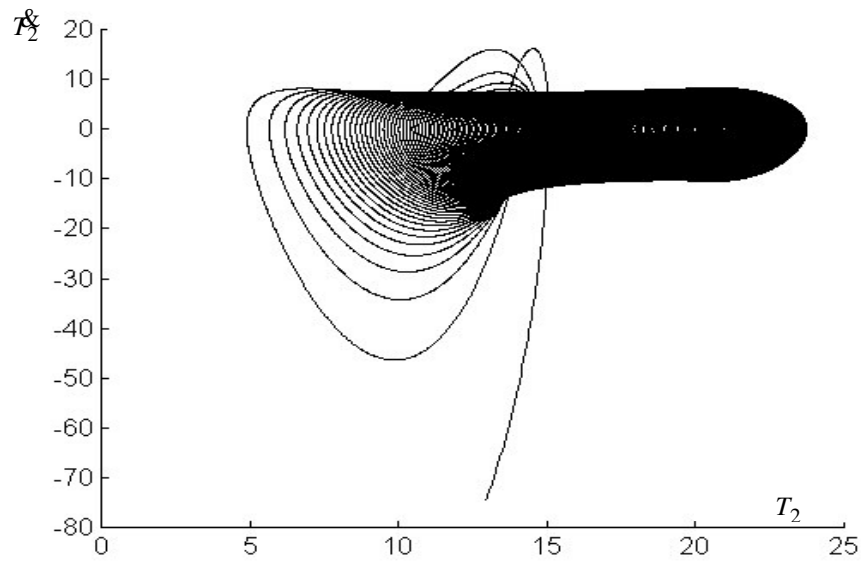


Figura 29: Plano de fase do robot 3R – torque 2, usando o método CLP para $r = 1$,
 $dim = 1.62$

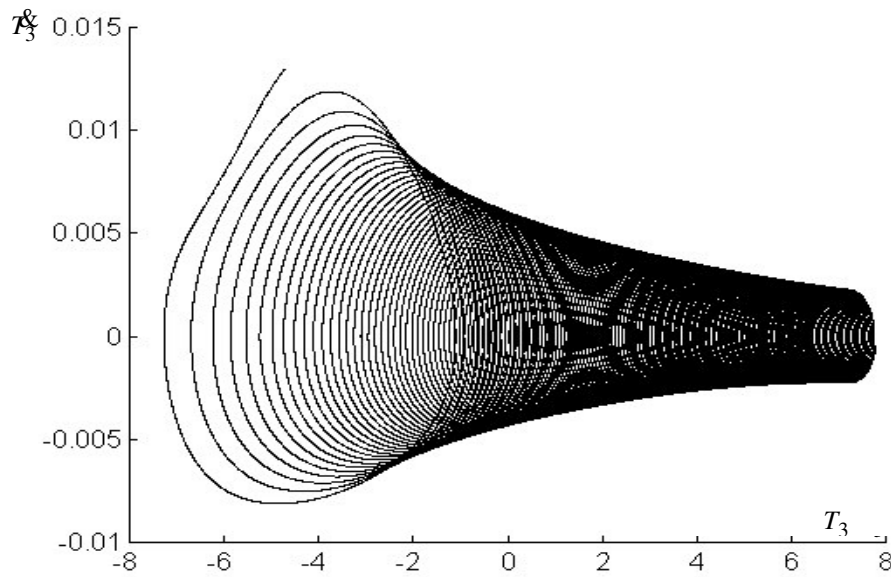


Figura 30: Plano de fase do robot 3R – torque 3, usando o método CLP para $r = 1$,
 $dim = 1.71$

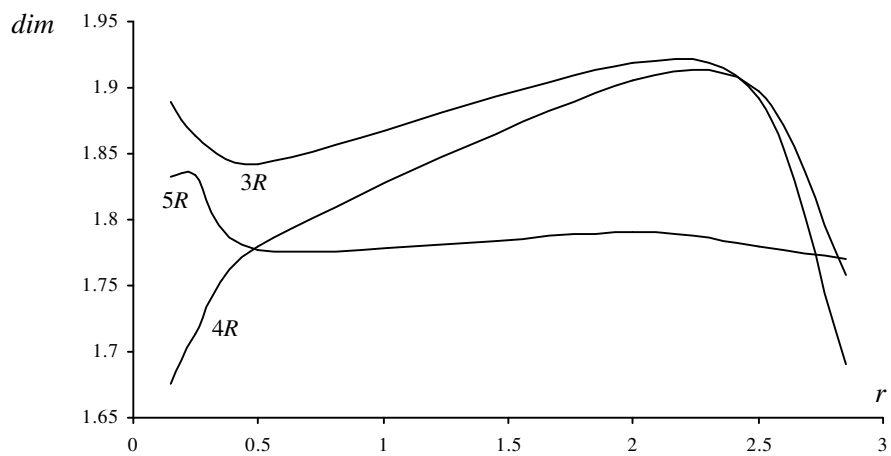


Figura 31: Dimensão fractal *versus* a distância radial para os robots 3R, 4R e 5R controlados pelo método CLP .

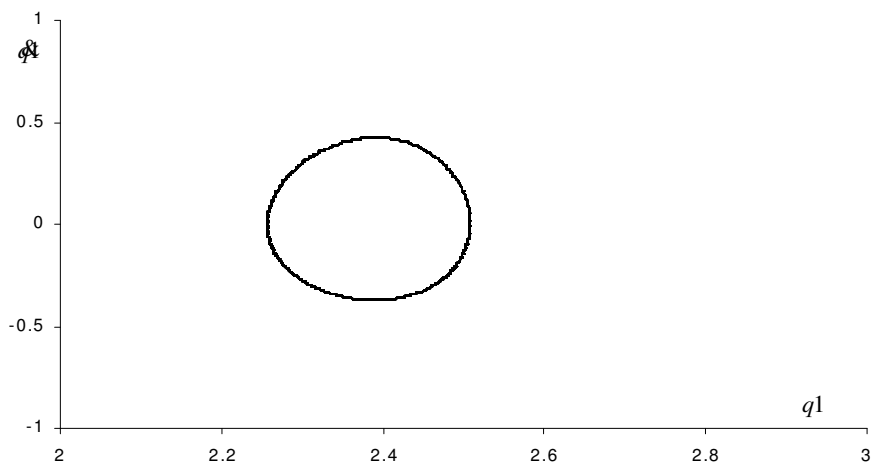


Figura 32: Plano de fase do robot 3R – juntas 1, 2 e 3, usando o método OLM para $r = 1$, $dim = 1$

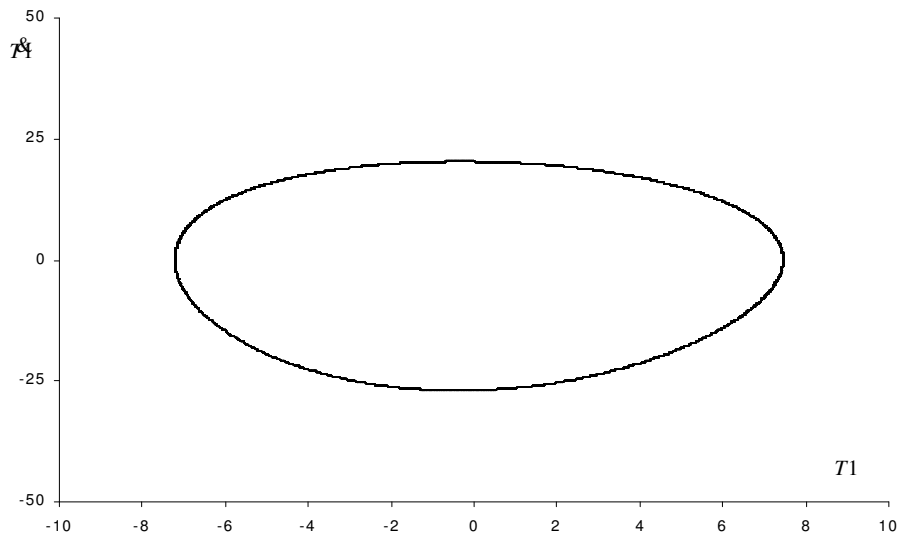


Figura 33: Plano de fase do robot 3R – torques 1, 2 e 3, usando o método OLM para $r = 1$, $dim = 1$.

De acordo com as Figura 25-33, pode concluir-se que:

- Para o método CLP $dim \cong 2$, devido ao “drift” entre posição/velocidade, em contraste com o observado no método OLM onde $dim \cong 1$.
- dim diminui para $r \rightarrow 3$ onde μ_{max} apresenta valores mais baixos.
- para cada tipo de robots a dim é aproximadamente constante para todas as juntas.

6. Conclusões

Este artigo apresenta os aspectos fundamentais da teoria das matrizes inversas generalizadas e a sua aplicação ao controlo de *robots* redundantes. Assim, foram analisados vários métodos de cálculo das matrizes inversas generalizadas por forma a permitir a resolução da cinemática inversa para este tipo de *robots*. Tendo em conta a

formulação matemática, estas técnicas foram aplicadas ao controlo de *robots* redundantes e hiper-redundantes revelando que tais algoritmos conduzem a desempenhos sub-óptimos tanto no que respeita ao índice de manipulabilidade como às velocidades das juntas. Nesta perspectiva, algoritmos que conduzam a desempenhos superiores são uma área de investigação importante.

7. Referências

- [1] C.A Klein, e C. C Huang., “Review of Pseudoinverse Control for Use With Kinematically Redundant Manipulators”, *IEEE Trans. Syst. Man, Cyber.*, vol. 13, pp. 245-250, 1983.
- [2] A. Ben-Israel, e T. Greville, “*Generalized inverses: theory and applications*”, Wiley, 1974.
- [3] C. Radharkrishna Rao, S. Kumar Mitra, “*Generalized Inverse of Matrices and its Applications*”, John Wiley & Sons, 1971.
- [4] S. L. Campbell e C. D. Meyer, “*Generalized Inverses of Linear Transformations*”, Dover Publications, 1979.
- [5] J. L. Goldberg, “*Matrix Theory with Applications*”, McGraw-Hill., 1992.
- [6] T. Yoshikawa, “*Foundations of Robotics: Analysis and Control*”, MIT Press, 1988.
- [7] D. Whitney ,”Resolved Motion Rate Control of Manipulators and Human Prostheses”, *IEEE Trans Syst. Man, Cyber.*, vol. 10, pp. 47-53, 1969
- [8] J. Baillieul, “Kinematic Programming Alternatives for Redundant Manipulators”, *IEEE Int. Conf. On Robotics and Automation*, St. Louis, 1985, pp. 722-728.
- [9] Y. Nakamura, “*Advanced Robotics: Redundancy and Optimization*”, Addison-Wesley, 1991.
- [10] Bruno Siciliano, “ Kinematic Control of Redundant *Robot* Manipulators: A Tutorial”, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 3, pp. 201-212, 1990.

- [11] W.J.Chung, Y. Youm e W. K. Chung, ‘Inverse Kinematics of Planar Redundant Manipulators via Virtual Links With Configuration Index’, *J. of Robotic Systems*, vol. 11, pp. 117-128, 1994.
- [12] J.A.Tenreiro Machado e Fernando Duarte, ‘Redundancy Optimization for Mechanical Manipulators’, Proc. *AMC’98- 5th International Workshop on Advanced Motion Control*, Coimbra, 1998.
- [13] Fernando B.M. Duarte e J.A. Tenreiro Machado, ‘Kinematic Optimazition of Redundant and Hyper-Redundant Robot Trajectories’, *ICECS’98-5th IEEE International Conference on Electronics,Circuits and Systems*, Lisboa, Portugal, 1998.
- [14] Fernando B. Duarte e J.A. Tenreiro Machado, ‘On the Optimal Configuration of Redundant Manipulators’, *INES’98- 9th IEEE Int. Conf. on Intelligent Engineering Systems*, Viena, Áustria, 1998.
- [15] Chiaverini, S, Singularity-Robust task-Priority Redundancy Resolution for Real Time Kinematic Control of Robot Manipulators. *IEEE Transactions Robotics Automation*, vol. 13, pp. 398-410, 1997.
- [16] Conkur, E. S. e R. Buckingham, Clarifying the Definition of Redundancy as Used in Robotics. *Robotica*, vol. 15, pp. 583-586, 1997.
- [17] Doty, K. L. and C. Melchiorri and C. Bonivento A Theory of Generalized Inverses Applied to Robotics. *Int. Journal of Robotics Research*, vol. 12, pp. 1-19, 1993.
- [18] Duarte, F. B. e J. A. T. Machado. Chaotic Phenomena and Performance Optimization in the Trajectory Control of Redundant Manipulators. *Recent Advances in Mechatronics*, Springer-Verlag, 1999.
- [19] Duarte, F. B. e J. A. T. Machado, Chaos Dynamics in the trajectory Control of Redundant Manipulators. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, S. Francisco, USA, 2000.
- [20] Theiler, J. Estimating Fractal Dimension. *Journal Optical Society of America*, vol. 7, nº 6, pp. 1055-1073, 1990.