

EQUAÇÕES DO 2º GRAU ou EQUAÇÕES QUADRÁTICAS
(um pouco da sua história)

JOSÉ MORGADO

Centro de Matemática

Universidade do Porto

1 - Grau de uma equação

Recordemos que habitualmente se define equação do 2º grau ou equação quadrática como uma equação da forma

$$1. \quad ax^2 + bx + c = 0,$$

em que a, b, c são números reais ou complexos e $a \neq 0$.

Recordemos ainda que esta equação é equivalente à equação

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

e, conseqüentemente,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Assim, se estivermos trabalhando no corpo dos números complexos, podemos afirmar que a equação (1.1) tem as raízes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

se estivermos trabalhando no corpo dos números reais, diremos que a equação (1.1) tem solução, se e somente se $b^2 - 4ac \geq 0$; no caso de ser $b^2 - 4ac > 0$, a equação tem

duas raízes (reais) e, se $b^2 - 4ac = 0$, a equação tem duas raízes iguais (reais) ou também se diz que a

equação tem uma raiz dupla (real).

Diz-se que uma equação da forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$, é uma equação de grau n.

Mas nem sempre as equações foram classificadas pelo grau.

Por exemplo, o matemático persa, conhecido pelo nome de Omar Khayyam, matemático que foi também astrónomo, filósofo e poeta, que terá vivido no período 1040-1133(?), classificava as equações dos três primeiros graus em equações simples e equações compostas.

As equações simples eram as equações dos tipos:

- $r = x, r = x^2, r = x^3, ax = x^2, ax = x^3, ax^2 = x^3;$

as equações compostas eram ainda classificadas em trinómios e quadrinómios. Os trinómios compreendiam os 12 tipos seguintes:

(1.3) I) $x^2 + bx = c, x^2 + c = bx, bx + c = x^2,$

II. $x^3 + bx^2 = cx, x^3 + cx = bx^2, cx + bx^2 = x^3$

,

$x^3 + cx = d, x^3 + d = cx, cx + d = x^3,$

$x^3 + bx^2 = d, x^3 + d = bx^2, bx^2 + d = x^3.$

Os quadrinómios compreendiam os 5 tipos seguintes:

(1.4) III) $x^3 + bx^2 + cx = d, x^3 + bx^2 + d = cx$

$x^3 + bx^2 = cx + d, x^3 + cx = bx^2 + d$

$x^3 + d = bx^2 + cx.$

A classificação pelo grau, com o reconhecimento de que um coeficiente literal podia ser positivo ou negativo, foi devida a matemáticos dos fins do século XVII tais como:

-Simon Stevin (ou Simon de Bruges) (Bruges, 1548 - Haia, 1620), matemático e físico flamengo (1585);

-François Viète (Fontenay-le-Comte, 1540 - Paris, 1603), matemático francês (~1590);

-Albert Girard (1595-1632), matemático francês (1629);

-Thomas Harriot (1560-1621), matemático e astrónomo britânico (1631, póstumo);

-William Oughtred (1574-1660), matemático britânico (1631);

-René Descartes (1596-1650), matemático francês (1637).

Os anos indicados entre parêntesis assinalam os anos em que foram publicados os trabalhos considerados mais importantes.

Segundo David Eugene Smith refere em History of Mathematics, vol II, p.443, René Descartes, na sua Geometria, utilizou a expressão dimensões de uma equação e reservou a palavra grau para usar com respeito a linhas.

Note

se que, na classificação das equações quadráticas feita por Omar Khayyan não aparece a equação $x^2 + bx + c = 0$, com b e c positivos. Como tal equação não tem nenhuma raiz positiva, tal equação não era considerada.

2.- Equações quadráticas no antigo Egipto

Não são conhecidos documentos que provem que os antigos egípcios se tenham ocupado da resolução de equações quadráticas, mas, no papiro de Berlim, há dois problemas que dependem da resolução de um sistema de duas equações, uma do primeiro grau e outra do segundo grau. Os sistemas, em linguagem actual, são os seguintes:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ 4x = 3y \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 400 \\ 4x = 3y \end{cases}$$

O primeiro sistema é para resolver o seguinte problema:

a área de um quadrado é 100 e tal quadrado é igual à soma de dois quadrados menores, em que o lado de um é igual a $\frac{3}{4}$ do lado do outro. O segundo sistema é para resolver um problema análogo.

A resolução é feita por um método que mais tarde foi chamado regra da falsa posição:

Observe

se que a 2ª equação é satisfeita por $x=3$ e $y=4$.

Substituindo x e y por estes valores, na primeira equação obtém

se $x^2 + y^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. Assim, para obter a soma 100, bastaria multiplicar ambos os membros por 4, i.e., bastaria fazer $x=2.3=6$ e $y=2.4=8$; então resulta $x^2 + y^2 = 36 + 64 = 100$ e $4x = 24 = 3y$.

O nome regra da falsa posição motivou alguns a pedir desculpas por nome tão estranho numa ciência cuja função é procurar a verdade. Assim, Humphrey Baker (1568) escreveu:

"A regra de falsidade é assim chamada, não porque ela ensine qualquer fraude ou falsidade, mas porque, por meio de números tomados à sorte, ensina a encontrar o número verdadeiro que é pedido." (David Eugene Smith, History of Mathematics, vol II, p.441).

3.- Equações quadráticas na antiga Babilónia

Carl Benjamin Boyer, na 2ª edição do seu livro A History of Mathematics, p.37, escreveu que "A solução de uma equação quadrática de três termos parece ter excedido de longe as capacidades algébricas dos Egípcios".

Otto Neugebauer, em 1930, descobriu que tais equações haviam sido estudadas pelos antigos Babilónios, para resolver alguns problemas muito antigos.

Por exemplo, num desses problemas pede-se o lado de um quadrado, em que a área menos o lado é igual a 14;30. (Note-se que os Babilónios usavam uma combinação da base 60 com a base 10, para a escrita de números. Assim, 14;30 significava para eles $14.60 + 30 = 870$ e, conseqüentemente, a resolução do problema considerado é

equivalente à resolução da equação $x^2 - x = 870$ (ou, mais precisamente, a procurar uma raiz positiva desta equação), para o que davam as seguintes indicações:

Significado na base 10

Tome metade de 1, que é 0;30 0;30 significa 0,5

Multiplique 0;30 por 0;30, que è 0;15 0;15 significa 0,25

Junte o resultado a 14,30 para obter 14,30;15 14,30;15 significa 870,25

Este número é o quadrado de 29;30 29;30 significa 29,5, pois

$$29,5^2 = 870,25$$

Junte agora 0;30 a 29;30 e o resultado é 30, $29,5+0,5=30$

que é o lado do quadrado.

De facto, $x=30$ é uma solução (a solução positiva da equação considerada $x^2 - x = 900 - 30 = 870$).

Note-se que as operações indicadas equivalem a tomar

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$$

para uma raiz da equação $x^2 - px = q$.

Van der Waerden, no seu livro Science Awakening [O Despertar da Ciência, p. 63], apresenta-nos um outro problema que data da dinastia Hammurabi (1728-1680 A.C.):

"Comprimento, largura. Multipliquei comprimento e largura, obtendo assim a área. Então juntei à área o excesso do comprimento sobre a largura: 3,3 [i.e., o resultado obtido foi 183]. Além disso, juntei comprimento e largura :27. Pede-se o comprimento, a largura e a área."

A resolução deste problema equivale a resolver o sistema

$$\begin{cases} xy + x - y = 3,3 \\ x + y = 27 \end{cases} \quad \text{i.e.,} \quad \begin{cases} xy + x - y = 183 \\ x + y = 27 \end{cases},$$

onde x designa o comprimento e y designa a largura.

A resolução imediata é a seguinte:

Significado na base 10

$$27+3,3=3,30$$

Somando membro a membro, vem

$$2+27=29$$

$$xy+2x=210 \text{ (nº representado por } 3,30)$$

Metade de 29 é 14;30

$$\text{pois } 14,5 + 14,5 = 29$$

$$14;30 \times 14;30 = 3,30;15$$

14;30 × 14;30 , i. e., 14,5² = 210,25 (que corresponde a 3,30;15)

$$3,30;15 - 3,30 = 0;15$$

a raiz quadrada de 0;15 é 0;30

210,25 - 210 = 0,25 e a sua raiz quadrada é 0,5 (que corresponde a 0;30) que é a largura

$$14;30 + 0;30 = 15 \text{ (comprimento)}$$

$$14;30 - 0;30 = 14 \text{ (largura)}$$

Subtraindo 2 a 14 [note-se que 2 foi somado a 27], obtém-se 12 que é a largura actual e, portanto o comprimento é 15.

Logo, a área é 180 (i. e., 3,0). De facto, a solução do sistema considerado é $x=15$, $y=12$.

Pode causar alguma estranheza a passagem

$$2+27=29$$

e, mais adiante, a subtracção de 2 a 14, para obter a largura actual 12. Trata-se, de facto, de uma passagem interessante. Do sistema

$$\begin{cases} xy + x - y = 183 \\ x + y = 27 \end{cases}$$

resulta, como vimos, $xy+2x=210$. Então o autor da resolução, para efeito de simplificar os cálculos, atendendo a que

$$xy+2x=x(y+2)$$

faz uma transformação, introduzindo uma nova variável $y'=y+2$ e, então, o sistema fica transformado em

$$\begin{cases} xy' = 3,30 & (\text{i. e., } 210) \\ x + y' = 29 \end{cases}$$

Para y' encontrou o valor 14, de modo que, para obter a largura, calculou

$$y=y'-2=12$$

desfazendo a transformação feita.

Se nos lembrarmos que esta transformação foi feita há perto de 4000 anos (Neugebauer situa os textos cuneiformes referentes às equações quadráticas entre 1800 e 1600 A.C.), não podemos deixar de concluir que, na antiga Babilónia, a Álgebra atingiu um nível surpreendentemente avançado.

Na verdade, cerca de 2000 anos antes da nossa era, os Babilónios podiam resolver sistemas de equações da forma

$$\begin{cases} x + y = p \\ xy = q \end{cases}$$

o que equivale à resolução da equação quadrática

$$x^2 + q = px.$$

A orientação dos Babilónios para resolver o sistema

$$\begin{cases} x + y = p \\ xy = q \end{cases}$$

consistia no seguinte:

- Tomar metade de p : $\frac{p}{2} = \frac{x+y}{2}$.

- Quadrar o resultado: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

- Subtrair q do resultado obtido: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$.

- Tomar a raiz quadrada do resultado obtido: $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{x-y}{2}$.

- Somar o resultado obtido a metade de p : $\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = x$

O resultado obtido é um dos números desejados e o outro é a diferença deste para p

$$p-x = (x+y) - x = y .$$

Note-se que os números procurados são

$$\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

e

$$p - \left(\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \right) = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} ,$$

o que está de acordo com as fórmulas que ainda hoje utilizamos para resolver a equação

$$x^2 - px = q .$$

Os tipos indicados para as equações quadráticas eram necessários, porque os Babilónios não podiam ainda trabalhar com números negativos, pois estes números não tinham ainda sido incluídos na sua aritmética.

Segundo a informação prestada por Paul Karlson, no seu livro A Magia dos Números [tradução brasileira realizada por Henrique Carlos Pfeifer, Eugénio Brito e Frederico Porta, do original Alemão Von Zauberder Zahlen, publicada em 1961], só em 1489 é que os sinais + e - foram, pela primeira vez, utilizados (por Johann Widman, nascido na cidade Húngara de Eger, cerca de 1460); mas só em 1545 é que esses sinais foram, pela primeira vez, utilizados como sinais operatórios, pelo algebrista alemão Michael Stigel (1486-1567) (History of Mathematics, de David Eugene Smith, vol. II, p. 403).

4 – A equação quadrática na antiga Grécia

Os antigos gregos conseguiram resolver equações quadráticas, por meio de construções geométricas.

Por exemplo, nos Elementos de Euclides, ensina-se a resolver o seguinte problema:

"Dividir um segmento de recta em duas partes tais que o rectângulo contido pelo segmento dado e uma das partes seja igual ao quadrado da outra parte."

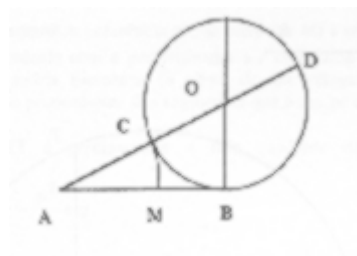
Resolve-se este problema, resolvendo a equação

$$a(a-x)=x^2,$$

onde a designa o segmento dado. A equação pode escrever-se sob a forma $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$;

trata-se de dividir o segmento a em média e extrema razão.

Seja AB o segmento dado e consideremos a circunferência tangente a AB em B e cujo raio é $a/2$. A recta definida por A e pelo centro O da circunferência encontra a circunferência nos pontos C e D .



O arco de circunferência de centro A e raio AC encontra AB no ponto M . As partes pedidas são

precisamente AM e MB e tem-se $\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB}$.

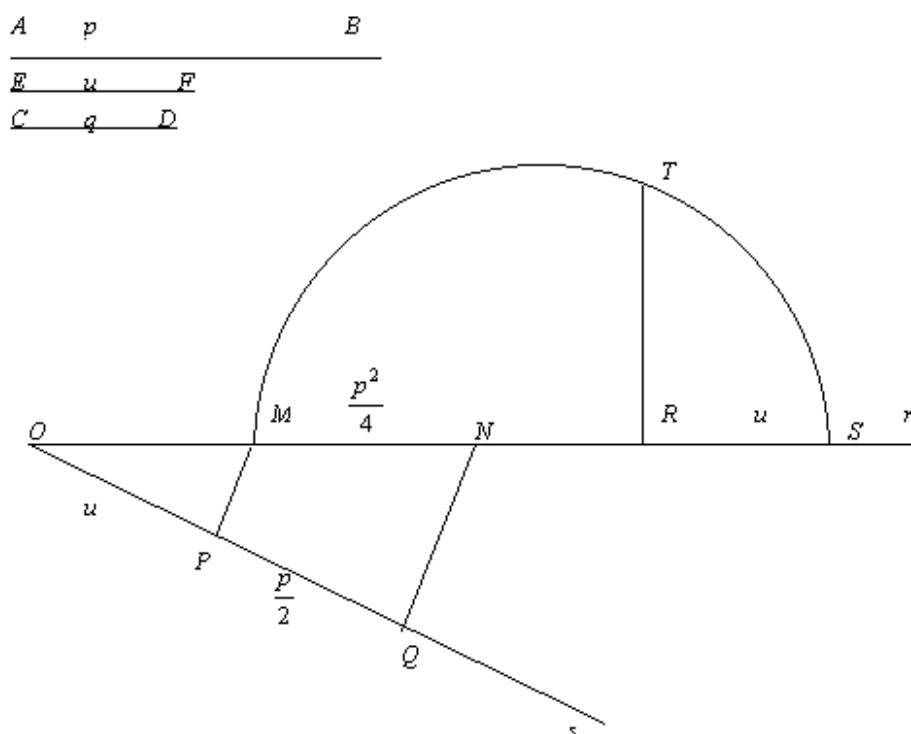
Com efeito, tem-se $a^2 = (a + x)x$, onde a e x designam, respectivamente, o comprimento da tangente $AB(=CD)$ e o comprimento de AM [o quadrado da tangente é igual ao produto da secante pela sua parte externa] e da igualdade $a^2 = (a + x)x$, resulta $a(a - x) = x^2$, quer dizer, a área do rectângulo que tem para lados a e a parte $a-x$ é igual ao quadrado da outra parte, pois $a - (a - x) = x$.

A igualdade $a^2 = (a + x)x$ resulta imediatamente da aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo ABO . Assim, tem-se $\overline{AB}^2 + \overline{BO}^2 = \overline{OA}^2$, i. e., $a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$, onde $a^2 = x^2 + ax = x(a + x)$, como se pretendia.

Suponhamos agora que pretendemos resolver a seguinte equação $x^2 + px = q$.

Esta equação é, evidentemente, equivalente à equação $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} + q$.

Então, para resolver a equação, basta construir $\frac{p^2}{4} + q$, extrair-lhe a raiz quadrada e subtrair-lhe, em seguida, $\frac{p}{2}$.



Comecemos por considerar duas rectas r e s , concorrentes em O e, sobre r , um ponto M tal que $OM = \frac{p}{2}$, sendo p o comprimento do segmento AB relativamente ao segmento unidade $u=EF$ e consideremos

sobre s dois pontos P e Q tais que $OP=u$ e $PQ = \frac{p}{2}$. Unamos P e M e conduzamos por Q uma paralela a PM ; seja N o ponto de intersecção dessa paralela com r .

Tem-se $\frac{OP}{OM} = \frac{PQ}{MN}$ e, portanto, $MN = \frac{OM \cdot PQ}{OP} = \frac{p^2}{4}$.

Consideremos agora o ponto R , de r , tal que:

$$MR = MN + NR = \frac{p^2}{4} + q$$

Trata-se de extrairmos a raiz quadrada de $\frac{p^2}{4} + q$.

Para isso, marquemos sobre r o ponto S tal que RS tenha comprimento u e R fique entre M e S .

Consideremos uma semicircunferência γ , de diâmetro MS e seja T o ponto de encontro dessa semicircunferência com a perpendicular a r conduzida por R. Por um teorema conhecido da geometria Elementar (a altura de um triângulo rectângulo relativa à hipotenusa é o meio proporcional dos segmentos que o seu pé determina na hipotenusa) conclui-se que RT é precisamente a raiz quadrada de

$$\frac{p^2}{4} + q, \text{ visto que } RT^2 = \left(\frac{p^2}{4} + q \right) u = \frac{p^2}{4} + q.$$

Para obter x, basta determinar $RT = \frac{p}{2}$.

5. Regra hindu para equações quadráticas

Como assinala Howard Eves na sua An Introduction to the History of Mathematics, os hindus foram hábeis aritméticos e deram contribuições importantes à álgebra.

Muitos dos problemas aritméticos eram resolvidos pelo **método do retorno**, onde se trabalha do fim do problema para o princípio.

Muitos dos resultados obtidos pelos matemáticos gregos chegaram ao conhecimento dos hindus por intermédio dos árabes. Os hindus ampliaram-nos sob alguns aspectos e traduziram-nos para a sua língua e exprimiram-nos com eloquência poética. Vejamos o exemplo de um problema sugerido por Bhaskara (1114--1185), cujo enunciado era o seguinte:

" Linda donzela de olhos cintilantes, se conheces o método do retorno diz me: qual é o número que,

multiplicado por 3, acrescido de $\frac{3}{4}$ deste produto, dividido por 7, diminuído de $\frac{1}{3}$ do quociente, elevado ao quadrado, diminuído de 52, acrescido de 8 e dividido por 10, dá como resultado o número 2?"

Bhaskara foi um dos últimos grandes matemáticos hindus até aos tempos modernos. A sua obra em verso intitulada Siddhanta-S'iromani (i.e., Diadema de um sistema astronómico) escrita em 1150, consistia de duas partes matemáticas e duas partes astronómicas.

Foi Bhaskara que chamou à Álgebra a arte dos raciocínios perfeitos.

Aryabhata, nascido em 476, foi um poeta, matemático e astrónomo hindu; autor da obra **Aryabhatiya**, escrita em verso, em 499, expõe os resultados de matemática como eram conhecidos no seu tempo, incluindo equações quadráticas. Entre os versos contidos nesta obra, há uns que dizem o seguinte:

" Soma 4 a 100, multiplica por 8 e junta 62000.

O resultado é aproximadamente a circunferência de um círculo de diâmetro 20000"

Ora isto equivale a dizer que o valor de π é aproximadamente $\frac{62832}{20000} = 3,1416$ ⁽²⁾

Parece ter sido S'ridhara (~1025) quem primeiro enunciou a chamada regra hindu para a resolução de equações quadráticas que, na citação de Bhaskara (~1150), consiste no seguinte:

"Multiplicar ambos os membros da equação por um número igual a quatro vezes o [coeficiente do] quadrado e juntar a ambas o número igual ao quadrado da original [do coeficiente] da quantidade desconhecida [Então extrair a raiz quadrada]"

Seja a equação

$$ax^2 + bx = c$$

Multiplicando ambos os membros por $4a$, vem

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac$$

Somando a ambos os membros o quadrado do coeficiente da quantidade desconhecida, tem-se

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 + 4ac,$$

ou seja

$$(2ax + b)^2 = b^2 + 4ac,$$

extraindo a raiz quadrada, vem

$$2ax + b = \sqrt{b^2 + 4ac}$$

(Note-se que a raiz negativa não era considerada...)

E agora trata-se de uma equação do primeiro grau, cuja resolução já é conhecida.

Depois de Bhaskara, até aos tempos modernos, parece não ter havido progressos regulares em Matemática.

O mais brilhante matemático indiano dos tempos modernos talvez tenha sido Srinivasa Ramanujan (1887-1920), descoberto em 1913 pelo notável matemático inglês Godfrey Harold Hardy (1877-1947).

6- Regras de Al-Khowarizmi (ou Al-Khwarizmi)

Mohammed Ben Musa Al-Khowarizmi foi o primeiro autor islâmico que escreveu "sobre a solução de problemas por al-jabr e al-muqabala".(1)

Por jabr, entende-se a operação de somar um número ou expressão algébrica a ambos os membros de uma equação, para eliminar termos negativos. Também se diz jabr a operação de multiplicar ambos os membros de uma equação por um mesmo número, para eliminar fracções.

Por muqabala entende-se a operação de subtrair números ou expressões algébricas a ambos os membros de uma equação a fim de mudar um termo de um membro para o outro.

Al Khowarizmi usou dois métodos gerais para resolver equações quadráticas da forma $x^2 + px = q$

Um dos métodos de Al-Khowarizmi

Constroi

se um quadrado de lado x e, sobre esse lado, para o exterior do quadrado, constroi

se um rectângulo de lados x e $\frac{1}{4}p$.

Completa

se a Figura A, construindo em cada um dos quatro cantos um quadrado de lado igual a $\frac{1}{4}p$.

e, por consequência,

$$x = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q} - \frac{1}{2}p$$

O outro método de Al-Khowarizmi assenta na construção da Figura B:

$\frac{p}{2}$	$\frac{p^2}{4}$
x^2	
x	$\frac{p}{2}$

Figura B

Então a área do quadrado maior é

$$\left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 = x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2, \text{ por ser } x^2 + px = q,$$

donde

$$x + \frac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$$

e, consequentemente,

$$x = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q} - \frac{1}{2}p$$

1. Foi a partir de al-jabr que nasceu a palavra álgebra e foi a partir do próprio nome Al-Khowarizmi que nasceu a palavra algoritmo e também a palavra algarismo.
2. Não esquecer que os números negativos ainda não existiam.