PRÁTICAS DE CONDUÇÃO DE DISCUSSÕES MATEMÁTICAS: OS CASOS DE DOIS PROFESSORES

Cátia Rodrigues[1], *Luís Menezes*[2], *João Pedro da Ponte*[3]
[1]Agrupamento de Escolas de Vila Flor e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, *catiamat@gmail.com*
[2]Escola Superior de Educação de Viseu e CI&DETS, menezes@esev.ipv.pt
[3]Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, jpponte@ie.ul.pt

Resumo. *As discussões matemáticas podem ser uma ferramenta poderosa na promoção da aprendizagem com compreensão, na medida em que favorecem a apresentação, justificação e argumentação sobre diversas estratégias de resolução decorrentes do trabalho dos alunos com tarefas. O professor desempenha um papel importante na preparação e condução dessas discussões. Nesta comunicação procuramos compreender como dois professores de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico conduzem discussões coletivas que decorrem de tarefas algébricas. Com vista à compreensão das suas práticas, o estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa e baseia-se no estudo de caso de professores. Os resultados evidenciam que os dois professores conduzem a discussão por três momentos principais e gerem o discurso com vista à generalização de ideias algébricas. Empreendem um conjunto de ações instrucionais que favorecem a apresentação e justificação de diversas estratégias de resolução e argumentação sobre as dos colegas.*

Abstract. *Mathematical discussions can be a powerful tool in promoting learning with understanding, as they favor the presentation, justification, and argumentation of various strategies of resolution resulting from students' work on tasks. The teacher plays an important role in the preparation and conduction of that discussions. In this paper, we try to understand how two Mathematics teachers of the 3rd cycle of elementary education conduct collective discussions about algebraic tasks. In order to understand this practices, the study follows a qualitative and interpretative approach and is based on the case study of teachers. The results show that the two teachers lead the discussion through three main moments and generate the discourse for the generalization of algebraic ideas. They undertake a set of instructional actions that support the presentation and justification of several strategies and arguments about the colleagues.*

Palavras-chave: *Discussões coletivas; Professor de Matemática; Práticas e conhecimento didático; Álgebra.*

Introdução

A aprendizagem dos alunos com compreensão pressupõe que se envolvam na resolução de tarefas matematicamente significativas, apresentem e justifiquem as suas estratégias, avaliem e argumentem sobre as dos colegas, negociando significados para as ideias partilhadas (Ponte, Mata-Pereira & Quaresma, 2013; Sherin, 2002; Stein, Engle & Hughes, 2008). Neste sentido, a relevância deste estudo resulta das potencialidades que as discussões oferecem para a aprendizagem dos alunos, ao permitir que estes se envolvam na apresentação, justificação, argumentação e negociação de significados para as diversas ideias resultantes do seu trabalho sobre tarefas. Em particular, a participação dos alunos em discussões envolvendo tarefas algébricas favorece o desenvolvimento da capacidade de generalização e simbolização. A relevância deste estudo resulta também das atuais orientações curriculares que referem que "os alunos devem ser incentivados a expor as suas ideias, a comentar as afirmações dos seus colegas e do professor (…) explicando adequadamente o seu raciocínio e apresentando as suas conclusões de forma clara."(Ministério da Educação e Ciência, 2013, p.5). O professor desempenha um papel importante na organização e promoção das aulas que permitam aos alunos envolverem-se em discussões matemáticas coletivas.

Neste texto apresentamos os casos de dois professores de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico (EB), a partir dos quais procuramos compreender como conduzem discussões coletivas relativas ao trabalho dos alunos com tarefas algébricas.

Práticas de discussão

O professor tem um papel importante na promoção de discussões matemáticas que favoreçam a apresentação, justificação, argumentação e negociação de ideias resultantes do trabalho dos alunos com tarefas algébricas. O modelo das cinco práticas de Stein et al. (2008) pode ser uma ferramenta importante no apoio à condução de discussões matemáticas produtivas. A primeira prática – antecipar – pressupõe que o professor antecipe possíveis estratégias de resolução a desenvolver pelos alunos, de eventuais dificuldades que possam enfrentar na resolução das tarefas e formas de as ultrapassar e como pode levar os alunos a atingir o propósito que define para a discussão. A segunda prática – monitorizar – prevê que o professor acompanhe o trabalho dos alunos com vista à identificação das resoluções mais importantes para serem apresentadas à turma, quer em termos de representações usadas quer em termos de conceitos mobilizados. A terceira prática – selecionar – supõe que o professor escolha as estratégias de resolução que pretende que os alunos apresentem e justifiquem, de acordo com o objetivo que tem para a discussão. A quarta prática – sequenciar – está relacionada com a forma como o professor organiza a apresentação das estratégias de resolução, tendo em conta o propósito que pretende alcançar. A quinta prática – estabelecer conexões – pressupõe que o professor leve os alunos a relacionarem conceitos e representações, a justificarem raciocínios e a argumentarem sobre os dos colegas.

Em sala de aula, Sherin (2002) considera que uma discussão coletiva pode ser organizada em três momentos principais: *i)* apresentação; *ii)* comparação e avaliação e *iii)* filtragem. No primeiro momento, os alunos apresentam e justificam as suas estratégias; no segundo, comparam as suas estratégias com as apresentadas pelos colegas e, em simultâneo, avaliam as representações, conceitos e generalizações presentes nas estratégias partilhadas. Os contributos mais importantes são filtrados pelo professor em conjunto com os alunos. Durante o envolvimento dos alunos em discussão, o discurso que se gera sofre um processo de estreitamento de ideias, (Sherin, 2002), com vista à generalização.

Na condução da discussão, o professor realiza um conjunto diversificado de ações instrucionais (Ponte, Mata-Pereira & Quaresma, 2013), com objetivos distintos: *i)* ações de convidar: introduzem o aluno na discussão; *ii)* ações de apoiar/guiar: promovem a continuidade dos alunos na discussão; *iii)* ações de informar/sugerir: apresentam informação e argumentos ou validam respostas; e *iv)* ações de desafiar: levam o aluno a introduzir representações, interpretar e estabelecer conexões, a raciocinar, a argumentar e a avaliar. O envolvimento dos alunos na discussão coletiva resulta das ações que o professor empreende para os levar a apresentar e justificar as suas estratégias de resolução, confrontá-las com as dos colegas, procurando pontos comuns e distintos, justificando essas semelhanças ou diferenças e estabelecer as principais conclusões resultantes da partilha de ideias.

Metodologia de investigação

O estudo apresentado é interpretativo qualitativo e segue a modalidade de estudo de caso (Bogdan & Biklen, 1994). A recolha de dados baseia-se na observação participante de cinco aulas e de dez sessões de trabalho colaborativo onde os professores se integram, nas entrevistas no início (EI) e no fim (EF) do estudo e no relatório individual (RI), apoiados em notas de campo (NC). As entrevistas são de natureza semiestruturada e, neste texto, são usadas para a apresentação dos professores. O relatório individual é apresentado pelos professores no âmbito do Projeto Práticas de discussão matemática no ensino da Álgebra. A análise de dados recorre à análise de conteúdo, com definição de categorias de codificação (Bardin, 1994), apoiada nos quadros teóricos de: Ponte

(2011); Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) e Sherin (2002). Tendo por base esses quadros, cada caso de estudo está organizado em duas secções – apresentação do professor e condução da discussão coletiva – que correspondem a dimensões de análise, para as quais se definiram temas que são concretizados em diversas categorias (Quadro 1). As categorias são aplicadas transversalmente às diversas aulas observadas a cada professor e demais dados recolhidos. Focando o tema ações instrucionais, neste estudo usam-se a categorias *ações de elicitar*, em vez de convidar, *ações de apoiar*, em vez de apoiar/guiar e *ações de informar*, em vez de informar/sugerir, como propostas por Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013), porque a análise preliminar de dados indicou que caraterizam melhor as ações empreendidas pelos professores.

Dimensão	Temas	Categorias definidas
Condução da discussão	Componentes da discussão, processo e conteúdo do discurso	Apresentação; comparação e avaliação e filtragem; conclusão Solicitação e discussão de muitas ideias; filtragem das ideias partilhadas; solicitação e discussão de muitas ideias Conteúdo matemático não filtrado; conteúdo matemático filtrado
	Ações instrucionais	Elicitar; apoiar; informar; desafiar

Quadro 1: Dimensão, temas e categorias de análise

A escolha dos professores baseou-se nos seguintes critérios: estar a lecionar aos 7.º e/ou 8.º anos de escolaridade e manifestar interesse em participar no estudo.

Os casos que se apresentam fazem parte de um trabalho de investigação mais amplo – Projeto Práticas de discussão matemática no ensino da Álgebra (PPDMEA) – que ocorreu em contexto de um trabalho colaborativo e envolveu a primeira autora e o grupo de professores de Matemática de uma escola do EB do centro de Portugal, no qual os professores estavam inseridos. O trabalho colaborativo desenvolveu-se ao longo de nove meses, em dez sessões, com uma duração aproximada de três horas cada uma. Nessas sessões privilegiou-se a reflexão sobre textos e episódios de sala de aula relacionados com as discussões e com o tema da Álgebra (a partir das próprias experiências dos professores) e a preparação, em pequenos grupos, de tarefas, tendo em conta o modelo das cinco práticas de Stein et al. (2008). As tarefas foram selecionadas a partir de um conjunto de propostas introduzidas pela investigadora ou pelos professores e adaptadas, tendo em conta as características das turmas e os conteúdos que estavam a ser abordados em sala de aula e no PPDMEA. Neste texto, apresentamos dados relativos à condução de discussões coletivas sobre as tarefas Palitos (P) – primeira tarefa explorada pelo professor Afonso, Eleição do delegado de turma (EDT) – segunda tarefa explorada pelo professor Jorge e terceira pelo professor Afonso, sendo a segunda no 8.º ano e Funções e futebol (FF) – primeira tarefa explorada pelo professor Jorge e segunda tarefa explorada pelo professor Afonso, embora sendo a primeira no 8.º ano (Anexos 1, 2 e 3, respetivamente), por serem representativas do conjunto de dados. As tarefas foram exploradas pelos professores nas suas aulas, que decorreram em paralelo com o desenvolvimento das sessões do grupo colaborativo, tendo aí sido refletidas.

Apresentação e discussão de resultados

O caso do professor Afonso

O professor Afonso

É um professor com 25 anos de serviço, no momento do estudo, que se encontra a lecionar aos 7.º e 8.º anos de escolaridade. Apesar da sua vasta experiência profissional, não aposta muito na sua formação, pois não costuma frequentar encontros de professores de Matemática nem participar em projetos. Decide participar no PPDMEA porque identifica nos seus temas algumas potencialidades: vê na discussão um meio para os alunos realizarem aprendizagens significativas, em virtude da partilha de ideias: "Muitas vezes da discussão de ideias surgem (...) aprendizagens (...) tem uma aprendizagem completamente diferente, muito mais consolidada. (EI_set 2013).

A Álgebra é outro tema que lhe desperta interesse, por reconhecer que levanta grandes dificuldades aos alunos, fundamentalmente na simbologia que mobiliza: "A Álgebra é um dos temas onde os alunos (...) revelam muitas dificuldades. (...) um tema abstrato (...) É esta vontade em combater estes aspetos inibidores da aprendizagem dos meus alunos que procuro experimentar novas situações, usando metodologias variadas." (RI_jul 2014).

Afonso vê na sua participação no PPDMEA uma forma de desenvolver a sua prática letiva, através da produção de materiais curriculares para as suas aulas e da troca de experiências resultantes da exploração desses materiais com os seus alunos, em particular no que se refere à condução de discussões no ensino da Álgebra.

Condução da discussão

Componentes da discussão, processo e conteúdo do discurso

Afonso inicia a *apresentação* das estratégias com o convite a alunos específicos, ao contrário do que fazia nas suas práticas letivas anteriores. Na tarefa EDT, opta por começar a apresentação das estratégias por um grupo que exibe uma resolução única na turma e que não envolve linguagem algébrica – estratégia por tentativa organizada numa tabela:

> **Professor:** Mas essa tabela como é que surgiu? (...) Foste por tentativas? (...) Começaste ali pela Sandra, tens ali *10*, depois a Francisca *5*, *5*. Mas o total é *20*. E a turma tinha *30* alunos.
> **Aluna:** Depois experimentei a Francisca com *9* que depois dava *7* e a Sandra ficava com *14*. O Lucas ficava com *7*. Depois deu o resultado de *30*.
> **Professor:** Mas tu foste ajustando os valores de modo a que tivesses aí um total de *30*. (Aula Equações_21 jan 2014).

Afonso acompanha de perto a exposição da aluna, apoiando-a na clarificação do seu raciocínio. Contudo, dá-lhe pouca liberdade de expressão e oferece alguns argumentos que deviam ser apresentadas por ela, nomeadamente a razão para ter abandonado a primeira tentativa. É também o professor que induz a identificação do tipo de estratégia seguida pelo grupo, com o tipo de questionamento que promove. Afonso, na reflexão que faz da aula, reconhece a sua dificuldade em articular a sua intervenção com a dos alunos: "Há sempre uma tendência de falar (...) aquilo acho que é um bocadinho mais forte que eu." (4.ª SC_9 jan 2014). Justifica-se pelo desejo que tem em levá-los a clarificar as suas ideias e a atingir o pretendido e admite que essa intenção condiciona, por vezes, a sua prática e origina situações em que a sua intervenção se sobrepõe à dos alunos: "O professor serve ali como um mediador e encaminha as coisas por onde quer não é? Pronto. E ajuda-os no sentido de clarificar." (EI_set 2013).

O professor filtra os contributos mais importantes, em particular reforça a razão para se ter abandonado a primeira tentativa e alerta para a verificação das condições apresentadas na tarefa.

Afonso promove a *comparação e avaliação* de estratégias através da introdução de uma resolução diferente na discussão – escrita de uma equação – desafiando a aluna a relacionar as duas resoluções:

> **Aluna:** Também baseei-me na Francisca e depois isto corresponde aos da, o $x+5$ corresponde aos da Sandra.

> **Professor:** Porque ela dizia que tinha mais *5* votos do que a Francisca, certo? (...)
> **Aluna:** E este é os do Lucas, x mais *5* a dividir por *2*.
> **Professor:** E porquê a dividir por *2*? (...) Queres ver o enunciado?
> **Aluna:** Porque era metade dos votos da Sandra.
> **Professor:** Como a Sandra tinha x mais *5*, não é? Portanto, fizeste x mais *5* sobre *2*, certo? (...) O total que era o número de alunos da turma, certo? (Aula Equações_21 jan 2014).

Com o convite que dirige à aluna, Afonso pretende que os alunos comparem e avaliem duas estratégias distintas, a partir da mesma interpretação da informação dada no enunciado. Durante a sua apresentação, *filtra* os contributos mais importantes para que sejam reconhecidos como ideias válidas pelos outros e questiona, com vista a avaliar os raciocínios apresentados, procurando levá-los a relacionar as linguagens matemática e natural.

O professor encaminha o discurso com vista à clarificação e justificação de raciocínios, já que com a sua primeira intervenção tem como propósito *solicitar muitas ideias* para serem discutidas mas com o evoluir da apresentação, direciona o discurso para ideias específicas – *filtragem das ideias partilhadas*.

A *conclusão* da discussão serve para reforçar, na tarefa EDT, a possibilidade de abordagens diversificadas para a resolução de um mesmo problema:

> **Investigadora:** Reparem que obtiveram 3 equações diferentes. Esta última não tinha denominadores, enquanto as anteriores tinham. (...) Dependendo do que escolhiam. (Aula Equações_21 jan 2014).

O professor, para além de alertar para a existência de diversas formas de se resolver um mesmo problema destaca os conceitos que mobilizam e a razão para o aparecimento de equações diferentes – designação da incógnita.

O professor Afonso conduz a discussão por três momentos principais e gere o discurso, de modo a selecionar os contributos mais importantes. (Figura 1).

Figura 1: Condução da discussão coletiva

Ações instrucionais

Durante a condução da discussão, Afonso recorre às *ações de elicitar* para levar os alunos a apresentar as suas estratégias. Dirige, sempre, o convite a alunos previamente selecionados, ao contrário do que fazia antes da sua participação no PPDMEA. Na tarefa P, opta simplesmente por indicar qual é o aluno a apresentar, talvez pela própria estrutura da tarefa (organizada em várias questões, com um crescente grau de complexidade): "Qual é que é o grupo? (...) Vá Ricardo." (Aula Sequências_4 dez 2013). Na tarefa EDT, o convite já surge acompanhado do pedido de explicação dos seus raciocínios: "Mas explica aos teus colegas como é que pensaram." (Aula Equações_21 jan 2014), possivelmente pelo facto da tarefa não ser tão estruturada como a anterior. Ainda nessa tarefa, recorre a outras ações para promover a apresentação de estratégias e despertar o interesse da turma para a sua análise:

> **Professor:** Talvez, este grupo que fez uma maneira um bocadinho diferente. (...)
> **Aluna:** Nós escolhemos a Sandra, em que x era o número de votos da Sandra.
> **Professor:** x. A vossa colega anterior considerou o x como sendo o número de votos da Francisca, este grupo considerou o x o número de votos da Sandra, portanto o resultado vai ter que dar diferente, certo? (...)
> **Aluna:** O x menos 5 é os votos da Francisca, porque dizia que a Francisca tinha menos 5 votos que a Sandra, ou que a Sandra tinha mais 5 votos que a Francisca.
> **Professor:** Ok, tudo bem.
> **Aluna:** Depois fizemos mais um meio de x, porque o Lucas tinha um meio dos votos da Sandra. (...) (Aula Equações_21 jan 2014).

Afonso, para além de convidar os alunos a mostrar a sua resolução, alerta a turma para a existência de estratégias distintas das já partilhadas – *ações de informar*. Com essa ação, desperta o seu interesse para a análise de uma outra estratégia e comparação com as já apresentadas. Usa ainda estas ações para os incentivar a pensar sobre o resultado da equação. Pretende, assim, negociar com os alunos um certo procedimento: conjunto solução diferente em virtude da escrita de uma equação diferente. Recorre também às *ações de apoiar* para focar a sua atenção no aspeto fundamental da resolução e que a distingue das anteriores, comparando as designações das incógnitas. Essas ações são também usadas para transmitir confiança à aluna que está a apresentar, mostrando concordância com as suas explicações.

Na tarefa P, Afonso apoia-se nas *ações de desafiar* para incitar a aluna a explicar uma estratégia única na turma:

> **Carolina:** Eu fiz esta linha aqui de cima consoante a figura tem *n*, a linha debaixo também.
> **Professor:** Vai aumentando sempre. O *n* é, na primeira tem *1* em cima, na segunda tem *2*, na terceira tem *3*. (...)
> **Carolina:** E no meio, os palitos que estão na vertical eu fiz *n* mais *1*.
> **Professor:** *n* mais *1*. Porquê *n* mais 1? (Aula Sequências_4 dez 2013).

Afonso procura que a aluna justifique os raciocínios para que sejam interpretados pelos colegas, uma vez que é uma estratégia diferente de todas as apresentadas e recorre à análise do padrão configurativo da imagem. À medida que a aluna vai apresentando os seus argumentos, oferece interpretações de forma a clarificá-los para a turma – *ações de apoiar*.

O professor Afonso desempenha um conjunto de ações que levam os alunos a envolverem-se em discussão.

O caso do professor Jorge

O professor Jorge

É um professor que tem no momento do estudo 30 anos de serviço. É também formador na especialidade de tecnologias na sala de aula. Apesar da sua vasta experiência, continua a apostar na sua formação através da participação em projetos. Vê na sua participação no PPDMEA um meio para aprofundar um tema matemático tão importante como a Álgebra e que levanta grandes dificuldades aos alunos, principalmente a simbolização e a generalização: "Mesmo nas regularidades e sequências, eles conseguem perceber às vezes muito bem as regularidades, mas depois quando têm que formalizar aquilo numa expressão, torna-se um bocadinho difícil."

(EI_set 2013). Com o trabalho que desenvolve no PPDMEA, Jorge trabalha colaborativamente com outros colegas, produzindo materiais para explorar com os seus alunos em sala de aula, que favoreçam o seu envolvimento na discussão.

Condução da discussão

Componentes da discussão, processo e conteúdo do discurso

Jorge inicia sempre a discussão com o convite à *apresentação* das estratégias menos poderosas do ponto de vista algébrico. Na tarefa EDT, dirige o convite a um grupo específico de alunos para apresentação de uma estratégia diferente das demais e que se baseia na produção de um texto acompanhada de alguns cálculos numéricos (Figura 2):

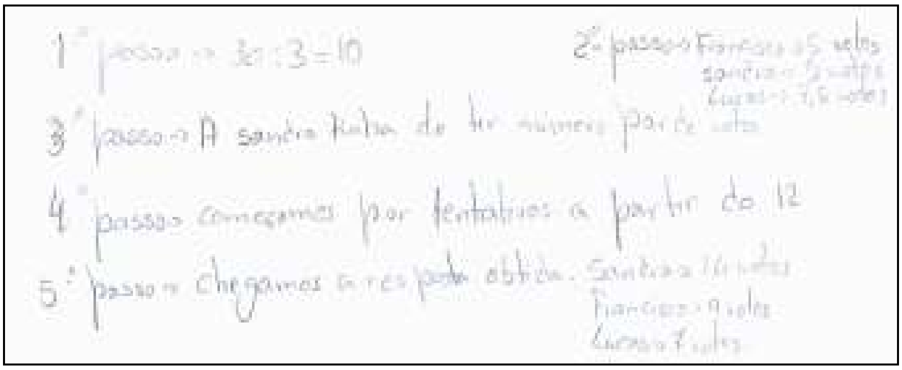


Figura 2. Estratégia de resolução baseada em linguagem natural

Assim que a resolução é exposta no quadro, desafia os alunos a analisarem o segundo passo e a apresentarem uma justificação para a incorreção do raciocínio exposto:

> **Professor:** Vocês começaram pelo 10, foi? (...) Por que é que aquele segundo passo está mal?
> **Mafalda:** Então porque não há meios votos.
> **Professor:** A conclusão está correta, mas esse segundo passo não está muito correto. (...)
> **Aluno:** Não podemos ter 7 votos e meio.
> **Professor:** Exatamente. (Aula_Equações_jan 2014).

Embora a aluna responda à sua solicitação, Jorge continua a insistir na ideia da existência de um erro na resolução, de modo a levá-los a procurarem outra justificação, sem deixar de valorizar os seus contributos. Decide focar mais a atenção dos alunos, levando-os a pensar sobre os votos específicos da Francisca e da Sandra:

> **Professor:** Qual era a relação entre os votos da Sandra e da Francisca?
> **Mafalda:** 5 votos de diferença.
> **Professor:** Então e quantos estão ali no quadro?
> **Aluno:** 10.
> **Professor:** (...) Pronto, mas o que o grupo pensou foi o seguinte: bem, pelo menos eu já sei que a Sandra nunca pode ter um número ímpar de votos,

> portanto e já restringiu nos 30 votos (...) depois fizeram por tentativas. (Aula_Equações_jan 2014).

Essa opção conduz os alunos à conclusão pretendida e à apresentação de várias justificações para o raciocínio do segundo passo. Jorge tem como objetivo alertá-los para a importância da escrita ser matematicamente rigorosa e exprimir claramente os seus raciocínios, recorrendo à negociação da interpretação de um argumento apresentado pelos alunos. O discurso instrutivo de Jorge mostra que, numa primeira fase, pretende ter muitas ideias para serem discutidas a partir da apresentação da estratégia de um grupo – *solicitação e discussão de muitas ideias* – não se preocupando, assim, com o conteúdo das mesmas – *conteúdo matemático não filtrado*. Contudo, mais tarde, oferece um raciocínio para analisarem – *filtragem* – que leva à *solicitação e discussão de mais ideias*. Nesse momento, tem propósitos explícitos para debater certos raciocínios, com o objetivo de alertar para o rigor da escrita matemática – *conteúdo matemático filtrado*.

Avança, de seguida, para a *apresentação* das estratégias que envolvem linguagem matemática formal, com recurso explícito a conceitos e procedimentos matemáticos:

> **Professor:** Para perceberem que a abordagem mesmo sendo feita com equações, nem sempre pode ser igual (...) Qual foi a diferença entre a resolução daquele grupo para este grupo?
> **Filipa:** Nós aqui pusemos o *x* na Francisca e eles puseram na Sandra.
> **Professor:** Obviamente que se a minha incógnita, o meu *x* é posto numa pessoa diferente, todos os outros também alteram. (...) aqui o *x* vai representar os votos da Sandra, ali foi os da Francisca. (...) e será que havia possibilidades de fazer uma equação daquelas sem denominadores? (Aula_Equações_jan 2014).

Com o objetivo de levar os alunos a *comparar* estratégias que recorrem ao mesmo conceito matemático, Jorge alerta-os para a existência de uma estratégia distinta das já apresentadas. Embora incentive a aluna a explicar a sua estratégia, rapidamente pega na sua fala e conclui todas as explicações e comparações que deviam ter sido oferecidas por ela. Jorge reconhece que tem dificuldade em articular a sua intervenção com a dos alunos, acabando por sobrepor o seu discurso, mesmo sem ser a sua intenção: “Quando dá conta já está a ultrapassar o aluno, eu isso reconheço que é um defeito que, às vezes, pelo menos eu tenho, não nego.” (EF_jun 2014). Neste caso, justifica-se com a vontade de atingir um dos objetivos definidos para a aula – escrita de uma equação não envolvendo o uso de denominadores: “Porque uma pessoa tem uma expectativa quando vai para uma aula” (EI_set 2013).

Na tarefa FF, Jorge usa a *conclusão* da discussão para evidenciar que procedimentos algébricos devem adotar na resolução analítica de uma questão:

> Reparem o que o Tomás fez: pegou na expressão, pegou no ponto (9,7). Não se esqueçam que este é o objeto e aquele é a sua imagem e foi à expressão e substituiu (...) Fez a conta (...) passou o *b* para o lado de lá e quando passa de um lado para o outro troca o sinal (...) e tirou o valor de *b*. Estão a ver? Isto é o que é preciso fazer algebricamente. (Aula_Funções_jan 2014).

Jorge sente a necessidade de promover este tipo de conclusão, porque reconhece que os alunos apresentam dificuldades no trabalho com as Funções, em particular no uso da linguagem associada a este tema: "Ali o objeto e imagem, eles confundem aquilo sempre." (3.ª SC_dez 2013). Pretende, assim, contribuir para a clarificação dessas ideias junto dos alunos e fomentar o uso da terminologia associada a este tópico. Procura, também, salientar que é o procedimento matemático que devem usar em resoluções analíticas, interpretando-o em conjunto com os alunos e explicando todos os passos seguidos.

O professor Jorge conduz a discussão por três momentos fundamentais e gere o discurso com vista a garantir que são partilhadas ideias importantes (Figura 1 apresentada anteriormente).

Ações instrucionais

Jorge recorre a diferentes tipos de ações instrucionais para fomentar a discussão coletiva. Recorre às de *elicitar* para promover o início da discussão com a apresentação das estratégias desenvolvidas pelos alunos. Essas ações cumprem objetivos distintos, em função da natureza da tarefa e dos seus propósitos. Na tarefa FF, atendendo à particularidade de ser explorada com o recurso à calculadora gráfica, inicia a discussão solicitando as ilações que podem estabelecer a partir do trabalho desenvolvido: "O que é que se reteve deste segundo desafio? Alguém é capaz de dizer? (Aula_Funções_jan 2014). Nas restantes discussões que fomenta, escolhe os alunos que quer convidar para iniciar a apresentação das estratégias e indica o que pretende que seja mostrado e explicado à turma: "Quero que passes exatamente esses passos que tens aí. Depois explicas mais ou menos como é que pensaram." (Aula_Equações_jan 2014). Com essa ação, evidencia o que realmente é importante de ser analisado. Na tarefa FF, recorre às ações de apoiar, informar e desafiar para continuar a discussão que se gera em torno da identificação da ordenada na origem:

> **Professor:** O que se pretendia aqui era saber o valor de *b* sabendo que aquela trajetória batia naquele ponto que ali estava (...) Como é que eu posso saber qual é o valor de *b*? Alguns eu já vi aí que tentaram por tentativas, foram experimentando até dar com a calculadora mas era sem a calculadora.(...)
> **Marcelo:** Ó professor, não sei explicar.
> **Professor:** Porque *9* era o valor de quê?
> **Marcelo:** Do ponto.
> **Professor:** Da abcissa que é o valor de quê? Que interseta o valor de quê?
> **Marcelo:** Do *y*.
> **Professor:** Estão cá as contas, mas não se percebem muito bem. O que é que ele esteve a fazer? Ele esteve a pôr ali o *9* no lugar do *x*, que era o objeto *9*. (...) *9* vezes *2* deu *18* depois dividiu por *3* que deu quanto? Deu *6*. Deste lado dava quanto? Deu *7*. *7* e ali *6*. *7* menos *6* dá o valor do *b* que é *1*, só que aquilo está escrito de uma maneira muito estranha. Tomás, fizeste aquilo como deve ser? (...) Este é o raciocínio que vocês vão ter que fazer algebricamente quando é necessário. (Aula_Funções_jan 2014).

Jorge começa por recordar o propósito da tarefa para, de seguida, desafiar um aluno a apresentar a justificação da estratégia seguida na sua resolução – *ações de desafiar*. Esse convite surge depois de informar a turma da existência de uma estratégia que não era válida – *ações de informar*. Perante a dificuldade do aluno em expor o seu raciocínio, recorre às ações de apoiar para o ajudar a iniciar a sua explicação. Foca a sua atenção no valor que representa a ordenada na origem, levando-o a interpretar esse parâmetro – *ações de apoiar*. Aproveita as respostas do aluno para as repetir, mas recorrendo ao uso de terminologia correta, de forma a que se habituem a usar progressivamente vocabulário adequado a cada situação – *ações de apoiar*. De seguida, sugere uma interpretação para a resolução do aluno – *ações de apoiar* – reforçando a validade do raciocínio e a pouca clareza na sua apresentação. Dessa forma, insta outro aluno a apresentar uma resolução adequada e acessível, destacando que é a estratégia matematicamente correta. Jorge desempenha um conjunto de ações que promovem o envolvimento dos alunos em discussão.

Considerações finais

Os professores, apesar de terem uma vasta experiência profissional, decidem participar no PPDMEA por reconhecerem potencialidades nos temas do projeto e oportunidade para aprofundar as suas práticas.

Conduzem a discussão coletiva por três momentos principais: i) apresentação; ii) comparação, avaliação e filtragem; e iii) conclusão, tal como é sugerido por Sherin

(2002). Os professores iniciam a apresentação das estratégias pelas que surgem de forma isolada na turma e envolvem linguagem matemática informal, avançando posteriormente para as que mobilizam linguagem algébrica. Acompanham a exposição dos alunos mas reconhecem dificuldades do desempenho dessa ação, acabando por introduzir, no discurso da aula, informação que devia ser apresentada por eles. Promovem a comparação e avaliação de estratégias através do convite à análise e justificação de resoluções distintas, no caso de Afonso e da análise de raciocínios incorretos, no caso de Jorge. Afonso usa a conclusão da discussão para evidenciar a possibilidade de abordagens diversificadas e Jorge para destacar os procedimentos matemáticos a usar na resolução analítica de uma questão. Os professores gerem o discurso com vista à clarificação e justificação de raciocínios e de modo a evidenciar a necessidade da transição para a linguagem algébrica.

Os professores recorrem a quatro tipos de ações instrucionais para envolver os alunos em discussão. Usam as de elicitar para convidar os alunos a apresentar e justificar as suas estratégias. Atendendo possivelmente à estrutura da tarefa e ao momento em que promovem a discussão, os professores nas tarefas P e FF convidam somente os alunos a apresentar as suas estratégias, enquanto nas discussões seguintes já solicitam a explicação das estratégias desenvolvidas. Os professores recorrem às ações de informar para alertar para a existência de estratégias distintas (caso de Afonso) e raciocínios incorretos que devem ser analisados (caso de Jorge) e às ações de apoiar para focar aspetos importantes, ajudar os alunos a avançar nas suas explicações e repetir argumentos, usando linguagem correta. Afonso usa as ações de desafiar para levar os alunos a relacionar a solução de uma equação com a resposta ao problema e Jorge para promover a explicação de raciocínios.

De um modo geral, os professores, têm percursos profissionais bastante diferentes, em especial no que se refere ao investimento em formação. Possivelmente, este aspeto tem impacto nas suas práticas de discussão. Focando o momento da discussão comparação, avaliação e filtragem verifica-se que enquanto o professor Afonso se restringe ao estabelecimento de relações entre as diferentes resoluções, o professor Jorge destaca os conceitos mobilizados, realçando que utilizando o mesmo conceito surgem estratégias diferentes. Jorge promove, ainda, a comparação através da análise de raciocínios incorretos. Também no momento da conclusão, enquanto o professor Afonso conclui que o mesmo problema pode ter abordagens diversificadas, o professor Jorge alerta para os procedimentos algébricos a usar em resoluções analíticas. No que se refere às ações que empreendem, também se reconhecem algumas diferenças que podem estar relacionadas com o percurso profissional dos professores. Jorge usa as ações de apoiar para ajudar os alunos nas suas explicações, focando aspetos importantes; repetir argumentos, usando terminologia correta e para sugerir interpretações para as resoluções dos alunos, enquanto Afonso recorre às ações de apoiar para focar aspetos importantes e transmitir confiança aos alunos que estão a apresentar. Nas ações de informar também se reconhecem intencionalidades diferentes na atuação dos professores, já que Afonso recorre a este tipo de ações para alertar para a existência de estratégias diferentes e Jorge para avisar a turma da existência de estratégias que não são válidas.

Referências bibliográficas

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Ministério da Educação e Ciência. (2013). Programa de Matemática para o Ensino Básico. Lisboa.

Ponte, J. P. (2011). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. En N. Planas (Ed.), *Educación matematica: Teoría, critica y prática* (pp. 83-98). Barcelona: Graó.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, *22* (2), 55-81.

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: developing a discourse community in a mathematics classroom. Journal of Mathematics Teacher Education, 5, 205-233.

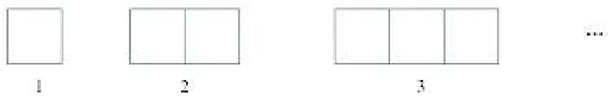
Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*, 313-340.

ANEXOS

Anexo 1:

Tarefa: Palitos

Considera a seguinte sequência de figuras construídas com palitos que continua da forma que a imagem sugere:



1. Quantos palitos terá a 5.ª figura? E a 15.ª?

2. Será possível construir uma figura desta sequência com 76 palitos? Explica como pensaste.

3. Escreve uma regra que te permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explica como a obtiveste.

4. A Aurora, que também resolveu esta tarefa, diz que o número de palitos de qualquer figura, T, desta sequência pode ser obtido a partir da seguinte regra:

$$\boldsymbol{T = 4\times n - (n - 1)}$$

Explica como poderá ter pensado.

Como se relaciona esta regra com a que escreveste na questão número 3?

Anexo 2:

Tarefa 1 – "Eleição para o delegado de turma"

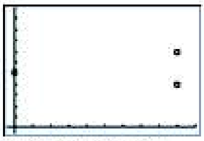
A diretora de turma que coordenou o processo de eleição do delegado de turma, informou no final que:

- ✓ Os 30 alunos da turma votaram e não houve votos brancos ou nulos;
- ✓ Apenas três alunos receberam votos: a Francisca, o Lucas e a Sandra;
- ✓ A Sandra recebeu mais cinco votos que a Francisca;
- ✓ O Lucas recebeu metade dos votos que recebeu a Sandra.

Quem ganhou as eleições? Com quantos votos?

Não te esqueças de apresentar e explicar o teu processo de resolução.

Anexo 3: Funções e futebol



Temos na escola um candidato a grande guarda-redes!
Para que ele consiga esse objectivo é preciso que treine muito.
Vamos ajudá-lo!
Comecemos por preparar o terreno de jogo.
Como mostra a figura ao lado, na tua calculadora gráfica estão marcados os pontos A(9,4) e B(9,7) que serão os postes das balizas e o ponto C(0, 5) o local onde o jogador fará o primeiro remate à baliza.

Primeiro vamos treinar os remates à baliza.

A trajetória destes remates está associada a uma reta definida por uma função, do tipo $y = mx + b$, em que **m** representa a inclinação da reta (***declive***) e **b** o ponto onde esta interseta o eixo Oy (***ordenada na origem***).

Por exemplo, experimenta fazer o primeiro remate utilizando a função

$$y = 0{,}6x + 5 \quad (m=0{,}6 \text{ e } b=5)$$

O que aconteceu? Acertaste na baliza?

1º desafio:

Encontra uma expressão para a função de modo que o remate acerte na baliza...

Já conseguiste?

Desenha e regista a solução encontrada.

y = __________

Será que esta é a única solução?

Se encontraste outra, regista-a também a seguir.

y = __________

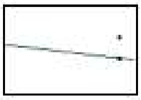
Ok, estás pronto para novos desafios?

A pontaria está afinada?
O treino vai começar a aquecer!

4º desafio:

a) Desta vez, jogador faz um remate muito forte mas a pontaria não foi a melhor e acertou num poste, conforme mostra a figura. Sabe-se que a expressão da trajetória do remate foi:

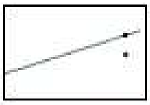
$$y = -\frac{2}{9}x + 6$$



Sem utilizares a calculadora, indica a posição C de onde o rematador chutou.
Confirma o resultado com a calculadora.

b) A pontaria está afinada e no remate seguinte acertou, desta vez, no outro poste, com a trajetória dada pela expressão

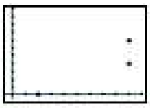
$$y = \frac{2}{3}x + b$$



Determina, **sem utilizares a calculadora**, o local em que foi executado o remate.
Confirma com a calculadora.

c) Um jogador vai agora rematar duas bolas do local C(2,0) com as seguintes trajetórias definidas pelas funções:

$y_1 = 0{,}5x - 1$
e
$y_2 = x - 2$



Sem utilizares a calculadora, verifica se alguma delas acerta num dos postes?
Confirma os resultados com a calculadora.

2º desafio:

O rematador, muda de sítio cada vez que faz um remate. Para cada localização do ponto C, a seguir indicado, determina a solução para que a bola acerte na baliza.

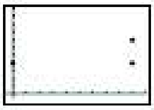
a) C(0,1)

y = __________

b) C(0,8)

y = __________

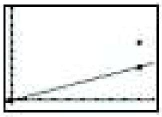
c) C(0,4)



y = __________

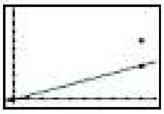
3º desafio:

Num dos remates, o jogador colocado em C(0,0), rematou segundo a expressão $y = \frac{4}{9}x$ e acertou num dos postes.



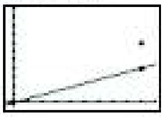
Confirma utilizando a calculadora.
Descobre a expressão da função de modo que o remate tenha uma trajetória paralela à dada e indica em cada caso o local C em que o jogador rematou, de modo que a bola:

a) entre na baliza



y = __________ C(,)

b) bata no outro poste



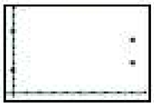
y = __________ C(,)

Finalmente o último teste às capacidades do guarda-redes: dois jogadores a chutarem ao mesmo tempo!

5º desafio

Um remata do ponto C(0,3) e outro do ponto D(0,8). Ambos acertam na baliza.
Descobre uma expressão para cada uma das funções de modo que:

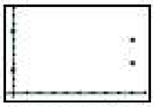
a) as trajetórias dos remates não se cruzem antes de cada bola entrar na baliza.



y = __________

y = __________

b) as trajetórias dos remates se cruzem antes de as bolas entrarem na baliza.



y = __________

y = __________

6º desafio:

Nos últimos remates do treino, os dois jogadores, colocados em sítios diferentes, remataram ao mesmo tempo e as bolas seguiram trajetórias definidas pelas funções:

$$y_1 = 2x \quad \text{e} \quad y_2 = -2x+8$$

Curiosamente, as bolas acabaram por bater uma na outra.
Verifica, **sem utilizares a calculadora**, em qual dos seguintes pontos as bolas chocaram:

a) X(3,5) b) Y(2,4) c) Z(2,2)