



**Politécnico
de Viseu**

Escola Superior
de Tecnologia
e Gestão de Viseu

Modelação numérica de vigas de betão armado com diferentes armaduras: varões de aço e de GFRP

Thiago Felipe Baroni

Dissertação

Mestrado em Engenharia de Construção e Reabilitação

Trabalho efetuado sob a orientação de
Professor Doutor Paulo Alexandre da Silveira Costeira Marques da Silva
Professor Doutor António Ventura Gouveia
Professora Doutora Paôla Regina Dalcanal

Junho de 2026



**Politécnico
de Viseu**

Escola Superior
de Tecnologia
e Gestão de Viseu

Modelação numérica de vigas de betão armado com diferentes armaduras: varões de aço e de GFRP

Thiago Felipe Baroni

Dissertação

Mestrado em Engenharia de Construção e Reabilitação

Trabalho efetuado sob a orientação de

Professor Doutor Paulo Alexandre Silveira Costeira Marques Silva
Professor Doutor António Ventura Gouveia
Professora Doutora Paôla Regina Dalcanal

Junho de 2026

*Dedico este trabalho à minha família,
pelo apoio incondicional, pela força constante
e por acreditarem em mim, mesmo quando eu duvidei.
Por cada palavra de incentivo e cada gesto de amor
que tornaram esta conquista possível.*

*Dedico também este trabalho ao sonho que um dia pareceu distante,
aos dias difíceis que me ensinaram a persistir
e às pessoas que, mesmo em silêncio, acreditaram em mim.
Que esta conquista seja a prova de que cada passo,
por menor que pareça, nos aproxima do impossível.*

AGRADECIMENTOS

Este trabalho marca o fim de um ciclo — tecido por caminhos incertos, desafios superados e incontáveis aprendizados. É o resultado de uma busca constante pelo conhecimento e pela descoberta do mundo.

Tudo começou com um jovem ainda perdido, que, entre dúvidas e sonhos, encontrou o seu rumo nas exatas. Ingressar no curso de Engenharia Civil foi o primeiro passo de uma longa jornada, repleta de crescimento e partilhas. Ao longo desse percurso, tive o privilégio de conhecer pessoas que se tornaram mais que colegas tornaram-se amigos, companheiros de estrada, que tornaram essa caminhada mais leve e significativa. A vocês, deixo minha sincera gratidão.

A dupla diplomação foi uma oportunidade que transformou não apenas a minha formação, mas também a minha visão de mundo. Foi o passaporte para atravessar fronteiras, conhecer novas culturas e continuar a buscar o saber. Portugal acolheu-me com braços abertos e tornou-se o cenário deste capítulo final, onde encerro este ciclo com o coração cheio de gratidão.

Primeiramente, agradeço a Deus pela força, pelas oportunidades, pelos caminhos abertos e por tornar possível tudo aquilo que um dia foi apenas sonho.

À minha família, o meu mais profundo agradecimento. À minha mãe, Maria Inês, meu alicerce, meu porto seguro; ao meu pai, Itacir Celeste, exemplo de força e de sabedoria; e ao meu irmão, Bruno, que me mostrou que o mundo é vasto e cheio de possibilidades. Sem vocês, nada disso teria sentido.

Agradeço à Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), pela formação sólida e pela oportunidade de representar o que há de melhor na engenharia. Agradeço também ao Instituto Politécnico de Viseu (IPV), por me receber com generosidade e permitir que eu concluísse aqui esta etapa tão importante da minha vida.

Aos meus orientadores Paulo Costeira, António Ventura e Paôla Dalcanal, deixo a minha sincera gratidão pela orientação, pela paciência e por acreditarem neste trabalho.

Por fim, a todas as pessoas que cruzaram o meu caminho, que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização deste sonho o meu mais sincero obrigado. Cada gesto, cada palavra e cada encontro fizeram parte desta história.

RESUMO

A constante inovação no desenvolvimento de materiais tem introduzido novos desafios à engenharia, exigindo a adaptação de métodos de análise e dimensionamento a novas soluções construtivas. Com isso, os varões de GFRP (polímero reforçado com fibra de vidro) têm surgido como uma alternativa promissora, apresentando vantagens como elevada resistência mecânica e à corrosão. No entanto, por se tratar de um material relativamente recente no contexto estrutural, ainda são necessários estudos que permitam compreender de forma mais aprofundada o seu comportamento global. O presente estudo tem como objetivo a modelação numérica, através do Método dos Elementos Finitos (MEF), de vigas de betão armado com diferentes tipos de armadura, aço e GFRP, submetidas à flexão. Como caso de estudo utilizou-se o trabalho experimental desenvolvido por Teixeira (2024) na instituição UTFPR-PB. Foram desenvolvidas modelações e simulações numéricas para vigas com armaduras de aço e de GFRP. A modelação das vigas de betão com armaduras de aço serviu para a definição da malha e da calibração das leis constitutivas do betão, incluído os modelos de *tension softening* e de *tension stiffening*. No caso das vigas com armaduras de GFRP, foi ainda analisado o comportamento da interface betão-GFRP. Para tal, foram realizadas várias simulações numéricas com o objetivo de avaliar a influência das leis constitutivas adotadas para o betão e para a interface betão-GFRP. As análises efetuadas permitiram reproduzir de forma satisfatória a evolução da curva carga–deslocamento e o desenvolvimento do padrão de fendilhação observado experimentalmente, tendo em conta as limitações associadas aos dados disponíveis. Foi também possível observar que os parâmetros que mais influenciaram o comportamento numérico destas vigas, pela sua incerteza, foram o módulo de elasticidade dos varões de GFRP, a tensão máxima de aderência, τ_m , e o escorregamento associado a essa tensão máxima, s_m . A resposta numérica que melhor se ajustou à curva média experimental foi obtida considerando-se o modelo mBPE baseado no trabalho de Cosenza *et al.* (1997), para varões de superfície lisa.

Palavras-chave: Modelação numérica; GFRP; Aço; Vigas de betão armado; Aderência betão-GFRP; Método dos elementos finitos.

ABSTRACT

Constant innovation in material development has introduced new challenges to engineering, requiring the adaptation of analysis and design methods to new construction solutions. In this context, GFRP (Glass Fiber Reinforced Polymer) bars have emerged as a promising alternative, offering advantages such as high mechanical strength and corrosion resistance. However, as this is a relatively recent material in structural applications, further studies are still needed to achieve a deeper understanding of its overall behaviour. The present study aims to perform the numerical modelling using the Finite Element Method (FEM), of reinforced concrete beams with different types of reinforcement, steel and GFRP, subjected to bending. The experimental tests conducted by Teixeira (2024) at UTFPR-PB was used as a case study. Numerical models and simulations were developed for beams reinforced with steel and GFRP. The modelling of concrete beams with steel reinforcement served to define the mesh and calibrate the constitutive laws of the concrete, including the *tension softening* and *tension stiffening* models. In the case of GFRP-reinforced beams, the bond behaviour between concrete and GFRP was also analysed. Several numerical simulations were performed to evaluate the influence of the constitutive laws adopted for the concrete and for the concrete-GFRP interface. The analyses carried out allowed for a satisfactory reproduction of the evolution of the load–displacement curve and the development of the cracking pattern observed experimentally, taking into account the limitations associated with the available data. It was also observed that the parameters that most influenced the numerical behaviour of these beams, due to their uncertainty, were the modulus of elasticity of the GFRP bars, the maximum bond stress, τ_m , and the slip associated with that maximum bond stress, s_m . The numerical response that best fit the experimental average curve was obtained by considering the mBPE model for smooth-surfaced bars, according to Cosenza *et al.* (1997) proposal.

Keywords: Numerical modeling; GFRP; Steel; Reinforced concrete beams; Concrete-GFRP bond; Finite Element Method.

ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS	III
RESUMO	V
ABSTRACT.....	VII
ÍNDICE GERAL.....	IX
ÍNDICE DE TABELAS.....	XI
ÍNDICE DE FIGURAS	XIII
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 ENQUADRAMENTO.....	2
1.2 OBJETIVOS DA INVESTIGAÇÃO.....	3
1.3 ABORDAGEM METODOLÓGICA.....	3
1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO.....	4
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	7
2.1 VARÕES DE POLÍMEROS REFORÇADOS COM FIBRA (FRP).....	7
2.2 COMPORTAMENTO À FLEXÃO DE VIGAS DE BETÃO ARMADO	13
2.2.1 VIGAS COM ARMADURA DE AÇO.....	13
2.2.2 VIGAS COM ARMADURA DE GFRP	14
2.3 LEIS CONSTITUTIVAS	18
2.3.1 BETÃO	19
2.3.2 AÇO.....	22
2.3.3 GFRP.....	24
2.3.4 ADERÊNCIA BETÃO-GFRP	25
2.3.5 QUANTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS DA LEI DE ADERÊNCIA- ESCORREGAMENTO	34
2.4 MODELAÇÃO NUMÉRICA DE VIGAS DE BETÃO COM VARÕES DE GFRP	39
3 CASO DE ESTUDO: CAMPANHA EXPERIMENTAL NA UTFPR.....	45
3.1 DESCRIÇÃO DA CAMPANHA EXPERIMENTAL	45
3.1.1 CARACTERÍSTICAS DOS MATERIAIS.....	47
3.2 RESULTADOS DA CAMPANHA EXPERIMENTAL	51
4 MODELAÇÃO NUMÉRICA DAS VIGAS DE BETÃO ARMADO.....	55
4.1 MALHA E LEIS CONSTITUTIVAS DOS MATERIAIS	56
4.2 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DA MALHA.....	61
4.2.1 ANÁLISE LINEAR.....	61
4.2.2 ANÁLISE NÃO-LINEAR.....	62
4.3 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	65

5	MODELAÇÃO NUMÉRICA DAS VIGAS DE BETÃO COM ARMADURAS DE GFRP.....	71
5.1	MALHA E LEIS CONSTITUTIVAS	71
5.2	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS E ANÁLISE DOS RESULTADOS	74
5.2.1	NUMÉRICO A.....	74
5.2.2	NUMÉRICO B.....	76
5.2.3	NUMÉRICO C.....	79
5.2.4	COMPARAÇÃO DOS NUMÉRICOS A, B E C	81
5.2.5	NUMÉRICOS D E E.....	82
5.2.6	NUMÉRICOS F E G.....	84
6	CONCLUSÃO	93
6.1	DESENVOLVIMENTOS FUTUROS.....	95
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	97
	ANEXO A	107
	ANEXO B	113

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1: Propriedades típicas das fibras para compósitos de FRP (Fib Bulletin 40, 2007).....	8
Tabela 2: Propriedades requeridas para caracterização do GFRP (adaptado ABNT NBR 17201-1:2025).	10
Tabela 3: Comportamento de vigas a flexão com armaduras de aço e GFRP.....	16
Tabela 4: Propostas sugeridas para determinação da tensão máxima de aderência.	35
Tabela 5: Parâmetros que definem a relação aderência-eskorregamento de varões de GFRP para o modelo mBPE (Cosenza <i>et al.</i> , 1997).....	38
Tabela 6: Parâmetros α e β propostos por Nepomuceno <i>et al.</i> (2021) para estimar a tensão máxima de aderência.	39
Tabela 7: Características do betão.	48
Tabela 8: Dados adotados de acordo com o diagrama tensão-deformação do aço.	49
Tabela 9: Propriedades de tração dos varões de armadura de FRP e de aço (Fib Bulletin 40, 2007).....	50
Tabela 10: Cargas máximas e deslocamentos nas vigas VA e VG (adaptado de Teixeira, 2024).....	51
Tabela 11: Lei bilinear para o <i>Tension Softening</i> e <i>Tension Stiffening</i> ajustada ao betão das vigas de aço.	64
Tabela 12: Lei bilinear para o <i>Tension Softening</i> e <i>Tension Stiffening</i> ajustada ao betão das vigas de GFRP.....	72
Tabela 13: Parâmetros para a determinação da tensão máxima de aderência.	73
Tabela 14: Valores da tensão máxima de aderência e do eskorregamento associado. ...	73
Tabela 15: Valores do eskorregamento associado às tensões máximas de aderência. ...	73
Tabela 16: Resumo das simulações numéricas consideradas no presente estudo.	74
Tabela 17: Modelo de interface do FEMIX - Numérico B.	78
Tabela 18: Modelo de interface do FEMIX - Numérico C.	80

Tabela 19: Modelo de interface do FEMIX - Numérico F.	86
Tabela 20: Modelo de interface do FEMIX - Numérico G.	88

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Tipos de varões de FRP: (a) GFRP, (b) CFRP, (c) AFRP, (d) BFRP, (e) SFRP e (f) HFRP (Feng <i>et al.</i> , 2022).....	9
Figura 2: Diagrama tensão-deformação para diferentes materiais (Ineia <i>et al.</i> 2021). ..	11
Figura 3: Superfícies de varões de FRP (Başaran <i>et al.</i> , 2022).	12
Figura 4: Compressão-tração de vigas em flexão (Djamaluddin, 2013).	14
Figura 5: Comportamento à flexão de vigas de betão armado com armaduras de aço (Way <i>et al.</i> , 2025).	14
Figura 6: Curvas carga-deslocamento de vigas de betão armado de aço e de GFRP (Muhammad, 2023).	16
Figura 7: Resposta tensão-deformação do betão sob carga de compressão uniaxial (Sena-Cruz, 2005).....	19
Figura 8: Resposta tensão-deformação do betão sob carregamento uniaxial de tração (Sena-Cruz, 2005).....	21
Figura 9: Diagrama de retenção de tensões de tração para o betão simples (Barros <i>et al.</i> , 1994).....	22
Figura 10: Modelos para representar a retenção de tensões de tração (Seema e Zandonini, 2021).	22
Figura 11: Modelo constitutivo uniaxial da armadura de aço (Sena-Cruz, 2005).....	23
Figura 12: Modelo do comportamento de varões de GFRP (Markou e AlHamaydeh, 2017).....	24
Figura 13: Modelo Malvar (Wang e Qiao, 2024).....	27
Figura 14: Modelo BPE (Wang e Qiao, 2024).	29
Figura 15: Modelo mBPE (Wang e Qiao, 2024).	30
Figura 16: Modelos CMR e Tighiouart <i>et al.</i> ($\tau_u = \tau_1 = \tau_m$; $s_u = s_r$) (Wang <i>et al.</i> , 2023).....	32

Figura 17: Modelo Gao Danying <i>et al.</i> (Wang e Qiao, 2024).	33
Figura 18: Proposta de modelação da interface utilizada (Barros <i>et al.</i> , 2021).	33
Figura 19: Processo de análise pelo método dos elementos finitos (Silva, 2022).	41
Figura 20: Comparação entre os resultados experimentais e numéricos para as vigas armadas com varões de aço e de GFRP (Vaz <i>et al.</i> , 2023).	43
Figura 21: Esquema de ensaio à flexão de viga de betão armado (Teatini, 2016).	45
Figura 22: Seção transversal das vigas com varões de aço (A) e GFRP (B), dimensões em cm (Teixeira, 2024).	46
Figura 23: Diagrama tensão-deformação do aço CA50S (ArcelorMittal, 2022).	49
Figura 24: Carga-deslocamento a meio vão das vigas VA e VG (Teixeira, 2024).	52
Figura 25: Carga-deslocamento a meio vão das vigas VA (Média, envolvente superior e inferior).	53
Figura 26: Carga-deslocamento a meio vão das vigas VG (Média, envolvente superior e inferior).	53
Figura 27: Representação das malhas de discretização do betão: Malha 1; Malha 2; Malha 3.	58
Figura 28: Diagrama tensão–deformação trilinear para simular a propagação de fissuras em modo I de fratura – $\sigma_{n,1cr} = f_{ct}$, $\sigma_{n,2cr} = \alpha_1 \sigma_{n,1cr}$, $\sigma_{n,3cr} = \alpha_2 \sigma_{n,1cr}$, $\varepsilon_{n,2cr} = \xi_1 \varepsilon_{n,ucr}$, $\varepsilon_{n,3cr} = \xi_2 \varepsilon_{n,ucr}$ (Ventura-Gouveia, 2011).	59
Figura 29: Resposta do betão à tração: <i>Tension softening</i> e <i>Tension stiffening</i> (Nayal & Rasheed, 2006).	60
Figura 30: Divisão da altura da viga, (A) <i>Tension Stiffening</i> e (B) <i>Tension Softening</i> . .	60
Figura 31: Comparação entre o valor teórico e os valores numéricos para as três malhas.	62
Figura 32: Representação das malhas com elementos de barra, Malha 1; Malha 2; Malha 3.	62
Figura 33: Lei de tensão de tração - abertura de fenda (<i>Tension Softening</i>).	63

Figura 34: Resultados numéricos das malhas considerando o efeito <i>Tension Softening</i> , de acordo com o <i>fib</i> Model Code 2020, para a viga VA.	64
Figura 35: Resultados experimentais e numérico considerando o efeito do <i>Tension Softening</i> da viga VA.....	65
Figura 36: Lei de tensão de tração - abertura de fenda (<i>Tension Stiffening</i>).	66
Figura 37: Resultados experimentais e numérico considerando o efeito do <i>Tension Stiffening</i> na viga VA.	67
Figura 38: Padrão de fendilhação na viga VA: (a) Experimental; (b) Numérico.....	67
Figura 39: Extensões correspondentes a vários níveis de carga ao longo de metade da viga VA.	68
Figura 40: Tensões correspondentes a vários níveis de carga ao longo de metade da viga VA.	68
Figura 41: Resultados Experimentais e Numérico A para as vigas VG.....	75
Figura 42: Padrão de fendilhação: (a) Experimental (VG); (b) Numérico A.....	76
Figura 43: Modelos mBPE e de interface do FEMIX, considerando $\tau m1$ e $le = 200$ mm (20ϕ).	77
Figura 44: Resultados Experimentais e Numérico B para as vigas VG.....	78
Figura 45: Padrão de fendilhação: (a) Experimental; (b) Numérico B.....	79
Figura 46: Modelos mBPE e de interface do FEMIX, considerando $\tau m2$ e $le = 200$ mm (20ϕ).	79
Figura 47: Resultados Experimentais e Numérico C para as vigas VG.....	80
Figura 48: Padrão de fendilhação: (a) Experimental; (b) Numérico C.....	81
Figura 49: Resultados Experimentais e Numéricos (A, B e C) para as vigas VG.....	81
Figura 50: Resultados Experimentais e Numérico D para as vigas VG.....	83
Figura 51: Resultados Experimentais e Numéricos (D e E) para as vigas VG.	84
Figura 52: Padrão de fendilhação: (a) Experimental; (b) Numérico D; Numérico E.....	84

Figura 53: Modelos mBPE e de interface do FEMIX, considerando $\tau m1$ e $le = 50$ mm (5ϕ).	85
Figura 54: Resultados Experimentais e Numéricos (D e F) para as vigas VG.....	86
Figura 55: Distribuição de tensões normais ao plano da secção - Numérico F para as vigas VG.....	87
Figura 56: Modelos mBPE e de interface do FEMIX, considerando $\tau m = 1,19$ MPa e le $= 200$ mm (20ϕ).....	88
Figura 57: Resultados Experimentais e Numéricos (D e G) para as vigas VG.	89
Figura 58: Padrão de fendilhação: (a) Experimental; (b) Numérico G.	89
Figura 59: Resultados Experimentais e Numérico G considerando diferentes valores do módulo de elasticidade do GFRP para as vigas VG.....	90
Figura 60: Extensões na armadura GFRP para vários níveis de carga ao longo de metade das vigas VG.....	91
Figura 61: Tensões na armadura GFRP para vários níveis de carga ao longo de metade das vigas VG.....	92

1 INTRODUÇÃO

A utilização de materiais compósitos, como o GFRP (polímero reforçado com fibra de vidro), tem-se revelado uma alternativa promissora na engenharia estrutural, especialmente no reforço e substituição de materiais tradicionais, como o aço, em estruturas de betão armado. A crescente procura por soluções mais eficientes, sustentáveis e com maior durabilidade impulsiona a adoção de tecnologias inovadoras, como o GFRP, que oferece vantagens significativas, como maior resistência à corrosão, leveza e facilidade de instalação (Teixeira, 2024; Camacho, 2011).

A utilização de varões de GFRP em estruturas de betão armado tem sido amplamente estudada em diversas investigações, principalmente no que diz respeito ao comportamento de vigas e lajes. No entanto, ainda existem lacunas no conhecimento sobre o desempenho destas estruturas, principalmente quando se analisa o comportamento e as características dos materiais envolvidos (Teixeira, 2024). Aspectos como a ligação betão–GFRP, a variação do tipo de superfície das armaduras, bem como as características mecânicas e técnicas dos varões, podem influenciar significativamente o desempenho estrutural. Estes fatores afetam diretamente o mecanismo de aderência, a transferência de esforços entre o betão e a armadura e, conseqüentemente, a resposta global do elemento estrutural.

A simulação numérica do comportamento de elementos estruturais com incorporação de varões de GFRP é muito relevante, devido aos custos mais reduzidos quando comparada com campanhas experimentais, por permitir a validação dos resultados experimentais e pela possibilidade de analisar diversas situações através da alteração de várias condições, como carregamentos, condições de apoio, comprimento do vão, entre outras. O desenvolvimento e a aplicação de modelos numéricos baseados no método dos elementos finitos (MEF), desenvolvido por Zienkiewicz e Taylor (1989), têm sido extensivamente utilizados na avaliação do comportamento à flexão de elementos de betão armado com diferentes tipos de armaduras (aço, GFRP, CFRP, etc.).

1.1 Enquadramento

O presente estudo pretende contribuir para a compreensão e simulação da resposta estrutural de elementos de betão armado sujeitos à flexão, constituídos por armaduras de aço ou por armaduras de GFRP, utilizando modelos numéricos que simulem o comportamento não-linear da estrutura, desde o início do carregamento até à sua rotura, nomeadamente utilizando modelos constitutivos disponíveis no programa FEMIX (Azevedo *et al.*, 2003; Ventura-Gouveia, 2011). A validação de modelos numéricos contribuirá para o avanço do conhecimento sobre o comportamento destas estruturas e para fomentar a utilização de GFRP em construções.

O comportamento estrutural de elementos de betão armado está fortemente relacionado com a eficiência da ligação entre as armaduras e o betão, uma vez que é através desse mecanismo que ocorre a transferência de esforços entre os dois materiais e se garante o funcionamento conjunto do elemento estrutural. No caso das armaduras de FRP (Fiber-Reinforced Polymer), o comportamento de aderência apresenta particularidades quando comparado com as armaduras tradicionais de aço. Isso ocorre porque os varões de FRP podem ser produzidos com diferentes tipos de fibras, como vidro, carbono, basalto ou aramida, além de apresentarem distintas propriedades mecânicas e características de superfície, fatores que influenciam diretamente o mecanismo de interação com o betão e, consequentemente, o desempenho da aderência (El-Nemr *et al.*, 2023).

Nesse contexto, o estudo das leis de aderência–escorregamento torna-se fundamental para a compreensão e representação do comportamento da interface betão–FRP. No entanto, verifica-se uma dificuldade de encontrar na literatura técnica modelos de aderência–escorregamento especificamente desenvolvidos para vigas de betão armado com varões de GFRP, bem como uma limitada disponibilidade de propostas de modelos de *tension-stiffening* capazes de representar adequadamente o comportamento do betão fendilhado na zona de influência das armaduras de GFRP.

Para simular com precisão o comportamento das vigas armadas com varões de aço e de GFRP, devem ser utilizados modelos sofisticados para capturar as características essenciais destes materiais e da sua interação. No presente trabalho, são apresentados os modelos constitutivos para a análise dos materiais. Esses modelos foram implementados na versão 4,0 do código computacional FEMIX (Azevedo *et al.* 2003).

1.2 Objetivos da Investigação

O presente estudo tem como objetivo principal desenvolver e aplicar modelos numéricos baseados no Método dos Elementos Finitos (MEF) para a simulação do comportamento estrutural de vigas de betão armado com diferentes tipos de armaduras (varões de aço e de GFRP), tendo como base uma campanha experimental de vigas de betão armado realizada na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Pato Branco, por Teixeira (2024). A análise numérica visa a calibração e validação dos modelos a partir dos resultados experimentais disponíveis, sendo o interesse por esta campanha motivado pela participação direta do autor no desenvolvimento do estudo experimental e pela sua relevância como ponto de partida para a introdução e aprofundamento do estudo de varões de FRP no âmbito da UTFPR.

Para a concretização do objetivo principal foram estabelecidos diversos objetivos específicos:

- Efetuar uma revisão bibliográfica sobre a utilização de varões de GFRP em vigas de betão armado sujeitas à flexão e sobre a modelação numérica deste comportamento;
- Calibrar as leis constitutivas dos materiais e da aderência betão-GFRP, para os diferentes tipos de elementos finitos;
- Validar o modelo numérico com os resultados experimentais de ensaios de vigas realizados na UTFPR;
- Avaliar a influência dos parâmetros mais relevantes da lei constitutiva da aderência betão-GFRP no comportamento das vigas estudadas.

1.3 Abordagem Metodológica

Este trabalho consiste, fundamentalmente, na modelação numérica, por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), do comportamento de vigas de betão armado sujeitas à flexão, através do software FEMIX.

Para atingir os objetivos deste estudo foi definida uma abordagem metodológica baseada na análise do comportamento de vigas de betão armado com diferentes armaduras, aço e GFRP,

recorrendo à análise numérica para simular o comportamento experimental destes elementos estruturais. Para tal, foi, inicialmente, realizado uma análise que permitiu estabelecer a malha de elementos finitos a utilizar neste estudo. Discretizado o elemento estrutural, o passo seguinte foi simular o comportamento das vigas de betão com armaduras de aço e de GFRP através da adoção e da implementação das leis constitutivas dos materiais, de modelos que traduzam o comportamento de betão armado fendilhado e da representação do comportamento da interface entre o betão e as armaduras, nomeadamente, da aderência e do escorregamento existentes. Adicionalmente, foram avaliadas diferentes configurações para a lei constitutiva de aderência-escorregamento, através da adoção de diversos valores dos parâmetros que caracterizam essa lei, comparando-se os respetivos resultados, a fim de discutir a sua influência na resposta estrutural das vigas e, consequentemente, validar o modelo numérico adotado.

1.4 Estrutura da Dissertação

De modo a facilitar a compreensão do estudo, a presente dissertação encontra-se organizada em seis capítulos, permitindo apresentar de forma clara e precisa o desenvolvimento da investigação realizada.

No capítulo 1 (INTRODUÇÃO) é apresentado a introdução ao tema em estudo, incluindo o enquadramento do trabalho, os objetivos da investigação, a abordagem metodológica adotada e a estrutura geral da dissertação.

No Capítulo 2 (REVISÃO BIBLIOGRÁFICA) é apresentada uma revisão da literatura relacionada com os materiais e os principais conceitos associados ao tema em estudo. Inicialmente são apresentados os varões de GFRP, abordando as suas principais características e o seu comportamento mecânico. Em seguida, foi analisado o comportamento de vigas armadas com diferentes tipos de armadura, nomeadamente aço e GFRP. Posteriormente, são apresentadas as leis constitutivas dos materiais, com especial enfoque no comportamento da aderência-escorregamento entre o betão e as armaduras de GFRP e nos parâmetros associados à lei que traduz esse comportamento. Adicionalmente, realizada uma revisão sobre a modelação numérica aplicada, habitualmente, a este tipo de estruturas.

No Capítulo 3 (CASO DE ESTUDO: CAMPANHA EXPERIMENTAL NA UTFPR) é descrito o estudo experimental realizado na UTFPR-PB por Teixeira (2024), no qual são

apresentados os principais aspectos do programa experimental, bem como os resultados obtidos e os parâmetros adotados, que serviram de base para o desenvolvimento do presente trabalho.

No Capítulo 4 (MODELAÇÃO NUMÉRICA DAS VIGAS DE BETÃO ARMADO) são apresentados os modelos numéricos adotados para simular o comportamento à flexão das vigas de betão armado convencionais, utilizando o software FEMIX. São detalhadas as leis constitutivas empregadas, bem como a determinação da malha utilizada para o estudo. Além disso, foi realizada uma análise comparativa do desempenho numérico das vigas com os resultados experimentais, considerando ou não o efeito do *tension stiffening*.

No Capítulo 5 (MODELAÇÃO NUMÉRICA DAS VIGAS DE BETÃO COM ARMADURAS DE GFRP) são apresentadas as estratégias adotadas para a modelação numérica das vigas com GFRP, incluindo a quantificação dos parâmetros que definem as leis constitutivas dos materiais e que definem o comportamento de aderência-eskorregamento entre o betão e os varões de GFRP. O capítulo apresenta uma análise comparativa da resposta experimental e numérica, considerando, ou não, a lei de aderência-eskorregamento betão-GFRP e diferentes calibrações para os parâmetros associados a essa lei. Também se estudou a influência de alguns parâmetros da lei de aderência betão-GFRP, nomeadamente a tensão máxima de aderência, o eskorregamento correspondente a essa tensão, o comprimento de amarração e o módulo de elasticidade dos varões de GFRP, permitindo avaliar o seu efeito no desempenho global das vigas. Além disso, apresenta-se uma discussão da comparação dos resultados obtidos numericamente com os experimentais.

No capítulo 6 (CONCLUSÃO) são apresentadas as conclusões mais relevantes a respeito do estudo realizado, bem como sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo aborda o comportamento de vigas de betão armado com diferentes tipos de armaduras submetidas à flexão, com enfoque especial nos varões de polímeros reforçados com fibras (FRP). São apresentadas as características fundamentais deste material, incluindo o seu desempenho estrutural. Para sustentar a análise do comportamento das vigas, também são discutidas as leis constitutivas dos materiais envolvidos, betão, aço e varões de polímeros reforçados com fibra de vidro (GFRP), permitindo compreender os mecanismos que governam a resposta estrutural das armaduras e da matriz de betão. Adicionalmente, o capítulo inclui a apresentação e discussão da aplicação da simulação numérica por elementos finitos, fornecendo uma base metodológica sólida para a interpretação dos resultados experimentais e para o desenvolvimento das análises numéricas apresentadas ao longo deste trabalho.

2.1 Varões de Polímeros Reforçados com Fibra (FRP)

A utilização de polímeros reforçados com fibra (FRP) tem-se destacado na construção civil devido às suas propriedades mecânicas superiores, como elevada resistência e rigidez específicas, além de maior durabilidade em comparação com os materiais convencionais. Originalmente desenvolvidos para as indústrias aeroespacial e de defesa, estes materiais começaram a ser adotados em infraestruturas civis a partir das décadas de 1980 e 1990, quando o custo de produção foi reduzido, tornando viável a sua aplicação em larga escala (Bakis *et al.*, 2002).

Os varões de FRP são elementos compósitos constituídos por fibras contínuas, responsáveis pela resistência mecânica, incorporadas numa matriz de resina polimérica, que assegura a transferência de tensões e a proteção das fibras. O comportamento mecânico destes materiais resulta da atuação conjunta das propriedades das fibras e da matriz polimérica, sendo fortemente influenciado pelo tipo de fibra, pela resina utilizada e pela sua interação. Entre as fibras contínuas mais frequentemente empregues na produção de varões de FRP destacam-se as fibras de vidro, carbono, aramida, basalto e polietileno de ultra-alto peso molecular, sendo

as fibras de vidro, carbono e basalto as mais utilizadas em aplicações estruturais (Feng *et al.*, 2022).

As fibras de vidro apresentam ampla aplicação, podendo ser classificadas, nomeadamente, em fibras de vidro elétrico (*E-glass*) e fibras de vidro de alta resistência (*S-glass*), cada uma com características mecânicas e de durabilidade distintas (Ji *et al.*, 2023). No que respeita à matriz polimérica, as resinas mais comuns na fabricação de varões de FRP incluem as resinas epóxi, viniléster e poliéster, devido ao seu desempenho mecânico, aderência às fibras e resistência a agentes ambientais (Feng *et al.*, 2022; Ji *et al.*, 2023).

Os varões de FRP são materiais compósitos de natureza anisotrópica, constituídos por fibras contínuas orientadas numa única direção e envolvidas por uma matriz polimérica. Esta configuração confere ao material propriedades mecânicas distintas nas direções longitudinal (paralela às fibras) e transversal. A Tabela 1 apresenta uma síntese comparativa das propriedades mecânicas de alguns tipos de fibras (Fib Bulletin 40, 2007).

Tabela 1: Propriedades típicas das fibras para compósitos de FRP (Fib Bulletin 40, 2007).

Tipo de fibra	Densidade (kg/m³)	Resistência à tração (MPa)	Módulo de Young (GPa)	Deformação última à tração (%)	Coefficiente de Poisson
E-glass	2500	3450	72,4	2,4	0,22
S-glass	2500	4580	85,5	3,3	0,22
Vidro resistente a álcalis	2270	1800-3500	70-76	2,0-3,0	–
ECR	2620	3500	80,5	4,6	0,22
Carbono (alto módulo)	1950	2500-4000	350-650	0,5	0,20
Carbono (alta resistência)	1750	3500	240	1,1	0,20
Aramida (Kevlar 29)	1440	2760	62	4,4	0,35
Aramida (Kevlar 49)	1440	3620	124	2,2	0,35
Aramida (Kevlar 149)	1440	3450	175	1,4	0,35
Aramida (Technora H)	1390	3000	70	4,4	0,35
Aramida (SVM)	1430	3800-4200	130	3,5	–
Basalto (Albarrie)	2800	4840	89	3,1	–

Em função do tipo de fibra utilizada, apresentadas na Figura 1, os varões de FRP podem ser classificadas como polímero reforçado com fibras de vidro (GFRP), com fibras de carbono (CFRP), com fibras de aramida (AFRP) ou com fibras de basalto (BFRP), sendo estas as

tipologias mais difundidas. Para além destas, têm vindo a ser desenvolvidas soluções alternativas, como varões híbridos de polímero reforçado com fibras (HFRP) e varões compósitos aço-FRP (SFCB), que procuram combinar as vantagens dos materiais compósitos com as do aço convencional (Feng *et al.*, 2022).

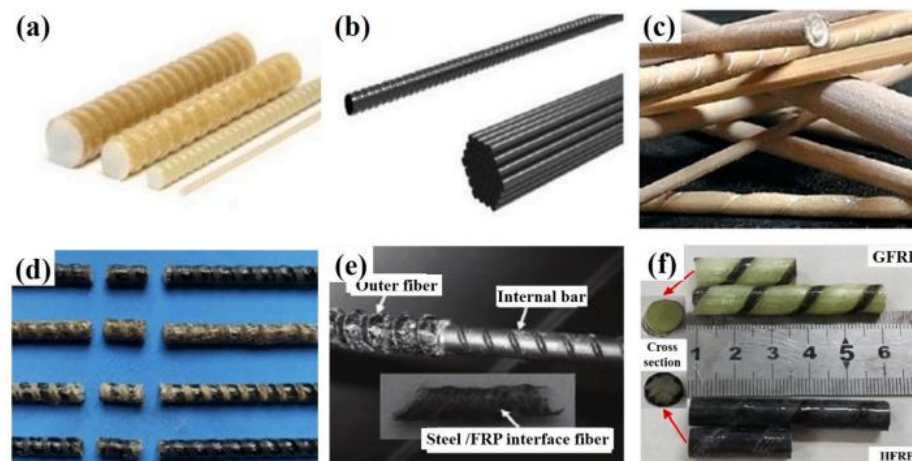


Figura 1: Tipos de varões de FRP: (a) GFRP, (b) CFRP, (c) AFRP, (d) BFRP, (e) SFRP e (f) HFRP (Feng *et al.*, 2022).

A resistência à tração, o módulo de elasticidade e a densidade são propriedades fundamentais que determinam o comportamento mecânico de elementos estruturais de betão reforçado com varões de FRP. O desempenho destes varões é influenciado pelo diâmetro, pelo tipo de matriz polimérica e pelas características das fibras utilizadas na sua composição, sendo que os valores destas propriedades normalmente variam dentro de intervalos específicos (Ji *et al.*, 2023).

A norma brasileira ABNT NBR 17201-1:2025 estabelece os parâmetros de caracterização que devem ser determinados para varões de FRP, considerando a variabilidade significativa das propriedades em função do processo produtivo e do fabricante. A referida norma aplica-se especificamente a varões de GFRP e BFRP, definindo os requisitos mínimos de desempenho que devem ser atendidos. As características exigidas encontram-se sintetizadas na Tabela 2.

Tabela 2: Propriedades requeridas para caracterização do GFRP (adaptado ABNT NBR 17201-1:2025).

Propriedades	Valores característicos das propriedades para varões de GFRP
Resistência à tração (MPa)	≥ 800
Módulo de elasticidade (GPa)	≥ 45
Deformação específica à tração (%)	$\geq 1,1$
Resistência de aderência do varão ao betão (MPa)	≥ 12
Resistência ao esforço cortante (MPa)	≥ 150
Resistência à tração em regiões de dobragem (MPa)	$\geq 60 \%$ da resistência à tração mínima requerida para o varão

Os sistemas estruturais baseados em varões de FRP têm ganho relevância em ambientes onde a corrosão representa um desafio, como em zonas marítimas e industriais agressivas. A resistência à corrosão, aliada ao baixo peso, resistência, fácil e rápida instalação, maior durabilidade, faz destes materiais uma alternativa promissora ao aço convencional em estruturas de betão armado. Além disso, os polímeros reforçados com fibra apresentam transparência eletromagnética, tornando-os adequados para edifícios laboratoriais e estruturas de telecomunicações. A sua leveza contribui para a redução das cargas permanentes, favorecendo projetos mais económicos e eficientes (Bakis *et al.*, 2002; Duarte *et al.*, 2021; Ineia *et al.* 2021).

Quanto à durabilidade dos varões, no caso dos de GFRP, Micelli e Nanni (2004) salientam que está associada a diferentes mecanismos de degradação, como a absorção de fluidos, fluência, fadiga e envelhecimento ambiental. Esses processos resultam da ação de agentes externos como humidade, soluções alcalinas, variações térmicas, radiação UV e cargas cíclicas, que afetam as propriedades físicas e mecânicas do material. A taxa de degradação está diretamente relacionada à sorção de fluidos na matriz polimérica, sendo essencial compreender o processo de difusão e a interação entre matriz e fibras para avaliar o desempenho a longo prazo das estruturas reforçadas com GFRP (Micelli e Nanni, 2004).

Avanços tecnológicos, como o desenvolvimento de métodos de fabricação, incluindo a pultrusão, possibilitaram a produção de perfis estruturais padronizados e personalizados, ampliando o uso dos compósitos de FRP em elementos como vigas, tabuleiros de pontes e

reforços internos de betão armado (Bakis *et al.*, 2002). Esta tecnologia, especialmente no caso do GFRP, oferece vantagens significativas em ambientes agressivos, melhorando a durabilidade das estruturas e reduzindo os custos de manutenção e a geração de resíduos (Duarte *et al.*, 2021).

Estudos de Duarte *et al.* (2021) apontam que o comportamento mecânico dos varões de GFRP é influenciado por fatores como diâmetro, tratamento superficial e tipo de fibra utilizada. Ensaios realizados de acordo com a norma ASTM D7205/D7205M-06 (2016) indicaram que os varões de GFRP apresentam uma redução na resistência à tração e no módulo de elasticidade à medida que o diâmetro aumenta, devido ao efeito de *shear lag*.

A Figura 2 ilustra o diagrama de tensões–deformações específicas para o aço e para os varões de FRP, destacando o comportamento mecânico do GFRP (Vidro) em comparação com os demais materiais. É importante salientar que, enquanto o aço exibe um comportamento elasto-plástico, caracterizado por elevada ductilidade, os varões de GFRP, assim como outros tipos de FRP, apresentam um comportamento elasto-frágil (Ineia *et al.*, 2021).

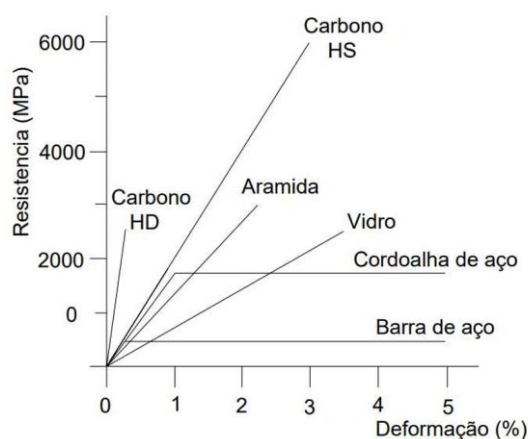


Figura 2: Diagrama tensão-deformação para diferentes materiais (Ineia *et al.* 2021).

Um aspeto determinante no desenvolvimento da resistência de aderência entre o betão e os varões de FRP é a textura superficial das armaduras. As características do acabamento superficial dos varões de FRP estão diretamente associadas às técnicas de fabrico e aos parâmetros do processo produtivo adotados pelos diferentes fabricantes (Başaran *et al.*, 2022). Observa-se uma elevada variabilidade nas propriedades superficiais dos varões disponíveis no

mercado. Essa variabilidade manifesta-se, por exemplo, em diferenças na qualidade, na granulometria e na densidade do revestimento em varões com acabamento arenado, bem como nas dimensões geométricas das nervuras, incluindo espessura, altura e espaçamento, em varões deformados (nervurados) ou com enrolamento helicoidal. Estas diferenças têm impacto direto nos mecanismos de aderência, influenciando o atrito, os mecanismos de engrenagem mecânica que se estabelecem entre as armaduras e o betão envolvente e, consequentemente, a eficiência da transferência de tensões entre o varão e o betão (Başaran *et al.*, 2022).

Na Figura 3, são ilustradas as diferentes texturas superficiais dos varões de FRP estudadas na literatura. As superfícies R1 e R2 correspondem a varões com revestimento de areia fina (*fine sand-coating*, SCf), enquanto as R3 e R4 representam varões com revestimento de areia grossa (*coarse sand-coating*, SCr). A superfície R5 refere-se a varões com revestimento de areia padrão (*standard sand-coating*, SC), ao passo que a R6 ilustra o varão com superfície helicoidalmente enrolada (*helically wrapped*, HW). As superfícies R7, R8 e R9 combinam o enrolamento helicoidal com revestimento arenado (*helically wrapped sand-coated*, HWSC). Por fim, a R10 corresponde à superfície indentada (*indented*, In), e as R11, R12 e R13 referem-se a varões com superfície nervurada (*ribbed*, Rb) (Başaran *et al.*, 2022).



Figura 3: Superfícies de varões de FRP (Başaran *et al.*, 2022).

Investigações que aprofundem aspetos relacionados com a aderência, a durabilidade e o comportamento mecânico dos varões de GFRP são essenciais para consolidar e ampliar a sua utilização. Segundo Feeser e Brown (2005), as propriedades dos varões de FRP apresentam maior variabilidade entre fabricantes do que ocorre com o aço. Isso se deve ao facto de os varões de FRP ainda não estarem padronizadas na indústria, de modo que, a menos que o projetista

especifique um fabricante e uma classificação específica para os varões, as propriedades reais do FRP empregado na obra podem diferir daquelas consideradas durante o projeto.

2.2 Comportamento à Flexão de Vigas de Betão Armado

As vigas de betão não armado apresentam desempenho limitado sob flexão, uma vez que a resistência à tração do betão corresponde apenas a uma pequena fração da sua resistência à compressão. Consequentemente, essas vigas tendem a romper na zona tracionada sob cargas relativamente baixas, sem que a região comprimida atinja a sua capacidade máxima de resistência. Para contornar essa limitação, armaduras em forma de varões são posicionadas na fibra tracionada (Darwin *et al.*, 2016).

Neste contexto, o comportamento de vigas de betão armado com diferentes tipos de armadura, aço e GFRP, será apresentado, destacando as diferenças de resposta estrutural em flexão e os mecanismos de fendilhação e rutura.

2.2.1 Vigas com armadura de aço

Para a análise do comportamento à flexão, observa-se, que uma viga submetida à aplicação de cargas verticais desenvolve simultaneamente tensões normais e de corte.

Na análise do comportamento à flexão, uma viga simplesmente apoiada sujeita a cargas verticais desenvolve simultaneamente tensões normais e tensões de corte. As tensões normais podem ser analisadas considerando a divisão da seção transversal em duas regiões distintas: uma zona comprimida, localizada nas fibras superiores, e uma zona tracionada, situada nas fibras inferiores, conforme ilustrado na Figura 4.

A região da seção submetida à compressão é essencialmente resistida pelo betão, enquanto a região sujeita à tração é resistida predominantemente pela armadura de aço. Por sua vez, as tensões de corte manifestam-se ao longo da seção transversal da viga, apresentando uma distribuição relativamente uniforme ao longo da sua altura (Djamaluddin, 2013).

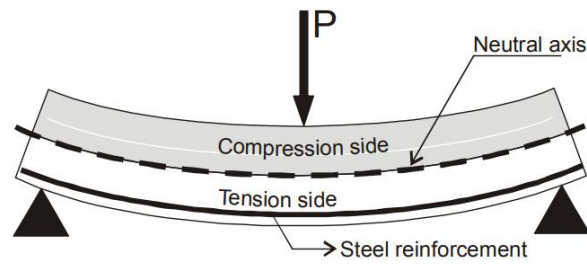


Figura 4: Compressão-tração de vigas em flexão (Djamaluddin, 2013).

O comportamento à flexão de vigas de betão armado pode ser representado por meio de uma curva carga–deslocamento, na qual se identificam três fases distintas, como mostra a Figura 5. Inicialmente, observa-se uma região linear correspondente à fase não fendilhada da viga. Em seguida, ocorre uma resposta não-linear associada ao aparecimento da primeira fissura e estabilização da fendilhação, com a transferências de tensões do betão fendilhado para a armadura, caracterizando a fase de transição fendilhada. Por fim, verifica-se uma terceira fase, correspondente à capacidade de resistência da viga, quando um dos materiais, betão ou armadura, atinge a sua capacidade resistente última, definindo a fase de rutura.

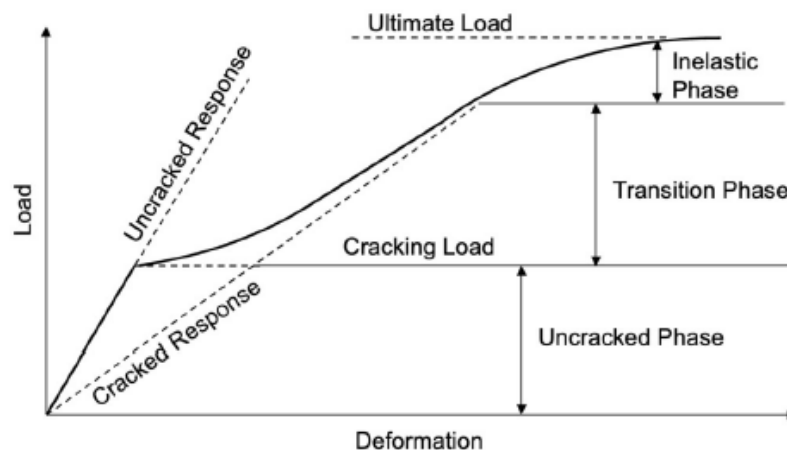


Figura 5: Comportamento à flexão de vigas de betão armado com armaduras de aço (Way *et al.*, 2025).

2.2.2 Vigas com armadura de GFRP

O comportamento à flexão de vigas de betão armado com varões de GFRP apresenta alguns pontos diferentes quando comparado ao das vigas armadas com varões de aço

convencional, sobretudo em função das propriedades mecânicas específicas do material de reforço. Embora o processo de dimensionamento apresente analogias com o do betão armado tradicional, a utilização de varões de FRP exige cuidados adicionais, em virtude do seu comportamento essencialmente elástico linear e da ausência de ductilidade associada ao escoamento, característica típica das armaduras metálicas (IBRACON, 2021).

Os varões de GFRP distinguem-se do aço principalmente pelo módulo de elasticidade significativamente inferior e pela inexistência de patamar de escoamento na relação tensão–deformação. Como consequência, a resposta estrutural das vigas reforçadas com GFRP é marcada por maior deformabilidade, menor rigidez à flexão e um comportamento global mais frágil. Apesar dos avanços recentes, os estudos disponíveis ainda são relativamente limitados quando comparados à vasta literatura existente para o betão armado convencional, o que faz com que o uso de GFRP como alternativa estrutural continue a ser um tema em desenvolvimento (Ifrahim *et al.*, 2023).

O mecanismo de ruína à flexão das vigas de betão armado com GFRP depende fundamentalmente das leis constitutivas do betão em compressão e do comportamento dos varões de GFRP em tração. Uma vez que o betão apresenta ductilidade limitada e os varões de GFRP exibem comportamento elástico linear até à rutura, a rutura dessas vigas é geralmente classificada como frágil (Tran *et al.*, 2025).

A rutura dos varões de GFRP ocorre de forma súbita e abrupta, sem redistribuição significativa de tensões, devido à inexistência de escoamento. Por esse motivo, o dimensionamento de elementos armados com FRP não deve considerar o escoamento da armadura, sendo recomendável adotar critérios que conduzam a uma ruína governada pelo betão comprimido (Tavares, 2006).

Na Figura 6 apresenta-se o comportamento de vigas armadas com diferentes tipos de armadura (aço e GFRP). Observa-se que, até ao início da fendilhação, as respostas das vigas são bastante semelhantes. No entanto, após a formação das primeiras fissuras, a fase de transição, caracterizada pela transferência das tensões do betão tracionado para a armadura, apresenta diferenças significativas nas duas vigas. Essa redução abrupta da rigidez após a fendilhação é mais pronunciada em vigas armadas com GFRP do que em vigas armadas com aço. Tal comportamento está diretamente associado ao baixo módulo de elasticidade dos varões de GFRP, que limita a capacidade de desenvolvimento de forças de tração compatíveis com

pequenas deformações. Assim, logo após a fendilhação, observa-se uma mudança significativa na inclinação da curva carga–deslocamento (Alsayed, 1998).

Seguidamente, o comportamento passa a ser dominado pela resposta da armadura, sendo notória a distinção entre os materiais, nomeadamente pelo facto de a armadura de GFRP não apresentar comportamento plástico, contrastando com o aço.

Em síntese a Tabela 3 apresenta a comparação entre os comportamentos de vigas com armadura de aço e GFRP, considerando a mesma taxa mecânica de armadura.

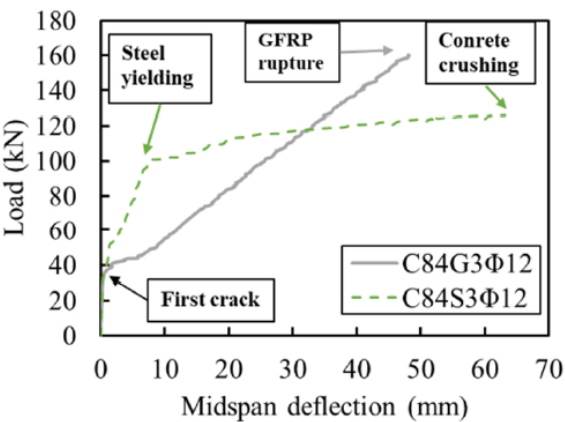


Figura 6: Curvas carga-deslocamento de vigas de betão armado de aço e de GFRP (Muhammad, 2023).

Tabela 3: Comportamento de vigas a flexão com armaduras de aço e GFRP.

Fase	Características em vigas com aço	Características em vigas com GFRP
1. Elástica não fissurada	comportamento linear	similar ao betão armado convencional, mas com menor rigidez devido a $E_{GFRP} < E_{Aço}$
2. Fissurada	betão fissura; a transferência de tensões do betão tracionado para a armadura não é tão abrupta	betão fissura; a transferência de tensões do betão tracionado para a armadura é abrupta; a rigidez cai mais rápido; maiores deformações
3. Última / rutura	atingida capacidade última com ductilidade	rutura frágil sem escoamento plástico do GFRP

Estudos experimentais indicam ainda que, mesmo após a fendilhação, podem ocorrer pequenas irregularidades ao longo da curva carga–deslocamento. Essas variações estão

associadas à rutura progressiva de fibras individuais nos varões de GFRP, atribuída ao efeito de *shear lag*, fenómeno que pode ser identificado experimentalmente por ruídos audíveis durante os ensaios (Alsayed, 1998). À medida que a deformação aumenta, forças de tração progressivamente maiores desenvolvem-se nos varões, mantendo-se até à ocorrência da rutura final.

Resultados experimentais comparativos, nos quais apenas o material da armadura é alterado, indicam que vigas reforçadas com GFRP tendem a apresentar reduções na resistência última e aumentos significativos nas deformações quando comparadas a vigas armadas com aço, confirmando o impacto direto do módulo de elasticidade e do comportamento frágil do GFRP na resposta estrutural global (Teixeira *et al.*, 2024).

Mohd.Sam e Swamy (2005) investigaram o comportamento de vigas de betão armado reforçadas com varões de GFRP, avaliando a capacidade de carga, a relação carga-deslocamento, a deformação do betão e da armadura, a fendilhação e o modo de rutura. Os resultados experimentais indicaram que, em comparação com vigas convencionais de aço, as vigas com GFRP apresentaram menor carga última, menor rigidez e maiores deformações para o mesmo nível de carregamento. Entretanto, verificou-se que a utilização de malha de aço inoxidável como armadura transversal proporcionou uma melhoria ligeira no desempenho estrutural destas vigas.

Ifrahim *et al.* (2023) conduziram uma campanha experimental envolvendo nove vigas, sendo três com armadura de aço e seis com armadura de GFRP, avaliando a capacidade de carga, a deformação e o modo de rutura. Os resultados mostraram que, em comparação com as vigas de aço, as vigas com GFRP apresentaram carga última 32,4% menor e uma deformação última 16% maior, considerando a mesma taxa de armadura. Além disso, observou-se que o modo de rutura das vigas de aço foi condicionado pelas armaduras, enquanto as vigas com GFRP apresentaram uma rutura condicionada pelo betão comprimido.

Farias *et al.* (2022) realizaram ensaios experimentais comparando vigas de betão armado com aço, projetadas segundo a NBR 6118 (2014) e vigas armadas com varões de GFRP, dimensionadas conforme a ACI 440.1R (2015). Todas as vigas foram projetadas para suportar cargas equivalentes e atender ao estado limite de serviço (ELS). Durante o ensaio, observou-se que o deslocamento vertical das vigas de aço e de GFRP foi similar até ao limite de deformação aceitável, embora as vigas com GFRP apresentassem maiores deformações. Na carga última,

as vigas armadas com GFRP demonstraram resistência significativamente maior, cerca de 64% superior, em comparação com as vigas de aço.

Mohammed e Salih (2025) investigaram o comportamento à flexão de vigas de betão armado com varões de GFRP, comparando-o com o de vigas convencionais armadas com aço. O programa experimental incluiu oito vigas submetidas a ensaios de flexão em quatro pontos, com dois tipos de betão (22 MPa e 45 MPa), nas quais a armadura longitudinal de aço foi substituída por varões de GFRP com diferentes diâmetros. Os resultados indicaram que a substituição da armadura de aço por GFRP altera o comportamento estrutural das vigas, conduzindo a maiores deslocamentos e ao aparecimento mais precoce de fissuras, além de uma maior quantidade e abertura das fissuras em comparação com as vigas armadas com aço. Observou-se ainda que a menor rigidez dos varões de GFRP, associada ao seu módulo de elasticidade inferior, contribui para esse aumento das deformações, enquanto a resistência à compressão do betão apresentou influência pouco significativa no comportamento à flexão nas condições analisadas.

2.3 Leis Constitutivas

Neste item são apresentadas as leis constitutivas adotadas para a modelação de elementos de betão armado, incluindo a caracterização do comportamento mecânico do betão e das armaduras. São igualmente analisadas as particularidades associadas às armaduras de aço e GFRP. Por fim, são abordados os modelos apresentados da aderência entre o betão e as armaduras de GFRP.

A simulação numérica da resposta estrutural de elementos, no âmbito do método dos elementos finitos, exige a definição de uma representação matemática do comportamento do material. Essa representação, designada por modelo constitutivo ou lei de comportamento do material, estabelece a relação entre os estados de tensão e deformação num ponto contínuo.

Para que a previsão do comportamento estrutural seja realizada com rigor, é fundamental recorrer a modelos constitutivos adequados ao tipo de análise pretendida. No caso do betão, tais modelos devem ser capazes de reproduzir os principais fenómenos não-lineares que caracterizam este material, nomeadamente a fendilhação, o amolecimento pós-pico, a plastificação em compressão e a degradação de rigidez associada ao dano. A seleção apropriada

da lei constitutiva assume, assim, um papel determinante na qualidade e fiabilidade dos resultados obtidos em análise numérica (Sena-Cruz, 2005).

2.3.1 Betão

O comportamento do betão submetido a carregamento uniaxial de compressão reflete, de forma abrangente, as propriedades mecânicas dos seus constituintes e o desenvolvimento progressivo de microdanos internos. A curva tensão–deformação característica do betão evidencia tanto a resposta elástica inicial quanto os estágios subsequentes de não-linearidade e amolecimento, fornecendo indicadores essenciais de desempenho, como a deformação plástica, o surgimento e a propagação de microfissuras, resistência residual e deformabilidade do material (Gao *et al.*, 2020).

As propriedades de resistência e deformação do betão à compressão determinam o desempenho estrutural global e constituem a base para a análise da deformação e da capacidade resistente das estruturas de betão armado (Gao *et al.*, 2020). Nos ensaios uniaxiais, observa-se que o comportamento do betão permanece aproximadamente linear-elástico até cerca de 30% da resistência máxima, f_c , seguido de uma diminuição gradual da rigidez à medida que a carga se aproxima do valor de pico. Após atingir a tensão máxima, inicia-se o ramo descendente da curva, caracterizando o processo de amolecimento e falha do material, Figura 7 (Sena-Cruz, 2005).

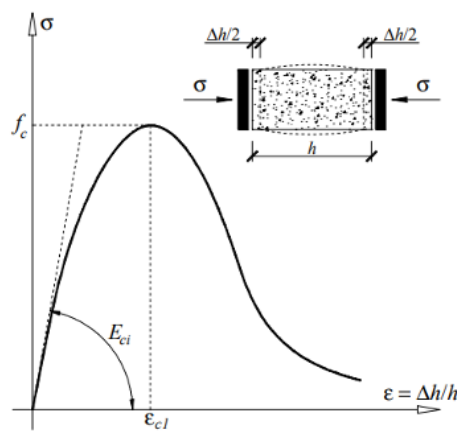


Figura 7: Resposta tensão-deformação do betão sob carga de compressão uniaxial (Sena-Cruz, 2005).

O betão como um material quase-frágil, apresenta resistência limitada à tração e suscetibilidade ao esmagamento sob compressão. A não-linearidade de sua resposta compressiva pode ser dividida em três fases principais: linear-elástica, transição elastoplástica e amolecimento progressivo (Hou *et al.*, 2025). Apesar de ser composto por materiais essencialmente frágeis, pasta de cimento e agregados, a curva tensão–deformação global do betão mostra um comportamento levemente dúctil. Esse efeito resulta do desenvolvimento gradual de microfissuras no interior do material, que promovem redistribuição interna das tensões e aumentam a deformabilidade antes da rutura (Wight e MacGregor, 2012).

A resistência à tração do betão é considerável menor do que a resistência à compressão, situando-se entre 8% e 15%, dependendo de fatores como o tipo de ensaio, o agregado utilizado, a resistência à compressão do betão e a presença de tensões compressivas transversais (Wight e MacGregor, 2012). Apesar da resistência à tração aumentar com o aumento da resistência à compressão, a relação entre essas propriedades diminui à medida que o betão se torna mais resistente, aproximando-se de uma proporcionalidade com a raiz quadrada da resistência à compressão (Wight e MacGregor, 2012).

O comportamento do betão submetido à tração, Figura 8, apresenta inicialmente uma resposta linear-elástica até aproximadamente 90% da resistência média à tração, f_{ctm} , quando microfissuras começam a desenvolver-se em zonas localizadas, conhecidas como zonas de processo. Com o aumento da carga, essas fissuras evoluem para uma microfissura contínua, resultando em rápida redução da rigidez e caracterizando o ramo pós-pico da curva tensão–deslocamento, denominado ramo de amolecimento (Sena-Cruz, 2005; Feliciano dos Santos e Pereira dos Santos, 2022).

A resistência à tração do betão também é influenciada pelas propriedades dos agregados. Betões produzidos com rochas britadas tendem a apresentar valores de resistência à tração até 20% superiores aos betões com cascalho arredondado, enquanto betões com agregados leves geralmente exibem menor resistência à tração do que os convencionais, embora essa diferença dependa das características específicas do agregado (Wight e MacGregor, 2012).

Além disso, a resistência à tração desenvolve-se mais rapidamente do que a resistência à compressão, impactando diretamente outras propriedades mecânicas dependentes da tração, como a resistência ao corte e a aderência entre o betão e a armadura. Esse desenvolvimento

diferencial reforça a importância de considerar o comportamento à tração de forma específica na análise e no dimensionamento estrutural (Wight e MacGregor, 2012; Hou *et al.*, 2025).

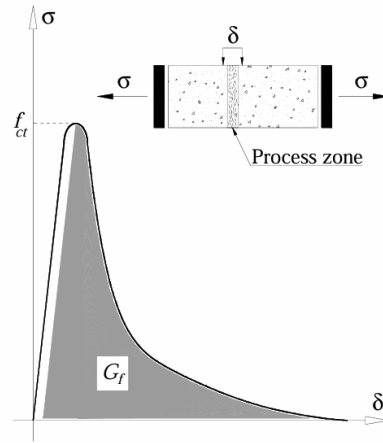


Figura 8: Resposta tensão-deformação do betão sob carregamento uniaxial de tração (Sena-Cruz, 2005).

O diagrama de amolecimento do betão à tração (*tension softening*) pode ser determinado de forma mais direta por meio de ensaios de tração uniaxial; entretanto, a realização desses ensaios sob condições controladas de deformação é extremamente desafiador devido à fragilidade e heterogeneidade do material (Wittmann *et al.*, 1988). Por essa razão, em aplicações práticas, recorre-se frequentemente a modelos simplificados que representam o comportamento real de amolecimento com precisão suficiente, permitindo análises estruturais viáveis sem comprometer a confiabilidade dos resultados (Wittmann *et al.*, 1988).

Em termos numéricos, a forma como o betão se comporta após a fendilhação depende, de forma crítica, do modelo constitutivo utilizado. Nas regiões não fissuradas, o betão entre fissuras continua a suportar as tensões de tração, mas nas regiões fissuradas a resistência à tração depende de vários fatores, como a interação mecânica proporcionada pela rugosidade das faces da fissura e a transferência de esforços do betão circundante para a armadura. Para representar de modo realista o comportamento do betão armado fendilhado, o modelo deve considerar as propriedades de fratura do betão, nomeadamente a resistência à tração, a energia de fratura e o espaçamento entre fissuras, bem como as características das armaduras que atravessam as fissuras, nomeadamente a quantidade, a aderência e a orientação dos varões.

Na Figura 9 ilustra-se o diagrama de retenção de tensões para o betão simples, que frequentemente, se usa para traduzir o comportamento do betão fendilhado. Fora da zona fissurada, o betão à tração apresenta comportamento essencialmente linear-elástico (Wittmann *et al.*, 1988). Na Figura 10 são ilustradas outras propostas de modelos para representar a retenção de tensões de tração apresentadas por diversos autores.

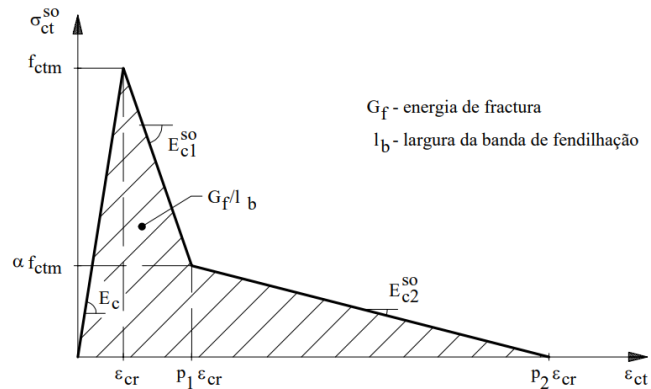


Figura 9: Diagrama de retenção de tensões de tração para o betão simples (Barros *et al.*, 1994).

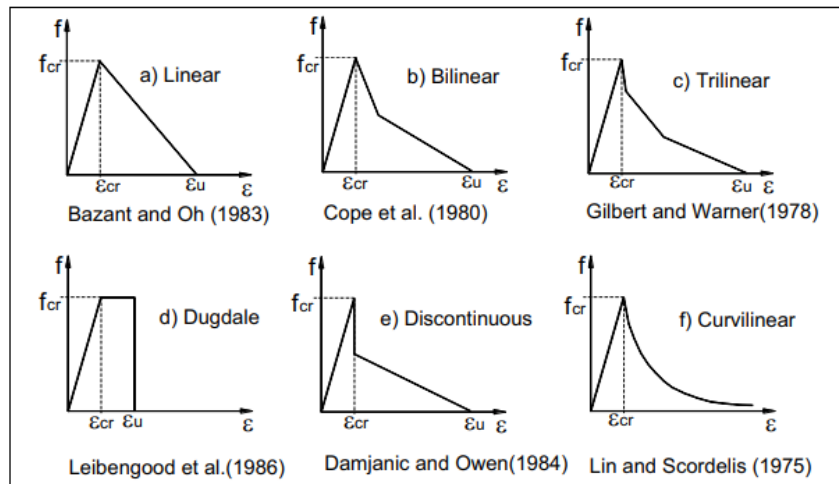


Figura 10: Modelos para representar a retenção de tensões de tração (Seema e Zandonini, 2021).

2.3.2 Aço

As propriedades mecânicas das armaduras de aço são determinadas, em geral, por meio de ensaios de tração normalizados, dos quais se extrai o diagrama experimental tensão-

deformação. Contudo, para efeitos de modelação numérica, este diagrama real é substituído por uma lei constitutiva idealizada, apresentada na Figura 11, que descreve o comportamento uniaxial dos varões de aço (Sena-Cruz, 2005).

A curva resultante, aplicável tanto em tração quanto em compressão, é composta por quatro ramos distintos, definidos a partir de três pontos característicos: PT1 = $(\varepsilon_{sy}, \sigma_{sy})$, que assinala o início do escoamento; PT2 = $(\varepsilon_{sh}, \sigma_{sh})$, correspondente ao início do encruamento; e PT3 = $(\varepsilon_{su}, \sigma_{su})$, que representa a deformação última do material. Para além destes pontos, introduz-se ainda o parâmetro p , o qual regula a transição entre os diferentes ramos, conferindo maior precisão à representação do comportamento não-linear do aço (Sena Cruz, 2005).

Neste modelo, são considerados os valores de deformação e tensão ao final de cada ramo da curva constitutiva, de forma a definir adequadamente a resposta do material. Em situações específicas, o terceiro ramo pode ser representado por um segmento linear simplificado, permitindo compatibilizar a formulação matemática com o comportamento estrutural observado nas simulações.

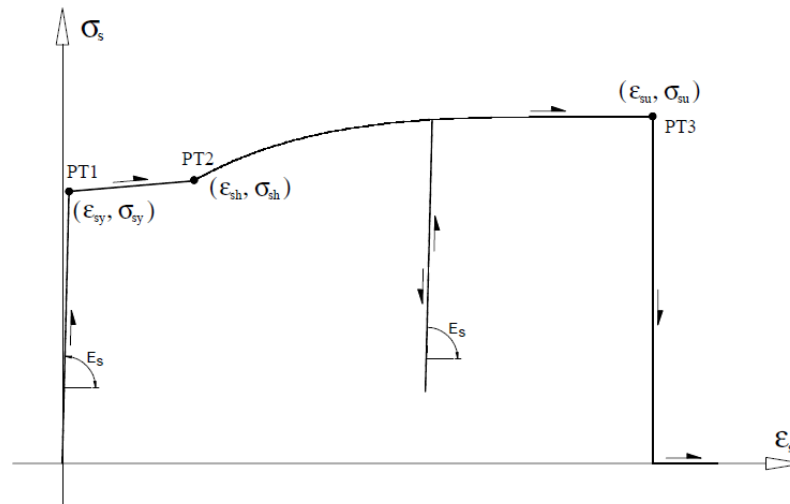


Figura 11: Modelo constitutivo uniaxial da armadura de aço (Sena-Cruz, 2005).

i) Primeiro ramo – comportamento elástico

Neste trecho inicial, a relação entre tensão e deformação é linear, obedecendo à Lei de Hooke, com inclinação definida pelo módulo de elasticidade longitudinal (E_s). A curva cresce até o ponto PT1 = $(\varepsilon_{sy}, \sigma_{sy})$, correspondente ao limite de escoamento do material.

ii) Segundo ramo – escoamento (*plateau de escoamento*)

Após atingir o limite de escoamento, o aço mantém praticamente constante a tensão (σ_{sy}) enquanto a deformação aumenta. Esse patamar de plasticidade representa a capacidade do material de se deformar sem acréscimo significativo de tensão. O ramo termina no ponto PT2 = $(\epsilon_{sh}, \sigma_{sh})$, marcando o início do encruamento.

iii) Terceiro ramo – encruamento (*strain hardening*)

Neste trecho, observa-se novo crescimento da tensão com o aumento da deformação, devido ao encruamento do aço, que corresponde ao ganho de resistência associado à reorganização das microestruturas internas do material. A curva evolui até PT3 = $(\epsilon_{su}, \sigma_{su})$, ponto que caracteriza a tensão e deformação máximas antes da ruptura.

2.3.3 GFRP

Embora os varões de GFRP não estejam associados a um processo de fabrico tão padronizado quanto o aço, o seu comportamento mecânico encontra-se em constante estudo. No que se refere à resposta à tração longitudinal, é consensualmente aceite que os varões de GFRP apresentam comportamento linear elástico até à ruptura, Figura 12, não evidenciando qualquer fase de escoamento plástico até à ruptura. Essa característica é reconhecida em documentos normativos e recomendações técnicas, como o ACI 440.1R-15 e a ABNT NBR 17196:2025, além de ser corroborada por investigações experimentais (Li e Wang, 2002).

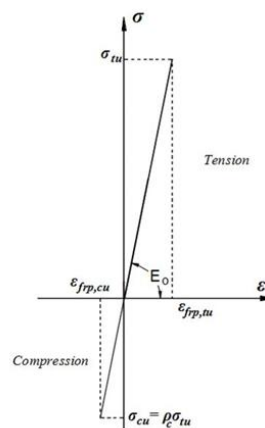


Figura 12: Modelo do comportamento de varões de GFRP (Markou e AlHamaydeh, 2017).

A resistência à tração e a rigidez axial dos varões de FRP são fortemente influenciadas pela sua composição interna. Uma vez que a matriz polimérica apresenta resistência significativamente inferior à das fibras, a fração volumétrica de fibras assume papel determinante nas propriedades mecânicas do compósito. Varões com diferentes proporções de fibras podem apresentar variações relevantes de resistência e módulo de elasticidade, mesmo quando possuem o mesmo diâmetro nominal e constituintes semelhantes. Além disso, fatores como o processo de fabrico, o controlo de qualidade e as condições de cura influenciam diretamente o desempenho mecânico final do produto (ACI 440.1R-15).

No que diz respeito ao comportamento sob compressão longitudinal, tanto a ABNT NBR 17196:2025 quanto o ACI 440.1R-15 recomendam que a contribuição resistente dos varões de GFRP seja desconsiderada em projeto. Tal orientação decorre da limitada capacidade resistente do material quando submetido à compressão axial, associada à possibilidade de instabilidade das fibras e à sensibilidade a imperfeições geométricas. Consequentemente, o dimensionamento estrutural não deve considerar os varões de GFRP como elementos eficazes para resistir a esforços de compressão.

A modelação do comportamento mecânico dos varões de GFRP utilizando uma relação tensão–deformação linear é amplamente respaldada na literatura técnica. Estudos demonstram que, sob carregamento axial, os varões de GFRP, assim como os de CFRP e AFRP, respondem de maneira predominantemente elástica até à rutura (Markou e AlHamaydeh, 2017).

2.3.4 Aderência betão-GFRP

A resistência de aderência entre o betão e os varões de GFRP é condicionada por diversos parâmetros de natureza geométrica, mecânica e superficial. Entre os fatores mais relevantes destacam-se o diâmetro dos varões, a espessura do recobrimento de betão, a resistência à compressão do betão, o comprimento de ancoragem e as características da superfície dos varões de FRP. De acordo com Tran *et al.* (2025), a resistência à compressão do betão e a configuração superficial dos varões assumem um papel preponderante no desempenho da aderência, exercendo uma influência mais significativa quando comparadas com os restantes parâmetros.

Atualmente vários modelos analíticos vêm sendo propostos em normas e na literatura para descrever a relação da tensão de aderência com o escorregamento (*bond-slip*). Neste trabalho vai-se utilizar a terminologia aderência-escorregamento quando se refere à lei de comportamento *bond-slip*.

De forma a modelar numericamente o comportamento de elementos de betão armado com varões de FRP, pode ser necessário considerar um modelo constitutivo que descreve a relação intrínseca entre a tensão de aderência e o escorregamento dos varões.

Os modelos de aderência-escorregamento representam diretamente a variação da tensão de aderência na interface entre o compósito e o betão, sendo geralmente classificados em duas categorias principais: modelos segmentados, nos quais a curva é dividida em ramos definidos, e modelos de curva contínua, que descrevem o comportamento global da ligação por meio de uma expressão única e suave (Lu *et al.*, 2024).

A maioria dos modelos analíticos de aderência-escorregamento aplicados a varões de FRP apresenta quatro ramos característicos: o segmento de microescorregamento (*microslippage*), o ramo ascendente de escorregamento, o ramo descendente pós-pico e o segmento residual.

No segmento de microescorregamento, ocorre uma adesão química predominante e o comportamento é aproximadamente linear elástico, pois a extremidade livre do varão ainda não se move significativamente.

No ramo ascendente, a carga aplicada provoca o início do descolamento localizado próximo à extremidade carregada, e a transferência de esforços passa a depender principalmente da fricção e do encaixe mecânico superficial, reduzindo a rigidez da curva à medida que o deslizamento aumenta e o comportamento se torna não-linear.

Durante o ramo descendente, a perda progressiva da fricção e da resistência mecânica superficial conduz à degradação da tensão de aderência, enquanto o escorregamento cresce acentuadamente devido ao desgaste da interface.

Por fim, o segmento residual corresponde ao regime em que a ligação é mantida apenas por forças de atrito e de encaixe residual, à medida que partes não aderentes do varão se deslocam em direção à zona ainda aderente (Lu *et al.*, 2024).

Ao longo dos anos, alguns modelos foram propostos para descrever a aderência entre o betão e os varões de GFRP, tendo sido posteriormente adaptados e aprimorados à medida que novos dados experimentais se tornaram disponíveis. A seguir, são apresentados alguns dos modelos mais relevantes e frequentemente utilizados na literatura, servindo de referência para análise e comparação em estudos experimentais e numéricos.

2.3.4.1 Modelo Malvar

O modelo de Malvar (1994) é considerado como o primeiro a descrever a relação tensão de aderência–escorregamento entre o betão e os varões de GFRP, Figura 13, sendo desenvolvido com base em resultados obtidos em ensaios de arrancamento (*pullout tests*) (Lin e Zhang, 2014). Este modelo avaliou o efeito da estrutura superficial dos varões e da pressão de confinamento lateral sobre a resistência e o modo de rutura da aderência (Lu *et al.*, 2024).

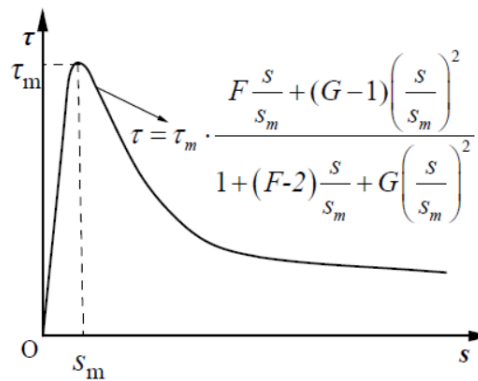


Figura 13: Modelo Malvar (Wang e Qiao, 2024).

Nos ensaios realizados, foram testados varões de GFRP com diferentes características de superfície deformada e nervurada, apenas entalhada e apenas deformada, analisando-se os impactos do nível de confinamento e da profundidade das nervuradas na resistência de aderência. Para descrever o comportamento global da interface, o modelo utilizou sete constantes empíricas (A, B, C, D, E, F, G), responsáveis por definir a forma completa da curva aderência-escorregamento na extremidade carregada do varão (Lin e Zhang, 2014).

Entretanto, essas constantes foram determinadas apenas para varões de *E-glass* com dois tipos de tratamento superficial, sem considerar a influência de outros tipos de fibra nem do

diâmetro dos varões, o que limita a sua generalização (Lin e Zhang, 2014). Outro desafio é a dificuldade em determinar a pressão radial confinante axissimétrica (σ_r) em elementos submetidos à flexão. Como resultado, o modelo mostrou-se pouco fiável para representar o ramo ascendente da curva aderência–escorregamento (Saad e Polak, 2025).

Além disso, o coeficiente angular inicial (*slope*) do modelo é finito para $s = 0$, divergindo do comportamento físico observado experimentalmente. A formulação complexa e a restrição quanto aos parâmetros empíricos tornam o modelo de Malvar de aplicabilidade prática limitada, sendo mais adequado para análises comparativas do que para implementação direta em modelações numéricas (Wang e Qiao, 2024).

2.3.4.2 Modelo BPE

O modelo Bertero–Popov–Eligehausen (BPE) foi originalmente desenvolvido por Eligehausen *et al.* (1983) para representar o comportamento de aderência entre varões de aço nervurados e o betão. Posteriormente, o modelo foi adaptado e aplicado à relação tensão de aderência–escorregamento de varões de FRP por Rossetti *et al.* (1995) e Cosenza *et al.* (1997), mediante a calibração dos seus parâmetros com base em resultados experimentais (Lin e Zhang, 2014).

O modelo BPE descreve a evolução da tensão de aderência em quatro fases distintas: um ramo ascendente, que representa o aumento da tensão até o valor máximo (τ_{max} , s_1), associado à adesão química e à engrenagem mecânica entre o varão e o betão; um patamar de tensão constante, correspondente à estabilização da tensão de aderência enquanto o escorregamento aumenta de s_1 para s_2 ; um ramo descendente linear, no qual a tensão diminui devido à formação de fissuras e à perda do efeito de ancoragem mecânica, como pode ser observado na Figura 14.

De acordo com o CEB–FIP Model Code 1990, o modelo é definido por um conjunto de parâmetros característicos — τ_{max} , s_1 , s_2 , s_3 , α e β —, os quais dependem do nível de confinamento, das condições de aderência e da resistência do betão (Lin e Zhang, 2014).

Para representar o comportamento de aderência de varões de GFRP, Rossetti *et al.* (1995) realizaram ensaios com varões de superfícies lisa e rugosa embebidas em betões de diferentes resistências. A partir dos resultados experimentais, determinaram-se τ_{max} e s_1 ,

enquanto s_2 , s_3 , α e β foram ajustados por meio de técnicas de identificação numérica. Contudo, os resultados apresentaram grande dispersão, e o diâmetro dos varões não mostrou influência significativa sobre a aderência (Lin e Zhang, 2014).

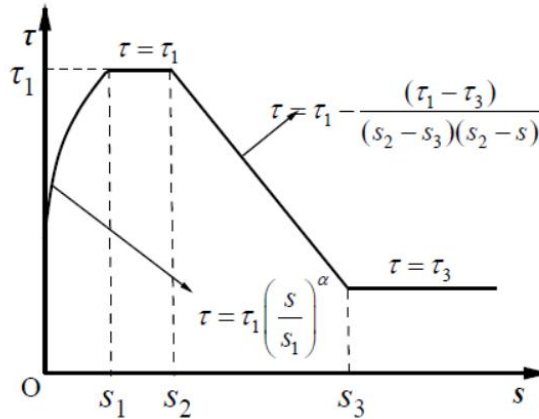


Figura 14: Modelo BPE (Wang e Qiao, 2024).

Cosenza *et al.* (1997) ampliaram o estudo avaliando diferentes tipos de fibras, tratamentos superficiais e níveis de confinamento. Verificaram que varões nervurados e revestidos com grãos apresentaram melhor desempenho de aderência, enquanto varões com enrolamento helicoidal evidenciaram resultados altamente dispersos (Lin e Zhang, 2014).

Apesar de sua ampla aplicação e boa representatividade geral, o modelo BPE apresenta limitações na descrição precisa do ramo descendente, além de não considerar explicitamente a influência do diâmetro dos varões e do tipo de fibra (Saad e Polak, 2025; Wang e Qiao, 2024). Ainda assim, o BPE permanece como uma das bases mais consolidadas para a representação do comportamento de aderência em elementos de betão armados com FRP, servindo de referência para o desenvolvimento de modelos mais avançados, como o mBPE e o CMR (Lu *et al.*, 2024).

2.3.4.3 Modelo BPE modificado (mBPE)

O modelo BPE modificado (mBPE) foi proposto por Cosenza *et al.* (1997) como uma evolução do modelo original de Eligehausen *et al.* (1983), visando representar de forma mais precisa o comportamento de aderência entre o betão e os varões de FRP. A modificação

considerou o efeito de diferentes tipos de superfície dos varões na resistência de aderência e removeu o ramo horizontal de tensão constante presente no modelo BPE, uma vez que esse comportamento não é observado experimentalmente em varões de FRP (Lin e Zhang, 2014). Assim, o modelo mBPE, Figura 15, apresenta uma curva constitutiva completa da relação tensão de aderência–escorregamento, sendo mais compatível com o comportamento real das armaduras de FRP.

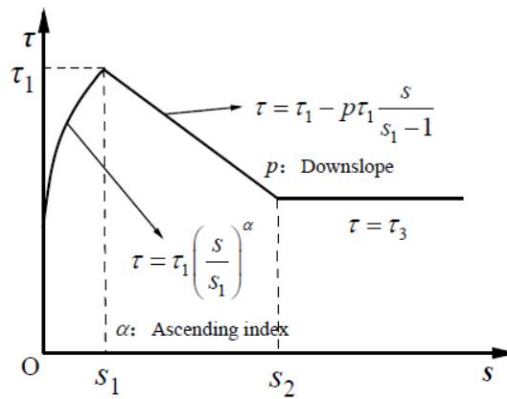


Figura 15: Modelo mBPE (Wang e Qiao, 2024).

A formulação do modelo mantém as mesmas equações do ramo ascendente do modelo BPE, modificando apenas as equações do ramo descendente, de modo a descrever de forma mais contínua a perda de aderência após o pico de tensão. Nesta versão, apenas três parâmetros principais necessitam de calibração experimental - α , p e β - o que simplifica a sua aplicação prática (Saad e Polak, 2025).

De acordo com Wang e Qiao (2024), o modelo mBPE apresenta uma boa capacidade de adaptação para representar a aderência em elementos de betão armado com FRP, mantendo uma estrutura matemática simples e de fácil implementação em modelações numéricas. Contudo, ainda apresenta limitações na descrição das fases de microescorregamento e amolecimento, além de não considerar explicitamente os efeitos do diâmetro do varão nem das variações do tipo de fibra.

Conforme destacado por Lu *et al.* (2024), o modelo modificado elimina o trecho horizontal observado nos varões de aço, ajustando o ramo descendente para refletir o

comportamento contínuo e progressivo de perda de aderência nos varões de FRP, o que resulta em uma representação mais realista do fenômeno.

2.3.4.4 Modelo CMR e Modelo Tighiouart *et al.*

O modelo Cosenza–Manfredi–Realfonzo (CMR), desenvolvido por Cosenza *et al.* (1995), constitui uma formulação refinada aplicada exclusivamente ao ramo ascendente da lei aderência–escorregamento, cuja expressão é a equação (1). Este modelo descreve a relação constitutiva entre a tensão de aderência e o escorregamento de varões de FRP em níveis correspondentes ao estado limite de serviço, sendo expresso por uma função ajustada com base em resultados experimentais (Lin e Zhang, 2014). No modelo os parâmetros β e s_r são definidos com base em resultados experimentais, sendo a curva τ – s simplificada apresentada na Figura 16 (Wang *et al.*, 2023).

$$\tau = \tau_m [1 - e^{(-s/s_r)}]^\beta, \quad s \leq s_1 \quad (1)$$

No estudo original, foram ensaiados varões de FRP com diferentes tipos de fibra e tratamentos superficiais, com o objetivo de determinar os parâmetros que melhor representassem o comportamento de aderência. Verificou-se, contudo, uma dispersão significativa nos resultados, e o efeito do diâmetro dos varões sobre a resistência de aderência não foi abordado (Lin e Zhang, 2014). O modelo caracteriza-se por uma estrutura simples, apresentando inclinação inicial infinita no trecho ascendente, o que reflete de forma mais fiel o fenômeno físico de adesão química entre o betão e o varão de FRP. Apesar dessa coerência na fase inicial, o CMR não contempla de forma contínua a transição entre os ramos descendente e residual, o que limita a sua precisão em aplicações práticas que exigem a representação completa do comportamento pós-pico (Wang e Qiao, 2024).

De forma complementar, Tighiouart *et al.* (1998) propuseram um modelo alternativo também voltado ao ramo ascendente da curva aderência–escorregamento dos varões de FRP, Figura 16, cuja expressão é determinada pela equação (2) (Lee *et al.*, 2012). Os resultados experimentais demonstraram que a tensão máxima de aderência é fortemente influenciada por múltiplos fatores, incluindo o tratamento superficial e o diâmetro do varão e o comprimento de ancoragem (Lin e Zhang, 2014). Assim, para a aplicação deste modelo em análises numéricas,

torna-se necessária a realização de ensaios experimentais prévios que permitam a determinação de τ_1 para cada condição específica.

$$\frac{\tau}{\tau_1} = [1 - e^{(-4s)}]^{0.5} \quad (2)$$

Tanto o modelo CMR quanto o modelo de Tighiouart *et al.* descrevem apenas o ramo ascendente da relação aderência–escorregamento, sendo adequados para análises em estados limites de serviço, mas insuficientes para representar o comportamento completo até à rutura das estruturas (Cosenza *et al.*, 1997; Lin e Zhang, 2014).

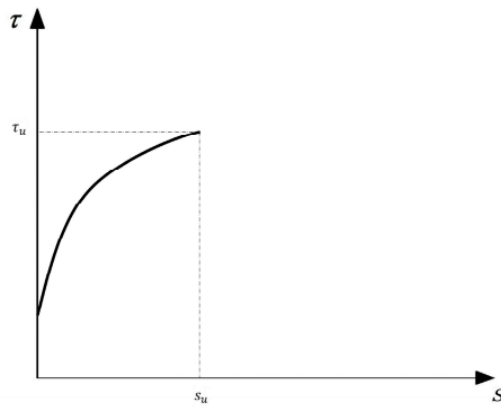


Figura 16: Modelos CMR e Tighiouart *et al.* ($\tau_u = \tau_1 = \tau_m$; $s_u = s_r$) (Wang *et al.*, 2023).

2.3.4.5 Modelo Gao Danying *et al.*

Com base na síntese dos modelos constitutivos aderência-escorregamento existentes, Gao Danying *et al.* (2020) propuseram um modelo contínuo, caracterizado por uma curva suave e contínua no ponto de tensão máxima de aderência. Esse modelo reproduz de forma mais realista o comportamento observado em aplicações estruturais e apresenta elevada aplicabilidade em engenharia (Wang e Qiao, 2024).

Em particular, Gao Danying *et al.* (2020) argumentaram que o modelo de aderência–escorregamento deve atender aos requisitos de conceitos físicos claros e curvas contínuas, suaves e completas. Assim, foi proposto um modelo de curva contínua para varões de FRP embebidos em betão, ver Figura 17 (Lu *et al.*, 2024).

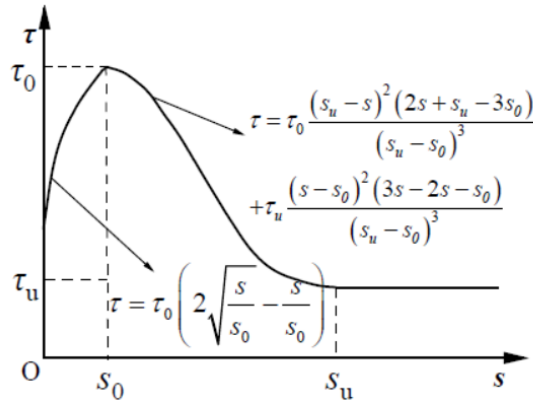


Figura 17: Modelo Gao Danying *et al.* (Wang e Qiao, 2024).

2.3.4.6 Modelo implementado no FEMIX

O modelo apresentado na Figura 18 permite, através do ajuste dos diversos parâmetros que o definem, simular a maioria dos modelos de comportamento da interface apresentados anteriormente (Barros *et al.*, 2021).

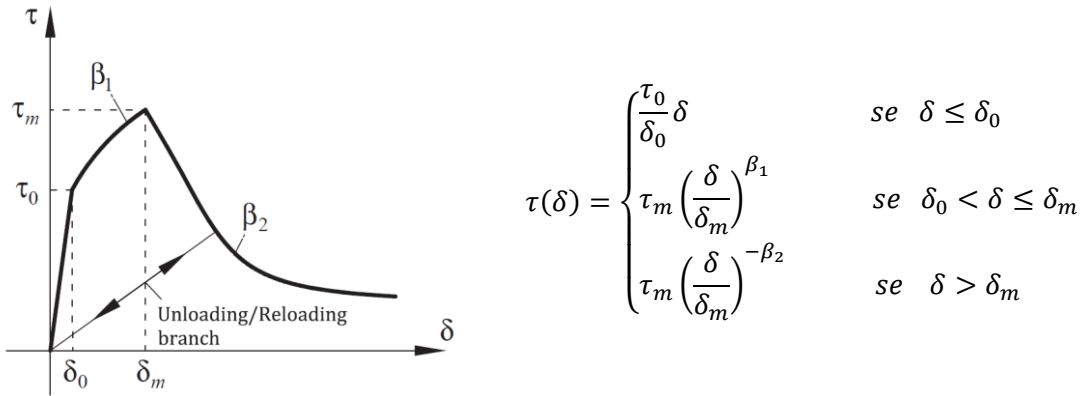


Figura 18: Proposta de modelação da interface utilizada (Barros *et al.*, 2021).

Neste modelo, τ_0 e δ_0 correspondem à tensão tangencial e ao escorregamento no final do trecho linear da relação tensão escorregamento, enquanto β_1 e β_2 são coeficientes que influenciam a forma da curva antes do pico e pós-pico, respetivamente. Os valores da aderência máxima da ligação, τ_m , e o correspondente escorregamento, δ_m , podem ser obtidos através de ensaios experimentais ou através de equações propostas por diversos autores.

2.3.5 Quantificação dos parâmetros da lei de aderência-escorregamento

A utilização de qualquer uma das leis constitutivas que procuram reproduzir o comportamento da ligação da armadura ao betão, em termos de aderência-escorregamento, pressupõe a quantificação dos parâmetros que caracterizam essas leis. Na pesquisa bibliográfica realizada reuniram-se diferentes propostas de investigadores e normas técnicas para a determinação de alguns dos parâmetros que traduzem as leis de aderência-escorregamento. Em particular, foram analisadas as metodologias para estimar a aderência máxima (τ_l), o escorregamento (s_l), a aderência residual (τ_r) e o parâmetro α , permitindo compreender como cada formulação influencia o comportamento da interface entre os varões de GFRP e o betão.

Cada proposta baseia-se em pressupostos distintos, incorporando determinados parâmetros enquanto desconsidera outros, o que conduz a valores significativamente diferentes da tensão máxima de aderência para um mesmo caso de estudo. Essa dispersão de resultados é expectável, uma vez que as formulações disponíveis na literatura não conseguem, de forma isolada, representar integralmente os mecanismos físicos associados ao fenómeno de aderência, o qual depende de múltiplos fatores interrelacionados, como as propriedades mecânicas do betão, as características geométricas dos varões e as condições da interface betão–GFRP (Saad & Polak, 2025).

Na Tabela 4 sintetizam-se algumas dessas propostas que serão descritas em seguida.

As primeiras três propostas são modelos que os autores Wambeke e Shield (2006), equação (3), Lee *et al.* (2012), equação (4), e Kim *et al.* (2013), equação (5), desenvolveram com base em resultados experimentais para estimar a tensão máxima de aderência, baseados exclusivamente na resistência à compressão do betão (El-Nemr *et al.*, 2023; Saad e Polak, 2025).

Nepomuceno *et al.* (2021) propuseram um novo modelo para a previsão da tensão máxima de aderência de varões de FRP, equação (6), considerando como parâmetros críticos a resistência do betão à compressão e o tipo de tratamento superficial do varão. Os parâmetros do modelo foram ajustados com base em ensaios realizados com comprimentos de ancoragem específicos, utilizando o método de mínimos quadrados não-lineares, e os resultados demonstraram uma significativa melhoria na precisão das estimativas em comparação com os modelos anteriores. A comparação entre os valores previstos pelo modelo e os resultados

experimentais indicou que esta abordagem fornece previsões mais confiáveis da tensão máxima de aderência, com erros reduzidos, destacando a importância do tratamento superficial dos varões para o comportamento da interface betão–FRP.

Tabela 4: Propostas sugeridas para determinação da tensão máxima de aderência.

Autores	Propostas
Propostas baseadas na resistência do betão à compressão	
Wambeke e Shield (2006)	$\tau_m = 0.749(f'_c)^{0.5}$ (3)
Lee <i>et al.</i> (2012)	$\tau_m = 4(f'_c)^{0.33}$ (4)
Lee <i>et al.</i> (2008)	$u_f = 3.3f_c^{0.3}$ (5)
Nepomuceno <i>et al.</i> (2021)	$\tau_m = \alpha(f'_c)^\beta$ (6)
Propostas baseadas na resistência do betão à compressão e noutros parâmetros	
CSA S806-02 (2002)	$\tau_b = \frac{d_{cs}\sqrt{f'_c}}{1.15(K_1K_2K_3K_4K_5)\pi d_b}$ (7)
Okelo e Yuan (2005)	$u_f = 14.7 \frac{\sqrt{f'_c}}{d_b}$ (8)
Wambeke and Shield (2006)	$\frac{\tau_b}{0.083\sqrt{f'_c}} = 4.0 + 0.3 \frac{c}{d_b} + 100 \frac{d_b}{l_d}$ (9)
Rather <i>et al.</i> (2024)	$\tau_{b,m\acute{a}x} = \sqrt{f'_c} \left[0.1377 + 0.1539 \frac{c}{d} + 2.673 \frac{d}{l_b} + 5.22R_r \right]$ (10)
ABNT NBR 17196 (2025)	$f_{bd} = \eta_1\eta_2\eta_3\eta_4f_{ctd}$ (11)

Parâmetros: d_{cs} , o menor valor entre: (a) a distância da superfície de betão mais próxima até o centro do varão; ou (b) dois terços do espaçamento centro a centro dos varões; d_b , diâmetro nominal de um varão circular ou diâmetro equivalente de um varão retangular; K_1 , fator de posição do varão; K_2 , fator de densidade do betão; K_3 , fator de dimensão do varão; K_4 , fator da fibra do varão; K_5 , fator do perfil da superfície do varão; τ_b , tensão de aderência; u_f , tensão média de aderência; τ_m , tensão máxima de aderência; f'_c , resistência à compressão do betão; c , recobrimento efetivo do betão; d , diâmetro do varão; l_b , comprimento de ancoragem; R_r , parâmetro adimensional representando a rugosidade do varão de GFRP; f_{bd} – resistência de aderência de cálculo; η_1 , coeficiente que considera o tipo de superfície do varão; η_2 , coeficiente que considera as condições de aderência; η_3 , coeficiente que reflete o efeito do diâmetro nominal do varão; η_4 , coeficiente relativo ao tipo de varão; f_{ctd} , resistência de cálculo à tração do betão.

A CSA S806-02 estabelece diretrizes para o cálculo da tensão média de aderência entre os varões de FRP e o betão, sendo aplicável a diferentes tipos de fibras (GFRP, AFRP, CFRP) e considerando múltiplos fatores que influenciam o comportamento da aderência, equação (7). Entre esses fatores estão o recobrimento do betão, a resistência e densidade do betão, o diâmetro e as características superficiais dos varões, bem como a sua posição na seção transversal (Yan *et al.*, 2016).

A formulação desenvolvida por Okelo e Yuan (2005), equação (8), foi calibrada com base em um extenso programa experimental, na qual a tensão média de aderência é expressa como função da resistência à compressão do betão e do diâmetro do varão. Apesar da simplicidade e da facilidade de aplicação, estudos recentes indicam que esta formulação e a de Kim *et al.* (2013) tendem a apresentar carácter conservador, uma vez que não incorporam explicitamente parâmetros relacionados à geometria do varão, ao confinamento proporcionado ao betão ou às condições superficiais da armadura (Saad e Polak, 2025; Rathe *et al.*, 2024).

O ACI 440.1R-06 também apresenta uma formulação para a estimativa da tensão máxima de aderência entre varões de FRP e o betão, a qual foi proposta por Wambeke e Shield (2006) a partir da análise de um amplo conjunto de resultados experimentais, equação (9). Nesta abordagem, o comprimento de ancoragem é determinado em função do diâmetro do varão e de um parâmetro geométrico correspondente ao menor valor entre o recobrimento lateral, o recobrimento inferior e metade do espaçamento livre entre varões adjacentes. Conforme discutido por Yan *et al.* (2016), a formulação baseia-se em uma regressão linear da tensão média de aderência em função do recobrimento de betão e do comprimento de ancoragem. O programa experimental que fundamentou essa proposta considerou diferentes configurações de armaduras, incluindo varões com revestimento de areia, enrolamento espiral e nervuras helicoidais, bem como variações no diâmetro dos varões, na resistência à compressão do betão e na presença ou ausência de armadura transversal que confira confinamento ao betão. Apesar da sua aplicação a varões de GFRP, AFRP e CFRP, a expressão apresenta limitações semelhantes às de outras abordagens empíricas, uma vez que não considera explicitamente a influência do tipo de fibra ou das características específicas da superfície dos varões (Saad e Polak, 2025).

Rathe *et al.* (2024) propuseram uma modificação à formulação que Diab *et al.* (2014) desenvolveram para a aderência entre varões de aço e o betão. Esta equação permite estimar de

forma mais precisa a contribuição das propriedades geométricas da superfície dos varões de GFRP na tensão máxima de aderência ao betão, considerando o diâmetro do varão, o recobrimento das armaduras, o comprimento de ancoragem e um parâmetro relativo à rugosidade superficial do varão, equação (10). Esta expressão foi calibrada a partir de ensaios experimentais realizados com varões com superfície helicoidal de GFRP e condições específicas de betão e comprimento de ancoragem, devendo a sua aplicação a outros cenários ser avaliada com cautela.

De acordo com a ABNT NBR 17196:2025, a resistência de aderência de cálculo entre varões de GFRP e o betão pode ser estimada através da equação (11), em que f_{bd} representa a resistência de aderência de cálculo, obtida a partir da resistência de cálculo à tração do betão, f_{ctd} , multiplicada por coeficientes que consideram diferentes parâmetros associados às características da armadura e às condições de aplicação. Essas características estão diretamente relacionadas ao tipo de superfície dos varões, refletindo a influência da textura e do mecanismo de ancoragem na interface betão–GFRP, bem como às condições de aderência durante a betonagem, que podem ser classificadas como de boa ou má aderência. Além disso, é considerado o diâmetro nominal do varão, reconhecendo o seu efeito geométrico na transferência de tensões. Valores específicos são aplicados para varões de GFRP e BFRP, os únicos tipos de armadura contemplados pela norma.

A análise conjunta dessas propostas evidencia que, embora existam diversas expressões disponíveis na literatura e em documentos normativos, ainda não há consenso quanto à formulação capaz de representar de forma abrangente o comportamento de aderência entre o betão e os varões de GFRP.

O escorregamento associado à tensão máxima de aderência constitui um dos parâmetros essenciais na caracterização do modelo de aderência-escorregamento de varões embebidos no betão. Lee *et al.* (2012) propuseram uma abordagem empírica para estimar esse escorregamento para varões de GFRP com superfície enroladas helicoidalmente, equação (12).

$$s_m = \left(\frac{\tau_m}{f'_c} \right) \left(\frac{l_e}{8} \right) \quad (12)$$

Em que s_m representa o escorregamento correspondente à tensão máxima de aderência, τ_m corresponde à tensão máxima de aderência entre o betão e a barra de GFRP, f'_c é a resistência

à compressão do betão e l_e representa o comprimento de amarração da barra. As previsões obtidas por meio desta formulação demonstraram uma boa concordância com os resultados experimentais (El-Nemr *et al.*, 2023).

Em relação ao valor da tensão de aderência residual, identificado por τ_3 no modelo mBPE (no item 2.3.4.3), Lee *et al.* (2012) verificou que, em média, essa resistência residual era igual a aproximadamente metade da tensão máxima de aderência.

Na Tabela 5 apresentam-se propostas para os parâmetros que caracterizam o modelo mBPE, utilizado para caracterizar a relação aderência-escorregamento de varões de GFRP com diferentes tipos de superfície. Os valores apresentados foram calibrados com base em resultados experimentais originalmente reportados por Cosenza *et al.* (1997). Estes parâmetros incluem a aderência residual (τ_3) e o parâmetro α , que refletem o comportamento da interface betão–GFRP (Lin e Zhang, 2014).

Tabela 5: Parâmetros que definem a relação aderência-escorregamento de varões de GFRP para o modelo mBPE (Cosenza *et al.*, 1997).

Parâmetro	Tipo de superfície do varão de GFRP			
	Nervurado	Enrançada	Revestimento de areia	Liso
α	0,283	0,177	0,067	0,145
p	14,88	12,80	3,11	1,87
s_1 (mm)	1,23	2,14	0,13	0,26
τ_1 (MPa)	11,61	10,20	12,05	1,19
τ_3 (MPa)	7,79	6,26	3,17	0,99

Nepomuceno *et al.* (2021) apresentaram valores para α e β , indicados na Tabela 6, parâmetros esses obtidos para a equação proposta para a previsão da tensão máxima de aderência entre o betão e os varões de FRP, considerando os resultados experimentais de provetes com comprimento de amarração igual a cinco vezes o diâmetro do varão (5 $\emptyset$).

Tabela 6: Parâmetros α e β propostos por Nepomuceno *et al.* (2021) para estimar a tensão máxima de aderência.

Tipo de superfície	α	β
SC + DS	5,24	0,33
DS	2,57	0,54
SC	3,33	0,41
SM	0,18	0,96

SC + DS – nervurado com revestimento de areia;
 SC - revestimento de areia; DS – nervurado; SM – liso.

2.4 Modelação Numérica de Vigas de Betão com Varões de GFRP

As limitações humanas impedem a compreensão imediata e global do comportamento de sistemas complexos, sejam eles naturais ou artificiais. Diante disso, torna-se necessário recorrer a estratégias de simplificação, entre as quais se destaca a decomposição do sistema em partes ou “elementos” menores, cujas propriedades e respostas podem ser analisadas de forma mais clara e objetiva. Posteriormente, a partir da integração desses elementos, é possível reconstruir o sistema original e compreender o seu funcionamento global. Esse procedimento constitui uma abordagem lógica e intuitiva utilizada em diversas áreas do conhecimento, como a engenharia, a ciência e até mesmo a economia, configurando-se como um método essencial para a análise e solução de problemas relacionados a sistemas complexos (Zienkiewicz e Taylor, 1989).

Na Engenharia, o Método dos Elementos Finitos (MEF) consolidou-se como uma das principais ferramentas para a análise estrutural, sendo aplicado na determinação de tensões, deformações e deslocamentos em sólidos de geometrias complexas sujeitos a diferentes tipos de ações externas. A essência do método consiste na discretização do meio contínuo em subdomínios denominados elementos finitos, que preservam as propriedades do material original e possibilitam a formulação de um sistema de equações que aproxima a solução das equações diferenciais que regem o comportamento mecânico das estruturas (Azevedo, 2003).

De forma geral, o MEF pode ser entendido como uma técnica numérica em que o domínio físico é representado por uma malha de elementos interligados, permitindo que o problema contínuo seja transformado em um conjunto finito de equações resolvidas por modelos matemáticos e computacionais (Lotti *et al.*, 2006). Essa abordagem oferece grande flexibilidade para tratar diferentes condições de contorno, tipos de materiais e configurações geométricas.

O MEF em problemas de análise estrutural exige inicialmente a definição de aspectos fundamentais da estrutura em estudo, como a sua geometria, o modelo constitutivo do material e as características das ações aplicadas. Tais fatores determinam o grau de simplificação e as hipóteses adotadas, influenciando diretamente a formulação do modelo e a precisão dos resultados obtidos (Azevedo, 2003).

Na prática, a aplicação do MEF envolve a utilização de centenas ou até milhares de elementos, o que torna inviável a sua execução manual. Por essa razão, o método depende de programas computacionais especializados, capazes de processar automaticamente as informações necessárias para a análise estrutural. O elevado volume de dados envolvidos, como coordenadas nodais, conectividade entre elementos, condições de apoio e carregamentos aplicados, somado à grande quantidade de resultados a serem obtidos, incluindo deslocamentos, reações de apoio e tensões internas, exige ferramentas de processamento eficientes. Nesse contexto, o uso de softwares com pré-processadores adequados torna-se fundamental para a geração e verificação do modelo discreto, enquanto pós-processadores robustos são indispensáveis para a interpretação e validação dos resultados, assegurando a confiabilidade da análise estrutural (Soriano, 2002).

De forma geral, nas análises estruturais é comum adotar a hipótese de linearidade entre tensões e deformações do material. Contudo, quando essa simplificação não representa adequadamente o comportamento real, torna-se indispensável recorrer a algoritmos específicos capazes de considerar os efeitos da não-linearidade material, garantindo maior precisão na modelação numérica (Azevedo, 2003).

De acordo com Amaral *et al.* (2024), a simulação numérica utilizando o MEF é, geralmente, realizada através de softwares comerciais. Dentre os mais utilizados destacam-se o ANSYS e o ABAQUS. Além disso, foram identificados outros programas, como LS-DYNA, Vector2, ATHENA, FEMIX e DIANA.

A Figura 19 apresenta uma esquematização simplificada do processo de análise pelo MEF. Como o MEF é um método numérico, é essencial verificar a precisão dos resultados obtidos. De acordo com Bathe (2016), citado por Silva (2022), caso os critérios de precisão estabelecidos para o problema não sejam alcançados, é necessário repetir o processo utilizando parâmetros de solução mais refinados.

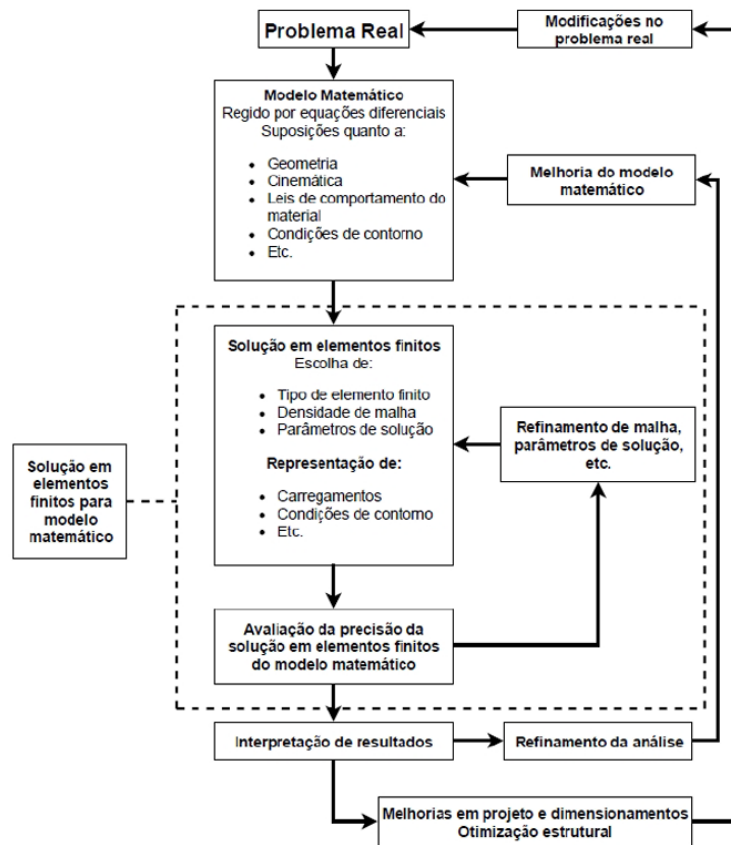


Figura 19: Processo de análise pelo método dos elementos finitos (Silva, 2022).

As primeiras utilizações do MEF ocorreram na área da engenharia estrutural, com foco inicial na análise de tensões. Nesses problemas, o objetivo principal consiste em determinar os estados de tensão, deformação e deslocamento em sólidos submetidos a diferentes tipos de ações, como cargas externas aplicadas e deslocamentos impostos. Essa abordagem revelou-se particularmente eficaz para o estudo do comportamento de estruturas de grande relevância na engenharia civil, incluindo edifícios, pontes, barragens e túneis. Nessas aplicações, o MEF é amplamente empregado para discretizar diferentes componentes estruturais, como vigas, lajes, treliças, paredes e fundações, possibilitando uma representação mais próxima da realidade física e uma análise detalhada da resposta estrutural (Souza, 2003).

A utilização do MEF na análise de vigas de betão armado com varões de GFRP sujeitas à flexão tem demonstrado ser uma metodologia útil na simulação do comportamento experimental. Em seguida apresentam-se alguns desses estudos.

Alam e Hussein (2020) desenvolveram e validaram um modelo de *tension stiffening* para análise, por elementos finitos, de vigas de betão armado com varões de GFRP. O modelo foi derivado a partir de uma formulação existente para vigas com armadura de aço, utilizando a mesma densidade de energia de deformação. As simulações foram realizadas utilizando o software ABAQUS, e os resultados foram comparados com ensaios experimentais considerando a resposta carga-deslocamento, os padrões de fendilhação e a carga última. Os resultados demonstraram que o modelo proposto foi capaz de prever com precisão razoável o comportamento à flexão de vigas de GFRP, reproduzindo adequadamente a deformação e o padrão de fendilhação observados experimentalmente.

Ifrahim *et al.* (2023) realizaram também análises analítica e numérica para avaliar o comportamento de vigas de betão armado com varões de GFRP. Inicialmente, foram utilizados modelos analíticos baseados na rigidez efetiva à flexão para prever a relação carga–deslocamento, verificando-se que a precisão dessas previsões é influenciada pela taxa de armadura longitudinal. A análise numérica foi desenvolvida pelo método dos elementos finitos, utilizando o software ATENA 2D, e os resultados obtidos apresentaram boa concordância com os dados experimentais e com as previsões analíticas. Após a validação do modelo, foi conduzida uma análise paramétrica para avaliar a influência da resistência à compressão do betão, da taxa de armadura longitudinal, do módulo de elasticidade dos varões de GFRP e da relação entre o vão de corte e a altura da viga. Os resultados indicaram que o aumento da resistência à compressão do betão e do módulo de elasticidade dos varões de GFRP aumentam a carga última.

Vaz *et al.* (2023) realizaram uma análise numérica visando avaliar o comportamento de vigas de betão armado com varões de aço e GFRP, com foco na calibração do modelo de plasticidade por dano do betão (CDP) para armaduras de GFRP. O estudo utilizou simulações de elementos finitos para investigar a influência de modelar as armaduras como elementos sólidos ou como elementos de barra, buscando um alto nível de aproximação aos resultados experimentais. As leis constitutivas do betão foram incorporadas no modelo CDP, enquanto o comportamento das armaduras de aço foi considerado linear-elástico, e o dos varões de GFRP foi calibrado com base nos parâmetros ideais identificados para o material. Os resultados numéricos demonstraram boa concordância com os dados experimentais, ver a Figura 20, com diferenças próximas de 3% para vigas com armadura de aço e 15% para vigas com armadura

de GFRP, confirmando a capacidade do modelo em reproduzir com confiança o comportamento estrutural observado experimentalmente.

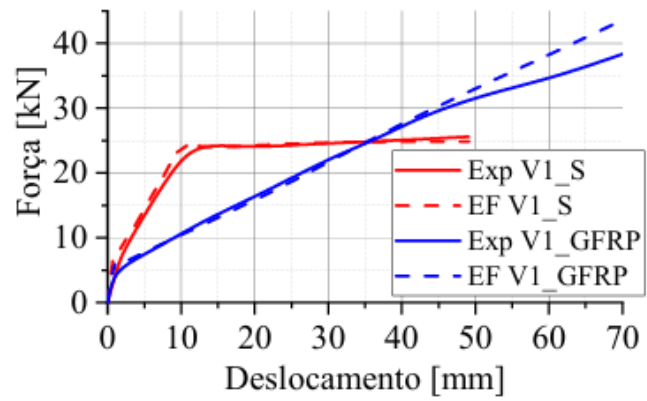


Figura 20: Comparação entre os resultados experimentais e numéricos para as vigas armadas com varões de aço e de GFRP (Vaz *et al.*, 2023).

3 CASO DE ESTUDO: CAMPANHA EXPERIMENTAL NA UTFPR

Neste capítulo é apresentada a campanha experimental selecionada como base para o desenvolvimento da análise numérica. Importa salientar que a escolha deste estudo de caso se deve, por um lado, à participação direta do autor no seu desenvolvimento e, por outro, ao facto de se tratar de um dos trabalhos pioneiros sobre esta temática realizados na instituição de origem (UTFPR-PB). Ao longo do capítulo procede-se à descrição detalhada da campanha experimental, incluindo a caracterização dos materiais e dos ensaios realizados e a apresentação dos principais resultados obtidos, bem como algumas considerações relevantes que se mostraram necessárias para a adequada interpretação dos dados experimentais.

3.1 Descrição da Campanha Experimental

Para a validação e comparação dos resultados obtidos na simulação numérica, adotou-se como referência o estudo experimental desenvolvido por Teixeira (2024). Nesta investigação, foi analisada a viabilidade técnica da substituição dos varões de aço por varões de GFRP em vigas de betão armado submetidas à flexão. O trabalho experimental consistiu na realização de ensaios de flexão em quatro pontos, com rotura controlada após 28 dias de idade do betão. Na Figura 21 apresenta-se o esquema adotado nos ensaios experimentais, evidenciando a configuração do sistema de carregamento aplicado e as condições de apoio.

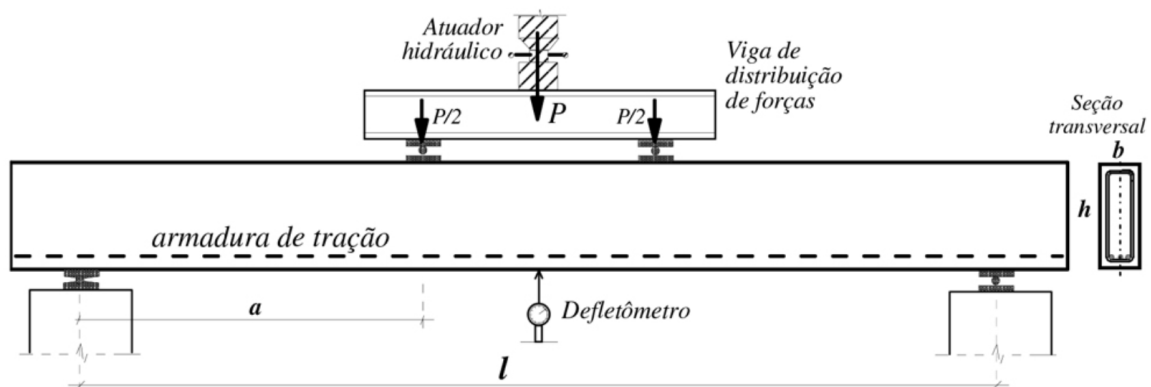


Figura 21: Esquema de ensaio à flexão de viga de betão armado (Teatini, 2016).

No estudo em análise foram fabricadas um total de sete vigas de betão armado, das quais três vigas armadas com varões de aço (V1A, V2A e V3A) e quatro vigas armadas com varões de GFRP (V1G, V2G, V3G e V4G), todas utilizando estribos de aço com diâmetro de 4,2 mm.

As sete vigas ensaiadas por Teixeira (2024) apresentam dimensões padronizadas, com seção transversal de 8x16 (cm) e comprimento total de 1,63 m, correspondendo a um vão efetivo de 1,50 m. Os diâmetros das armaduras longitudinais foram mantidos para ambos os tipos de vigas, mudando apenas o material. A armadura longitudinal superior é constituída por dois varões de diâmetro 6,3 mm, para as de aço, e por dois varões de 6,0 mm de diâmetro, para as de GFRP. A armadura longitudinal inferior é constituída por dois varões de 10,0 mm de diâmetro para ambos os materiais. Considerando que as vigas foram dimensionadas sem enfoque na durabilidade, adotou-se um recobrimento nominal das armaduras de 15,0 mm. Na Figura 22 é possível observar a seção transversal das vigas armadas com aço e GFRP.

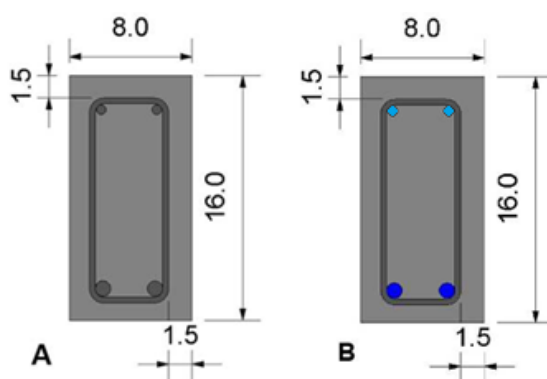


Figura 22: Seção transversal das vigas com varões de aço (A) e GFRP (B), dimensões em cm (Teixeira, 2024).

O betão utilizado foi caracterizado por Teixeira (2024) por meio de ensaios de compressão em provetes cilíndricos, correspondentes às duas betonagens realizadas. Os resultados indicam os valores médios da resistência à compressão (f_{cm}) de 34 MPa, para a primeira betonagem, a qual foi utilizada para a confecção das vigas armadas com aço e 33 MPa para a segunda betonagem, que foi utilizada nas vigas armadas com GFRP, ambas as resistências avaliadas aos 28 dias de idade.

Para a medição dos deslocamentos verticais durante os ensaios, foi colocado um relógio medidor (transdutor de deslocamento) fixado a uma base magnética e posicionado no meio do

vão livre da viga. O equipamento utilizado possuía uma capacidade máxima de medição de 10,0 mm, limitando os dados coletados a esse intervalo. Adicionalmente, para evitar danos ao relógio medidor no momento da ruptura da viga, o dispositivo foi retirado em um estágio avançado do ensaio, garantindo a integridade do equipamento e a segurança do procedimento experimental. A aquisição das medições da carga e dos deslocamentos foi efetuada analogicamente, sem recurso a um sistema de aquisição contínuo e digital. Assim, as curvas carga-deslocamento a meio vão que caracterizam a resposta experimental das vigas ensaiadas, foram obtidas através dos resultados correspondentes a incrementos de carga de 250 kgf. Esta situação constituiu uma das limitações deste estudo, nomeadamente na análise comparativas das respostas numéricas e experimentais.

O estudo forneceu importantes resultados experimentais, mas não apresentou todas as informações detalhadas necessárias para a execução da modelação numérica e para a validação dos modelos desenvolvidos, pelos aspetos referidos no parágrafo anterior e no que diz respeito à caracterização dos materiais das armaduras. Dessa forma, algumas características adicionais tiveram que ser consideradas para que a simulação pudesse reproduzir com alguma precisão o comportamento das vigas e permitir a comparação com os dados experimentais.

3.1.1 Características dos materiais

Diante da ausência de informações no estudo de Teixeira (2024), tornou-se necessário aferir as propriedades em falta para os materiais utilizados na modelação numérica, a partir de dados obtidos na normalização e na literatura. Esses dados complementares foram fundamentais para representar o comportamento estrutural das vigas, englobando características do betão, dos varões de aço e dos varões de GFRP, de modo a permitir que a simulação refletisse de forma consistente os resultados experimentais.

3.1.1.1 Betão

Para determinar a resistência média à tração do betão (f_{ctm}), utilizou-se a equação (13), fornecida pela ABNT NBR 6118 (2023), aplicável a betões com resistência característica à compressão inferiores a 50 MPa:

$$f_{ctm} = 0,3f_{ck}^{2/3} \quad (13)$$

Como o estudo de Teixeira (2024) não forneceu valores obtidos diretamente de ensaios para o módulo de elasticidade do betão, foi necessário estimar esse parâmetro com base em expressões normativas, para tanto, adotou-se a norma ABNT NBR 6118 (2023). De acordo com a norma, o módulo de elasticidade inicial do betão (E_{ci}) pode ser estimado a partir da resistência característica à compressão do betão (f_{ck}), utilizando a equação (14):

$$E_{ci} = \alpha_E \cdot 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (14)$$

Sendo: $\alpha_E = 1,2$ para basalto.

Em relação ao módulo de deformação secante (E_{cs}) pode ser estimado por meio das equações (15) e (16):

$$E_{cs} = \alpha_i \cdot E_{ci} \quad (15)$$

Sendo:

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad (16)$$

Na Tabela 7 são apresentados os valores das propriedades do betão, para cada betonagem.

Tabela 7: Características do betão.

Betonagem	Resistência média à compressão (MPa)	Resistência característica à compressão (MPa)	Resistência média à tração (MPa)	Módulo de elasticidade inicial (MPa)	Módulo de deformação secante (MPa)
Primeira	34,00	26,00	2,6329	34265,41	29639,58
Segunda	33,00	25,00	2,5650	33600,00	28980,00

No que se refere ao coeficiente de Poisson para o betão, parâmetro que expressa a relação entre as deformações transversais e longitudinais de um material sujeito a um estado de tensão, adotou-se o valor de 0,2, conforme recomendado pela ABNT NBR 6118 (2023).

3.1.1.2 Aço

Considerando que não se realizaram ensaios de tração dos varões, na campanha experimental, foi necessário considerar os dados de ensaios disponibilizados pelo fabricante.

Os varões de aço utilizados nas armaduras das vigas, tanto na armadura longitudinal, quanto nos estribos, foram do tipo CA50 Soldável (CA50 S), caracterizados por uma resistência à tração de 500 MPa. A Figura 23 apresenta a curva tensão-deformação do aço, obtida na ficha técnica do material, a qual foi utilizada para a definição do comportamento mecânico do material, permitindo uma representação da resposta do aço sob carregamento.

Na Tabela 8 apresentam-se os valores adotados para a curva tensão-deformação do aço, definidos a partir dos dados experimentais fornecidos pelo fabricante dos varões utilizados.

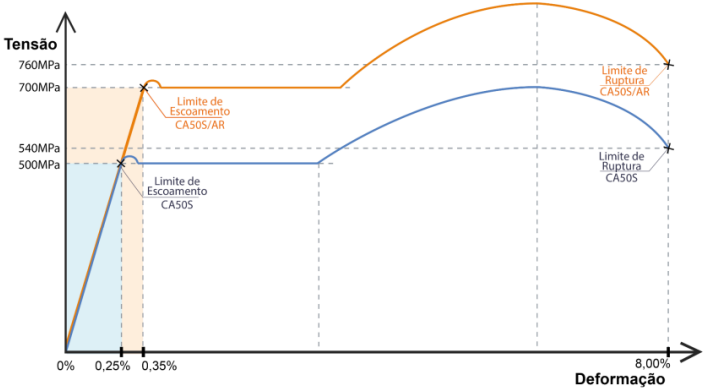


Figura 23: Diagrama tensão-deformação do aço CA50S (ArcelorMittal, 2022).

Tabela 8: Dados adotados de acordo com o diagrama tensão-deformação do aço.

Armadura	$\varnothing$ (mm)	A_s (mm ²)	ϵ_{sy} (‰)	σ_{sy} (N/mm ²)	ϵ_{sh} (‰)	σ_{sh} (N/mm ²)	ϵ_{su} (‰)	σ_{su} (N/mm ²)
Estribos	4,2	27,70	25	500	25	500	80	540
Superior	6,3	62,33	25	500	25	500	80	540
Inferior	10,0	157,08	25	500	25	500	80	540

Para o coeficiente de Poisson do aço, adotou-se o valor recomendado pela ABNT NBR 8800:2024, que sugere 0,30 para fins de cálculo estrutural. Essa escolha garante consistência com as normas brasileiras e com as propriedades físicas típicas do aço.

3.1.1.3 GFRP

No que diz respeito ao comportamento mecânico, os varões de GFRP apresentam diferenças significativas em relação aos varões de aço. Estes possuem maior resistência longitudinal do que transversal, além de exibirem um módulo de elasticidade inferior e menor resistência à compressão e ao corte. Em virtude dessas particularidades, é necessário ajustar a consideração das suas propriedades mecânicas nas análises e dimensionamentos (Couto, 2007). Assim, neste trabalho, foram adotados valores de referência baseados nas características apresentadas por Teixeira (2024), complementados por dados provenientes de normas técnicas e da literatura.

Quando se analisa o coeficiente de *Poisson* dos varões de GFRP, observa-se uma considerável variação nos valores reportados na literatura, refletindo as diferenças inerentes à composição e ao processo de fabrico destes materiais.

Na Tabela 9 apresentam-se os valores das propriedades correntes que caracterizam o comportamento à tração dos varões de FRP (volume de fibras de 0,5 a 0,75) e de aço.

Todos os dados apresentados foram fundamentais para a completa caracterização dos materiais.

Tabela 9: Propriedades de tração dos varões de armadura de FRP e de aço (Fib Bulletin 40, 2007).

Propriedade	Material			
	Aço	GFRP	CFRP	AFRP
Módulo longitudinal (GPa)	200	35 a 60	100 a 580	40 a 125
Resistência à tração longitudinal (MPa)	450 a 700	450 a 1600	600 a 3500	1000 a 2500
Deformação última de tração (%)	5 a 20	1.2 a 3.7	0.5 a 1.7	1.9 a 4.4

3.2 Resultados da Campanha Experimental

A campanha experimental desenvolvida por Teixeira (2024) permitiu analisar o comportamento estrutural de vigas de betão armado com varões de aço e de GFRP, ao longo de todo o processo de ensaio. Durante a aplicação progressiva das cargas, foi possível acompanhar a evolução do estado de fendilhação das vigas, bem como identificar diferenças significativas no desempenho associado ao tipo de varões utilizados na armadura longitudinal inferior.

De modo geral, verificou-se que as vigas de betão com armaduras de aço (VA) apresentaram maior capacidade resistente antes do aparecimento das primeiras fissuras, quando comparadas às vigas de betão com varões de GFRP (VG). Observou-se ainda que, independentemente do tipo de armadura adotado, o modo de rutura das vigas ocorreu por flexão, não tendo sido registados casos de colapso frágil por corte (Teixeira, 2024).

A Tabela 10 apresenta os valores médios obtidos da carga máxima e do deslocamento máximo registado, para os dois conjuntos de vigas de betão ensaiadas (VA e VG).

Tabela 10: Cargas máximas e deslocamentos nas vigas VA e VG (adaptado de Teixeira, 2024).

Grupo de Vigas	Carga máxima (kN)	Deslocamento (mm)
Aço (VA)	54,97	≈ 7,10
GFRP (VG)	24,83	> 10,00

A partir dos resultados obtidos para os diferentes níveis de carga aplicada foram construídos os diagramas carga–deslocamento de cada viga, os quais permitem analisar o respetivo comportamento estrutural ao longo do ensaio, como é representado na Figura 24. No gráfico são representadas as vigas de betão com varões de aço - VA (V1A, V2A e V3A) e as vigas de betão com varões de GFRP - VG (V1G, V2G, V3G e V4G).

A análise dos resultados experimentais apresentados por Teixeira (2024) evidencia diferenças no comportamento estrutural entre as vigas VA e VG. As vigas VA demonstraram uma maior rigidez inicial, suportando níveis de carga superiores antes do início da fendilhação. As vigas VG apresentaram uma carga de fendilhação menor e maiores deslocamentos para os

mesmos níveis de carga. A maior deformabilidade das vigas VG está, naturalmente, associada ao Módulo de Elasticidade dos varões de GFRP que é cerca de quatro vezes inferior ao dos varões de aço. Em termos de modo de rutura, observou-se que nas vigas VG ocorreu o esmagamento do betão na zona comprimida e a rutura dos varões comprimidos de GFRP, enquanto nas vigas VA o modo de ruína ocorreu por plastificação das armaduras de aço, comportamento coerente com os pressupostos teóricos adotados (Teixeira, 2024).

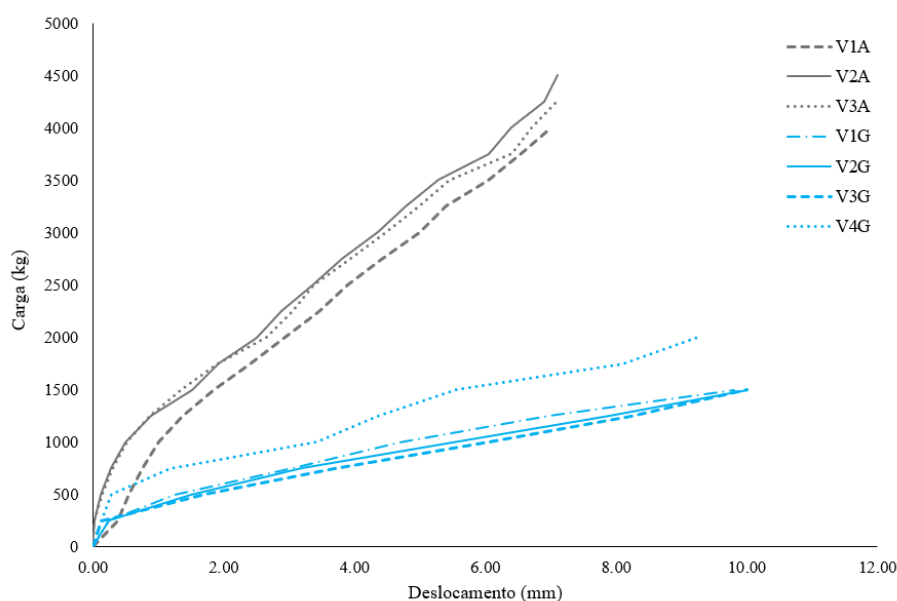


Figura 24: Carga-deslocamento a meio vão das vigas VA e VG (Teixeira, 2024).

Com vista à posterior comparação entre os resultados experimentais obtidos por Teixeira (2024) e os resultados provenientes da análise numérica, foi determinada a curva carga-deslocamento correspondente à média dos valores de cada grupo de vigas (VA e VG). Estas curvas médias são apresentadas nas Figura 25 e Figura 26, conjuntamente com a envolvente das respostas experimentais das vigas que obtiveram maior e menor capacidade de carga, permitindo representar a variabilidade dos resultados e fornecer um enquadramento para a avaliação da adequação e da precisão do modelo numérico relativamente ao comportamento observado em ensaio.

Como se referiu anteriormente e se observa nas Figura 25 e Figura 26 o registo dos deslocamentos a cada incremento de carga de 250 kgf, conduziu a um número reduzido de

pontos experimentais, o que condiciona uma comparação direta e detalhada com os resultados provenientes da análise numérica. Com efeito, nos intervalos entre dois níveis consecutivos de carga aplicada podem ter ocorrido variações no comportamento estrutural das vigas que não foi possível captar nos ensaios experimentais, principalmente nas vigas VG (Figura 26).

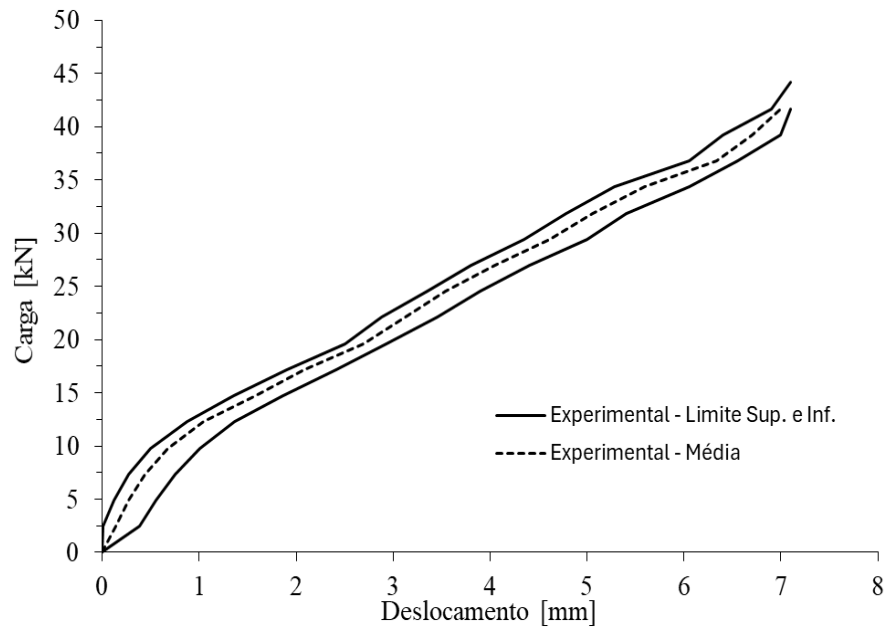


Figura 25: Carga-deslocamento a meio vão das vigas VA (Média, envolvente superior e inferior).

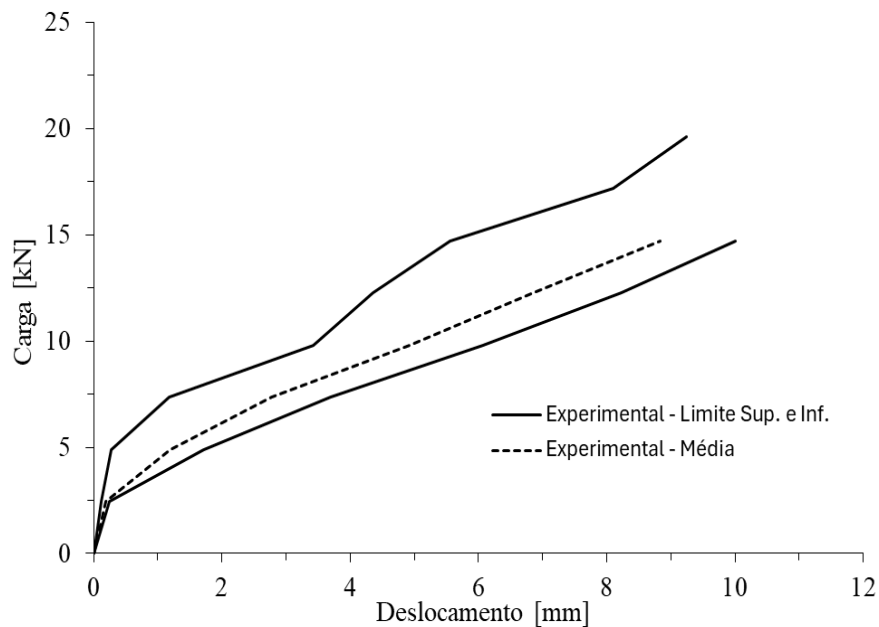


Figura 26: Carga-deslocamento a meio vão das vigas VG (Média, envolvente superior e inferior).

Acresce que a aplicação da carga foi realizada manualmente pelo responsável pelo equipamento, e a leitura dos deslocamentos foi efetuada visualmente pela autora, através de um relógio comparador, fatores que introduzem inevitavelmente incertezas associadas ao procedimento experimental. Ainda assim, os resultados obtidos permitem identificar o comportamento global das vigas ensaiadas.

Por outro lado, a análise numérica fornece um conjunto significativamente mais denso de pontos ao longo do carregamento, o que permite uma descrição mais contínua do comportamento estrutural. Esta diferença na densidade de dados dificulta a interpretação direta do comportamento experimental nos intervalos não monitorizados.

4 MODELAÇÃO NUMÉRICA DAS VIGAS DE BETÃO ARMADO

O presente capítulo dedica-se à modelação numérica das vigas de betão armado reforçadas com varões de aço, enquadrando as opções adotadas ao nível da discretização da malha, das leis constitutivas e da estratégia de análise. A definição da malha assume particular relevância na qualidade da resposta numérica, sendo analisada a sua influência na precisão e estabilidade dos resultados, de modo a seleccionar uma discretização representativa para o desenvolvimento do estudo.

A resposta estrutural das vigas é analisada com base nas leis constitutivas (relações tensão-extensão) consideradas para o betão e para as armaduras, procurando-se compreender a sua influência no comportamento global do elemento estrutural, nomeadamente em regime não-linear. A partir do modelo implementado, procede-se à extração e análise dos resultados numéricos, estabelecendo a sua interpretação e comparação com os dados experimentais disponíveis.

O programa de cálculo automático utilizado neste estudo foi o *FEMIX 4.0* (Azevedo *et al.*, 2003; Ventura-Gouveia, 2011), desenvolvido com base no MEF e composto por três módulos principais: *Prefemix*, *Femix* e *Posfemix*. A execução destes módulos assenta num único ficheiro de dados, com extensão *_gl.dat*, que reúne todas as informações necessárias para o processamento e análise numérica.

Na engenharia, o MEF destaca-se como uma das ferramentas mais amplamente reconhecidas e utilizadas na análise de problemas complexos, permitindo tanto a interpretação quanto a compreensão de fenómenos e elementos de difícil resolução analítica (Zienkiewicz e Taylor, 1989). Para garantir a eficácia da sua aplicação, é indispensável a utilização de ferramentas de pós-processamento adequadas, capazes de organizar e representar os resultados mais relevantes da análise, seja por meio de visualizações gráficas ou da apresentação de variáveis quantitativas, assegurando assim uma interpretação precisa e consistente dos comportamentos estruturais simulados (Azevedo e Barros, 2000).

O FEMIX, enquanto programa de cálculo automático baseado no MEF, encontra-se estruturado em três módulos funcionais (Azevedo *et al.*, 2003):

- *prefemix* – responsável pela leitura e validação do ficheiro de texto (*_gl.dat*), contendo todos os dados de entrada, e pela geração dos ficheiros binários com as informações já verificadas;
- *femix* – encarregado da leitura dos ficheiros binários e da execução dos cálculos segundo o método dos elementos finitos, gravando posteriormente os resultados obtidos, que podem corresponder a análises lineares ou não-lineares;
- *posfemix* – dedicado à organização e visualização dos resultados provenientes dos módulos anteriores, permitindo a sua análise detalhada e representação gráfica.

Para além do FEMIX, recorreu-se ao Microsoft Excel para o tratamento e organização dos resultados numéricos obtidos a partir do módulo *posfemix*. Esta etapa permitiu a sistematização dos dados e a construção de representações gráficas, facilitando a análise comparativa entre diferentes malhas e a avaliação da influência das leis constitutivas adotadas. Através destes gráficos, tornou-se possível identificar as configurações numéricas que melhor reproduzem o comportamento estrutural observado, bem como proceder à comparação e extração dos resultados mais relevantes para o estudo.

Adicionalmente, foi utilizado o software *DrawMesh*, para a visualização gráfica de alguns resultados gerados pelo *posfemix*. Por meio desta ferramenta, foi possível analisar graficamente a malha de elementos finitos adotada, a configuração deformada das vigas, o padrão de fendilhação, bem como os campos de tensões e deformações ao longo da viga.

4.1 Malha e Leis Constitutivas dos Materiais

Considerando que a precisão das soluções numéricas depende, em larga medida, da qualidade da discretização espacial, torna-se imprescindível iniciar o estudo pela análise da malha de elementos finitos. A partir dos dados geométricos apresentados no Capítulo 3, procedeu-se à definição de três malhas adotando-se um nível distinto de refinamento, de modo a possibilitar a realização de uma análise de sensibilidade que permitisse avaliar a influência da discretização nos resultados numéricos.

A malha corresponde ao processo de discretização do domínio em elementos finitos, etapa essencial para a resolução numérica de problemas estruturais. A escolha do refinamento

da malha influencia diretamente o equilíbrio entre precisão dos resultados e custo computacional. De acordo com Salazar de Troya e Tortorelli (2018), uma malha pouco refinada tende a afastar-se da solução analítica, enquanto uma malha excessivamente refinada pode resultar em tempos de processamento desnecessariamente elevados.

A geração da malha deve considerar não apenas a geometria da estrutura, mas também o comportamento esperado do material e as condições de carregamento. Como salientam Lee e Lo (1997), a qualidade da malha é determinante para a fiabilidade da simulação, sendo dependente da estratégia de modelação adotada, do algoritmo de geração da malha e da interpolação utilizada nos elementos.

Para a modelação do betão, foi utilizado o elemento quadrilátero bidimensional de 8 nós, formulado para condições de estado plano de tensão (*PlaneStressQuad*), com interpolação quadrática e 4 pontos de integração. Esse tipo de elemento é amplamente aplicado em análises numéricas de estruturas como vigas e lajes, devido à sua capacidade de representar de forma precisa os campos de deslocamento e deformação (Zienkiewicz e Taylor, 1989). A interpolação quadrática permite capturar de maneira mais eficiente o comportamento não-linear do betão submetido a diferentes condições de carregamento, tornando-o particularmente adequado em análises de fendilhação e redistribuição de esforços.

As armaduras de aço foram representadas por elementos finitos unidimensionais com dois nós e dois pontos de integração considerados embebidos nos elementos de betão (*EmbCable2D*). Esta formulação é adequada para a modelação dos varões de aço, permitindo dispensar a compatibilização da malha entre os elementos finitos do betão e os que representam a armadura, uma vez que não é necessário que os nós de ambas as discretizações coincidam.

A Figura 27 ilustra as malhas de elementos finitos para a discretização do betão consideradas no estudo do refinamento da malha, evidenciando a aplicação das cargas e as condições de apoio (pontos em azul), de acordo com a configuração do ensaio experimental apresentado no Capítulo 3. A Malha 1 é composta por 78 elementos finitos, a Malha 2 é constituída por 312 elementos finitos e a Malha 3 por 1248 elementos finitos.

A modelação da fendilhação em meios contínuos, fundamentada nos modelos de fendilhação distribuída (*smeared crack models*), pressupõe que a deformação incremental total em um ponto de integração seja resultante da decomposição aditiva de duas componentes

distintas: a deformação elástica do betão entre fissuras e a deformação inelástica decorrente da abertura das fissuras (Ventura-Gouveia, 2011).

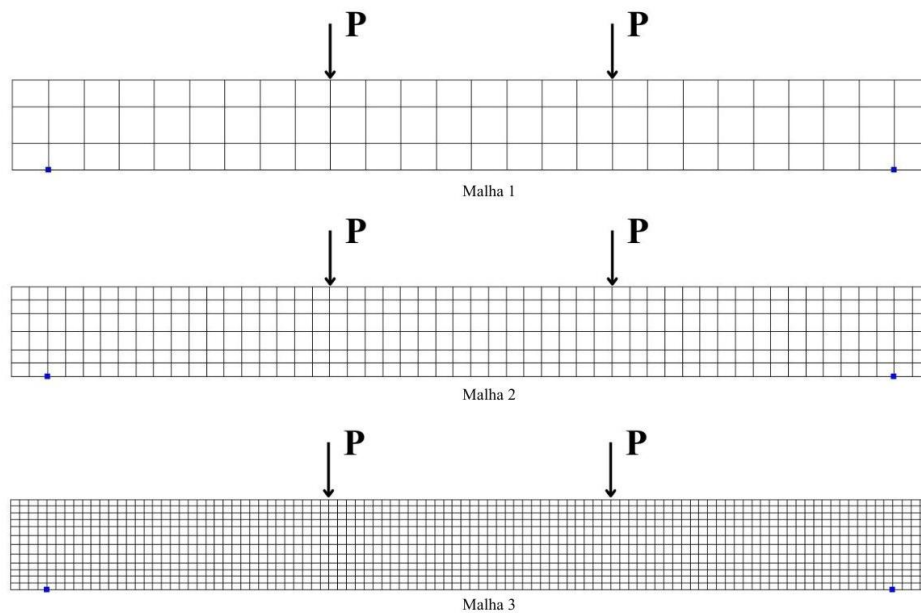


Figura 27: Representação das malhas de discretização do betão: Malha 1; Malha 2; Malha 3.

Sob a ótica da análise não-linear via MEF, essa formulação permite descrever a evolução do dano em materiais cimentícios através de leis constitutivas de amolecimento à tração (*tension-softening*). No presente estudo, a degradação progressiva da capacidade resistente tem como base um diagrama trilinear, Figura 28, cujos ramos sucessivos capturam a perda de rigidez pós-pico de forma detalhada (Ventura-Gouveia, 2011).

A calibração deste modelo é regida por parâmetros que correlacionam a resistência à tração, a energia de fratura em Modo I (G_f) e a largura característica da banda de fissura, garantindo a objetividade dos resultados (Ventura-Gouveia, 2011). Para fins de simulação numérica, a lei trilinear foi adaptada para uma relação bilinear entre a tensão de tração e a abertura de fenda, de forma a simular o comportamento do betão simples, conforme sugerido pelo *fib* Model Code 2020.

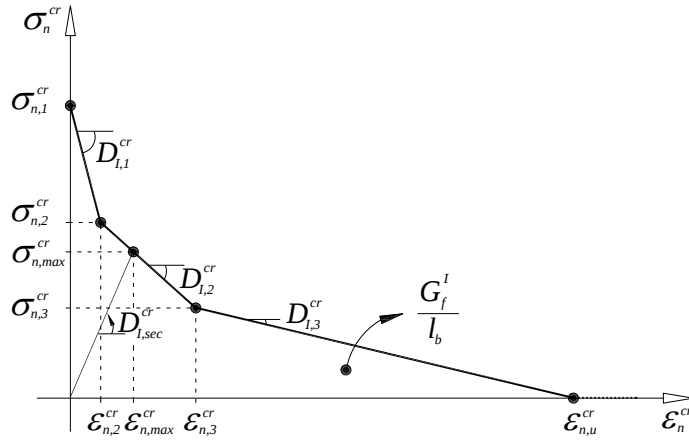


Figura 28: Diagrama tensão–deformação trilinear para simular a propagação de fissuras em modo I de fratura – $\sigma_{n,1}^{cr} = f_{ct}$, $\sigma_{n,2}^{cr} = \alpha_1 \sigma_{n,1}^{cr}$, $\sigma_{n,3}^{cr} = \alpha_2 \sigma_{n,1}^{cr}$, $\varepsilon_{n,2}^{cr} = \xi_1 \varepsilon_{n,u}^{cr}$, $\varepsilon_{n,3}^{cr} = \xi_2 \varepsilon_{n,u}^{cr}$ (Ventura-Gouveia, 2011).

Para cada simulação numérica, são apresentados os repetitivos parâmetros de fractura indicados na Figura 28: ξ_1 , α_1 , ξ_2 , α_2 , G_f e l_b .

Relativamente à rigidez ao corte do betão fendilhado, foi adotado o conceito do fator de retenção das tensões de corte, β , o qual é definido pela equação (17).

$$\beta = \left(1 - \frac{\varepsilon_n^{cr}}{\varepsilon_{n,ult}^{cr}} \right)^{p_1} \quad (17)$$

Onde ε_n^{cr} representa a deformação normal à fenda e $\varepsilon_{n,ult}^{cr}$ corresponde à deformação última normal à fenda. Quando se admite que o fator β diminui de forma linear com o aumento de ε_n^{cr} , o expoente p_1 assume o valor unitário. Valores superiores deste expoente traduzem uma redução mais acentuada do parâmetro β à medida que ε_n^{cr} aumenta (Barros, 1995).

O comportamento de endurecimento por tração (*tension stiffening*) do betão em vigas fissuradas difere do amolecimento por tração (*tension softening*) observado no betão simples, sendo influenciado principalmente pela interação com os varões, Figura 29. A presença de varões permite que o betão entre fissuras seja mobilizado por meio da transferência local de tensões na interface betão–armadura, associada ao fenómeno de aderência-eskorregamento. Esse efeito contribui para uma resposta mais gradual da tensão média de tração, retardando a redução abrupta da rigidez e aumentando a resistência efetiva do elemento após a fendilhação.

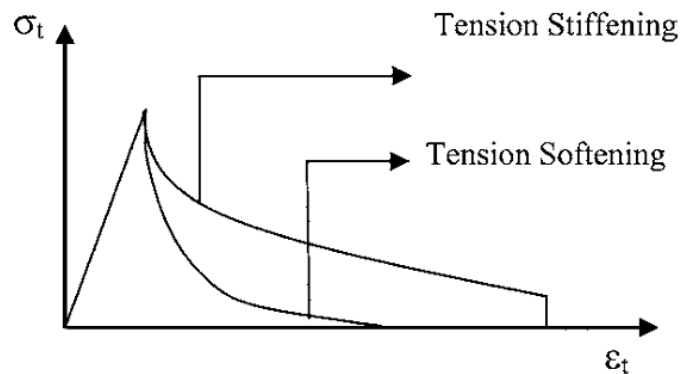


Figura 29: Resposta do betão à tração: *Tension softening* e *Tension stiffening* (Nayal & Rasheed, 2006).

Embora o *tension stiffening* e a aderência-eskorregamento sejam fenómenos distintos, eles atuam de forma inter-relacionada, sendo difícil isolá-los experimentalmente. Por este motivo, os modelos de *tension stiffening* incorporam ambos os efeitos simultaneamente (Nayal e Rasheed, 2006).

Para as simulações em que se considerou o efeito do *tension stiffening*, a malha da viga foi dividida em duas camadas ao longo da altura: A (4,8 cm) e B (11,2 cm), ver Figura 30. A camada inferior, que envolve diretamente a armadura, incorpora o efeito de *tension stiffening*, enquanto a camada superior, mais afastada da armadura, considera apenas o efeito de *tension softening*. Essa configuração está representada esquematicamente.

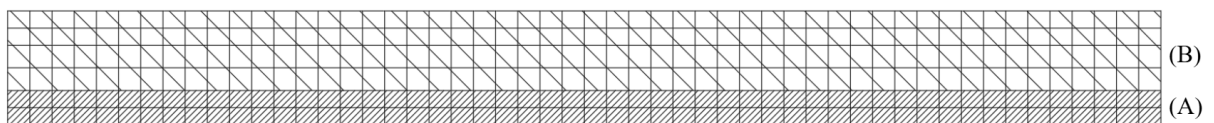


Figura 30: Divisão da altura da viga, (A) *Tension Stiffening* e (B) *Tension Softening*.

A lei constitutiva adotada para o aço está representada no item 2.3.2, ver Figura 11, e os dados adotados de acordo com o tipo de aço utilizado estão na Tabela 8, no item 3.1.1.2.

4.2 Análise de Sensibilidade da Malha

Com o objetivo de identificar a malha que melhor representa o comportamento observado experimentalmente, foi realizada uma análise de sensibilidade das diferentes discretizações consideradas (Figura 27). Inicialmente, procedeu-se a uma análise linear, permitindo avaliar a influência do refinamento na resposta global da estrutura. Posteriormente, efetuou-se uma análise não-linear, de modo a verificar o desempenho das malhas na representação dos fenômenos associados ao comportamento real das vigas. Com base nessa avaliação comparativa, foi definida a malha a ser adotada nas restantes etapas do trabalho.

4.2.1 Análise linear

Inicialmente, avaliou-se o comportamento isolado do betão em regime linear para aferir o impacto do refinamento da malha na resposta estrutural. Esta etapa preliminar garantiu a estabilidade do modelo base para as análises não-lineares subsequentes.

Para comparação com os resultados numéricos, determinou-se o valor teórico do deslocamento, com base nos dados experimentais do estudo de Teixeira (2024), para tal foram utilizadas as equações (18) e (19):

$$\delta_{m\acute{a}x} = \frac{Pa(3l^2 - 4a^2)}{24EI} \quad (18)$$

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (19)$$

Na Figura 31 pode ser observada a resposta do comportamento linear das malhas em estudo quando comparado com o valor teórico obtido a partir da resposta estimada com a equação (18).

A partir das respostas obtidas nas simulações numéricas e da construção dos diagramas força–deslocamento, foi possível verificar que o comportamento das diferentes malhas apresenta boa concordância com o resultado teórico. Observa-se que, para todas as discretizações analisadas, a resposta estrutural mantém um comportamento linear, confirmando a adequação das malhas consideradas para a análise em regime linear.

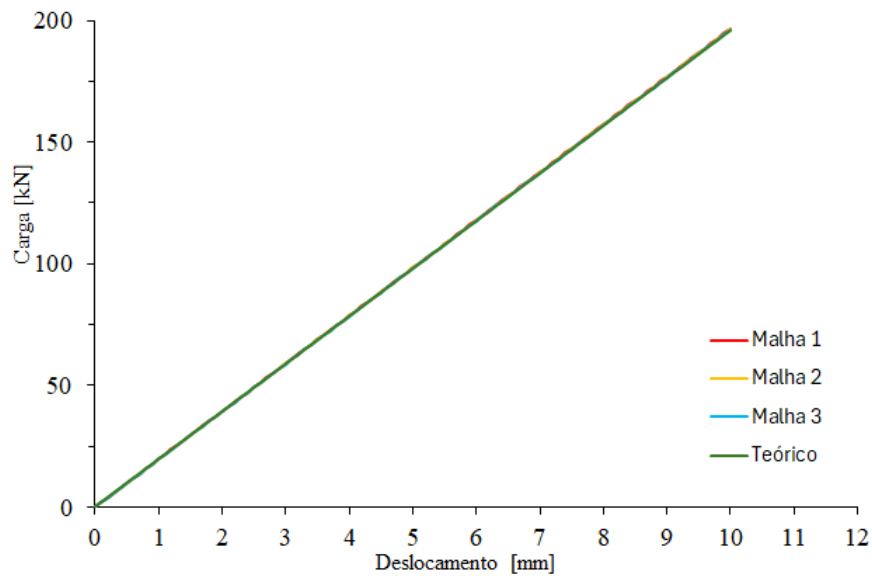


Figura 31: Comparação entre o valor teórico e os valores numéricos para as três malhas.

4.2.2 Análise não-linear

Para a realização da análise não-linear foram adotadas as mesmas malhas previamente definidas, passando-se a considerar a presença das armaduras de aço, as quais se encontram identificadas nas malhas apresentadas na Figura 32 (verde - armadura na zona de compressão, vermelho - armadura na zona de tração e a azul - estribos).

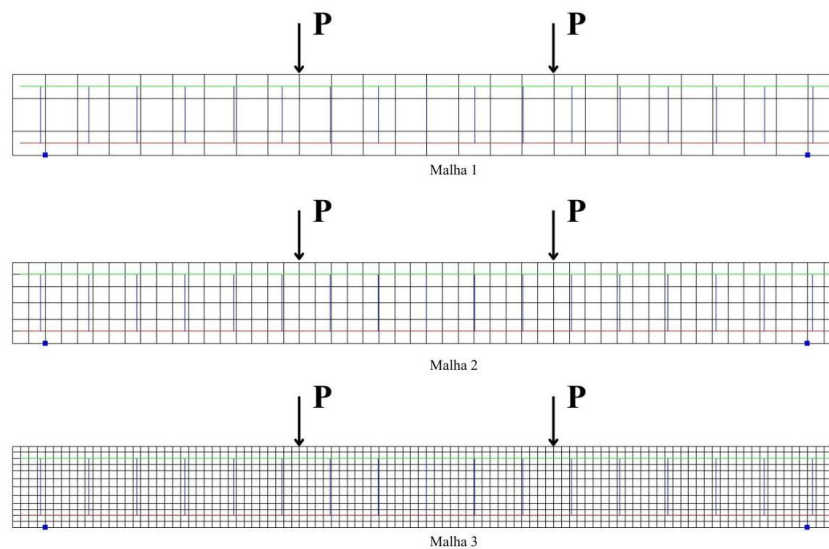


Figura 32: Representação das malhas com elementos de barra, Malha 1; Malha 2; Malha 3.

As armaduras longitudinais foram modeladas: na zona de tração e na zona de compressão com 52 elementos finitos, respetivamente. Por sua vez, os estribos foram modelados com 68 elementos finitos. Adicionalmente, foram utilizadas as propriedades mecânicas dos materiais anteriormente descritas (Tabela 7 e Tabela 8), assegurando a coerência entre os modelos numéricos e as características das vigas analisadas.

A lei de tensão de tração – abertura de fenda foi obtida de acordo com as recomendações do *fib* Model Code 2020. O modelo Model Code 2020 baseia-se no conceito de energia de fratura do betão G_f , definida como a quantidade de energia necessária para promover a propagação de uma fissura de tração por unidade de área. Para o presente estudo, o valor de G_f foi estimado com base na relação proposta pelo modelo normativo, equação (20), que apresenta uma equação baseada no valor característico do betão à compressão:

$$G_f = 85 f_{ck}^{0.15} \quad (20)$$

Com base nas propriedades do betão previamente caracterizado e utilizado na confecção das vigas ensaiadas por Teixeira (2024), foi possível obter o diagrama bilinear tensão de tração-abertura de fenda ($\sigma-w$) representado na Figura 33, cujos valores dos parâmetros se encontram apresentados na Tabela 11. Na transformação de $\sigma-w$ em $\sigma_n^{cr} - \varepsilon_n^{cr}$ admitiu-se que $\sigma = \sigma_n^{cr}$ e $w = \varepsilon_n^{cr} l_b$, sendo l_b a largura da banda de fendilhação, considerada nas simulações igual à raiz quadrada da área do correspondente elemento finito. O coeficiente de *Poisson* foi considerado igual a 0,2.

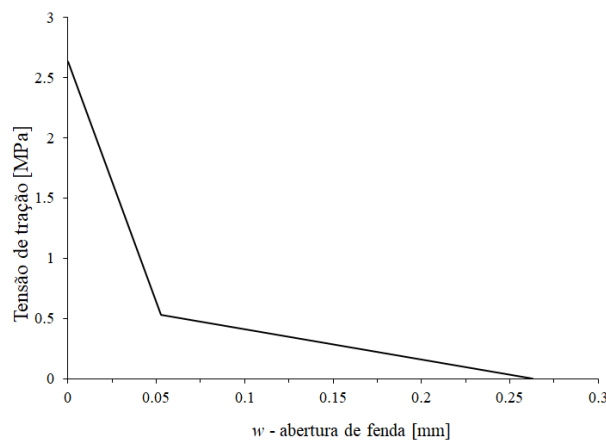


Figura 33: Lei de tensão de tração - abertura de fenda (*Tension Softening*).

Tabela 11: Lei bilinear para o *Tension Softening* e *Tension Stiffening* ajustada ao betão das vigas de aço.

Parâmetros	<i>Tension Softening</i>	<i>Tension Stiffening</i>
ξ_1	0,20	0,05
α_1	0,20	0,80
ξ_2	0,60	0,80
α_2	0,10	0,40
G_f (N/mm)	0,1386	0,4157

Para a análise de sensibilidade das malhas considerou-se o betão com o efeito do *tension softening*, as simulações foram realizadas considerando as três discretizações referidas, obtendo-se as respostas numéricas correspondentes a cada uma delas, permitindo compará-las com os resultados experimentais, conforme se pode observar na Figura 34.

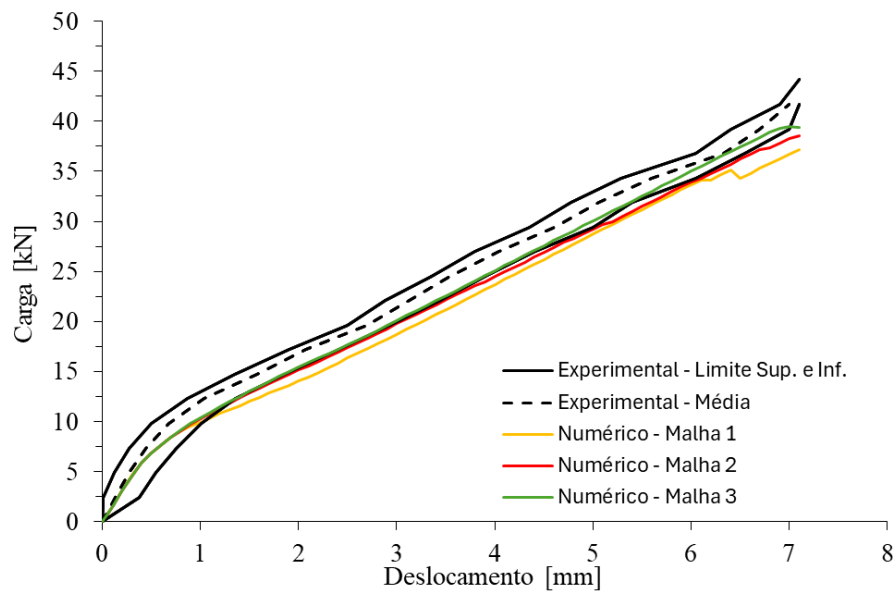


Figura 34: Resultados numéricos das malhas considerando o efeito *Tension Softening*, de acordo com o *fib* Model Code 2020, para a viga VA.

Na comparação das repostas numéricas carga - deslocamento central, observou-se que usando a Malha 1, devido ao seu baixo nível de refinamento, conduziu a respostas mais afastadas dos resultados experimentais, perdendo rigidez a partir de um deslocamento de 1 mm e ficando fora do limite inferior das curvas experimentais, confirmando a expectativa inicial de

menor precisão. Por outro lado, as Malhas 2 e 3 demonstraram um comportamento numérico mais próximo ao do observado experimentalmente.

Apesar da boa aproximação, a Malha 3 exigiu um tempo de processamento superior, implicando maior custo computacional. Considerando o equilíbrio entre precisão e eficiência, optou-se pela adoção da Malha 2 para as análises subsequentes, uma vez que esta apresentou resultados satisfatórios e compatíveis com os valores experimentais, sem sobrecarregar o processo computacional.

4.3 Apresentação e Discussão dos Resultados

Na Figura 35 apresenta-se o diagrama carga–deslocamento central, considerando o modelo Model Code 2020 com o efeito do *tension softening*, no qual é comparada a resposta obtida na simulação numérica das vigas armadas com varões de aço, usando a Malha 2, com os resultados experimentais, tendo em conta as conclusões referidas na secção anterior. Observa-se um comportamento semelhante entre as curvas Numérica - Tension Softening e a Experimental – Média, até aproximadamente 0,5 mm de deslocamento. Depois, a curva numérica apresenta uma concordância com a curva Experimental – Limite Inf., ficando ligeiramente abaixo desta para deslocamentos superiores a 3,5 mm.

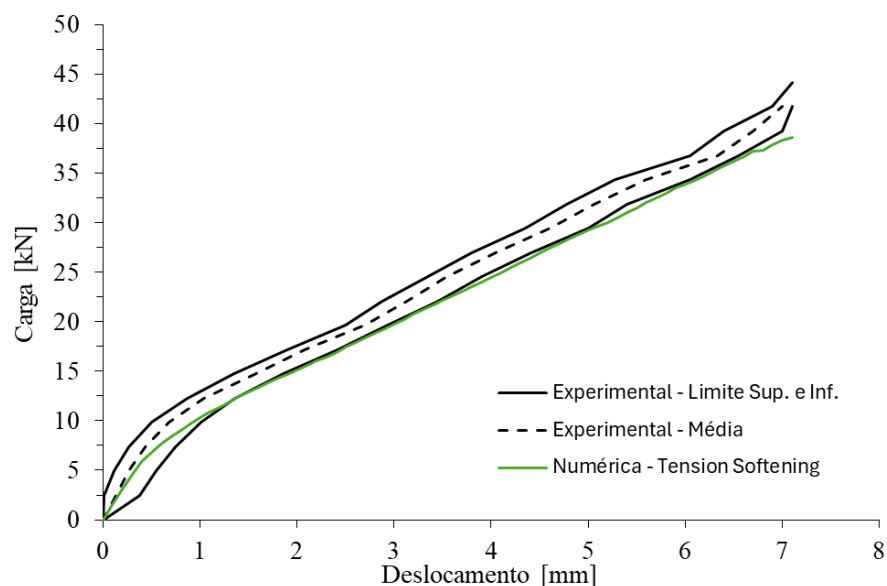


Figura 35: Resultados experimentais e numérico considerando o efeito do *Tension Softening* da viga VA.

Com o objetivo de avaliar o comportamento estrutural e melhorar a aproximação dos resultados numéricos aos dados experimentais, foi considerada a inclusão do efeito de *tension stiffening*. Para tal, foram analisadas simultaneamente as abordagens de *tension softening* e *tension stiffening*, conforme a distribuição ilustrada na Figura 30. Para a modelação do efeito de *tension stiffening*, adotaram-se os valores e diagrama apresentados na Tabela 11 e na Figura 36, repetitivamente, e obteve-se por tentativas, um valor de energia de fratura do betão correspondente, aproximadamente, a três vezes o valor de G_f .

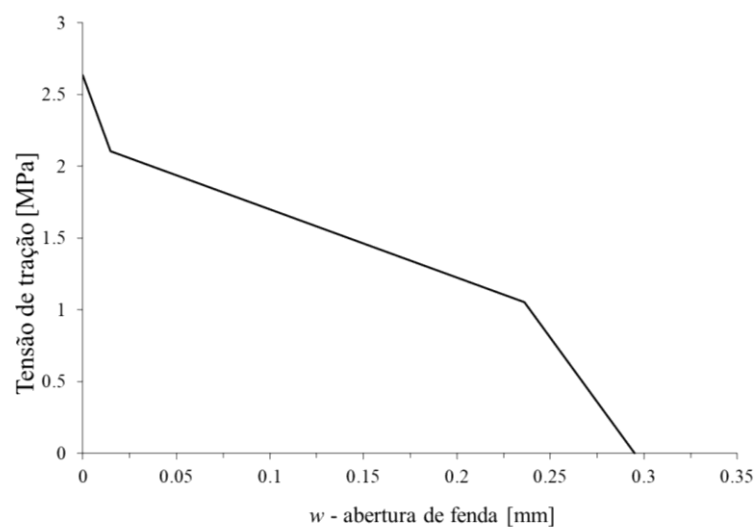


Figura 36: Lei de tensão de tração - abertura de fenda (*Tension Stiffening*).

Na Figura 37 apresenta-se a resposta numérica obtida, verificando-se uma melhor concordância com os resultados experimentais, principalmente para os maiores deslocamentos. Este resultado indica que o modelo numérico adotado é capaz de reproduzir de forma adequada o comportamento estrutural do elemento. Apesar de se observar uma ligeira redução da rigidez na fase inicial de carregamento, a evolução do deslocamento com o aumento da carga aplicada apresenta boa concordância com os resultados experimentais.

Na Figura 38 representa-se o padrão de fendilhação para um deslocamento a meio vão de 7,1 mm: a) o obtido experimentalmente e b) o obtido pela simulação numérica. Verifica-se que existem fendas em fase de abertura (vermelho), em reabertura (cyan), em fecho (verde) e fechadas (azul). Este padrão de fendilhação é semelhante ao obtido experimentalmente nas

vigas VA. Existem fendas verticais bem definidas na parte inferior da zona central da viga, onde o momento é constante e máximo. As fissuras inclinam-se ligeiramente na zona da flexão simples, sugerindo a presença de tensões diagonais onde o esforço transversal é mais significativo.

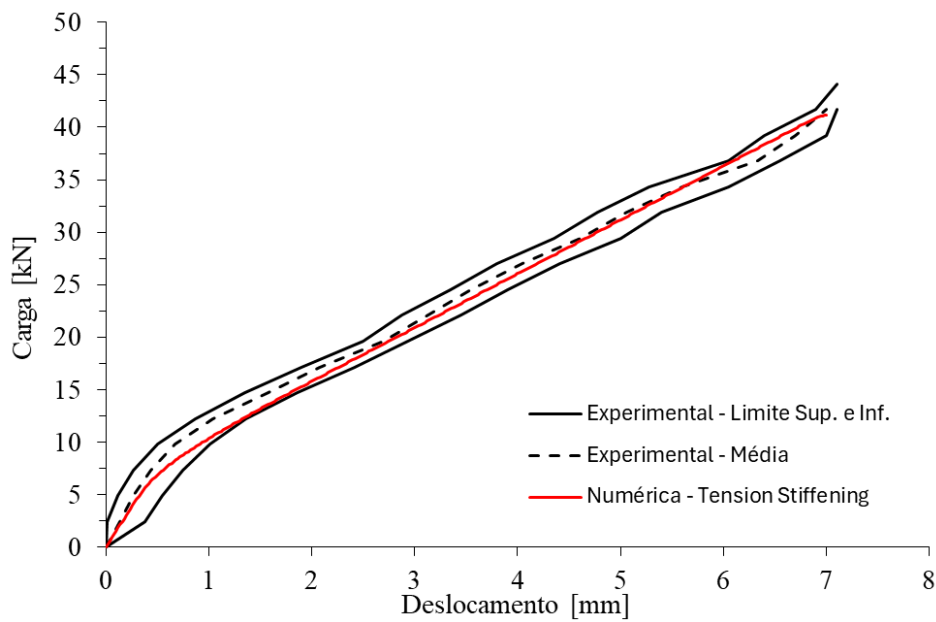


Figura 37: Resultados experimentais e numérico considerando o efeito do *Tension Stiffening* na viga VA.

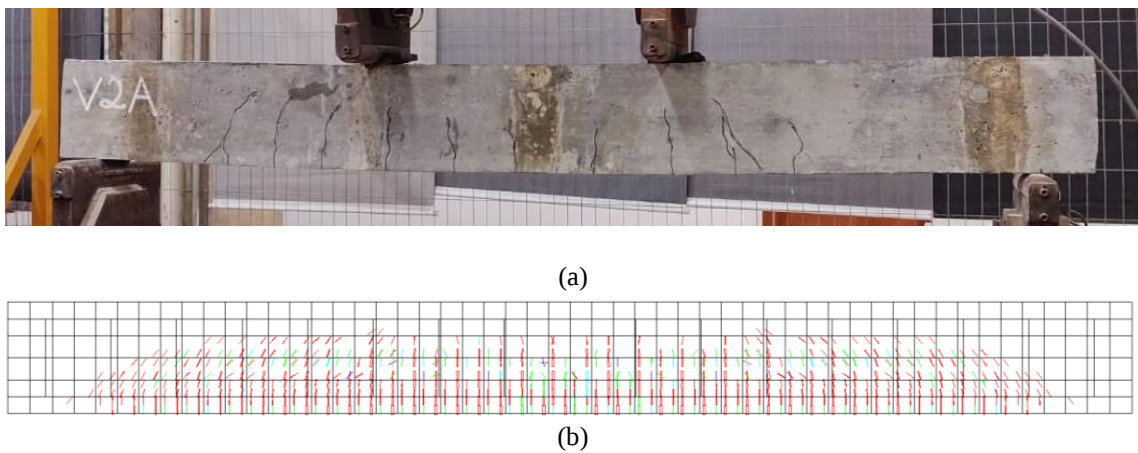


Figura 38: Padrão de fendilhação na viga VA: (a) Experimental; (b) Numérico.

No âmbito da modelação numérica, o software *Femix* permite a avaliação das deformações e tensões nos varões de aço por meio da seleção de um elemento e de um ponto

de Gauss específico. Apesar de não se ter resultados experimentais para comparação, apresentam-se os valores das extensões e tensões obtidos na simulação numérica ao longo dos varões da armadura inferior, de forma a avaliar a sua evolução, Figura 39 e Figura 40, respetivamente.

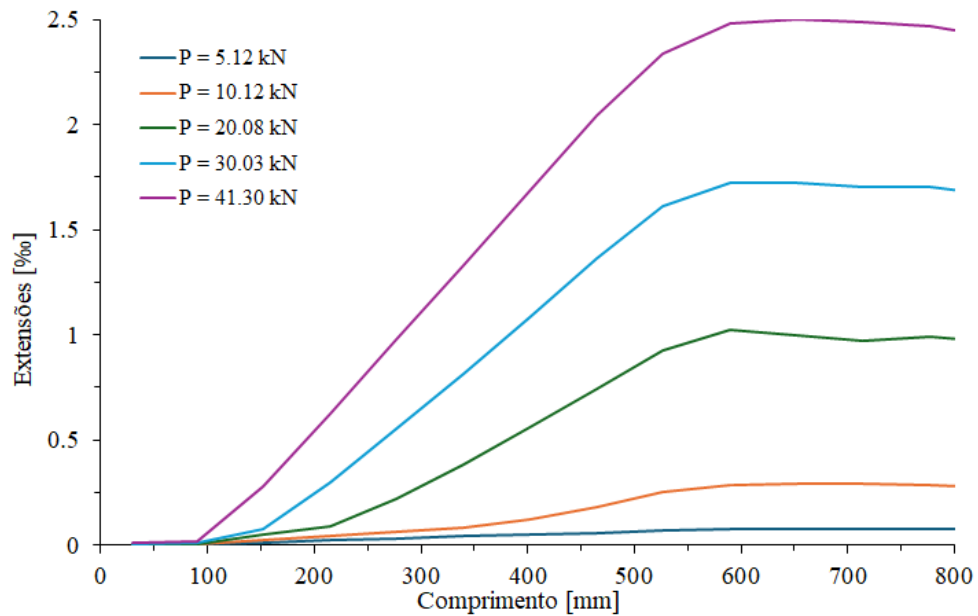


Figura 39: Extensões correspondentes a vários níveis de carga ao longo de metade da viga VA.

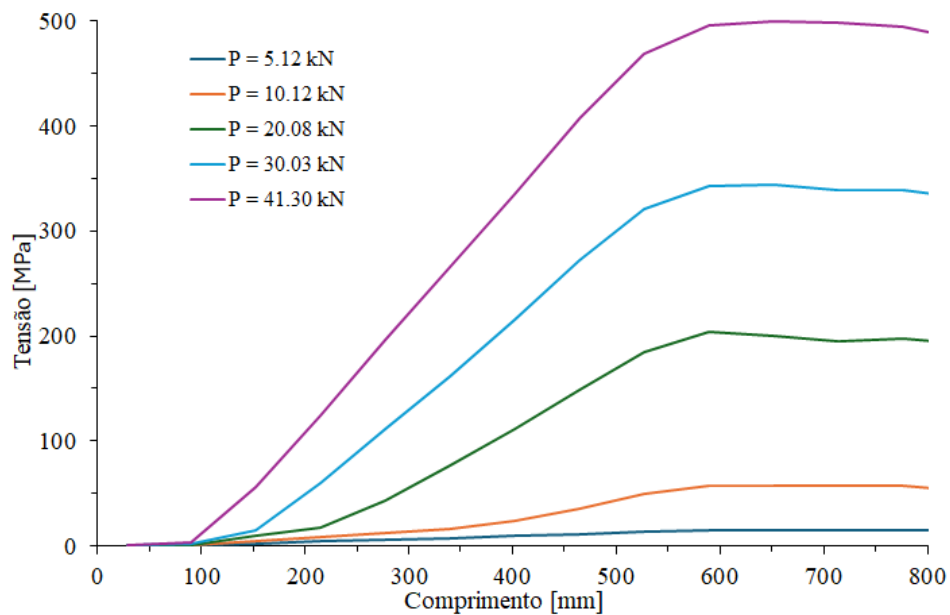


Figura 40: Tensões correspondentes a vários níveis de carga ao longo de metade da viga VA.

Analisando os gráficos verifica-se que até a uma carga de 10,12 kN as extensões e tensão ao longo da viga são relativamente baixas. A partir da carga de 20,08 kN, e a uma distância superior a 200 mm do apoio, a armadura começa a ter um papel mais ativo e há um crescimento quase linear até à zona em que a extensão e a tensão se mantêm constantes devido à configuração das cargas, i. e., zona em que o momento é constante. Para a carga de 30,03 kN os aumentos começam a ser mais acentuados, sendo a inclinação maior entre as distâncias de 200 e 500 mm do apoio, o que dá a entender que há uma maior transferência de tensões do betão para a armadura, evidenciando o efeito da fendilhação do betão ao longo da viga. Para uma carga de 41,30 kN a armadura está a aproximar-se da carga de plastificação, nomeadamente para distâncias superiores a 600 mm do apoio, e nota-se um valor da tensão na armadura muito próximo da plastificação, que é de 500 MPa.

5 MODELAÇÃO NUMÉRICA DAS VIGAS DE BETÃO COM ARMADURAS DE GFRP

Neste capítulo é apresentada a modelação numérica de vigas de betão armado reforçadas com varões de GFRP. Para tal, adotou-se a mesma estratégia de discretização, bem como o método de análise definido no capítulo anterior para as vigas armadas com aço. Também foi considerada a inclusão do efeito de *tension stiffening*, segundo a proposta de Nayal e Rasheed (2006). Contudo, devido às particularidades do comportamento mecânico e das características das armaduras de GFRP, foram realizadas análises adicionais para representar adequadamente a interação entre o betão e os varões da armadura. Nesse contexto, foram consideradas diferentes abordagens para a modelação da aderência betão–GFRP, incluindo modelos com e sem a utilização de elementos de junta, baseados nas propostas do modelo mBPE.

5.1 Malha e Leis Constitutivas

Na modelação numérica das vigas armadas com varões de GFRP foi adotada a mesma discretização e nível de refinamento da malha e mesma configuração de elementos finitos para o betão e para as armaduras, utilizada no capítulo anterior para as vigas com varões de aço.

Adicionalmente, em algumas das simulações numéricas apresentadas neste capítulo foram introduzidos elementos de junta para simular o comportamento da interface entre o betão e os varões de GFRP. Esta abordagem permite avaliar a influência da interface no comportamento global das vigas, sendo considerada tanto a hipótese de aderência perfeita como a representação do fenómeno de escorregamento através de leis de aderência apropriadas.

No presente capítulo, o efeito do *tension stiffening* também será considerado em algumas das simulações numéricas, com o objetivo de avaliar a influência desse fenómeno na curva carga–deslocamento central das vigas com varões de GFRP.

A Tabela 12 apresenta os parâmetros adotados para o comportamento do betão, quer o *tension softening*, quer o *tension stiffening*, considerando as propriedades do betão previamente caracterizadas.

Tabela 12: Lei bilinear para o *Tension Softening* e *Tension Stiffening* ajustada ao betão das vigas de GFRP.

Parâmetros	<i>Tension Softening</i> (MC2020)	<i>Tension Stiffening</i> (Nayal & Rasheed)
ξ_1	0,20	0,003
α_1	0,20	0,80
ξ_2	0,60	0,0303
α_2	0,10	0,45
G_f (N/mm)	0,1378	0,1587

Em relação à modelação do comportamento de aderência entre o betão e os varões de GFRP, foram consideradas as propostas discutidas no item 2.3.4. Para o presente estudo, optou-se pela utilização do modelo mBPE, uma vez que este parece ser o mais indicado, com base na revisão bibliográfica efetuada. Entre os principais fatores que justificam a sua escolha, destaca-se a capacidade do mBPE de incorporar de forma consistente a aderência máxima, o escorregamento, a aderência residual e o parâmetro α , permitindo representar tanto os efeitos iniciais de transferência de tensões quanto o comportamento após a fendilhação do betão.

Para a aplicação das propostas apresentadas na Tabela 4, os diferentes autores recorrem a um conjunto de parâmetros que podem ser obtidos por distintas abordagens. De modo geral, estes parâmetros são determinados com base em resultados experimentais, em formulações propostas na literatura técnico-científica ou ainda em recomendações estabelecidas por normas técnicas. Nas simulações em que o efeito da aderência foi modelado foram utilizados os valores experimentais indicados na Tabela 7, bem como os parâmetros sugeridos por diferentes autores e documentos normativos, os quais são sintetizados na Tabela 13.

A tensão máxima de aderência, τ_m , foi estimada a partir das propostas reunidas na Tabela 4, tendo-se admitido os valores apresentados na Tabela 13 para os diversos parâmetros intervenientes nas equações que traduzem essas propostas. Como se verificou uma grande dispersão de valores para a tensão máxima de aderência e como as propostas usadas estão divididas consoante dependam unicamente da resistência à compressão do betão ou desse valor e de outros parâmetros adicionais, optou-se por determinar um valor médio da tensão máxima de aderência para cada um desses dois grupos de propostas, ou seja, τ_m^1 e τ_m^2 , respetivamente.

Para a estimativa do escorregamento, s_m , utilizou-se a proposta de Lee *et al.* (2012), traduzida pela equação (12), tendo-se adotado os valores médios da tensão máxima de aderência

obtidos, τ_m^1 e τ_m^2 , e comprimentos de amarração, l_e , de cinco ou vinte vezes o diâmetro do varão ($l_e = 50$ mm ou $l_e = 200$ mm).

Na Tabela 14 resumem-se os valores obtidos da tensão máxima de aderência para cada proposta, os valores médios, τ_m^1 e τ_m^2 , para cada grupo de propostas e na Tabela 15 apresentam-se os escorregamentos, s_m , associados a essas tensões.

Tabela 13: Parâmetros para a determinação da tensão máxima de aderência.

Parâmetros					
f'_c	33 MPa	K_4	1	l_d	200 mm
α	2,57	K_5	1,05	R_r	0,11
β	0,54	d_b	10 mm	η_1	1,3
d_{cs}	21,067 mm	C	15,8 mm	η_2	1
K_1	1	c	19,2 mm	η_3	1
K_2	1	d	10 mm	η_4	1
K_3	0,8	l_b	200 mm	$f_{ctk,inf}$	1,80 MPa

Tabela 14: Valores da tensão máxima de aderência e do escorregamento associado.

Propostas da tensão máxima de aderência baseadas na resistência do betão à compressão		Propostas da tensão máxima de aderência baseadas na resistência do betão à compressão e noutros parâmetros	
Equação	τ_m (MPa)	Equação	τ_m (MPa)
(3)	9,42	(7)	3,47
(4)	4,30	(8)	8,44
(5)	12,68	(9)	4,52
(6)	16,98	(10)	7,00
-	-	(11)	2,33*
τ_m^1 – valor médio	10,85	τ_m^2 – valor médio	5,15

* Na equação (11) foi utilizado o valor característico ($f_{ctk,inf}$) e não o valor de cálculo (f_{ctd}).

Tabela 15: Valores do escorregamento associado às tensões máximas de aderência.

Escorregamento, s_m , associado a $\tau_m^1 = 10.85$ MPa		Escorregamento, s_m , associado a $\tau_m^2 = 5.15$ MPa	
$l_e = 50$ mm	$l_e = 200$ mm	$l_e = 50$ mm	$l_e = 200$ mm
2,05 mm	8,22 mm	0,98 mm	3,90 mm

A seguir são apresentadas as simulações numéricas realizadas para as vigas com varões de GFRP, bem como os respectivos resultados. O objetivo é avaliar o desempenho de cada modelação numérica e identificar aquela que apresenta melhor concordância com os resultados obtidos na campanha experimental. No total, foram consideradas sete modelações numéricas, nas quais foram introduzidas variações em alguns parâmetros relevantes, permitindo analisar a influência destes na resposta estrutural das vigas. A Tabela 16 sintetiza as diferentes simulações numéricas realizadas. Importa referir que, devido a dificuldades associadas à convergência numérica, nem todas as simulações puderam ser prolongadas até ao deslocamento central máximo de 10 mm. No entanto, esta limitação não compromete as conclusões do estudo, uma vez que as respostas numéricas apresentam uma tendência de comportamento semelhante após a estabilização do padrão de fendilhação, sendo as principais diferenças observadas sobretudo na fase inicial de formação e propagação das fendas.

Tabela 16: Resumo das simulações numéricas consideradas no presente estudo.

Modelo	Tension-Softening (MC2020)	Tension-Stiffening (Nayal & Rasheed)	l_e 200 mm	l_e 50 mm	Aderência Perfeita (s/interface)	Com Interface	
						τ_m^1 10.85 MPa	τ_m^2 5.15 MPa
A	✓	—	—	—	✓	—	—
B	✓	—	✓	—	—	✓	—
C	✓	—	✓	—	—	—	✓
D	✓	✓	✓	—	—	✓	—
E	✓	✓	✓	—	—	—	✓
F	✓	✓	—	✓	—	✓	—
G	✓	✓	✓	—	—	Lei baseada em Cosenza <i>et al.</i> (1997), para varões de superfície lisa (Tabela 5)	

5.2 Simulações Numéricas e Análise dos Resultados

5.2.1 Numérico A

Na primeira simulação numérica (Numérico A) foi adotada a mesma estratégia de modelação utilizada para as vigas VA, fazendo apenas a substituição das propriedades dos

materiais que diferem entre os dois casos. Assim, foram consideradas as propriedades do betão, segunda betonagem, correspondentes às vigas com varões de GFRP (Tabela 7), bem como as características mecânicas dos varões de GFRP, com um módulo de elasticidade, E , estimado de 50 GPa, baseado nos valores para o GFRP apresentados na Tabela 9. Para o diagrama tensão de tração-abertura de fenda foi usado o modelo proposto pelo *fib* model Code 2020 com os parâmetros apresentados na Tabela 12 para o *tension softening*.

Na Figura 41 apresenta-se o diagrama carga–deslocamento central correspondente à resposta da simulação Numérico A. Observa-se que, na fase inicial de carregamento, a curva numérica apresenta valores ligeiramente superiores aos resultados experimentais, ultrapassando minimamente o limite superior das respostas experimentais. Contudo, após o início da fendilhação do betão, verifica-se que a curva numérica apresenta valores dentro dos limites experimentais, mas apresentando uma maior capacidade de carga em relação à curva experimental média.

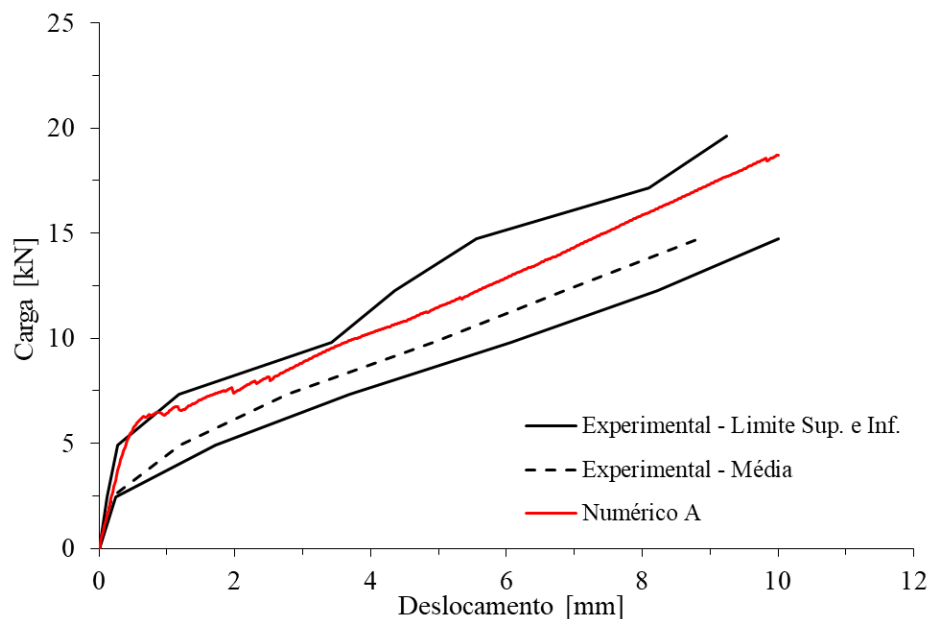


Figura 41: Resultados Experimentais e Numérico A para as vigas VG.

Na Figura 42 são apresentados os padrões de fendilhação observados numa das vigas experimentais VG e o obtido na simulação Numérico A para a carga máxima obtida numericamente. A distribuição das fendas é semelhante à obtida para as vigas de betão armado

com varões de aço. O padrão de fendilhação em termos gerais é semelhante ao obtido no ensaio experimental. Existem fendas abertas (cor-de-rosa), em fase de abertura (vermelho), em reabertura (cyan), em fecho (verde) e fechadas (azul). Constata-se que a abertura de fendas é superior às das vigas com varões de aço. Observam-se fendas verticais na zona central da viga e inclinadas entre os apoios e a zona da aplicação das cargas.

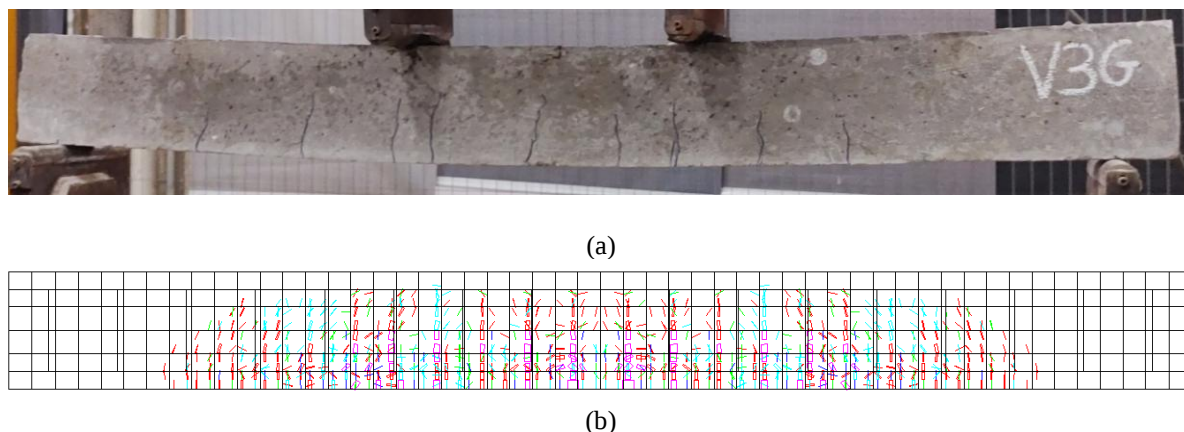


Figura 42: Padrão de fendilhação: (a) Experimental (VG); (b) Numérico A.

5.2.2 Numérico B

Na segunda simulação - Numérico B - foram introduzidos elementos de junta com o objetivo de representar o comportamento de aderência entre os varões de GFRP em tração e o betão, mantendo-se as restantes condições semelhantes às da simulação Numérico A. Para a inclusão destes elementos foi necessário ajustar a discretização da malha, de forma a posicionar os elementos de junta na interface betão-GFRP, permitindo simular o fenómeno de aderência-escorregamento entre os materiais. Os varões de GFRP à tração foram discretizados por elementos *Cable2D* de dois nós e dois pontos de integração, para permitir a correta interação na interface.

Para a definição do comportamento dos elementos de junta foi adotado o modelo de aderência mBPE, apresentado no item 2.3.4.3.

Na Figura 43 apresenta-se a curva correspondente ao modelo mBPE, comparada com a curva da interface implementada no FEMIX e usada para simulação (ver item 2.3.4.6). A determinação desta curva foi realizada considerando os valores médio da tensão máxima de

aderência, τ_m^1 , e do respectivo escorregamento, $s_m = 8,22$ mm, apresentados nas Tabela 14 e Tabela 15. Para essa estimativa foi considerado um comprimento de amarração, $l_e = 200$ mm, equivalente a 20 vezes o diâmetro do varão de GFRP. A lei constitutiva usada pelo FEMIX ajusta-se na perfeição no primeiro ramo do modelo mBPE, até atingir o valor da tensão máxima de aderência. Após esse valor, não sendo possível ajustar a o modelo do FEMIX a uma lei bilinear (mBPE), fez-se uma aproximação. Porém, não se julga que no estudo em análise, essa fase de redução da aderência até um valor residual seja relevante.

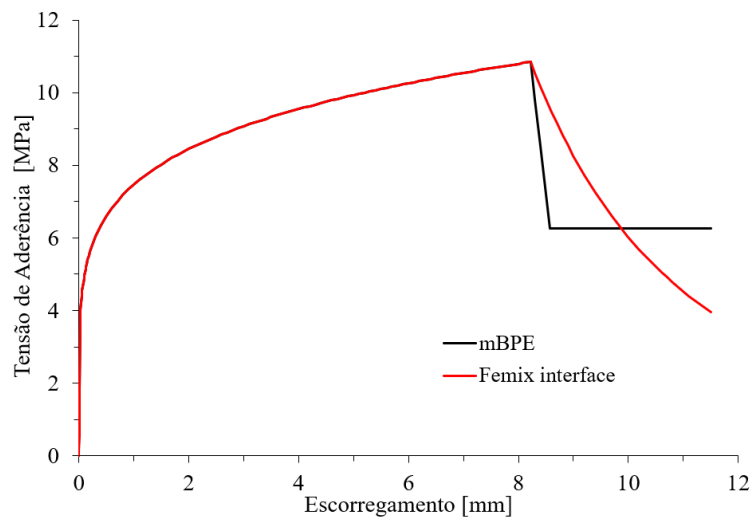


Figura 43: Modelos mBPE e de interface do FEMIX, considerando τ_m^1 e $l_e = 200$ mm (20ϕ).

Na Tabela 17 são apresentados os parâmetros obtidos para a definição do modelo de interface do FEMIX, nomeadamente o deslocamento no final da relação de tensão deslocamento linear (δ_0), o deslocamento no pico da tensão de aderência (δ_m), a tensão de aderência no pico (τ_m), o parâmetro utilizado na definição da relação de tensão deslocamento pré-pico (β_1), o parâmetro utilizado na definição da relação de tensão deslocamento pós-pico (β_2) e a rigidez normal (K_n).

A Figura 44 apresenta o diagrama carga–deslocamento central correspondente à simulação Numérico B. A resposta da simulação Numérico B apresenta um comportamento semelhante ao Numérico A, sobretudo após o início da fendilhação do betão. No entanto, verifica-se uma ligeira aproximação aos valores médios na fase inicial após o início da

fendilhação. Apesar dessa diferença inicial, a evolução da resposta ao longo do carregamento mantém-se consistente com a obtida no Numérico A.

Tabela 17: Modelo de interface do FEMIX - Numérico B.

Parâmetro	Valor
δ_0 (mm)	0,02
δ_m (mm)	8,22
τ_m (N/mm ²)	10,85
β_1	0,177
β_2	3,00
K_n (N/mm ³)	$1,0 e^{+4}$

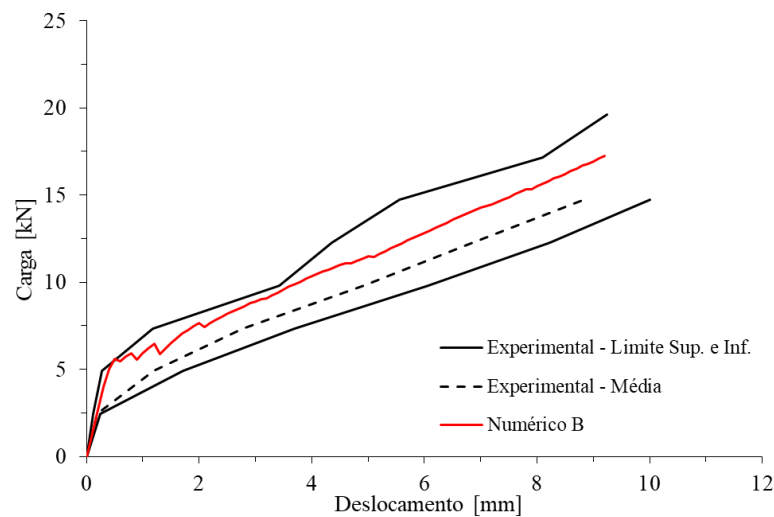
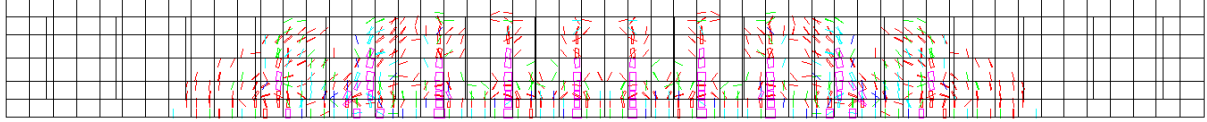


Figura 44: Resultados Experimentais e Numérico B para as vigas VG.

Na Figura 45 apresenta-se o padrão de fendilhação obtido na simulação Numérico B, em comparação com o observado experimentalmente. Nota-se um padrão de fendilhação semelhante ao registado nas vigas experimentais. Convém ressaltar que o padrão de fendilhação é para uma carga inferior à obtida no Numérico A. Deste modo, as fendas ainda não estão totalmente desenvolvidas, mas já apresentam aberturas de fenda consideráveis.



(a)



(b)

Figura 45: Padrão de fendilhação: (a) Experimental; (b) Numérico B.

5.2.3 Numérico C

A principal diferença no Numérico C em relação à simulação anterior reside no valor médio da tensão máxima de aderência. Neste caso adotou-se o valor τ_m^2 , considerando um comprimento de amarração, $l_e = 200$ mm, equivalente a 20 vezes o diâmetro do varão de GFRP, a que corresponde o escorregamento, $s_m = 3,90$ mm, apresentados nas Tabela 14 e Tabela 15.

Na Figura 46 apresentam-se os modelos mBPE e o FEMIX interface. Na Tabela 18 sintetizam-se os valores dos parâmetros necessários para a definição do modelo de interface do FEMIX.

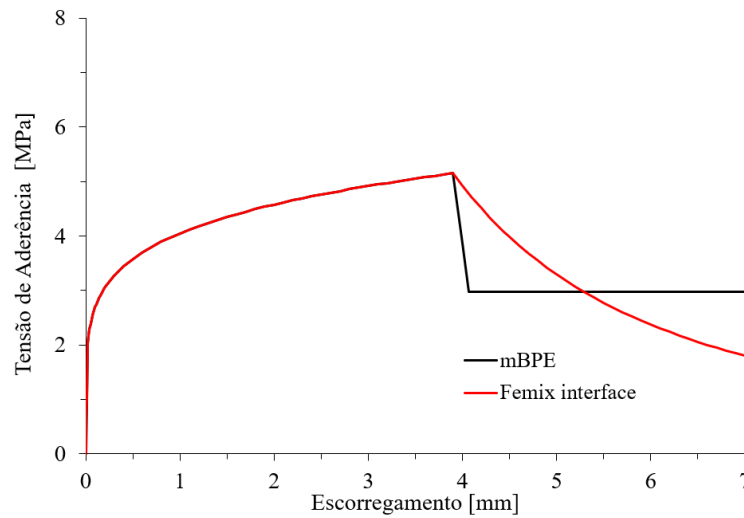


Figura 46: Modelos mBPE e de interface do FEMIX, considerando τ_m^2 e $l_e = 200$ mm (20ϕ).

Tabela 18: Modelo de interface do FEMIX - Numérico C.

Parâmetro	Valor
δ_0 (mm)	0,02
δ_m (mm)	3,90
τ_m (N/mm ²)	5,15
β_1	0,177
β_2	1,80
K_n (N/mm ³)	$1,00 \cdot 10^4$

A Figura 47 apresenta o diagrama carga–deslocamento central correspondente ao Numérico C. De forma geral, observa-se que a resposta obtida é muito semelhante à verificada na simulação Numérico B.

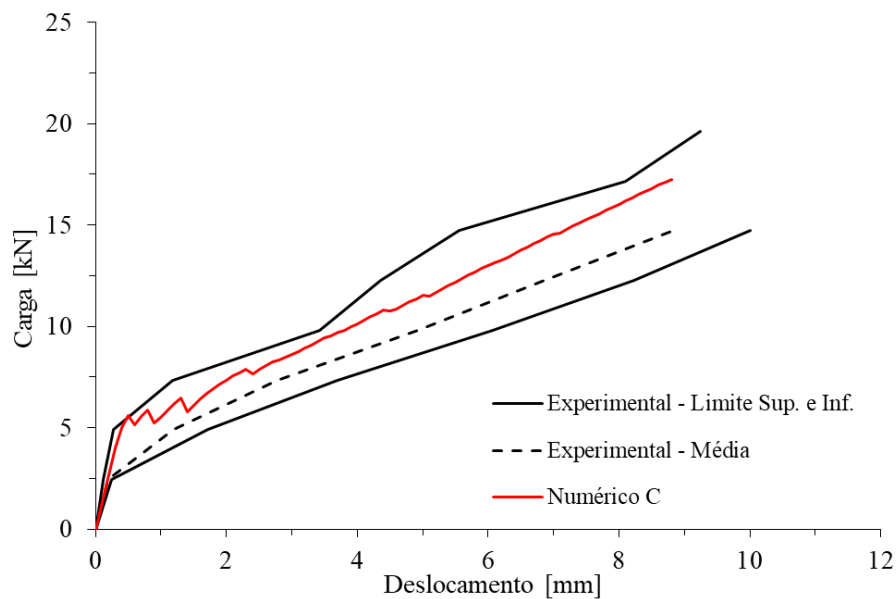
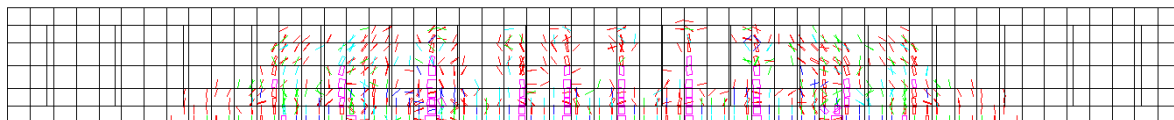


Figura 47: Resultados Experimentais e Numérico C para as vigas VG.

Na Figura 48 é apresentado o padrão de fendilhação obtido na simulação Numérico C, permitindo a comparação com o comportamento observado experimentalmente. O padrão de fendilhação é semelhante ao observado na simulação anterior, Numérico B.



(a)



(b)

Figura 48: Padrão de fendilhação: (a) Experimental; (b) Numérico C.

5.2.4 Comparação dos Numéricos A, B e C

Para efeitos de comparação, na Figura 49 apresentam-se as três simulações: Numérico A, Numérico B e Numérico C.

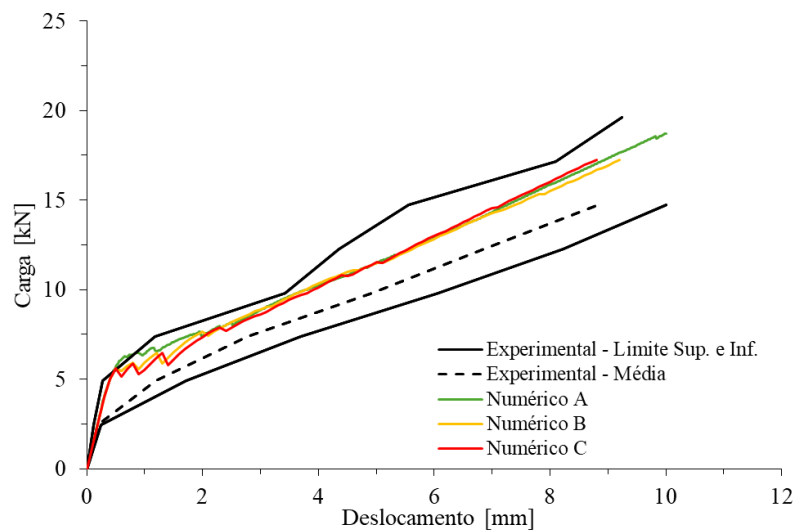


Figura 49: Resultados Experimentais e Numéricos (A, B e C) para as vigas VG.

A análise do gráfico permite verificar que todas as simulações apresentam tendências de comportamento bastante semelhantes, sendo as principais diferenças observadas na fase

inicial de carregamento. Após o início da fendilhação, as curvas numéricas tendem a convergir para uma resposta muito próxima entre si, indicando que o comportamento após a estabilização da fendilhação e a transferência das tensões do betão fendilhado para as armaduras, é praticamente semelhante para as diferentes simulações efetuadas, sem e com interface. Este resultado sugere ainda que as diferentes formulações adotadas para a estimativa da tensão de aderência máxima e escorregamento correspondente têm impacto limitado no comportamento global da viga, influenciando ligeiramente na resposta estrutural na fase inicial da fendilhação.

5.2.5 Numéricos D e E

Tendo como objetivo analisar o efeito do *tension stiffening* na resposta estrutural, realizou-se uma quarta simulação - Numérico D. Nesta simulação foi adotada a proposta de Nayal & Rasheed (2006) para a modelação do *tension stiffening*, mantendo-se a localização adotada para as vigas VA (Figura 30). Assim, o Numérico D considera o efeito do *tension stiffening* nos elementos finitos responsáveis pela simulação do comportamento do betão que envolvem a armadura de GFRP na zona de tração, recorrendo ao modelo de Nayal & Rasheed (2006), (Tabela 12). Nos restantes elementos finitos que simulam o comportamento do betão, foi considerado um comportamento de *tension softening*, de acordo com o modelo do *fib* Model Code 2020, indicado na Tabela 12.

Em relação à interface betão-GFRP, esta simulação baseia-se no modelo mBPE, considerando os valores médio da tensão máxima de aderência, τ_m^1 , e do respetivo escorregamento, $s_m = 8,22$ mm, apresentados na Tabela 14 e na Tabela 15. Para essa estimativa foi considerado um comprimento de amarração, $l_e = 200$ mm, equivalente a 20 vezes o diâmetro do varão de GFRP, conforme apresentado na Figura 43.

Na Figura 50 apresenta-se o diagrama carga–deslocamento central correspondente à simulação Numérico D. De forma geral, observa-se que o comportamento obtido é muito semelhante ao verificado nas restantes simulações numéricas. No entanto, esta simulação apresenta uma resposta mais suave na fase inicial da curva, devido ao efeito do *tension stiffening*, possibilitando a transferência de tensões entre o betão fendilhado e a armadura de uma forma mais contínua, sem quebras abruptas, posicionando-se dentro do intervalo das envolventes dos resultados experimentais. Esta simulação mostra que a consideração do *tension*

stiffening segundo o modelo de Nayal & Rasheed (2006) contribui para uma melhor representação da interação entre o betão fissurado e a armadura de GFRP.

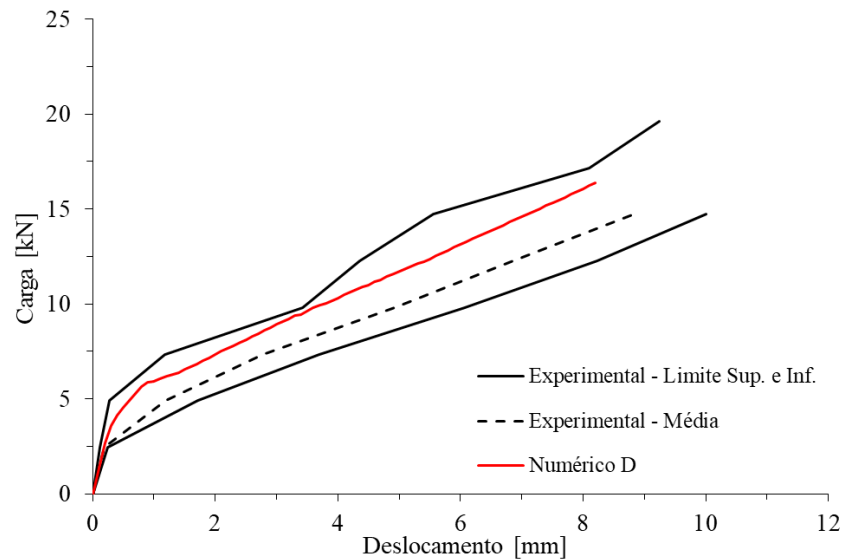


Figura 50: Resultados Experimentais e Numérico D para as vigas VG.

A simulação Numérico E segue a mesma abordagem adotada na simulação Numérico D, mantendo a consideração do efeito de *tension stiffening*. A principal diferença em relação à simulação D reside na definição dos parâmetros utilizados na simulação da interface betão–armadura, realizada através do modelo mBPE representado na Figura 46 (τ_m^2 e $l_e = 200 \text{ mm} - 20\phi$).

Na Figura 51 apresenta-se o diagrama carga–deslocamento central correspondente ao Numérico E. De forma geral, observa-se que a resposta obtida é muito semelhante à verificada no Numérico D, apresentando apenas diferenças mínimas, as quais não resultam em alterações significativas no comportamento global da viga.

Na Figura 52 é apresentado o padrão de fendilhação obtido nas simulações Numérico D e Numérico E, permitindo analisar a distribuição e a evolução das fissuras ao longo da viga e comparar o comportamento numérico com o observado experimentalmente. Verifica-se uma distribuição da fendilhação semelhante, apesar do padrão de fendilhação da simulação Numérica E ser para uma carga ligeiramente inferior.

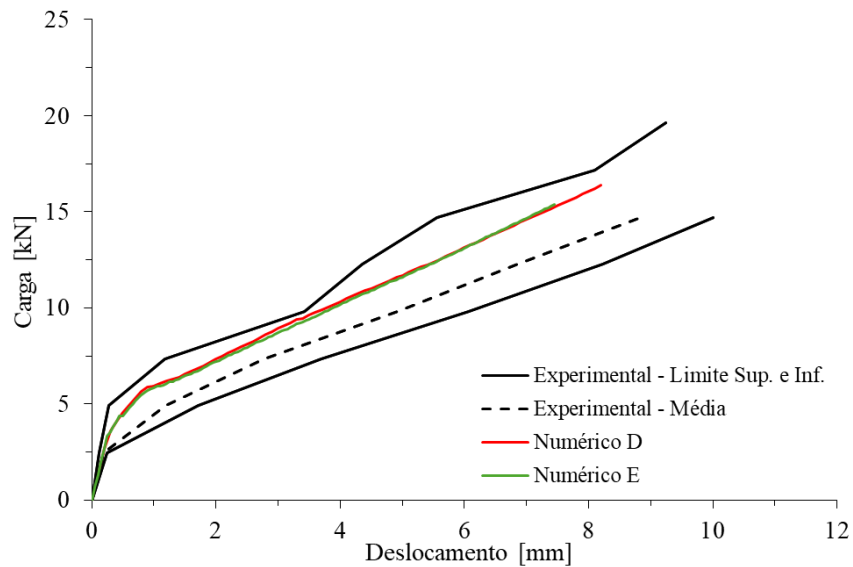
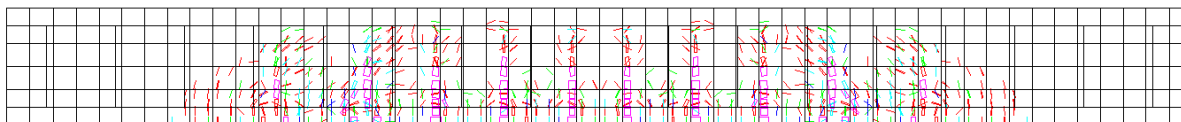


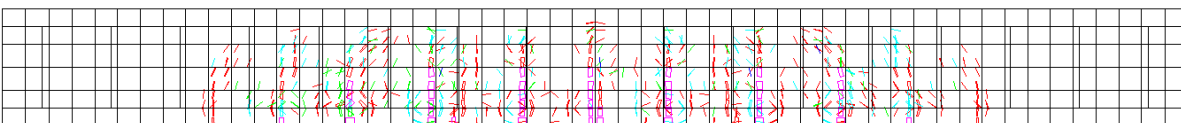
Figura 51: Resultados Experimentais e Numéricos (D e E) para as vigas VG.



(a)



(b)



(c)

Figura 52: Padrão de fendilhação: (a) Experimental; (b) Numérico D; Numérico E.

5.2.6 Numéricos F e G

Antes de apresentar as simulações Numérico F e Numérico G, é importante esclarecer que estas foram realizadas com o objetivo de avaliar a influência de alguns parâmetros usados

na lei de aderência-escorregamento do modelo mBPE na resposta estrutural das vigas. Em particular, pretendeu-se analisar:

- A influência do comprimento de amarração, reduzindo de 200 mm (20ϕ) para 50 mm (5ϕ), valor correspondente a um ensaio típico de pull-out dos varões de FRP;
- A influência da tensão máxima de aderência (τ_m) e o escorregamento (s_m) correspondente;
- A influência do módulo de elasticidade dos varões de GFRP, reduzindo de 50 GPa para 40 GPa.

Para a simulação Numérico F, considerou-se a mesma tensão de aderência adotada na simulação D, τ_m^1 , alterando-se o comprimento de amarração, $l_e = 50$ mm, equivalente a 5 vezes o diâmetro do varão de GFRP, que se traduz num escorregamento, $s_m = 2,05$ mm, apresentados nas Tabela 14 e Tabela 15.

Na Figura 53, apresentam-se os modelos mBPE e o FEMIX interface e na Tabela 19, resumem-se os valores dos parâmetros necessários para a definição do modelo de interface do FEMIX.

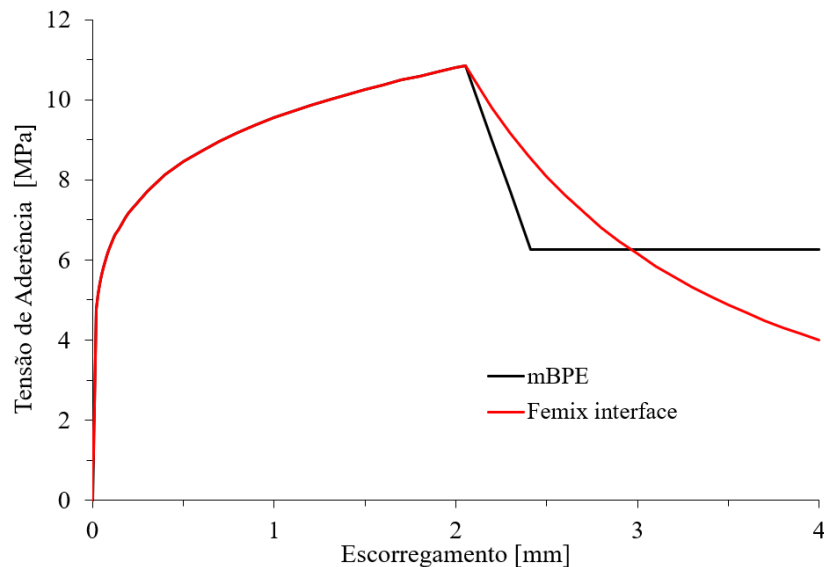


Figura 53: Modelos mBPE e de interface do FEMIX, considerando τ_m^1 e $l_e = 50$ mm (5ϕ).

Tabela 19: Modelo de interface do FEMIX - Numérico F.

Parâmetro	Valor
δ_0 (mm)	0,02
δ_m (mm)	2,05
τ_m (N/mm ²)	10,85
β_1	0,177
β_2	1,5
K_n (N/mm ³)	$1,0 e^{+4}$

A resposta da simulação Numérico F, apresentada na Figura 54, revela um comportamento muito semelhante ao observado na simulação D. Assim, pode-se concluir que, neste caso particular, o comprimento de amarração não exerceu influência relevante nos resultados obtidos para as duas simulações numéricas.

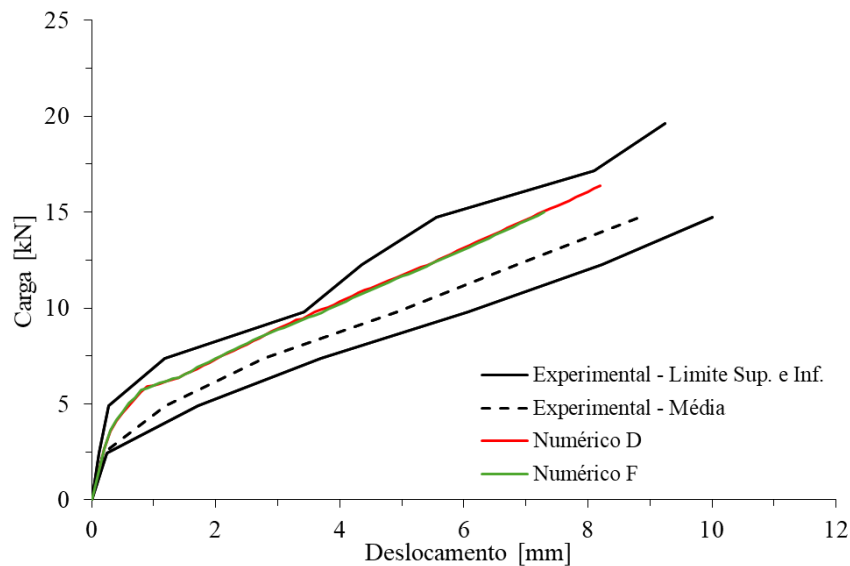


Figura 54: Resultados Experimentais e Numéricos (D e F) para as vigas VG.

Na Figura 55 apresenta-se a distribuição das tensões normais ao plano da secção, no betão, para a simulação Numérico F. Observa-se a formação de um campo de compressões na zona superior da secção e a presença de concentrações localizadas de tensões, na zona de aplicação da carga e numa camada superior muito superficial. Em alguns pontos ultrapassam

ligeiramente a resistência à compressão do betão, porque o comportamento para o betão à compressão é considerado, nas simulações numérica, como linear. Ainda assim, a análise numérica com um comportamento linear do betão à compressão mostra-se coerente com o comportamento geral observado. Nas zonas próximas dos apoios, observa-se um padrão de tensões refletindo a influência do esforço transversal e a interação entre flexão e corte.

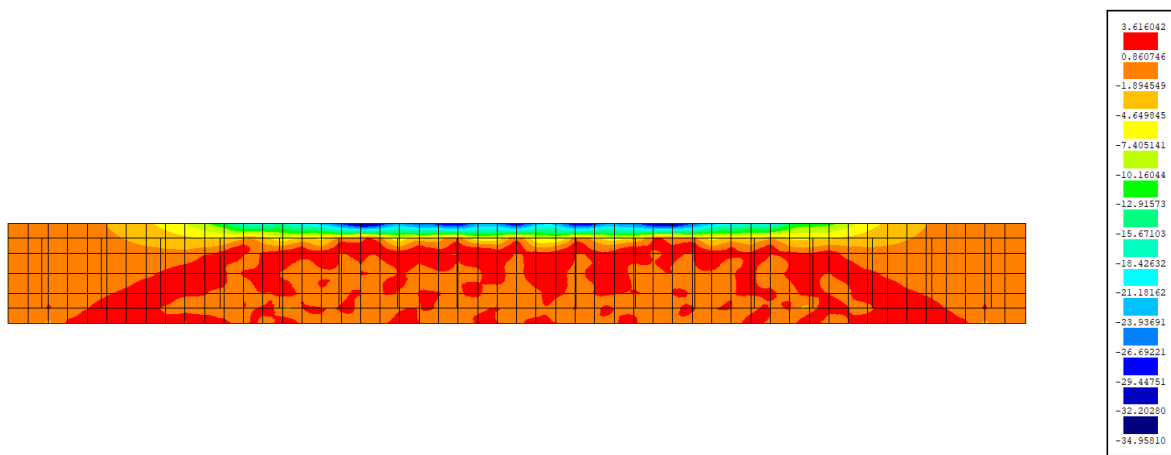


Figura 55: Distribuição de tensões normais ao plano da secção - Numérico F para as vigas VG.

No Anexo A, apresentam-se as distribuições de tensões normais ao longo da viga para as diferentes simulações numéricas efetuadas com varões de GFRP.

Para a simulação Numérico G, considerou-se o modelo mBPE baseado no trabalho de Cosenza *et al.* (1997), para varões de superfície lisa (Tabela 5), a que corresponde uma tensão de aderência, τ_m , de 1,19 MPa, e um escorregamento, $s_m = 0,26$ mm. O comprimento de amarração, l_e , foi considerado igual a 200 mm, equivalente a 20 vezes o diâmetro do varão de GFRP. O objetivo desta modelação foi avaliar o efeito de uma redução significativa na tensão máxima de aderência e do respetivo escorregamento.

Na Figura 56 apresentam-se os modelos mBPE e o FEMIX interface. Na Tabela 20 resumem-se os valores dos parâmetros necessários para a definição do modelo de interface do FEMIX.

Na Figura 57 apresenta-se a resposta da simulação Numérico G em comparação com a simulação Numérico D. Verifica-se que o Numérico G apresenta uma resposta ligeiramente

inferior ao Numérico D, a partir do início da fendilhação. Este comportamento conduz a uma melhor aproximação à curva correspondente à média experimental. Contudo, na fase final do carregamento, observa-se um afastamento entre as curvas, ainda que o Numérico G mantenha, de forma global, o mesmo padrão de resposta identificado nas demais simulações.

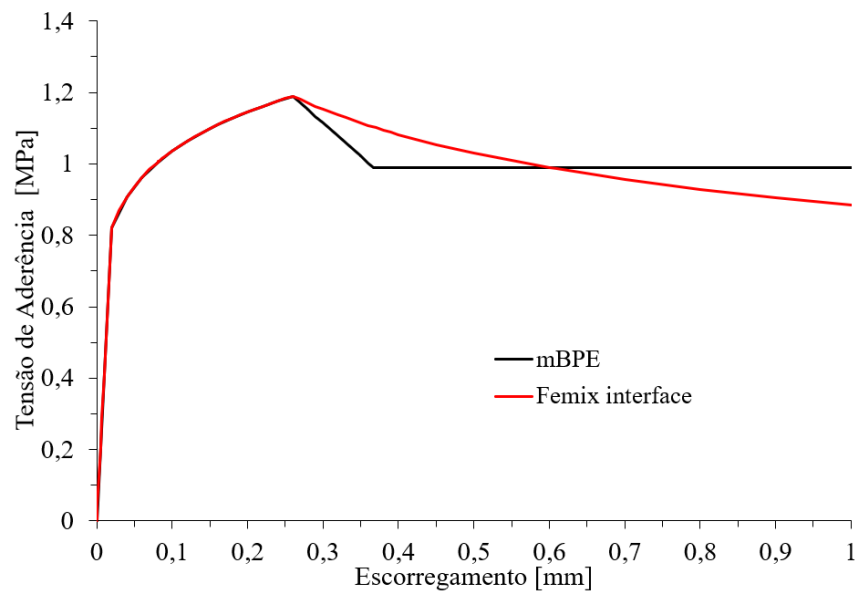


Figura 56: Modelos mBPE e de interface do FEMIX, considerando $\tau_m = 1,19$ MPa e $l_e = 200$ mm (20φ).

Tabela 20: Modelo de interface do FEMIX - Numérico G.

Parâmetro	Valor
δ_0 (mm)	0,02
δ_m (mm)	0,26
τ_m (N/mm ²)	1,19
β_1	0,145
β_2	0,22
K_n (N/mm ³)	$1,0 \cdot 10^4$

Na Figura 58 apresenta-se o padrão de fendilhação obtido no Numérico G. Comparativamente às demais simulações, observa-se a formação de fendas mais pronunciadas e com uma configuração mais distinta, evidenciando a influência da redução da tensão máxima de aderência e do escorregamento dos varões no comportamento da interface betão-GFRP. Este

efeito traduz-se numa distribuição de fendilhação mais expressiva, coerente com a diminuição da capacidade de transferência de tensões ao longo da interface.

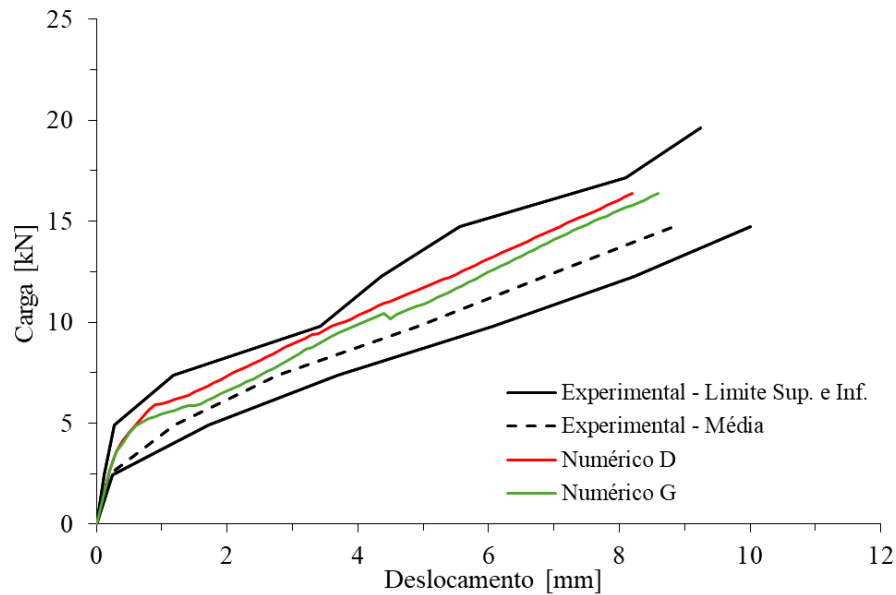
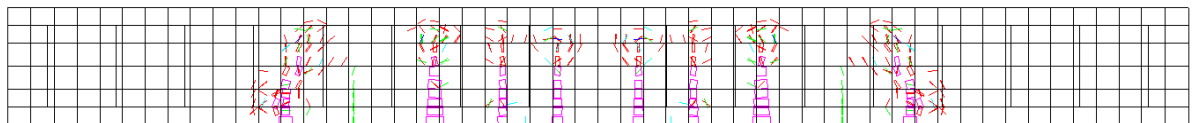


Figura 57: Resultados Experimentais e Numéricos (D e G) para as vigas VG.



(a)



(b)

Figura 58: Padrão de fendilhação: (a) Experimental; (b) Numérico G.

Na Figura 59 apresenta-se a comparação da simulação Numérico G considerando diferentes valores do módulo de elasticidade dos varões de GFRP (50 GPa e 40 GPa), com o objetivo de avaliar a sua influência na resposta estrutural. Observa-se que a redução do módulo

de elasticidade conduz a uma aproximação mais evidente da curva numérica à resposta experimental média, mantendo, contudo, um comportamento global semelhante. Verifica-se ainda que a variação deste parâmetro afeta diretamente a rigidez da resposta, sendo possível observar que, ao considerar um valor inferior (40 GPa), a resposta apresenta uma menor inclinação na fase inicial de carregamento, refletindo uma redução da rigidez global da viga. Esta alteração resulta numa resposta mais deformável, o que contribui para uma melhor concordância com os resultados experimentais, sobretudo na fase posterior à estabilização da fendilhação.

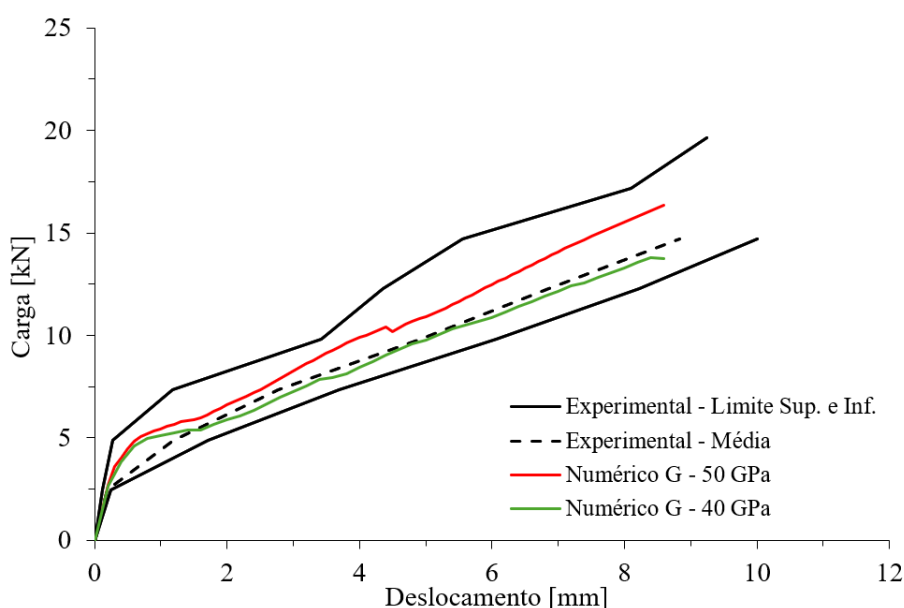


Figura 59: Resultados Experimentais e Numérico G considerando diferentes valores do módulo de elasticidade do GFRP para as vigas VG.

No Anexo B apresentam-se, para as restantes simulações, os resultados das simulações numéricas obtidas para diferentes valores do módulo de elasticidade (40 GPa e 50 GPa), permitindo avaliar a influência deste parâmetro na resposta estrutural das vigas.

Na Figura 60 apresentam-se os valores das extensões correspondentes a vários níveis de carga ao longo de metade da viga. Analisando o gráfico verifica-se que para uma carga de 3,61 kN as extensões ao longo da viga são relativamente baixas. A partir da carga de 5,56 kN, começam a observar-se extensões crescentes nos varões de GFRP, indicando que estes passam a ter um papel estrutural mais relevante devido ao início da fendilhação do betão. A partir desse

ponto, as extensões aumentam de forma progressiva até à região onde se registam flutuações locais bem definidas, associadas ao processo de abertura de fendas. Estas flutuações da curva indicam que nas zonas fendilhadas se registam maiores extensões nos varões de GFRP e que nas secções entre fendas as extensões são um pouco menores. Este fenómeno é mais preponderante na zona de flexão pura.

Para a carga mais elevada, 16,36 kN, observa-se que na zona situada a uma distância superior a 600 mm do apoio as extensões atingem valores bastante elevados, da ordem dos 4 ‰. Este valor contrasta significativamente com o comportamento da viga com armaduras de aço, onde para uma carga próxima da plastificação dos varões, as extensões atingiram cerca de 2.5 ‰ (ver Figura 39). Esta diferença é compatível com o menor módulo de elasticidade do GFRP, que conduz a deformações muito superiores para a mesma força axial.

Na Figura 61 apresentam-se os valores das tensões nas armaduras GFRP correspondentes a vários níveis de carga ao longo de metade do comprimento da viga. Conclusões semelhantes às descritas para as extensões podem ser observadas, evidenciando para uma carga de 16,36 kN um valor da tensão nos varões de GFRP de 200 MPa, ainda muito abaixo da tensão de rutura do GFRP utilizado.

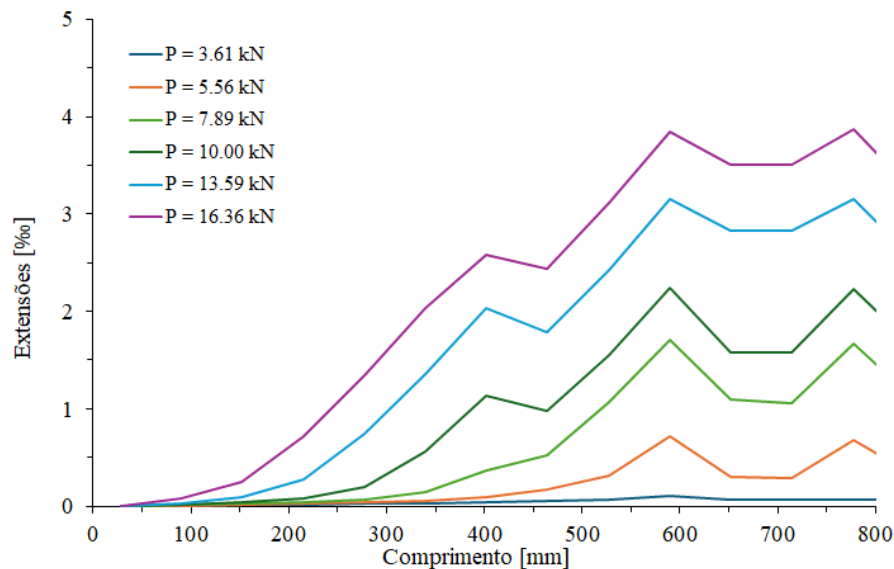


Figura 60: Extensões na armadura GFRP para vários níveis de carga ao longo de metade das vigas VG.

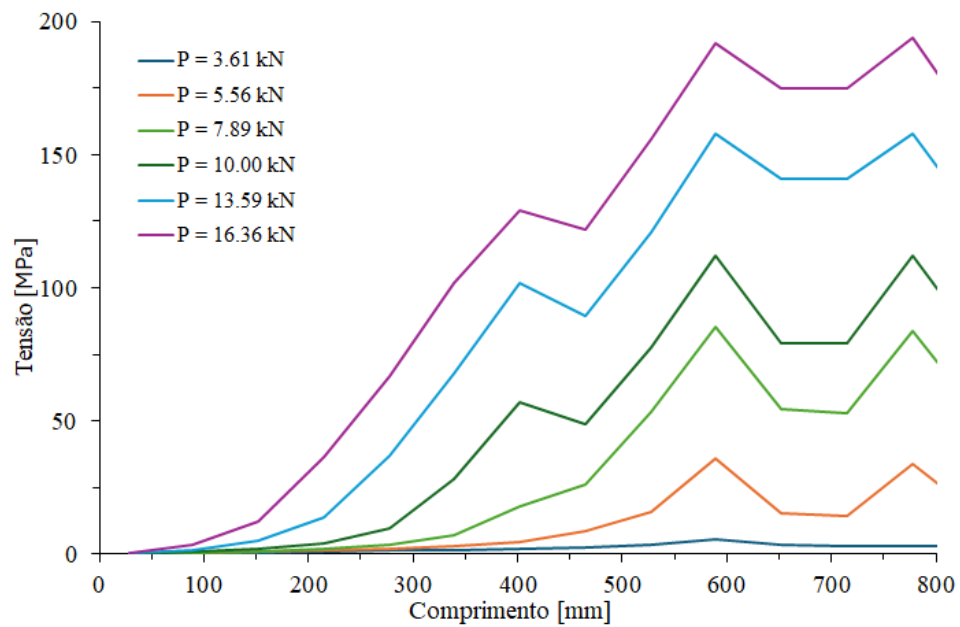


Figura 61: Tensões na armadura GFRP para vários níveis de carga ao longo de metade das vigas VG.

6 CONCLUSÃO

Este estudo permitiu analisar, por meio de modelação numérica pelo Método dos Elementos Finitos, o desempenho estrutural, à flexão, de vigas de betão armado com varões de aço e de GFRP. O software FEMIX e as leis constitutivas dos materiais e da interface betão-GFRP foram eficazes na simulação do comportamento experimental das vigas VA (com armadura de aço) e VG (com varões de GFRP).

A validação inicial do modelo de elementos finitos, após criação e refinamento da malha e caracterização dos materiais, realizada em vigas armadas com aço, confirmou a consistência da metodologia adotada. A concordância verificada entre as curvas carga–deslocamento central, numéricas e experimentais, aliada à boa aproximação dos padrões de fendilhação e da evolução das tensões, demonstrou a capacidade do modelo em simular a resposta global da estrutura. Esta etapa foi fundamental para garantir que as ferramentas numéricas estavam devidamente calibradas antes da transição para o estudo com materiais compósitos de GFRP.

Ainda na simulação das vigas VA observou-se uma melhoria dos resultados numéricos quando se considerou o efeito do *tension stiffening* numa camada de 4,8 cm, envolvendo diretamente as armaduras de tração, ver Figura 30, mantendo-se o efeito do *tension softening* no betão da parte superior da viga.

Relativamente às vigas armadas com varões de GFRP, foram realizadas várias simulações numéricas (A, B, C, D, E, F e G) com o objetivo de avaliar a influência das leis constitutivas adotadas para o betão e para a interface betão-GFRP. As análises efetuadas permitiram reproduzir de forma satisfatória a evolução da curva carga–deslocamento e o desenvolvimento do padrão de fendilhação observado experimentalmente.

As diversas simulações realizadas permitiram concluir que os parâmetros que mais influenciaram o comportamento numérico destas vigas, pela sua incerteza, foram o módulo de elasticidade dos varões de GFRP, a tensão máxima de aderência, τ_m , e o escorregamento associado a essa tensão máxima, s_m .

A resposta numérica (Numérico G) que melhor se ajustou à curva média experimental foi obtida considerando-se o modelo mBPE baseado no trabalho de Cosenza *et al.* (1997), para

varões de superfície lisa (Tabela 5), com uma tensão de aderência, τ_m , de 1,19 MPa, e um escorregamento, s_m , de 0,26 mm. O comprimento de amarração, l_e , foi considerado igual a 200 mm, equivalente a 20 vezes o diâmetro do varão de GFRP. Nesta simulação foi adotada a proposta de Nayal & Rasheed (2006) para a modelação do *tension stiffening*, mantendo-se a localização adotada para as vigas VA, ver Figura 30, e um módulo de elasticidade de 40 GPa para os varões de GFRP.

Em relação ao comportamento da interface betão-GFRP, conclui-se que existem diversos modelos disponíveis na literatura técnico-científica para simular esse comportamento, contudo há ainda reduzida informação sobre a quantificação dos principais parâmetros, como a tensão máxima de aderência e o escorregamento associado a essa tensão. As propostas analisadas para a quantificação da tensão máxima de aderência conduziram a uma grande dispersão de valores (ver Tabela 14), mostrando que mais estudos devem ser desenvolvidos sobre a aplicação deste modelos, em casos de estudo semelhantes ao usado neste trabalho, e que a caracterização das propriedades mecânicas dos varões de GFRP, bem como da sua superfície, são fundamentais, tanto para os estudos experimentais como, naturalmente, para as análises numéricas.

Comparando os resultados do Numérico A (sem modelação da interface betão-GFRP) com os Numéricos B, C, D, E e F, conclui-se que as principais diferenças se localizam na fase não-linear associada ao aparecimento da primeira fissura e estabilização da fendilhação, com a transferências de tensões do betão fendilhado para a armadura.

A análise dos parâmetros associados à aderência betão-GFRP mostrou que, após o início da fendilhação, as tensões desenvolvidas na interface permanecem relativamente reduzidas, mesmo com a abertura das fissuras.

Estas simulações mostram também que, para este caso de estudo, a modelação da interface betão-GFRP não conduziu a diferenças significativas na resposta numérica. Assim, parece ser suficiente o uso de modelos de elementos finitos sem elementos de junta e sem a respetiva lei de aderência-escorregamento, podendo, contudo, ser simulado esse comportamento através da utilização de modelos de *tension stiffening* calibrados para o efeito.

6.1 Desenvolvimentos Futuros

O presente estudo apresentou algumas limitações associadas, principalmente, à reduzida quantidade de dados disponibilizados no trabalho experimental de Teixeira (2024), o que dificultou uma análise mais detalhada do comportamento estrutural em determinadas fases da curva carga–deslocamento, nomeadamente na fase associada ao aparecimento da primeira fissura e estabilização da fendilhação, com a transferências de tensões do betão fendilhado para a armadura. Em particular, a inexistência de um maior número de registos experimentais ao longo da resposta estrutural limita a avaliação mais precisa da evolução do comportamento não linear, após a fendilhação.

Como propostas para investigações futuras, recomenda-se o aprofundamento do estudo da aderência através da análise de diferentes tratamentos superficiais dos varões de GFRP e da influência da resistência à compressão do betão nestas propriedades. Sugere-se ainda a exploração de configurações distintas de amarração e a realização de novas campanhas experimentais focadas especificamente na interface. Estes dados seriam cruciais para consolidar a base de dados necessária a uma calibração ainda mais fiável dos modelos numéricos, elevando o nível de confiança nas simulações de estruturas complexas. Adicionalmente, recomenda-se a consideração de leis constitutivas não-lineares para o comportamento do betão à compressão.

Por fim, a adoção de uma abordagem de modelação tridimensional, recorrendo a modelos 3D, poderá contribuir para uma análise mais detalhada do comportamento estrutural das vigas de betão armado com varões de aço e de GFRP, nomeadamente no que se refere à distribuição espacial de tensões, ao desenvolvimento da fendilhação e aos efeitos tridimensionais associados à interface betão–armadura.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alam, M. S., & Hussein, A. (2020). Idealized tension stiffening model for finite element analysis of glass fibre reinforced polymer (GFRP) reinforced concrete members. *Structures*, 24, 351–356. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2020.01.033>

Alsayed, S. H. (1998). Flexural behaviour of concrete beams reinforced with GFRP bars. *Cement and Concrete Composites*, 20(1), 1–11. [https://doi.org/10.1016/S0958-9465\(97\)00061-9](https://doi.org/10.1016/S0958-9465(97)00061-9)

Amaral, V. G. H. do, Alves, G. F. T., Jardim, P. I. L. G., & Almeida, D. H. de. (2024). Análise numérica de vigas de concreto armado com barras de GFRP: Uma revisão sistemática da literatura. *REEC - Revista Eletrônica de Engenharia Civil*, 20(2), 64–79. <https://doi.org/10.5216/reec.v20i2.78841>

American Concrete Institute. (2015). *Guide for the design and construction of structural concrete reinforced with fiber-reinforced polymer (FRP) bars* (ACI 440.1R-15). American Concrete Institute.

American Concrete Institute. (2022). *Building code requirements for structural concrete reinforced with glass fiber-reinforced polymer (GFRP) bars—Code and commentary*. (ACI 440.11-22) American Concrete Institute.

ArcelorMittal. (2022, setembro 1). *Vergalhão ArcelorMittal 50 S – XCarb™: Pré-lançamento Abcic Networking 2022. Case ArcelorMittal e Tegra Incorporadora; desenvolvimento do vergalhão XCarb™ Recycled and Renewable, novo aço produzido com alto percentual de matéria-prima reciclada, 100% de energia renovável e baixa pegada de carbono*. São Paulo, Brasil.

Associação Brasileira de Normas Técnicas (2014). *Projeto de estruturas de concreto – Procedimento* (NBR 6118:2014). ABNT

Associação Brasileira de Normas Técnicas (2023). *Projeto de estruturas de concreto* (NBR 6118:2023). ABNT.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. (2024). *Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edificações* (NBR 8800:2024). ABNT.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. (2025). *Barras de polímero reforçado com fibras (FRP) destinadas a armaduras para estruturas de concreto armado – Parte 1: Requisitos* (ABNT NBR 17201-1:2025). ABNT.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. (2025). *Projeto de estruturas de concreto armado com barras de polímero reforçado com fibras (FRP)* (NBR 17196:2025). ABNT.

Azevedo, Á. F. M., & Barros, J. A. O. (2000). *FEMIX: Manual de utilização* [Manual técnico]. FEMIX.

Azevedo, Á. F. M. (2003). *Método dos elementos finitos* (1ª ed.). Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Azevedo, Á., Barros, J., Sena Cruz, J., & Gouveia, V. (2003). *Software no ensino e no projeto de estruturas*. Universidade do Porto. <https://hdl.handle.net/1822/13106>

Bakis, C. E., Bank, L. C., Brown, V. L., Cosenza, E., Davalos, J. F., Lesko, J. J., Machida, A., Rizkalla, S. H., & Triantafillou, T. C. (2002). Fiber-reinforced polymer composites for construction—State-of-the-art review. *Journal of Composites for Construction*, 6(2), 73–87. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0268\(2002\)6:2\(73\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0268(2002)6:2(73))

Barros, J. A. O., Figueiras, J. A., & Póvoas, R. H. C. F. (1994). Modelos constitutivos para o betão armado fendilhado. In *Encontro Nacional Betão Estrutural* (pp. 55–70). Porto, Portugal. <https://hdl.handle.net/1822/13148>

Barros, J. A. O. (1995). *Comportamento de betão reforçado com fibras: Análise experimental e simulação numérica* (Tese de doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto).

Barros, J.A.O.; Baghi, H.; Ventura-Gouveia, A., Assessing the applicability of a smeared crack approach for simulating the behaviour of concrete beams flexurally reinforced with GFRP bars and failing in shear, *Engineering Structures Journal*, 227, 111391, January 2021. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111391>

Başaran, B., Kalkan, İ., Beycioğlu, A., & Kasprzyk, I. (2022). A review on the physical parameters affecting the bond behavior of FRP bars embedded in concrete. *Polymers*, 14(9), Article 1796. <https://doi.org/10.3390/polym14091796>

- Camacho, L. F. C. (2011). *A utilização de varões de GFRP nas estruturas de betão armado* (Dissertação de mestrado, Universidade da Madeira).
- Canadian Standards Association. (2002). *Design and construction of building components with fibre-reinforced polymers* (No. 2). Canadian Standards Association.
- Cosenza, E., Manfredi, G., & Realfonzo, R. (1997). Behavior and modeling of bond of FRP rebars to concrete. *Journal of Composites for Construction*, 1(2), 40–51. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0268\(1997\)1:2\(40\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0268(1997)1:2(40))
- Couto, I. A. (2007). Análise teórica e experimental do comportamento da aderência entre o concreto e barras de fibra de vidro impregnada por polímero (Dissertação de mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo). <https://doi.org/10.11606/D.18.2007.tde-01102007-085339>
- Darwin, D., Dolan, C. W., & Nilson, A. H. (2016). *Design of concrete structures* (15th ed.). McGraw-Hill Education. ISBN 978-0-07-339794-8
- Diab, A. M., Elyamany, H. E., Hussein, M. A., Al Ashy, H. M. (2014). Bond behavior and assessment of design ultimate bond stress of normal and high strength concrete. *Alexandria Engineering Journal*, 53 (2), 355–371. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2014.03.012>.
- Djamaluddin, R. (2013). Flexural behaviour of external reinforced concrete beams. *Procedia Engineering*, 54, 252–260. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.03.023>
- Duarte, I. O., Santos, J. D. dos, Fugiyama, M. M., & Forti, N. C. da S. (2021). Caracterização do comportamento mecânico das barras de GFRP e BFRP. In *Brazilian Technology Symposium* (v.1, p. 98). Pontifícia Universidade Católica de Campinas.
- Eligehausen, R., Popov, E. and Bertero, V. (1983) *Local Bond Stress-Slip Relationships of Deformed Bars under Generalized Excitations: Experimental Results and Analytical Model*. Report UCB/EERC-83/23, Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California, Berkeley, California.
- El-Nemr, A., Ahmed, E. A., Barris, C., Joyklad, P., Hussain, Q., & Benmokrane, B. (2023). Bond performance of fiber reinforced polymer bars in normal- and high-strength concrete. *Construction and Building Materials*, 393, 131957. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2023.131957>

- Farias, C. , Pessi, S., Wanderlind, A., Piva, J. H., & Pavei, E. (2022). Flexural behavior of concrete beams reinforced with glass fiber reinforced polymer and steel bars. *Journal of Construction*, 21(3), 506–522. <https://doi.org/10.7764/RDLC.21.3.506>
- Fédération Internationale du Béton. (2007). FRP reinforcement in RC structures (fib Bulletin No. 40). fib.
- Feeser, W. K., & Brown, V. L. (2005). *Guide examples for design of concrete reinforced with FRP bars*. In Proceedings of the ASCE Symposium on Codes and Standards for Concrete Design, Structures, and Construction (Vol. 230, pp. 935–954). American Society of Civil Engineers. <https://doi.org/10.14359/14874>
- Feliciano dos Santos, M., & Pereira dos Santos, D. (2022). Evaluation of the influence of corrosion on the global stability of reinforced concrete columns. *Revista ALCONPAT*, 12(3), 401–421. <https://doi.org/10.21041/ra.v12i3.592>
- Feng, G., Zhu, D., Guo, S., Rahman, M. Z., Jin, Z., & Shi, C. (2022). A review on mechanical properties and deterioration mechanisms of FRP bars under severe environmental and loading conditions. *Cement and Concrete Composites*, 134, Article 104758. <https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2022.104758>
- Gao, Y., Ren, X., Zhang, J., Zhong, L., Yu, S., Yang, X., & Zhang, W. (2020). Proposed Constitutive Law of Uniaxial Compression for Concrete under Deterioration Effects. *Materials*, 13(9), 2048. <https://doi.org/10.3390/ma13092048>
- Gouveia, A. V. (2011). *Constitutive models for the material nonlinear analysis of concrete structures including time-dependent effects* (Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Escola de Engenharia). Repositório da Universidade do Minho.
- Hou, X., Song, Z., Song, H., Wang, X., Guo, J., Wan, S., Yang, J., Xiao, H., Gong, Y., & Liu, L. (2025). Flexural behavior of RC beams strengthened with CFRP sheets and ECC layers. *Discover Applied Sciences*, 7, 755. <https://doi.org/10.1007/s42452-025-07437-9>
- IBRACON. (2021). *Prática Recomendada CT 303: Estruturas de concreto armado com barras de polímero reforçado com fibras (FRP)* (1ª ed., 63 p.). IBRACON.

- Ifrahim, M. S., Sangi, A. J., & Ahmad, S. H. (2023). Experimental and numerical investigation of flexural behaviour of concrete beams reinforced with GFRP bars. *Structures*, 56, Article 104951. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2023.104951>
- Ineia, A., Pol, W., Braun, J., & Lopes, L. (2021). Barras de fibra de vidro, uma alternativa inovadora e suas potencialidades: Revisão bibliográfica. *Tecno-Lógica*, 25, 243–251. <https://doi.org/10.17058/tecnolog.v25i2.16214>
- Ji, X.-L., Chen, L.-J., Liang, K., Pan, W., & Su, R. K.-L. (2023). A review on FRP bars and supplementary cementitious materials for the next generation of sustainable and durable construction materials. *Construction and Building Materials*, 383, Article 131403. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2023.131403>
- Kim, B., Doh, J.-H., Yi, C.-K., & Lee, J.-Y. (2013). Effects of structural fibers on bonding mechanism changes in interface between GFRP bar and concrete. *Composites Part B: Engineering*, 45(1), 768–779. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.09.039>
- Lee, C. K., & Lo, S. H. (1997). Automatic adaptive refinement finite element procedure for 3D stress analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 25(1–2), 135–166. [https://doi.org/10.1016/S0168-874X\(96\)00054-2](https://doi.org/10.1016/S0168-874X(96)00054-2)
- Lee, J.-Y., Kim, T.-Y., Kim, T.-J., Yi, C.-K., Park, J.-S., You, Y.-C., Park, Y.-H. (2008). Interfacial Bond Strength of Glass Fiber Reinforced Polymer Bars in High Strength Concrete, *Composites Part B: Engineering*, 39 (3), 258–270.
- Lee, J. Y., Yi, C. K., Cheong, Y. G., & Kim, B. I. (2012). Bond stress–slip behaviour of two common GFRP rebar types with pullout failure. *Magazine of Concrete Research*, 64(7), 575–591. <https://doi.org/10.1680/macr.11.00050>
- Li, V., & Wang, S. (2002). Flexural behaviors of glass fiber-reinforced polymer (GFRP) reinforced engineered cementitious composite beams. *ACI Materials Journal*, 99(1), 11–21. <https://doi.org/10.14359/11311>
- Lin, X., & Zhang, Y. X. (2014). Evaluation of bond stress-slip models for FRP reinforcing bars in concrete. *Composite Structures*, 107, 131–141. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.07.037>

- Lotti, R. S., Machado, A. W., Mazzeiro, Ê. T., & Landre Júnior, J. (2006). Aplicabilidade científica do método dos elementos finitos. *Revista Dental Press de Ortodontia e Ortopedia Facial*, 11(2). <https://doi.org/10.1590/S1415-54192006000200006>
- Lu, K., Ma, K., Chen, Z., Li, Y., Chen, G., & Feng, Z. (2024). Bond-slip and bond strength models for FRP bars embedded in ultra-high-performance concrete: A critical review. *Structures*, 64, Article 106551. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2024.106551>
- Malvar, L. J. (1994). *Bond stress-slip characteristics of FRP rebars* (DTIC Document). DTIC, Fort Belvoir, VA, USA.
- Markou, G., & AlHamaydeh, M. (2017). 3D finite element modeling of GFRP-reinforced concrete deep beams without shear reinforcement. *International Journal of Computational Methods*, 15(02). <https://doi.org/10.1142/S0219876218500019>
- Micelli, F., & Nanni, A. (2004). Durability of FRP rods for concrete structures. *Construction and Building Materials*, 18(7), 491–503. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2004.04.012>
- Mohammed, A.D., & Salih, O.A. (2025). An Experimental Study on Reinforced Concrete Beams with GFRP and Ordinary Steel Bars' Flexural Strength Properties. *Civil and Environmental Engineering*, 21(1), 282-298. <https://doi.org/10.2478/cee-2025-0022>
- Mohd.Sam, A. R., & Swamy, R. N. (2005). Flexural behaviour of concrete beams reinforced with glass fibre reinforced polymer bars. *Jurnal Kejuruteraan Awam / Journal of Civil Engineering*, 17(1), 49–57. <https://doi.org/10.11113/mjce.v17.15672>
- Muhammad, M. A., & Ahmed, F. R. (2023). Evaluation of deflection and flexural performance of reinforced concrete beams with glass fiber reinforced polymer bars. *Case Studies in Construction Materials*, 18, e01855. <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2023.e01855>
- Nayal, R., & Rasheed, H. A. (2006). Tension stiffening model for concrete beams reinforced with steel and FRP bars. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 18(6), 831–839. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0899-1561\(2006\)18:6\(831\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0899-1561(2006)18:6(831))
- Nepomuceno, E., Sena-Cruz, J., Correia, L., & D'Antino, T. (2021). Review on the bond behavior and durability of FRP bars to concrete. *Construction and Building Materials*, 287, 123042. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2021.123042>

- Okelo, R., & Yuan, R. L. (2005). Bond strength of fiber reinforced polymer rebars in normal strength concrete. *Journal of Composites for Construction*, 9(3), 203. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0268\(2005\)9:3\(203\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0268(2005)9:3(203))
- Rather, A. I., Banerjee, S., & Laskar, A. (2024). Effect of bar surface geometry on bond behavior in GFRP-reinforced concrete beams: Experiments and design implications. *Journal of Composites for Construction*. Advance online publication. <https://orcid.org/0000-0002-8961-2788>
- Rossetti, V. A., Galeota, D., & Giammatteo, M. M. (1995). Local bond stress-slip relationships of glass fibre reinforced plastic bars embedded in concrete. *Materials and Structures*, 28, 340–344. <https://doi.org/10.1007/BF02473149>
- Saad, S., & Polak, M. A. (2025). Bond behavior of glass fiber-reinforced polymer (GFRP) bars embedded in concrete: A review. *Materials*, 18(14), 3367. <https://doi.org/10.3390/ma18143367>
- Salazar de Troya, M. A., & Tortorelli, D. A. (2018). Adaptive mesh refinement in stress-constrained topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 58, 2369–2386. <https://doi.org/10.1007/s00158-018-2084-2>
- Seema, A. K. T., & Zandonini, R. (2021). Finite element modeling of tension stiffening and cracking of reinforced concrete components: State of art. In *2nd Indo-European Conference on Sustainable Materials, Environment and Construction* (IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, Vol. 889, Article 012082). IOP Publishing. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/889/1/012082>
- Sena Cruz, J. M. (2005). *Strengthening of concrete structures with near-surface mounted CFRP laminate strips* (Tese de Doutoramento). Universidade do Minho, Departamento de Engenharia Civil, Guimarães, Portugal.
- Silva, A. F. da. (2022). *Análise numérica de vigas de concreto armadas com barras de fibra de vidro (GFRP)* (Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Alagoas – Campus do Sertão). Delmiro Gouveia, Brasil.
- Soriano, H. L. (2002). *Método dos elementos finitos em análise de estruturas*. São Paulo: Edusp.
- Souza, R. M. (2003). *O método dos elementos finitos aplicado ao problema de condução de calor* [Apostila]. Universidade Federal do Pará, Centro Tecnológico, Departamento de

Engenharia Civil – Núcleo de Instrumentação e Computação Aplicada à Engenharia. Belém, PA, Brasil.

Teatini, J. C. (2016). *Estruturas de betão armado* (3ª ed.). GEN LTC. <https://app.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788595155213/>

Tavares, D. H. (2006). *Análise teórica e experimental de vigas de concreto armadas com barras não metálicas de GFRP* (Dissertação de Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil. <https://doi.org/10.11606/D.18.2006.tde-22062006-105650>

Teixeira, V. A. (2024). *Viabilidade técnica da substituição do vergalhão de aço pelo vergalhão de fibra de vidro em vigas de concreto armado submetidas à flexão* (Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Tecnológica Federal do Paraná). Pato Branco, Brasil.

Teixeira, V. A., Baroni, T. F., & Dalcanal, P. R. (2024). Substituição do vergalhão de aço pelo vergalhão de fibra de vidro em vigas de concreto armado: Análise experimental à flexão. In *Anais do COBICET 2024*. <https://www.even3.com.br/anais/cobicet2024/885188-substituicao-do-vergalhao-de-aco-pelo-vergalhao-de-fibra-de-vidro-em-vigas-de-concreto-armado--analise-experiment>

Tighiouart, B., Benmokrane, B., & Gao, D. (1998). Investigation of bond in concrete members with fibre reinforced polymer (FRP) bars. *Construction and Building Materials*, 12, 453–462. [https://doi.org/10.1016/S0950-0618\(98\)00027-0](https://doi.org/10.1016/S0950-0618(98)00027-0)

Tran, H., Nguyen-Thoi, T., & Dinh, H.-B. (2025). State-of-the-art review of studies on the flexural behavior and design of FRP-reinforced concrete beams. *Materials*, 18(14), 3295. <https://doi.org/10.3390/ma18143295>

Vaz, V. V., Arroyo, F. N., & Christoforo, A. L. (2023). *Simulação numérica de vigas de concreto armadas com barras de aço e barras de GFRP*. v. 15, n. 2: Jul/Dez 2023. Faculdade de Engenharia e Arquitetura, Universidade FUMEC.

Wambeke, B. W., & Shield, C. K. (2006). Development length of glass fiber-reinforced polymer bars in concrete. *ACI Structural Journal*.

Wang, Y., & Qiao, J. (2024). Research progress of bond slip at the interface of FRP bars and concrete. *Academic Journal of Science and Technology*. <https://doi.org/10.54097/7s3rba19>

- Wang, B., Liu, G., & Miao, H. (2023). Experimental Study on the Bond Performance between Glass-Fiber-Reinforced Polymer (GFRP) Bars and Concrete. *Buildings*, 13(9), 2126. <https://doi.org/10.3390/buildings13092126>
- Way, A., De Koker, N., Viljoen, C. (2025). Reliability assessment of deflection limitation methods in reinforced concrete beams. *Structural Concrete*, 26:4635–4650. DOI: 10.1002/suco.202401085
- Wight, J. K., & MacGregor, J. G. (2012). *Reinforced concrete: Mechanics and design* (6th ed.). Pearson Education.
- Wittmann, F. H., Rokugo, K., Mihashi, H., Simonin, P., & Bruhwiler, E. (1988). Fracture energy and strain softening of concrete as determined by means of compact tension specimens. *Materials and Structures / Matériaux et Constructions*, 21, 21–32.
- Yan, F., Lin, Z., & Yang, M. (2016). Bond mechanism and bond strength of GFRP bars to concrete: A review. *Composites Part B: Engineering*, 98, 56–69. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.04.068>
- Zienkiewicz O. C. & Taylor R. L. The finite element method. Vol. I. Basic formulations and linear problems. London: McGraw-Hill, 1989. 648 p.

ANEXO A

Neste anexo apresentam-se as distribuições de tensões normais ao longo da viga para as diferentes simulações numéricas efetuadas com varões de GFRP.

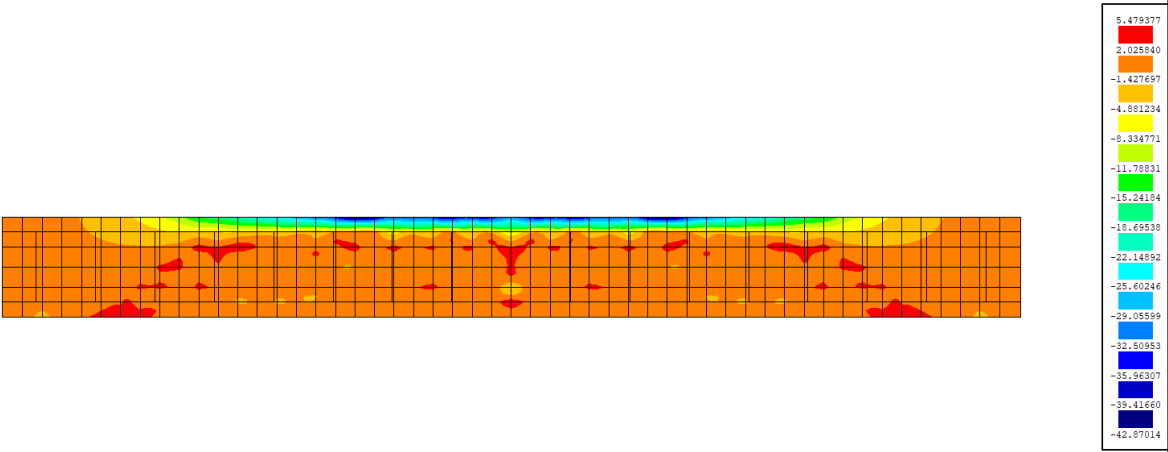


Figura A.1: Distribuição de tensões normais (Numérico A) para as vigas VG.

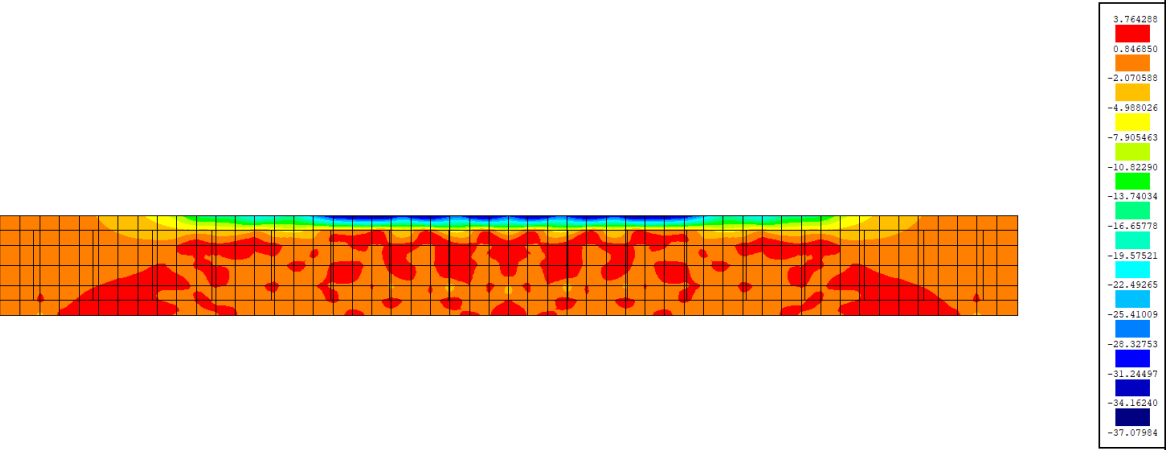


Figura A.2: Distribuição de tensões normais (Numérico B) para as vigas VG.

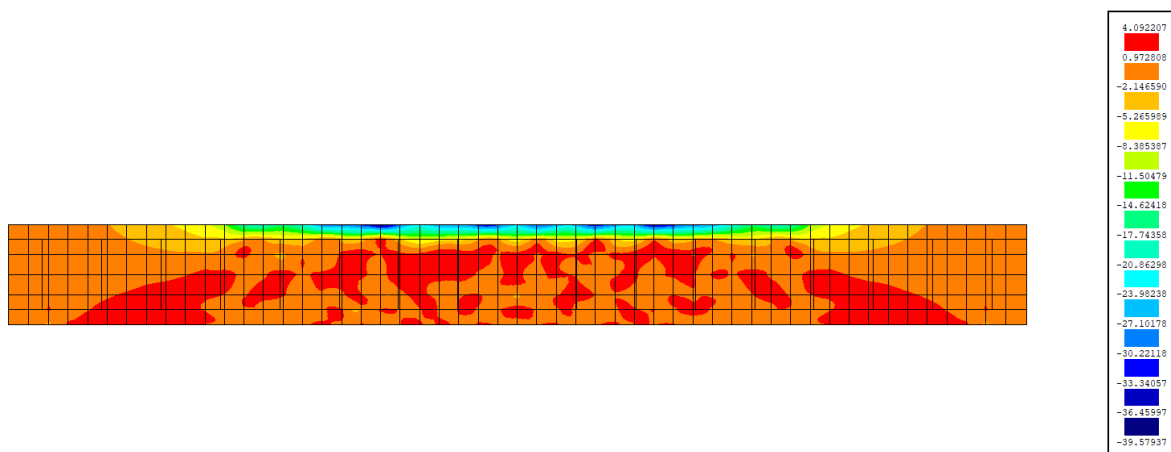


Figura A.3: Distribuição de tensões normais (Numérico C) para as vigas VG.

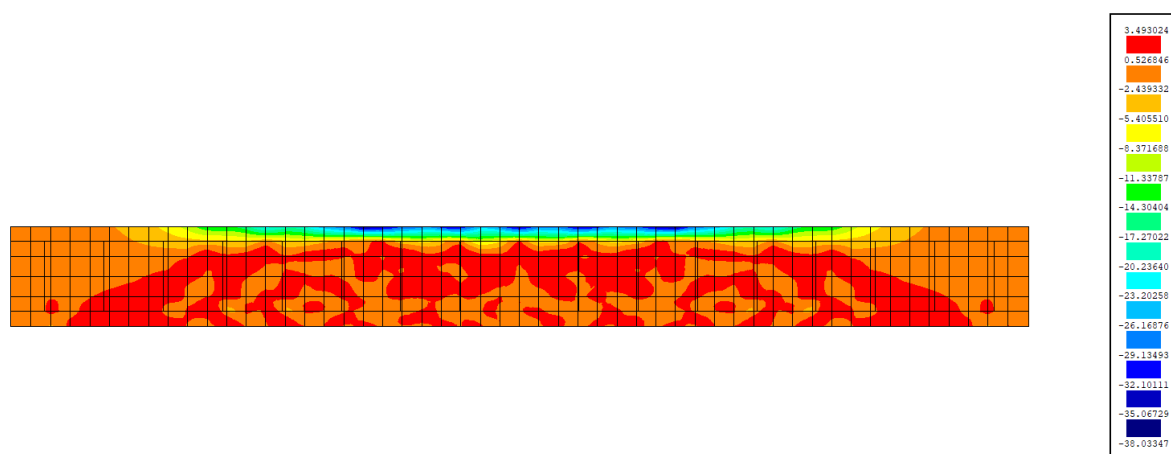


Figura A.4: Distribuição de tensões normais (Numérico D) para as vigas VG.

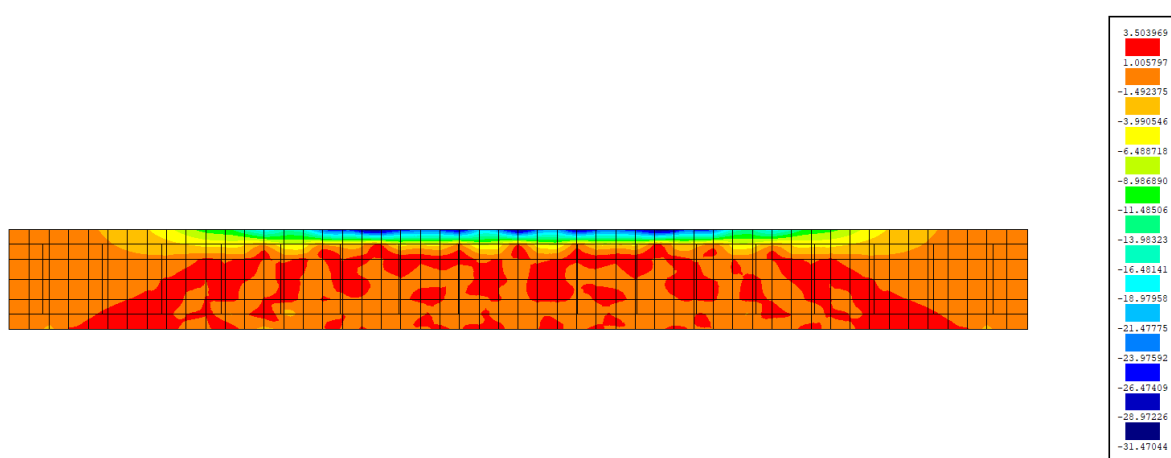


Figura A.5: Distribuição de tensões normais (Numérico E) para as vigas VG.

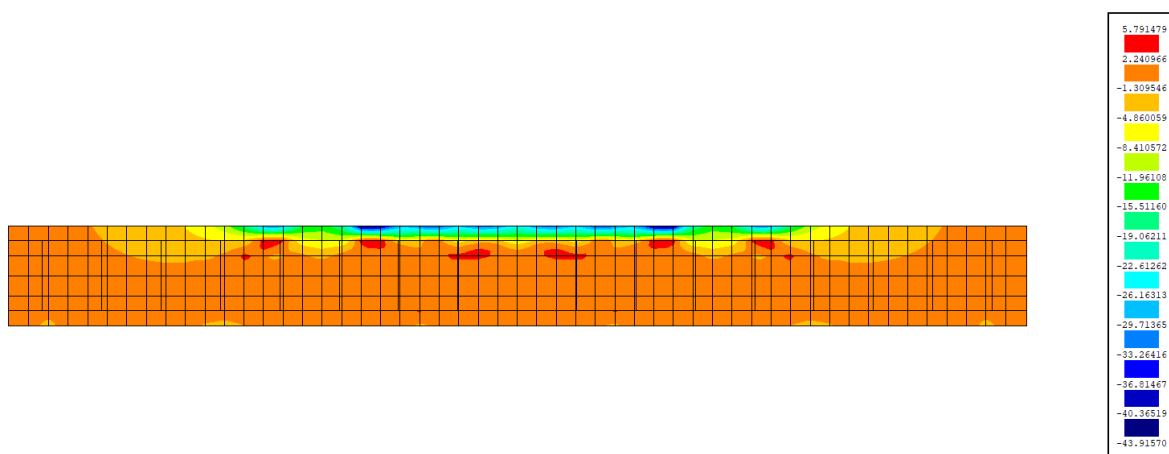


Figura A.6: Distribuição de tensões normais (Numérico G) para as vigas VG.

ANEXO B

No presente anexo apresentam-se as comparações entre os resultados das simulações numéricas obtidas para diferentes valores do módulo de elasticidade (40 GPa e 50 GPa), permitindo avaliar a influência deste parâmetro na resposta estrutural das vigas.

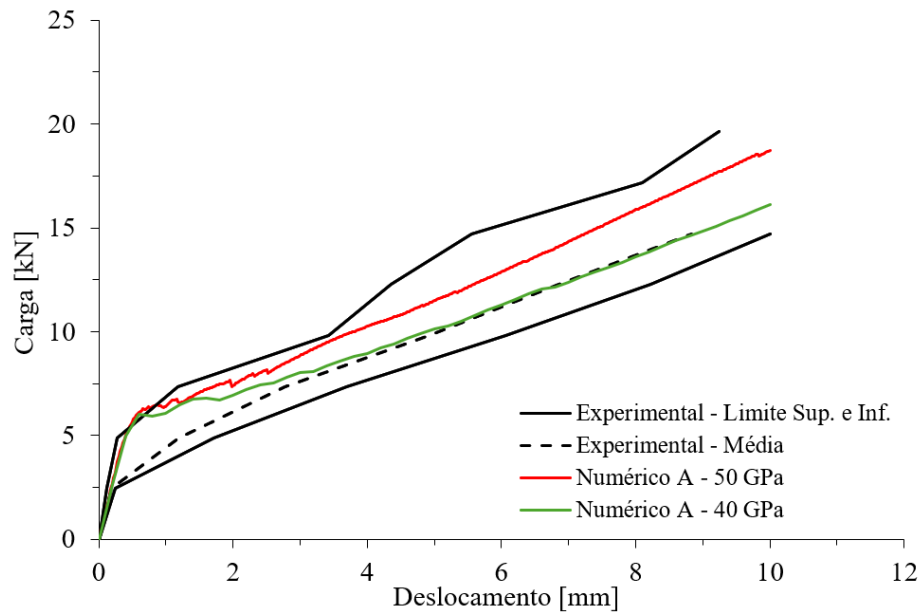


Figura B.1: Resultados Experimentais e Numérico A considerando diferentes valores do módulo de elasticidade do GFRP para as vigas VG.

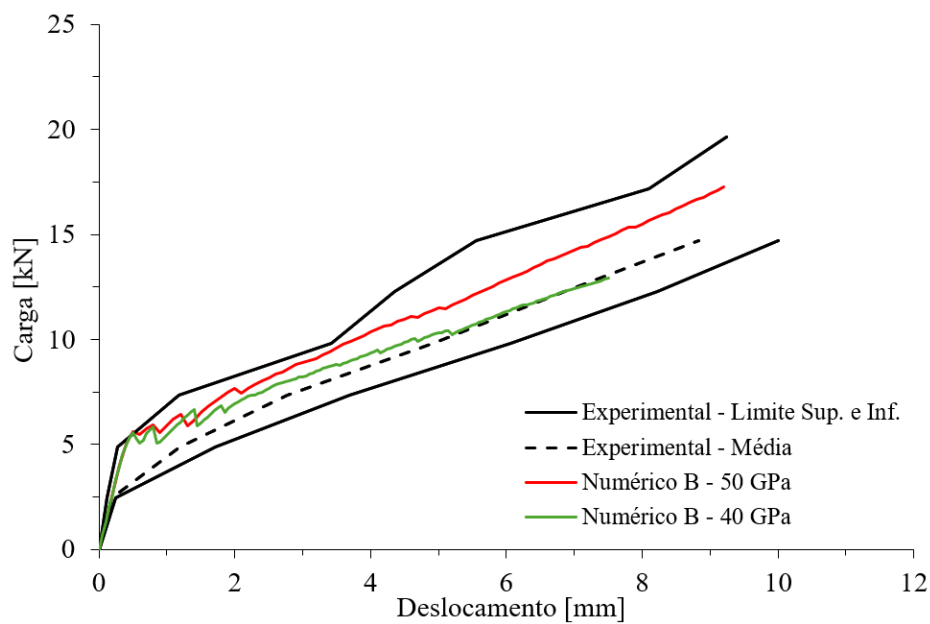


Figura B.2: Resultados Experimentais e Numérico B considerando diferentes valores do módulo de elasticidade do GFRP para as vigas VG.

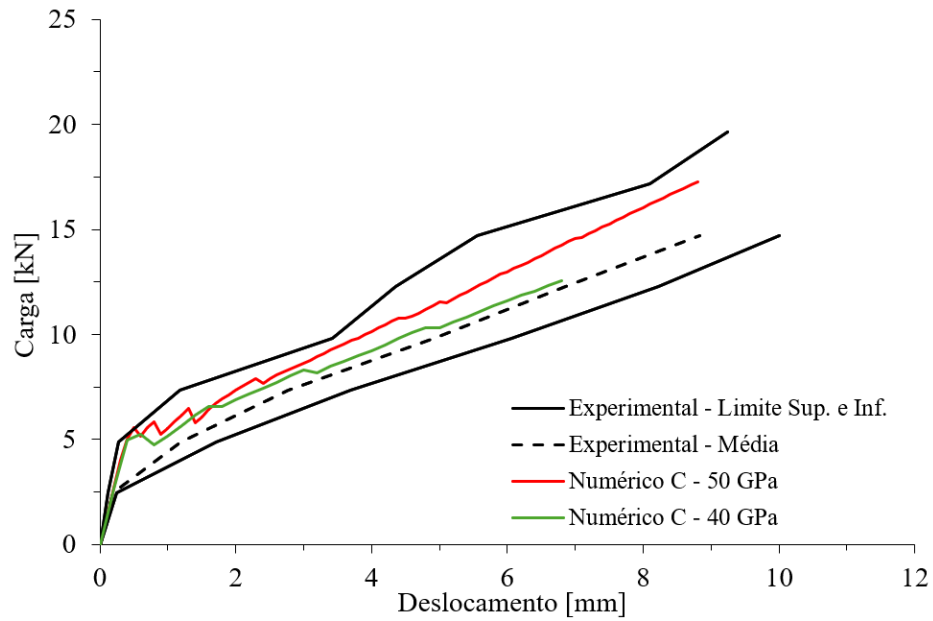


Figura B.3: Resultados Experimentais e Numérico C considerando diferentes valores do módulo de elasticidade do GFRP para as vigas VG.

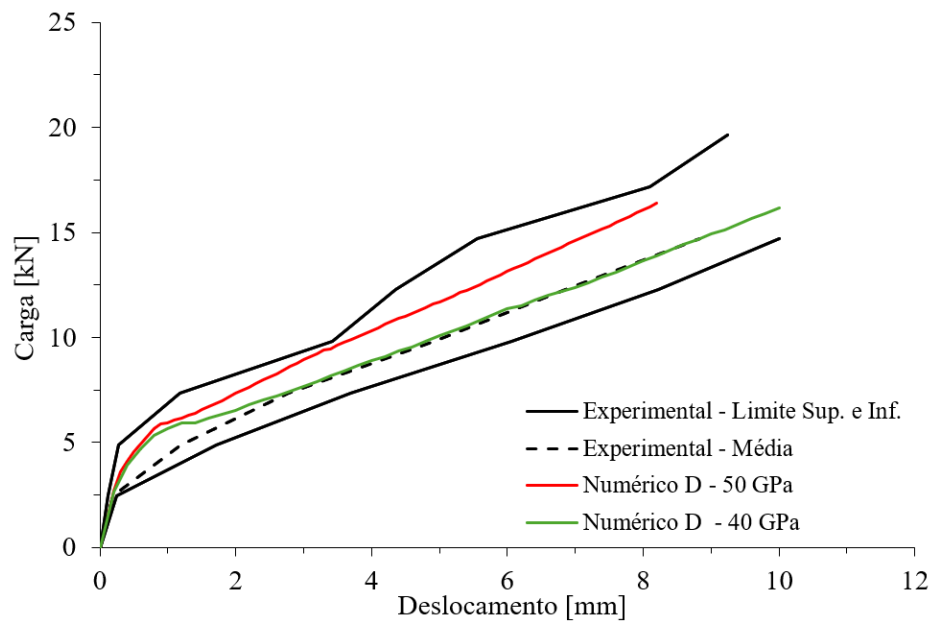


Figura B.4: Resultados Experimentais e Numérico D considerando diferentes valores do módulo de elasticidade do GFRP para as vigas VG.

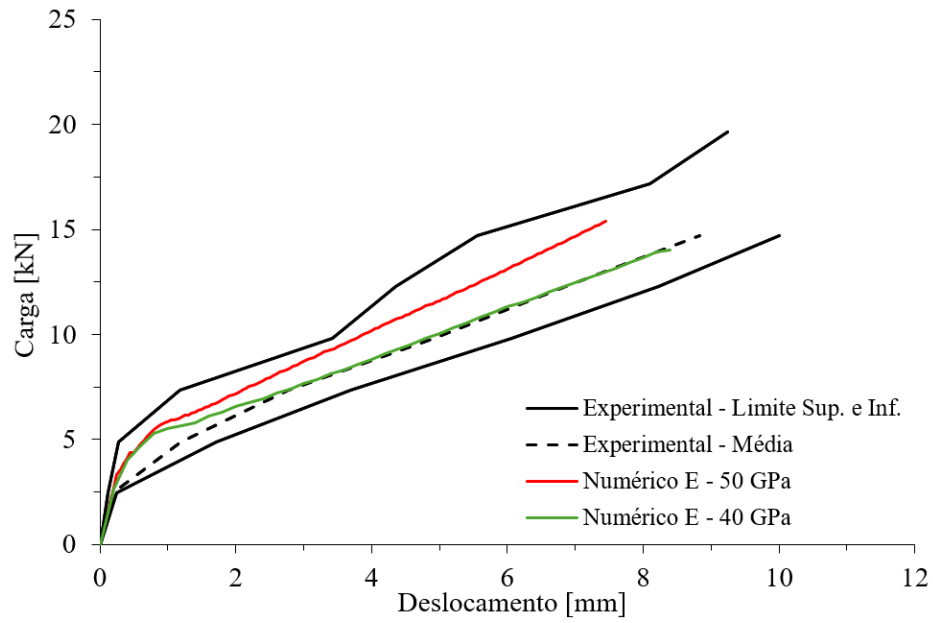


Figura B.5: Resultados Experimentais e Numérico E considerando diferentes valores do módulo de elasticidade do GFRP para as vigas VG.

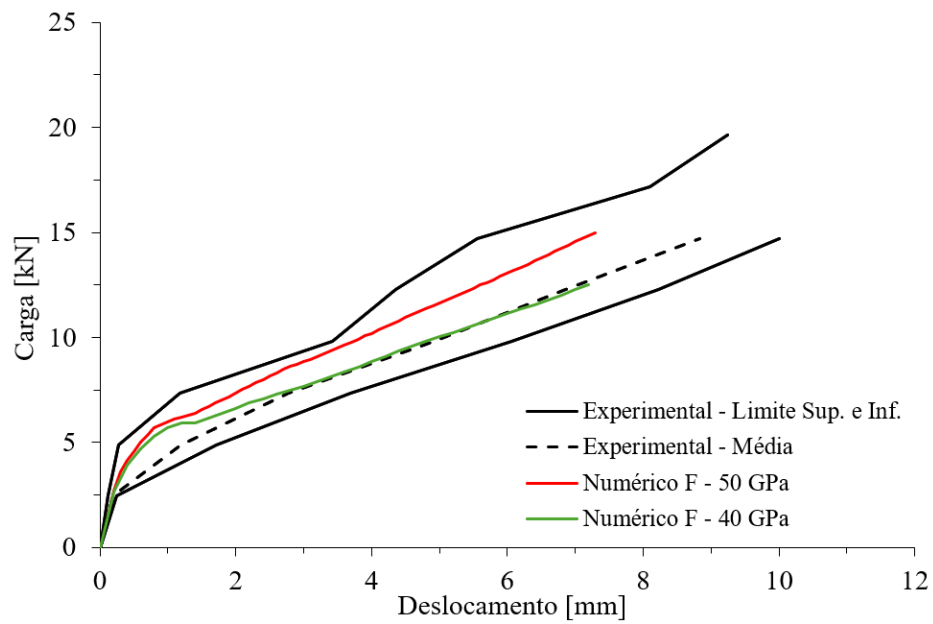


Figura B.6: Resultados Experimentais e Numérico F considerando diferentes valores do módulo de elasticidade do GFRP para as vigas VG.