

Maria de Lurdes da Costa e Sousa

INVÓLUCROS REFLECTIVOS E ORTOGONAIS

Universidade de Coimbra
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática

1996

*Dissertação apresentada à Faculdade de Ciências
e Tecnologia da Universidade de Coimbra, para
obtenção do grau de Doutor em Matemática, es-
pecialização em Matemática Pura
(Versão portuguesa)*

Índice

Prefácio	iii
0. Preliminares	1
I. O invólucro ortogonal	3
1. Ortogonalidade	4
2. Invólucros ortogonais e invólucros reflectivos	9
3. Classes firmes de morfismos	22
II. O operador de fecho ortogonal	27
4. Operadores de fecho	28
5. O operador de fecho ortogonal	32
6. Morfismos densos e morfismos de \mathcal{A}^\perp	37
7. Objectos fortemente fechados e invólucros ortogonais	41
8. O operador de fecho ortogonal versus reflectividade	46
9. Monomorfismos estáveis para somas amalgamadas	53
III. Espaços α-sóbrios	65
10. Os operadores de fecho ortogonais c_α em \mathcal{Top}_0	66
11. Espaços α -sóbrios	71
12. A cadeia das subcategorias $\mathcal{Sob}(\alpha)$	74

IV. Invólucros sólidos	81
13. Invólucro sólido	82
14. Invólucros ortogonais e invólucros sólidos	90
15. Invólucros sólidos e Princípio de Vopěnka	101
V. Multi-reflectividade e multicolimites	107
16. Multi-reflectividade	107
17. Multicompletude e limites conexos	116
18. Categorias multi-sólidas	126
V. Multi-reflectividade e multiortogonalidade	131
19. Multiortogonalidade	131
20. Invólucros multiortogonais e multi-reflectivos	144
21. Uma generalização do operador de fecho ortogonal	151
22. Densidade e multiortogonalidade	156
23. Fechamento e multi-reflectividade	162
Bibliografia	167
Índice de categorias	173

Prefácio

Um dos mais importantes e frutuosos conceitos em Teoria das Categorias é o de subcategoria reflectiva. Por um lado, toda a subcategoria plena de uma categoria \mathcal{X} que seja reflectiva partilha muitas das propriedades mais significativas de \mathcal{X} (tais como existência e construção de limites, existência de colimites, etc.), por outro lado, é conhecido um considerável número de boas condições suficientes para que haja reflectividade. Para categorias plenas \mathcal{A} de uma categoria \mathcal{X} que não são reflectivas interessa determinar uma subcategoria plena de \mathcal{X} que seja a menor de entre as que são reflectivas e contém \mathcal{A} , chamada invólucro reflectivo de \mathcal{A} . Este é o tema central da presente dissertação. Duas questões se levantam:

- (1) Quando é que \mathcal{A} tem um invólucro reflectivo?
- (2) Como pode ser construído o invólucro reflectivo de \mathcal{A} , se ele existir?

Para (2), um caminho possível é formar o invólucro para limites de \mathcal{A} , i.e., a menor subcategoria plena de \mathcal{X} fechada para limites e que contém \mathcal{A} . Se este invólucro é reflectivo, ele é um invólucro reflectivo de \mathcal{A} , mas a questão de determinar quando isto acontece tem-se revelado muito difícil (cf., por exemplo, [4], [22], [58], [73] e [77]). Portanto, nesta tese, optei por uma abordagem diferente baseada no conceito de ortogonalidade. Recordemos que um objecto A se diz ortogonal a um morfismo $f : X \rightarrow Y$ se a aplicação $\text{hom}(A, f) : \text{hom}(Y, A) \rightarrow \text{hom}(X, A)$ é uma bijecção. Para cada subcategoria plena \mathcal{A} de uma categoria \mathcal{X} , denotamos por \mathcal{A}^\perp a classe de todos os morfismos f em \mathcal{X} ortogonais a todos os objectos de \mathcal{A} . É fácil concluir que se \mathcal{A} é uma subcategoria reflectiva de \mathcal{X} , então \mathcal{A} pode ser reconstruída a partir de \mathcal{A}^\perp do seguinte modo: \mathcal{A} é constituída por

precisamente todos os objectos ortogonais a todos os morfismos em \mathcal{A}^\perp . Geralmente, para uma subcategoria plena \mathcal{A} , denotamos por $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ o invólucro ortogonal de \mathcal{A} , i.e., a subcategoria plena de todos os objectos ortogonais a todos os \mathcal{A}^\perp -morfismos. Analogamente ao que acontece para o fecho para limites, quando a subcategoria $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é reflectiva, então ela é o invólucro reflectivo de \mathcal{A} . Por conseguinte, o invólucro ortogonal é também um bom candidato a ser o invólucro reflectivo. Na verdade, muitos dos invólucros reflectivos de subcategorias não reflectivas “do dia-a-dia” coincidem com o fecho para limites e, conseqüentemente, coincidem também com os respectivos invólucros ortogonais (visto que toda a subcategoria plena reflectiva é ortogonal). Contudo, o invólucro ortogonal pode ser simultaneamente reflectivo e diferente do fecho para limites. Em [56], J. Rosický apresenta um exemplo de uma categoria completa e cocompleta (de facto, uma categoria monotopológica sobre \mathcal{Set}) que tem uma subcategoria plena fechada para limites que não é reflectiva e cujo invólucro ortogonal é reflectivo, logo o invólucro reflectivo. Por outro lado, é de salientar que para toda a categoria topológica com fibras pequenas sobre \mathcal{Set} , o invólucro reflectivo de uma subcategoria, caso exista, coincide com o invólucro ortogonal, mas não necessariamente com o fecho para limites (de acordo com 14.11 e 14.13). Portanto, o invólucro ortogonal pode constituir uma melhor abordagem do invólucro reflectivo do que o fecho para limites.

Assim, o conceito de ortogonalidade terá um lugar central nesta tese. A noção de ortogonalidade no sentido usado ao longo do presente estudo aparece já na literatura dos anos sessenta (cf. [52] e suas referências). Em 1972, D. Pumplün [52] observou que esta noção determina uma correspondência de Galois que induz um “operador de invólucro” que faz corresponder a cada subcategoria \mathcal{A} de uma categoria \mathcal{X} uma subcategoria - o invólucro ortogonal de \mathcal{A} - que é uma boa aproximação do invólucro (mono)reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{X} e que tem grande parte das propriedades do invólucro (mono)reflectivo, mesmo se este não existir. Este conceito de ortogonalidade foi clarificado por P. J. Freyd e G. M. Kelly ([22]) que apresentaram uma definição de ortogonalidade entre um morfismo e um objecto de uma dada categoria (como em 1.1 a seguir). Desde então até agora o estudo desta noção, bem como o da sua relação com o conceito de reflectividade, tem-se desenvolvido. Nomeadamente, o chamado “Problema da Subcategoria Ortogonal”, ou seja o problema de quando é que uma subcategoria ortogonal é reflectiva, tem merecido a atenção de vários matemáticos (cf. [22, 72, 79]). A nossa abordagem, em contraste com a de outros autores, parte de uma dada subcategoria plena ao invés de partir de uma dada classe de

morfismos.

Para além do “Problema do Invólucro Reflectivo”, investigamos também a relação deste com outros problemas tais como, por exemplo, a existência e caracterização do invólucro sólido de uma categoria concreta (Capítulo IV). Finalmente, a investigação feita sobre reflectividade e ortogonalidade conduzir-nos-á ao estudo de uma correspondente generalização sobre multi-reflectividade e multiortogonalidade (Capítulos V e VI).

Sumário

Apresentamos agora uma breve descrição do conteúdo desta dissertação.

O capítulo 0, “Preliminares”, dá conta dos conceitos básicos existentes na literatura que são usados ao longo da dissertação. Outros conceitos conhecidos, mas menos estandardizados, são lembrados mais tarde à medida que forem sendo precisos.

No Capítulo I, “O invólucro ortogonal”, começamos um estudo sistemático do invólucro reflectivo de uma subcategoria plena \mathcal{A} de uma categoria \mathcal{X} mediante o invólucro ortogonal $\mathcal{O}(\mathcal{A})$. Provamos, por exemplo, que numa categoria com colimites conexos as duas noções, invólucro ortogonal e invólucro reflectivo, coincidem se e só se a classe de morfismos \mathcal{A}^\perp satisfaz a condição de conjunto solução (Teorema 2.10). Mostramos ainda que é possível estudar o invólucro ortogonal de \mathcal{A} em qualquer subcategoria plena e reflectiva de \mathcal{X} que contenha \mathcal{A} , em vez de na categoria \mathcal{X} dada (Proposição 2.12). Este facto será usado várias vezes ao longo desta dissertação como um meio de obter descrições concretas do invólucro ortogonal. Por último, fazemos algumas considerações sobre classes firmes de morfismos, um conceito introduzido por G. Brümmer e E. Giuli ([12]). Uma classe \mathcal{E} de morfismos diz-se firme sempre que existe alguma subcategoria plena e reflectiva tal que \mathcal{E} é precisamente a classe de todos os morfismos que um reflector R transforma em isomorfismos, i.e.,

$\mathcal{E} = \{f \in Mor(\mathcal{X}) \mid Rf \text{ é um isomorfismo}\}$. O estudo do invólucro ortogonal desenvolvido nas anteriores secções deste capítulo é usado para caracterizar classes firmes de morfismos (Teorema 3.5).

O Segundo Capítulo é devotado ao estudo do operador de fecho ortogonal introduzido pela autora em [67] e será a principal ferramenta para a investigação dos invólucros ortogonais feita neste capítulo. O objectivo da definição do operador de fecho ortogonal é

obter uma caracterização do invólucro ortogonal como sendo precisamente a subcategoria plena de todos os objectos fortemente fechados (Teorema 7.5) e uma caracterização de \mathcal{A}^\perp como sendo uma classe de morfismos densos (Teorema 6.4). Aqui pressupomos que é dada uma classe “adequada” \mathcal{M} de monomorfismos como um parâmetro adicional a \mathcal{X} e \mathcal{A} . O operador de fecho ortogonal faz corresponder a cada \mathcal{M} -subobjecto $m : X \rightarrow Y$ a intersecção de todos os subobjectos m_g obtidos do seguinte modo: dado um morfismo arbitrário $g : X \rightarrow A$ com $A \in \mathcal{A}$, formamos a soma amalgamada (g', \bar{m}) do par (m, g) e denotamos por m_g a pré-imagem da \mathcal{M} -parte de \bar{m} segundo g' (Definição 5.1). Para além do já mencionado papel deste operador de fecho, nomeadamente, na caracterização do invólucro ortogonal via fechamento (e na caracterização da classe \mathcal{A}^\perp via densidade), ele é ainda usado para obter condições suficientes para que o invólucro ortogonal seja reflectivo (Teorema 8.1). Estes resultados são particularizados em algumas categorias básicas \mathcal{X} , e.g., a categoria dos espaços topológicos T_0 (Exemplos 8.8). Dada uma classe \mathcal{M} de monomorfismos numa categoria \mathcal{X} , a maior subclasse de \mathcal{M} estável para somas amalgamadas será representada por $PS(\mathcal{M})$. Para uma classe “adequada” \mathcal{M} , a subclasse $PS(\mathcal{M})$ desempenha um papel importante na caracterização do invólucro ortogonal e na determinação de condições suficientes para que ele seja reflectivo, por intermédio do operador de fecho ortogonal. Este facto motivou a Secção 9 que se dedica ao estudo da classe $PS(\mathcal{M})$ em categorias “do dia-a-dia”. Em particular, caracterizamos $PS(\mathcal{M})$ para a classe \mathcal{M} de todas as imersões em algumas subcategorias epi-reflectivas da categoria Top dos espaços topológicos e funções contínuas (Exemplos 9.5 e Proposição 9.9). Ao longo do capítulo, estabelecemos algumas relações entre o operador de fecho ortogonal e o já amplamente investigado operador de fecho regular (cf. [60], [18, 19, 20], [21] e suas referências), é o caso em 5.8, 7.8, 8.9, 9.7 e 9.8.

O Capítulo III é dedicado à generalização do conceito de espaço sóbrio para espaços α -sóbrios, onde α é um ordinal, apresentada pela autora em [68]. Recordamos que os espaços sóbrios são importantes na topologia “livre de pontos”, porque eles são precisamente os espaços topológicos que são caracterizados pelo reticulado local dos conjuntos abertos. Fazemos uso dos principais resultados do Capítulo II para provar que o “reticulado” das subcategorias epi-reflectivas da categoria Top_0 dos espaços topológicos T_0 e aplicações contínuas contém uma classe própria bem ordenada, formada pelas categorias dos espaços α -sóbrios, onde α é um ordinal maior do que 1. Cada categoria desta classe é o invólucro

reflectivo em \mathcal{Top}_0 do ordinal α equipado com a topologia de Alexandrov.

No Capítulo IV, “Invólucros Sólidos”, que é essencialmente baseado em [66], estudamos condições sob as quais uma dada categoria concreta tem um invólucro sólido. Há uma ligação estreita entre invólucros sólidos e invólucros reflectivos porque uma categoria concreta é sólida se e só se é reflectiva no seu complemento de MacNeille, ou equivalentemente, se e só se é uma subcategoria plena e reflectiva de alguma categoria topológica (cf. [37] and [71]). O estudo de invólucros sólidos aqui desenvolvido continua a investigação encetada por J. Rosický em [56, 57], sendo que a nossa abordagem é, contudo, completamente diferente. J. Rosický descobriu uma categoria concreta sobre \mathcal{Set} que não tem invólucro sólido, apesar de ter uma extensão sólida finalmente densa. Trata-se de uma categoria muito interessante, cujas particularidades se revelam úteis em vários lugares da primeira parte desta tese. No Teorema 15.2, que foi inspirado por resultados de J. Adámek, J. Rosický e V. Trnková ([5], [7], [57]) sobre o Princípio de Vopěnka, estabelecemos que a existência de invólucros sólidos para todas as categorias concretas sobre \mathcal{Set} com uma subcategoria pequena finalmente densa é equivalente ao Princípio Fraco de Vopěnka. Isto melhora o seguinte resultado devido a J. Rosický [57]: Assumindo o axioma (M) da não existência de uma classe própria de cardinais mensuráveis, existe uma categoria concreta sobre \mathcal{Set} com uma subcategoria pequena finalmente densa que não tem invólucro sólido ((M) implica a negação do Princípio Fraco de Vopěnka ([7])).

Há subcategorias importantes em vários campos da Matemática cujo comportamento se assemelha ao das reflectivas, embora não o sendo; é o caso, por exemplo, da subcategoria plena dos corpos na categoria dos anéis comutativos com identidade. Tais exemplos levaram J. Kaput [44] a introduzir a noção de subcategorias localmente reflectivas. Este foi o ponto de partida para várias generalizações (e.g. [11], [17] and [74]) sob diferentes nomes. Aqui estudamos uma dessas noções, a de multi-reflectividade, que foi introduzida por R. Börger e W. Tholen em [11] e tem sido investigada por vários autores (e.g., [17, 74, 10, 61, 8]). Em [17] Y. Diers apresenta um estudo sistemático das subcategorias multi-reflectivas e fornece um grande número de exemplos. Uma multi-reflexão de um objecto X da categoria \mathcal{X} na subcategoria plena \mathcal{A} é uma fonte de morfismos com domínio X e codomínio em \mathcal{A} universal no seguinte sentido: cada morfismo com domínio X e codomínio em \mathcal{A} se factoriza através de um único membro da fonte e, além disso, a factorização é única. Uma subcategoria \mathcal{A} diz-se multi-reflectiva se todo o ob-

jecto de \mathcal{X} tem uma multi-reflexão em \mathcal{A} . (Analogamente, se pode generalizar a noção de colimite para multicolimite, a de categoria sólida para categoria multi-sólida, etc.) Dedicamos os Capítulos V e VI ao estudo do invólucro multi-reflectivo de uma dada subcategoria plena \mathcal{A} , i.e., a menor subcategoria plena multi-reflectiva que contém \mathcal{A} . Estudamos também a conexão entre multi-reflectividade e propriedades tais como multicocompletude e multi-solidez. Na Secção 17 generalizamos os resultados de J. Adámek, H. Herrlich e J. Reiterman [3] que estabelecem que a cocompletude “quase” implica completude à questão de quando é que a multicocompletude implica a existência de limites conexos (Proposição 17.3 e Teorema 17.6) e vice-versa (Proposição 17.4). O Teorema 18.4 generaliza um resultado sobre solidez de W. Tholen [71] estabelecendo que uma categoria concreta e bem-copotenciada (\mathcal{A}, U) sobre uma categoria-base multicocompleta é multi-sólida se e só se \mathcal{A} é multicocompleta e U é um multiadjunto direito. Este resultado melhora o Teorema 6.3 de [74] e é o principal resultado de [69].

O conceito de um objecto ortogonal a um morfismo também se generaliza naturalmente ao de um objecto A multiortogonal a uma fonte com domínio X : tal generalização significa que cada morfismo de X para A se factoriza de forma única através de um único membro da fonte. Uma subcategoria plena \mathcal{A} diz-se multiortogonal se consistir precisamente em todos os objectos multiortogonais a uma dada colecção de fontes. No Capítulo VII, “Multi-reflectividade e multiortogonalidade”, estudamos uma generalização dos resultados sobre reflectividade e ortogonalidade dos Capítulos I e II no cenário das multi-reflectividade e multiortogonalidade. A noção de multiortogonalidade, introduzida, tanto quanto sei, por R. Börger [10], tem um papel central neste capítulo. Relacionamos multiortogonalidade com ortogonalidade via quasicategorias de completamento para produtos grandes e usamos esta relação para obtermos o Teorema 20.2 e a Proposição 20.4 que são uma generalização de, respectivamente, 2.10 e 2.12.2. Finalmente, generalizamos a definição de operador de fecho ortogonal de uma maneira que se revela mais apropriada para o estudo dos invólucros multi-reflectivos. Isto permite-nos caracterizar as fontes multiortogonais a uma dada subcategoria plena em termos de densidade (Proposição 22.8) e dar condições suficientes para que o invólucro multiortogonal seja multi-reflectivo e, além disso, caracterizá-lo em termos de fechamento (Teorema 23.4).

Observamos que existe uma diferença do ponto de vista da Teoria de Conjuntos entre as noções “multi”consideradas por Y. Diers [17] e outros autores (veja-se, por exemplo, [6], [8] e [61]) e as que nós consideramos: As multi-reflexões e os multicolimites

de Y . Diers são indexados somente por conjuntos, enquanto que nós permitimos que eles sejam indexados por classes próprias. Os nossos resultados mais importantes permanecem válidos se obrigarmos a classe indexante de cada noção “multi” a ser precisamente um conjunto. A ideia de considerar classes em vez de conjuntos não é nova. Por exemplo, em [74], W. Tholen estudou as duas noções de multi-reflectividade, para conjuntos e classes em paralelo com outras generalizações de reflectividade. Mas o que parece ser clarificado nos últimos dois capítulos desta dissertação é que, ao contrário do que poderia parecer numa primeira impressão, em geral, não perdemos propriedades quando consideramos classes em vez de conjuntos, mesmo se por vezes a técnica usada nas demonstrações para o caso em que consideramos apenas conjuntos não funciona para o caso em que admitimos classes próprias (compare-se, por exemplo, a demonstração do Teorema 6.3 em [74] com o nosso Teorema 18.4). Com efeito, mais importante do que obter um resultado mais geral ao aceitar classes nas noções “multi”, é o facto de que estas definições “grandes” e as técnicas usadas nas demonstrações sublinham o comportamento “local” destas noções e o facto de que apenas o “tamanho local” desempenha realmente um papel.

Agradecimentos

Quero expressar a minha profunda gratidão aos Professores Manuela Sobral e Jiří Adámek, que me orientaram na elaboração desta dissertação, pelos seus valiosos conselhos e críticas e o muito que com eles aprendi.

Um agradecimento muito especial à Professora Manuela Sobral, que me iniciou no estudo de Teoria de Categorias, pelo apoio encorajador ao longo do percurso que me levou ao presente trabalho.

Gostaria de realçar a vitalidade e o entusiasmo do “grupo de Teoria de Categorias” que foram um constante estímulo para o meu trabalho. O meu reconhecimento vai também para o Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra pelo apoio sempre presente.

Manifesto ainda o meu agradecimento pelo apoio financeiro do projecto TEMPUS JEP 2692, do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra, do Instituto Politécnico de Viseu e da Escola Superior de Tecnologia nele integrada.

Gostaria de agradecer à Universidade Técnica de Praga e ao Professor Jiří Adámek pelas minhas estadias naquela universidade. Elas constituíram marcos importantes no

x

desenvolvimento do trabalho que deu origem à presente dissertação.

Por último, quero aqui deixar expresso o meu agradecimento a todos os que, de algum modo, me ajudaram na realização deste trabalho.

Preliminares

Ao longo de todo o texto usaremos as letras $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots, \mathcal{X}, \dots$ para denotar as categorias. Uma categoria é entendida no sentido de [2]; em particular, para cada dois objectos X e Y de uma categoria \mathcal{X} , a família $\mathcal{X}(X, Y)$ de todos os morfismos de X para Y é suposta ser um conjunto. Caso contrário, falaremos de quase-categorias, mesmo quando a colecção de todos os objectos é um conjunto.

Todas as subcategorias serão supostas plenas e fechadas para isomorfismos, a menos que se especifique o contrário.

Uma referência adequada para o ambiente básico em Teoria de Categorias é [2], cuja terminologia usamos, em geral.

No seguimento, recordamos algumas noções que serão usadas ao longo do texto e que não se encontram em [2], pelo menos com os detalhes de que precisamos.

Dada uma subcategoria \mathcal{A} de uma categoria \mathcal{X} , um morfismo $f : X \rightarrow Y$ de \mathcal{X} é *\mathcal{A} -cancelável* se, para cada par de morfismos $g, h : Y \rightarrow A$ com codomínio em \mathcal{A} , a igualdade $g \cdot f = h \cdot f$ implica que $g = h$.

Uma classe \mathcal{E} de morfismos de \mathcal{X} é *cancelável à direita* se, para quaisquer morfismos f e g , $f \in \mathcal{E}$ sempre que $f \cdot g \in \mathcal{E}$ e $g \in \mathcal{E}$.

Dualmente, definimos classes *canceláveis à esquerda*.

Uma categoria \mathcal{X} diz-se *conexa* se for não vazia e para cada par X, Y de objectos de \mathcal{X} existir uma família finita $X = X_0, X_1, \dots, X_n = Y$ de objectos de \mathcal{X} tal que $\mathcal{X}(X_{i-1}, X_i) \cup \mathcal{X}(X_i, X_{i-1}) \neq \emptyset$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Assim, cada categoria é o coproduto

de categorias conexas a que chamamos *componentes conexas*.

Um *colimite conexo* é o colimite de um diagrama conexo, ou seja, de um diagrama $D : I \rightarrow \mathcal{X}$, onde I é uma categoria conexa. Dualmente, definimos *limite conexo*.

Seja $(X_i)_I$ uma família de objects indexada por um conjunto numa categoria \mathcal{X} . A família $(X_i)_I$ diz-se um *conjunto terminal* em \mathcal{X} se para cada objecto Y de \mathcal{X} existir um único $i \in I$ tal que $\mathcal{X}(Y, X_i) \neq \emptyset$ e, além disso, existir um único morfismo de Y para X_i .

A família $(X_i)_I$ diz-se um *conjunto fracamente terminal* se para cada objecto Y de \mathcal{X} existir algum $i \in I$ tal que $\mathcal{X}(Y, X_i) \neq \emptyset$.

Se I é singular então o único objecto da família diz-se *objecto terminal* ou *objecto fracamente terminal*, respectivamente.

As noções duais são *conjunto inicial*, *conjunto fracamente inicial*, *objecto inicial* e *objecto fracamente inicial*.

Capítulo I

O invólucro ortogonal

Pretendemos estudar o invólucro reflectivo de uma subcategoria \mathcal{A} de uma dada categoria \mathcal{X} . (Recordamos que todas as subcategorias são consideradas plenas e fechadas para isomorfismos.) Ou seja, estamos interessados em discutir a existência e caracterizar os objectos da menor subcategoria reflectiva $\overline{\mathcal{A}}$ de \mathcal{X} que contém \mathcal{A} . Uma abordagem possível é começar com o fecho para limites de \mathcal{A} (que está sempre contido em $\overline{\mathcal{A}}$ podendo eventualmente coincidir com \mathcal{A}). Entendemos mais útil trabalhar com o invólucro ortogonal de \mathcal{A} , i.e., a subcategoria $(\mathcal{A}^\perp)_\perp$ dos objectos ortogonais a todos os morfismos que são ortogonais a todos os objectos de \mathcal{A} . Esta abordagem revela-se, em certa medida, melhor do que a do fecho para limites: Por exemplo, para uma categoria topológica sobre *Set* com fibras pequenas, o invólucro reflectivo duma subcategoria, caso exista, coincide com o invólucro ortogonal, mas poderá não coincidir com o fecho para limites (como concluiremos em 14.11 e 14.13). É claro que quando o invólucro ortogonal é reflectivo, então é o pretendido invólucro reflectivo.

Na primeira secção deste capítulo apresentamos definições e propriedades básicas sobre ortogonalidade, ilustradas com vários exemplos.

Na Secção 2, caracterizamos as subcategorias de categorias com colimites conexos para as quais o invólucro ortogonal é reflectivo, portanto o invólucro reflectivo. Provamos também que se \mathcal{A} é uma subcategoria de \mathcal{B} e de \mathcal{X} , e \mathcal{B} é uma subcategoria reflectiva de \mathcal{X} , então o invólucro ortogonal de \mathcal{A} em \mathcal{B} coincide com o invólucro ortogonal de \mathcal{A} em \mathcal{X} . Isto permite-nos obter resultados importantes, tais como, por exemplo, que se \mathcal{A} é uma subcategoria de uma categoria \mathcal{X} que é $(\mathcal{E}, \mathbf{M})$ e tem colimites conexos e tal que o

invólucro \mathcal{E} -reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{X} é bem-copotenciado, então o invólucro ortogonal de \mathcal{A} em \mathcal{X} é um invólucro reflectivo.

A noção de firmeza para classes de morfismos foi introduzida em [13] e [12] como uma abordagem a um conceito categorial de completamento de objectos. Na última secção deste capítulo relacionamos esta noção com a de ortogonalidade e caracterizamos classes firmes em categorias com colimites conexos.

Ao longo de todo o texto, trabalhamos numa dada categoria designada por \mathcal{X} .

1 Ortogonalidade

Definições 1.1 Dados um morfismo $f : X \rightarrow Y$ e um objecto Z em \mathcal{X} dizemos que eles são *ortogonais* um ao outro, e escrevemos $f \perp A$, se para cada morfismo $g : X \rightarrow Z$ existe um único morfismo $g' : Y \rightarrow Z$ tal que o triângulo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow g & \nearrow g' & \\ Z & & \end{array}$$

é comutativo.

Para cada subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} , designamos por \mathcal{A}^\perp a classe de todos os morfismos de \mathcal{X} que são ortogonais a \mathcal{A} , isto é, todos os morfismos f tais que $f \perp A$ para todo $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$.

Dada uma classe \mathcal{E} de morfismos, \mathcal{E}_\perp denota a subcategoria de todos os objectos que são ortogonais a \mathcal{E} , i.e., todos os objectos tais que $f \perp X$ para todo $f \in \mathcal{E}$.

Uma subcategoria \mathcal{B} de \mathcal{X} diz-se *ortogonal* se $\mathcal{B} = \mathcal{E}_\perp$ para alguma classe \mathcal{E} de morfismos.

Escreveremos $\mathcal{A}^{\perp_{\mathcal{X}}}$ e $\mathcal{E}_{\perp_{\mathcal{X}}}$ todas as vezes em que haja possibilidade de ambiguidade sobre a categoria \mathcal{X} em questão.

Seja \mathcal{A} uma subcategoria da categoria \mathcal{X} . Uma reflexão de um objecto X de \mathcal{X} em \mathcal{A} , também chamada \mathcal{A} -reflexão de X , é um morfismo $X \xrightarrow{r} A$ com codomínio em \mathcal{A} e

tal que

- (o) todo o morfismo com domínio \mathcal{X} e codomínio em \mathcal{A} é factorizado de maneira única por r .

A condição (o) significa que o morfismo r é ortogonal a \mathcal{A} . Portanto, uma \mathcal{A} -reflexão é um morfismo de \mathcal{A}^\perp com codomínio em \mathcal{A} .

As Proposições 1.2 e 1.4 seguintes dão conta de algumas propriedades sobre ortogonalidade que podem ser encontradas em [22], [72] e [58].

Proposição 1.2

1. O par de aplicações $((-)_\perp, (-)^\perp)$ estabelece uma conexão (contravariante) de Galois entre o aglomerado de todas as classes de morfismos de \mathcal{X} e o aglomerado de todas as subcategorias de \mathcal{X} , ambos ordenados por inclusão. Isto é, se \mathcal{A} e \mathcal{B} são subcategorias de \mathcal{X} e \mathcal{E} e \mathcal{F} são classes de morfismos em \mathcal{X} , então:

- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \implies \mathcal{A}^\perp \supseteq \mathcal{B}^\perp$
- $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F} \implies \mathcal{E}_\perp \supseteq \mathcal{F}_\perp$
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}_\perp \iff \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}^\perp$

2. Para toda a subcategoria \mathcal{A} e para as asserções seguintes

- (a) \mathcal{A} é reflectiva,
 (b) \mathcal{A} é ortogonal,
 (c) \mathcal{A} é fechada para limites,

verifica-se que (a) \implies (b) \implies (c).

3. Para toda a família $(\mathcal{E}_i)_I$ de classes de morfismos,

$$\bigcap_{i \in I} (\mathcal{E}_i)_\perp = (\bigcup_{i \in I} \mathcal{E}_i)_\perp. \quad \square$$

Por 1.2.1, concluímos que, dada uma subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} , a subcategoria $(\mathcal{A}^\perp)_\perp$ é a menor subcategoria ortogonal de \mathcal{X} que contém \mathcal{A} .

Definição 1.3 Para toda a subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} , a subcategoria $(\mathcal{A}^\perp)_\perp$ diz-se o *invólucro ortogonal* de \mathcal{A} em \mathcal{X} e denotá-la-emos por $\mathcal{O}(\mathcal{A})$.

Como é evidente a à definição da classe \mathcal{A}^\perp obriga todos os seus morfismos a serem \mathcal{A} -canceláveis. Na proposição seguinte apresentamos uma lista de algumas outras propriedades úteis de \mathcal{A}^\perp .

Proposição 1.4 *Para cada subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} , verificam-se as seguintes condições:*

1. \mathcal{A}^\perp contém todos os isomorfismos e é fechada para a composição
2. Se $f \cdot g \in \mathcal{A}^\perp$ e g é \mathcal{A} -cancelável, então $f \in \mathcal{A}^\perp$. Por conseguinte, \mathcal{A}^\perp é cancelável à direita.
3. \mathcal{A}^\perp é cancelável à esquerda.
4. \mathcal{A}^\perp é estável para somas amalgamadas, i.e., se o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet \\ \downarrow g & & \downarrow \bar{g} \\ \bullet & \xrightarrow{\bar{f}} & \bullet \end{array}$$

é uma soma amalgamada e $f \in \mathcal{A}^\perp$, então $\bar{f} \in \mathcal{A}^\perp$.

5. \mathcal{A}^\perp é estável para somas amalgamadas múltiplas, i.e., se os diagramas

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{e_i} & X_i \\ \downarrow e & \nearrow d_i & \\ E & & \end{array}, \quad i \in I,$$

representam uma soma amalgamada múltipla e $e_i \in \mathcal{A}^\perp$ para todo o $i \in I$, então $e \in \mathcal{A}^\perp$. □

Exemplos 1.5 Nos exemplos seguintes, para cada subcategoria \mathcal{A} de uma categoria \mathcal{X} , descrevemos a classe \mathcal{A}^\perp e a subcategoria $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ correspondentes.

1. (cf. [13] e [34]) Seja $\mathcal{T}op_0$ a categoria dos espaços topológicos T_0 e aplicações contínuas.

- Um morfismo $f : X \rightarrow Y$ em \mathcal{Top}_0 diz-se *b-denso* se cada $y \in Y$ obedece à condição
 - (b) para cada conjunto aberto H em Y , se $y \in H$, então $\overline{\{y\}} \cap H \cap X \neq \emptyset$,
 ou, equivalentemente, a condição
 - (b') para todos os conjuntos abertos H e H' em Y tais que $H \cap X = H' \cap X$, temos que $y \in H$ se e só se $y \in H'$.
- Um espaço topológico X diz-se *sóbrio* se todo o subconjunto não vazio fechado irreduzível de X (i.e., um subconjunto fechado que não pode ser expresso como a reunião de dois subconjuntos fechados próprios) é o fecho de um único ponto.

Seja \mathcal{A} a subcategoria de \mathcal{Top}_0 cujos objectos são os espaços de Sierpiński. Então o invólucro ortogonal de \mathcal{A} é a subcategoria \mathcal{Sob} de todos os espaços sóbrios, já que \mathcal{Sob} é simultaneamente o fecho para limites e o invólucro reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{Top}_0 (veja-se [63] e [50]). Por outro lado, \mathcal{A}^\perp é a classe de todas as imersões *b-densas*. Na verdade, \mathcal{Top}_0 é o invólucro epi-reflectivo do espaço de Sierpiński $\mathbf{S} = (\{0, 1\}, \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\})$ em \mathcal{Top} e \mathcal{Top} é uma categoria (*Epi, MonoFonteInicial*); logo, atendendo a 2.17.3 (à frente), segue-se que todo o morfismo de \mathcal{Top}_0 ortogonal a \mathbf{S} tem de ser uma imersão e um epimorfismo em \mathcal{Top}_0 . Então, como os epimorfismos de \mathcal{Top}_0 são exactamente os morfismos *b-densos*, conforme provado por S. Baron em [9], todos os morfismos de \mathcal{A}^\perp são imersões *b-densas*. Reciprocamente, seja $X \xrightarrow{m} Y$ uma imersão *b-densa* em \mathcal{Top}_0 e seja $X \xrightarrow{f} \mathbf{S}$ uma aplicação contínua. Escolhamos em Y um subconjunto aberto H tal que $X \cap H = f^{-1}(\{1\})$. Então a aplicação contínua $\bar{f} : Y \rightarrow \mathbf{S}$, definida por

$$\bar{f}(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y \in H \\ 0 & \text{if } y \notin H \end{cases}$$

é tal que $\bar{f} \cdot m = f$. Ademais, como cada $y \in Y$ satisfaz a condição (b'), segue-se que \bar{f} é única.

Os seguintes exemplos 2. e 3. tiram-se imediatamente de 3.8 em [12].

2. Seja \mathcal{Tych} a categoria dos espaços de Tychonoff e aplicações contínuas e seja \mathcal{A} a subcategoria de \mathcal{Tych} cujos objectos são todos os espaços homeomorfos ao intervalo

unitário fechado $\mathbf{I} = [0, 1]$ com a topologia euclidiana. Uma imersão $X \xrightarrow{m} Y$ diz-se uma C^* -imersão se toda a função contínua $X \xrightarrow{f} \mathbf{I}$ pode ser estendida a uma função contínua $Y \xrightarrow{\bar{f}} \mathbf{I}$. Recordemos que dois subconjuntos Z e W de um espaço topológico X são *completamente separados* se existir uma função contínua $g : X \rightarrow \mathbf{I}$ tal que $g(Z) = 0$ e $g(W) = 1$. Recordemos também que uma imersão $X \xrightarrow{m} Y$ é uma C^* -imersão se e só se quaisquer dois conjuntos completamente separados em X são completamente separados em Y (cf. [78]).

Neste caso, \mathcal{A}^\perp é a classe de todas as C^* -imersões densas e $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é a subcategoria \mathcal{HComp} dos espaços compactos de Hausdorff.

3. Para $\mathcal{X} = \mathcal{Tych}$ e \mathcal{A} a subcategoria de todos os espaços homeomorfos à linha real \mathbf{R} , temos que \mathcal{A}^\perp é constituída por todas as C -imersões densas (i.e., imersões densas que estendem todas as funções contínuas com codomínio \mathbf{R}) e $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é a subcategoria \mathcal{RComp} de todos os espaços real-compactos.
4. Seja \mathcal{HUnif} a categoria dos espaços uniformes de Hausdorff e das funções uniformemente contínuas e seja \mathcal{A} a subcategoria dos espaços uniformes, de Hausdorff e completos. Então \mathcal{A} é ortogonal, visto ser reflectiva; por outro lado, como \mathcal{HUnif} é o invólucro epi-reflectivo de \mathcal{A} , o resultado 2.17.3 (à frente) permite-nos concluir que todos os morfismos em \mathcal{A}^\perp são simultaneamente epimorfismos e imersões. Consequentemente, como em \mathcal{HUnif} os epimorfismos são justamente as funções uniformemente contínuas densas (veja-se [51] ou [34]) e toda a imersão estende toda a função uniformemente contínua com codomínio num espaço uniforme, de Hausdorff e completo (veja-se, por exemplo, [78]), segue-se que a classe \mathcal{A}^\perp é precisamente a classe de todas as imersões densas.
5. Seja \mathcal{X} a categoria \mathcal{Met} de todos os espaços métricos e aplicações não-expansivas. Seja \mathcal{A} a subcategoria cujos objectos são os espaços métricos completos. Então, usando um argumento idêntico ao usado no exemplo 4., concluímos que \mathcal{A}^\perp consiste em todas as imersões densas e $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é exactamente \mathcal{A} (veja-se também [34]).
6. Similarmente, se considerarmos a categoria \mathcal{Norm} dos espaços normados não vazios e aplicações não-expansivas, e a sua subcategoria \mathcal{Ban} dos espaços de Banach, então temos que \mathcal{Ban}^\perp é a classe de todas as imersões densas e $\mathcal{O}(\mathcal{Ban}) = \mathcal{Ban}$.

7. Seja \mathcal{X} uma subcategoria de \mathcal{Top} e seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{X} que contém o espaço indiscreto com dois pontos $\{0, 1\}$. Além disso, suponhamos que \mathcal{A} é inicialmente densa em \mathcal{X} , ou seja, para cada espaço X em \mathcal{X} existe uma fonte $(X \xrightarrow{f_i} A_i)_I$ com codomínio em \mathcal{A} que é inicial, i.e., para todo o espaço Y em \mathcal{X} uma função $Y \xrightarrow{g} X$ é contínua se e só se todas as funções $f_i \cdot g$ são contínuas. Vamos mostrar que \mathcal{A}^\perp contém só isomorfismos e, conseqüentemente, $\mathcal{O}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$. De facto, seja $X \xrightarrow{f} Y$ um morfismo pertencente a \mathcal{A}^\perp . Então f é uma bijecção: um-a um porque toda a aplicação g de X para $\{0, 1\}$ é factorizada por meio de f , e sobrejectiva porque essa factorização é única para cada g . Por outro lado, o facto de \mathcal{A} ser inicialmente densa em \mathcal{X} implica que o morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ seja inicial. Com efeito, seja Z um objecto de \mathcal{X} e seja $Z \xrightarrow{g} X$ uma aplicação entre os conjuntos subjacentes a Z e X tal que $f \cdot g$ é contínua. Seja $(X \xrightarrow{f_i} A_i)_I$ uma fonte inicial com codomínio em \mathcal{A} e, para cada $i \in I$, consideremos um morfismo $Y \xrightarrow{\bar{f}_i} A_i$ tal que $\bar{f}_i \cdot f = f_i$. Então $f_i \cdot g = \bar{f}_i \cdot f \cdot g$ é contínua para todo o $i \in I$ e, portanto, g é contínua. Assim, como toda a bijecção inicial é um isomorfismo, concluímos que todo o morfismo em \mathcal{A}^\perp é um isomorfismo.

Damos a seguir dois exemplos onde as categorias \mathcal{X} e \mathcal{A} satisfazem estas condições:

- (a) \mathcal{X} é a categoria *FinGen* dos espaços topológicos finitamente gerados e aplicações contínuas e \mathcal{A} é a subcategoria dos espaços topológicos finitos.
 - (b) \mathcal{X} é a categoria *CompGen* dos espaços topológicos compactamente gerados e aplicações contínuas e \mathcal{A} é a subcategoria dos espaços topológicos compactos.
8. Seja \mathcal{TfAb} a categoria dos grupos sem torsão e homomorfismos de grupos.

Um morfismo $f : A \rightarrow B$ em \mathcal{TfAb} diz-se *T-denso* se o grupo quociente $B/f(A)$ é um grupo de torsão. Seja \mathcal{A} a subcategoria de \mathcal{TfAb} cujos objectos são os grupos abelianos sem torsão e divisíveis. Então \mathcal{A}^\perp é constituída por todos os monomorfismos *T-densos* e $\mathcal{O}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ (cf. [12]).

2 Invólucros ortogonais e invólucros reflectivos

Definição 2.1 Seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{X} . Uma subcategoria reflectiva \mathcal{B} de \mathcal{X} diz-se um *invólucro reflectivo* de \mathcal{A} em \mathcal{X} se contiver \mathcal{A} e estiver contida em toda a

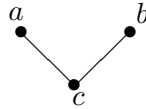
subcategoria reflectiva que contenha \mathcal{A} .

Se \mathcal{E} é uma classe de morfismos de \mathcal{X} , \mathcal{B} diz-se um *invólucro \mathcal{E} -reflectivo* de \mathcal{A} se for \mathcal{E} -reflectiva, contiver \mathcal{A} e estiver contida em toda a subcategoria \mathcal{E} -reflectiva que contenha \mathcal{A} .

Acerca do estudo de subcategorias reflectivas, invólucros reflectivos e o problema associado a estes da reflectividade da intersecção de subcategorias reflectivas, remetemos o leitor para o artigo [73] e referências aí indicadas.

Atendendo a 1.2, o invólucro ortogonal é um bom candidato para ser o invólucro reflectivo. De facto, em todos os exemplos de 1.5 $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é o invólucro reflectivo de \mathcal{A} . No entanto, isto nem sempre acontece. A seguir apresentamos um exemplo simples de uma subcategoria que tem um invólucro reflectivo diferente do seu invólucro ortogonal.

Exemplo 2.2 Seja \mathcal{X} o seguinte conjunto parcialmente ordenado



considerado como uma categoria. Se \mathcal{A} é a subcategoria de \mathcal{X} que tem a como único objecto, é fácil verificar que \mathcal{X} é o invólucro reflectivo de \mathcal{A} mas o invólucro ortogonal de \mathcal{A} é a própria subcategoria \mathcal{A} .

Pode argumentar-se que a categoria \mathcal{X} do Exemplo 2.2 não é uma categoria “interessante”; por exemplo, ela não é nem completa nem cocompleta. Contudo, mesmo categorias muito “razoáveis” podem ter subcategorias tais que nem o fecho para limites nem o invólucro ortogonal são reflectivos e, mais, nem sequer têm um invólucro reflectivo. Realmente, V. Trnková, J. Adámek e J. Rosický provaram em [77] que a categoria \mathcal{Top} dos espaços topológicos e aplicações contínuas tem uma subcategoria que não tem invólucro reflectivo, apesar de ser uma subcategoria ortogonal. Um outro exemplo importante é o seguinte:

Exemplo 2.3 ([4]) Seja $BiTop$ a categoria dos espaços bitopológicos e aplicações bi-contínuas: os objectos são ternos (X, τ, ν) onde X é um conjunto e τ e ν são topologias em X ; um morfismo $f : (X, \tau, \nu) \longrightarrow (X', \tau', \nu')$ é uma aplicação de X para X' que é

contínua relativamente às primeiras e às segundas topologias. A subcategoria $BiCom$ de todos os espaços bi-topológicos compactos de Hausdorff para ambas as topologias é a intersecção de duas subcategorias reflectivas: a subcategoria dos espaços bitopológicos compactos de Hausdorff para a primeira topologia e a subcategoria dos espaços bitopológicos compactos de Hausdorff para a segunda topologia. Apesar disso, $BiCom$ não é reflectiva e, conseqüentemente, não tem invólucro reflectivo.

Observação 2.4 Para várias categorias, a existência de invólucro reflectivo para uma subcategoria \mathcal{A} força esse invólucro a ser precisamente o invólucro ortogonal de \mathcal{A} :

Seja \mathcal{X} uma categoria tal que, para cada morfismo f , a subcategoria $\{f\}_\perp$ é reflectiva. Isto acontece, por exemplo, para todas as categorias localmente apresentáveis e também para a categoria Top dos espaços topológicos (veja-se [22] e [77]). Então, por 1.2, o invólucro reflectivo de cada subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} , caso exista, coincide com o invólucro ortogonal de \mathcal{A} . De facto, no que respeita a Top , este é um caso particular de um resultado mais geral provado mais adiante, em 14.11.

Vários resultados envolvendo condições sob as quais uma subcategoria ortogonal da forma $\{f\}_\perp$ é reflectiva são dados em [22] e [72] (veja-se também [58]).

Considerando 1.2.2, torna-se evidente que, se o fecho para limites é reflectivo, então coincide com o invólucro ortogonal. Mas podemos ter $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ reflectiva sem, no entanto, coincidir com o fecho para limites de \mathcal{A} . Foi J. Rosický que descobriu um exemplo de uma categoria \mathcal{X} com propriedades muito boas e, ainda assim, possuindo uma subcategoria \mathcal{A} fechada para limites que tem $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ como invólucro reflectivo, mas tal que $\mathcal{A} \neq \mathcal{O}(\mathcal{A})$. Este é o exemplo que descrevemos a seguir.

Exemplo 2.5 ([56]) Seja \mathcal{X} a categoria definida do seguinte modo

- objectos: pares (X, x) onde X é um conjunto e x é ou a aplicação vazia

$$\emptyset \xrightarrow{x} X$$

ou uma aplicação da classe de todos os ordinais em X

$$Ord \xrightarrow{x} X$$

tal que se $x(i) = x(k)$ para algum par (i, k) com $i < k$ então $j \geq i \Rightarrow x(j) = x(i)$;

- morfismos: $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ onde $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação tal que y tem domínio Ord , se x o tiver, e

$$f(x(i)) = y(i), i \in Ord.$$

A categoria \mathcal{X}

- tem fibras pequenas, i.e. para todo o conjunto X , os pares (X, x) que são objectos de \mathcal{X} formam um conjunto, não uma classe própria;

e

- é monotopológica, i.e. se $(X \xrightarrow{f_i} X_i)_I$ é uma monofonte em $\mathcal{S}et$ e (X_i, x_i) é, para cada $i \in I$, um objecto de \mathcal{X} , então existe um único x tal que $((X, x) \xrightarrow{f_i} (X_i, x_i))_I$ é uma fonte inicial.

Pelo facto de ter fibras pequenas e ser monotopológica sobre $\mathcal{S}et$, \mathcal{X} é completa, cocompleta, bem-potenciada e uma categoria $(Epi, MonoFonteInicial)$ (veja-se, por exemplo, [2]).

Seja \mathcal{A} a subcategoria de \mathcal{X} de todos os objectos (X, x) de \mathcal{X} tal que o domínio de x não é o conjunto vazio.

Definamos, para cada \mathcal{X} -objecto (X, x) ,

$$\|x\| = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é a aplicação vazia} \\ \min\{k \in Ord \mid j \geq k \Rightarrow x(j) = x(k)\} & \text{no caso contrário.} \end{cases}$$

É óbvio que, para cada morfismo $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ com $\|x\| \neq 0$, se verifica a desigualdade $\|x\| \geq \|y\|$, doutro modo f não seria um morfismo de \mathcal{X} .

Seja agora $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ um morfismo em \mathcal{A}^\perp . Vê-se facilmente que, por um lado, como f é \mathcal{A} -cancelável, a aplicação obtida de $f : X \rightarrow Y$ pela restrição e co-restrição a $X \setminus Im(x)$ e $Y \setminus Im(y)$ tem de ser uma bijecção e, por outro lado, como todo o morfismo com domínio (X, x) e codomínio em \mathcal{A} se factoriza através de f , tem de ser $\|x\| \leq \|y\|$. Consequentemente, a classe \mathcal{A}^\perp é exactamente a classe de todos os isomorfismos de \mathcal{X} .

Portanto $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é toda a categoria \mathcal{X} que é assim o invólucro reflectivo de \mathcal{A} . Mas é diferente do fecho para limites de \mathcal{A} , que é o próprio \mathcal{A} , já que esta subcategoria é fechada para limites.

Dado um objecto X de \mathcal{X} e uma subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} , designemos por

$$X/\mathcal{A}^\perp$$

a categoria cujos objectos são todos os morfismos de \mathcal{X} ortogonais a \mathcal{A} e com domínio X e cujos morfismos são da forma

$$s : (X \xrightarrow{f} Y) \longrightarrow (X \xrightarrow{f'} Y')$$

onde $s : Y \rightarrow Y'$ é um morfismo de \mathcal{X} e $s \cdot f = f'$. Atendendo a que, por 1.2.1, $[\mathcal{O}(\mathcal{A})]^\perp = \mathcal{A}^\perp$, é imediato que se $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é reflectiva então para cada objecto X de \mathcal{X} , a reflexão de X para $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é um objecto terminal da categoria X/\mathcal{A}^\perp .

Assim, é natural indagar sobre a recíproca. Na realidade, a existência de um objecto terminal na categoria X/\mathcal{A}^\perp para cada $X \in \text{Obj}(\mathcal{X})$ não garante a reflectividade de $\mathcal{O}(\mathcal{A})$. Ilustrativas desta afirmação são as categorias \mathcal{X} e \mathcal{A} do Exemplo 2.2, como facilmente se conclui.

Vamos agora mostrar que, sob condições adequadas, se verifica a recíproca. Para tal, em vez de considerarmos o invólucro ortogonal de uma dada categoria, ocupar-nos-emos primeiro duma subcategoria ortogonal \mathcal{E}_\perp para uma dada classe \mathcal{E} de morfismos.

Para cada classe \mathcal{E} de morfismos, a notação X/\mathcal{E} tem o mesmo significado que atrás, ou seja, designa a subcategoria da categoria $X \downarrow \mathcal{X}$ cujos objectos são os morfismos de \mathcal{E} . Vamos determinar condições para que a existência de um objecto terminal de X/\mathcal{E} para cada objecto X de \mathcal{X} implique a reflectividade de \mathcal{E}_\perp . Assim, obteremos uma resposta para o chamado Problema da Subcategoria Ortogonal ([22, 72, 79]).

Definições 2.6 Para uma classe \mathcal{E} de morfismos na categoria \mathcal{X} , consideramos as seguintes condições:

Condição do Coigualizador. Se $c : C \rightarrow D$ é o coigualizador de uma família de morfismos $(f_i : B \rightarrow C)_I$ tal que, existem $e \in \mathcal{E}$ e h com $f_i \cdot e = h$ para todo $i \in I$, então $c \in \mathcal{E}$.

Condição do Quadrado. Dados morfismos f e g com o mesmo domínio e $f \in \mathcal{E}$, existem morfismos f' e g' tais que $f' \in \mathcal{E}$ e $g' \cdot f = f' \cdot g$.

Condição da Pseudo-reflectividade. Para cada objecto X de \mathcal{X} , a categoria X/\mathcal{E} tem um objecto fracamente terminal. (Este objecto fracamente terminal diz-se uma \mathcal{E} -pseudo-reflexão de X .)

Lema 2.7 *Para toda a subcategoria \mathcal{A} de uma categoria \mathcal{X} , a classe \mathcal{A}^\perp satisfaz:*

1. a condição do coigualizador;
2. a condição do quadrado, sempre que \mathcal{X} tem somas amalgamadas;
3. as condições do quadrado e da pseudo-reflectividade, quando \mathcal{A} é reflectiva em \mathcal{X} .

Demonstração.

1. Suponhamos que $e \in \mathcal{A}^\perp$, $(f_i : B \rightarrow C)_I$ é uma família de morfismos tais que $f_i \cdot e = h$ para todo $i \in I$, e $c : C \rightarrow D$ é um coigualizador de $(f_i : B \rightarrow C)_I$. Se $g : C \rightarrow A$ é um morfismo com codomínio em \mathcal{A} então, para todos $i, j \in I$, $g \cdot f_i \cdot e = g \cdot f_j \cdot e$ e, como $e \in \mathcal{A}^\perp$, isto implica que $g \cdot f_i = g \cdot f_j$. Por conseguinte, existe um único morfismo g' tal que $g' \cdot c = g$.
2. Sai imediatamente de 1.4.4.
3. Se \mathcal{A} é reflectiva em \mathcal{X} , dados morfismos $X \xrightarrow{f} Y$ e $X \xrightarrow{g} Z$, com $f \in \mathcal{A}^\perp$, seja $Z \xrightarrow{r_Z} RZ$ uma reflexão de Z em \mathcal{A} ; então, como $RZ \in \mathcal{A}$, existe um único morfismo $\bar{g} : Y \rightarrow RZ$ tal que $\bar{g} \cdot f = r_Z \cdot g$; além disso, $r_Z \in \mathcal{A}^\perp$.

É óbvio que \mathcal{A}^\perp obedece à condição da pseudorefectividade. \square

Observação 2.8 As três condições acima são independentes, no sentido de que nenhuma delas é implicada pelas outras. De facto:

As condições do coigualizador e do quadrado não implicam a da pseudorefectividade:

Se \mathcal{X} é uma categoria cocompleta e \mathcal{A} é uma subcategoria de \mathcal{X} então $\mathcal{E} = \mathcal{A}^\perp$ satisfaz claramente as condições do coigualizador e do quadrado. Mas, se o invólucro ortogonal de \mathcal{A} não for reflectivo, então \mathcal{A}^\perp não satisfaz a condição da pseudorefectividade, conforme se pode concluir de 2.10 à frente. Isto é o que acontece se \mathcal{X} e \mathcal{A} forem, por exemplo, as categorias do Exemplo 2.3.

As condições do coigualizador e da pseudorefectividade não implicam a do quadrado:

Sejam \mathcal{X} e \mathcal{A} como no Exemplo 2.2. Então \mathcal{A}^\perp preenche trivialmente a condição do coigualizador visto que todos os coigualizadores múltiplos em \mathcal{X} são isomorfismos. Por outro lado, as categorias a/\mathcal{A}^\perp e b/\mathcal{A}^\perp consistem precisamente em 1_a e 1_b , respectivamente, pelo que têm um objecto terminal. A categoria c/\mathcal{A}^\perp é constituída pela identidade 1_c e pelo morfismo $c \rightarrow a$; este último morfismo é claramente um objecto terminal de c/\mathcal{A}^\perp . Consequentemente, \mathcal{A}^\perp também satisfaz a condição da pseudorefectividade. Mas falha quanto à condição do quadrado, visto que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} c & \rightarrow & a \\ \downarrow & & \\ & & b \end{array}$$

não se pode “completar”.

As condições do quadrado e da pseudorefectividade não implicam a do coigualizador:

Seja $\mathcal{X} = \mathit{Set}$ e seja \mathcal{E} a classe de todas as funções injectivas. Claramente \mathcal{E} não satisfaz a condição do coigualizador mas satisfaz a condição do quadrado e, para cada conjunto X , a função identidade é uma \mathcal{E} -pseudoreflexão de X .

Proposição 2.9 *Seja \mathcal{X} uma categoria com coigualizadores múltiplos. Se uma classe \mathcal{E} de morfismos de \mathcal{X} é fechada para a composição e satisfaz as condições do coigualizador, do quadrado e da pseudorefectividade, então \mathcal{E}_\perp é \mathcal{E} -reflectiva em \mathcal{X} .*

Demonstração. Dado $X \in \mathcal{X}$, seja $d : X \rightarrow Y$ uma \mathcal{E} -pseudoreflexão de X . Se $c : Y \rightarrow C$ é um coigualizador da família $(h_i)_I$ de todos os morfismos $h_i : Y \rightarrow Y$ que preenchem a igualdade $h_i \cdot d = d$, então, pela condição do coigualizador e pelo facto de \mathcal{E} ser fechado para a composição, o morfismo $e = c \cdot d$ pertence a \mathcal{E} . Mostramos agora que $e : X \rightarrow C$ é um objecto terminal de X/\mathcal{E} . Se f é um morfismo de \mathcal{E} com domínio X , então existe algum morfismo t tal que $t \cdot f = e$. Se outro morfismo t' também satisfaz $t' \cdot f = e$, seja $g = \mathit{coig}(t, t')$. Pela condição do coigualizador e pelo facto de \mathcal{E} ser fechado para a composição, $g \cdot e \in \mathcal{E}$. Então existe um morfismo n tal que $n \cdot g \cdot e = d$, i.e.,

$$n \cdot g \cdot c \cdot d = d.$$

Logo, $n \cdot g \cdot c = h_i$ para algum i e portanto, a igualdade $c \cdot n \cdot g \cdot c = c$ verifica-se, o que implica que

$$c \cdot n \cdot g = 1.$$

Consequentemente, g é um isomorfismo e então t e t' são iguais.

Para concluir que $e : X \rightarrow C$ é um morfismo universal de X para \mathcal{E}_\perp , resta mostrar que C pertence a \mathcal{E}_\perp . Dados morfismos f e g com o mesmo domínio e tais que $f \in \mathcal{E}$ e o codomínio de g é C , a condição do quadrado garante a existência de morfismos $f' \in \mathcal{E}$ e g' tais que $g' \cdot f = f' \cdot g$. Como \mathcal{E} é fechado para a composição, $f' \cdot e$ pertence a \mathcal{E} . Pelo facto de $e : X \rightarrow C$ ser terminal, existe um morfismo t tal que $t \cdot f' \cdot e = e$ e, de novo por e ser terminal em X/\mathcal{E} , o morfismo $t \cdot f'$ é a identidade 1_C . Então, para $r = t \cdot g'$, temos que

$$r \cdot f = t \cdot g' \cdot f = t \cdot f' \cdot g = g.$$

Para provar a unicidade, seja $r' \cdot f = r \cdot f$ e seja q um coigualizador de (r, r') . Então, pela condição do coigualizador, $q \in \mathcal{E}$ e, como \mathcal{E} é fechada para a composição, $q \cdot e$ pertence a \mathcal{E} e, portanto, existe algum morfismo p tal que $p \cdot q \cdot e = e$. Assim $p \cdot q = 1$ e, consequentemente, $r = r'$. \square

Estamos agora em condições de dar uma resposta à questão, posta na introdução, sobre a reflectividade do invólucro ortogonal de uma subcategoria.

Dizemos que uma classe \mathcal{E} de morfismos de \mathcal{X} satisfaz a *condição do conjunto solução* se, para cada $X \in \text{Obj}(\mathcal{X})$, a categoria X/\mathcal{E} tem um conjunto fracamente terminal.

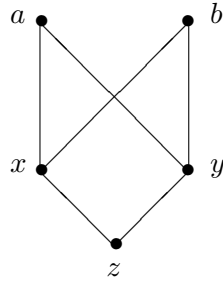
Teorema 2.10 *Se \mathcal{X} tem colimites conexos então o invólucro ortogonal de uma subcategoria \mathcal{A} é um invólucro reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{X} se e só se \mathcal{A}^\perp satisfaz a condição do conjunto solução.*

Demonstração. Se $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é reflectiva, então é claro que \mathcal{A}^\perp satisfaz a condição do conjunto solução. Reciprocamente, para $X \in \text{Obj}(\mathcal{X})$, suponhamos que $(f_i : X \rightarrow A_i)_I$ é um conjunto fracamente terminal da categoria X/\mathcal{A}^\perp . Então, a soma amalgamada múltipla $f : X \rightarrow C$ de $(f_i : X \rightarrow A_i)_I$ é uma \mathcal{A}^\perp -pseudo-reflexão de X . Por 1.4.1, \mathcal{A}^\perp é fechada para a composição e, por 2.7, satisfaz as condições do coequalizador e do

quadrado. Logo, por 2.9, $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é um invólucro reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{X} . \square

Podemos ter subcategorias \mathcal{A} e \mathcal{B} de \mathcal{X} tais que \mathcal{A} está contida em \mathcal{B} mas o invólucro ortogonal de \mathcal{A} em \mathcal{X} é diferente do invólucro ortogonal de \mathcal{A} em \mathcal{B} , mesmo quando \mathcal{B} é ortogonal em \mathcal{X} , como mostra o exemplo seguinte.

Exemplo 2.11 Seja \mathcal{X} o conjunto parcialmente ordenado



e sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} as subcategorias cujo conjunto de objectos é $\{a\}$ e $\{a, b\}$, respectivamente. É fácil verificar que \mathcal{B} é ortogonal em \mathcal{X} . Contudo, o invólucro ortogonal de \mathcal{A} em \mathcal{X} é diferente do invólucro ortogonal de \mathcal{A} em \mathcal{B} , sendo o primeiro \mathcal{A} e o segundo \mathcal{B} .

Pelo contrário, quando \mathcal{B} é reflectiva em \mathcal{X} , então a igualdade verifica-se, como vamos provar de seguida.

Proposição 2.12 *Se \mathcal{B} é uma subcategoria reflectiva de \mathcal{X} e \mathcal{A} é uma subcategoria de \mathcal{B} , então:*

1. Para $R : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ um reflector,

$$\mathcal{A}^{\perp_{\mathcal{X}}} = \{f \in \text{Mor}(\mathcal{X}) \mid Rf \in \mathcal{A}^{\perp_{\mathcal{B}}}\}.$$

2. O invólucro ortogonal de \mathcal{A} em \mathcal{B} coincide com o invólucro ortogonal de \mathcal{A} em \mathcal{X} .

Demonstração.

1. Dado um morfismo $f : X \rightarrow Y$ de \mathcal{X} , sejam $r_X : X \rightarrow RX$ e $r_Y : Y \rightarrow RY$ reflexões de X e Y em \mathcal{B} , respectivamente; então

$$Rf \cdot r_X = r_Y \cdot f.$$

Por um lado, se $f \in \mathcal{A}^{\perp x}$, então pelo facto de $r_X, r_Y \in \mathcal{A}^{\perp x}$ e $\mathcal{A}^{\perp x}$ ser fechada para a composição e cancelável à direita (veja-se 1.4) concluímos que Rf pertence a $\mathcal{A}^{\perp x}$ e, como $\mathcal{A}^{\perp \mathcal{B}} = \mathcal{A}^{\perp x} \cap \text{Mor}(\mathcal{B})$, Rf pertence a $\mathcal{A}^{\perp \mathcal{B}}$.

Por outro lado, se Rf pertence a $\mathcal{A}^{\perp \mathcal{B}}$, então também pertence a $\mathcal{A}^{\perp x}$ e visto que $\mathcal{A}^{\perp x}$ é fechada para a composição e cancelável à esquerda (por 1.4), segue-se que $f \in \mathcal{A}^{\perp x}$.

2. Como \mathcal{B} é reflectiva em \mathcal{X} , por 1.2 obtemos que

$$(\mathcal{A}^{\perp x})_{\perp \mathcal{X}} \subseteq (\mathcal{A}^{\perp x})_{\perp \mathcal{X}} = \mathcal{B}; \quad (\text{I.1})$$

atendendo a que $\mathcal{A}^{\perp \mathcal{B}} \subseteq \mathcal{A}^{\perp x}$, e usando 1.2.1, concluímos que

$$(\mathcal{A}^{\perp x})_{\perp \mathcal{X}} \subseteq (\mathcal{A}^{\perp \mathcal{B}})_{\perp \mathcal{X}}; \quad (\text{I.2})$$

e portanto, as inclusões I.1 e I.2 implicam que

$$(\mathcal{A}^{\perp x})_{\perp \mathcal{X}} \subseteq (\mathcal{A}^{\perp \mathcal{B}})_{\perp \mathcal{B}}.$$

Para provar a inclusão contrária, seja $B \in (\mathcal{A}^{\perp \mathcal{B}})_{\perp \mathcal{B}}$. Queremos mostrar que B pertence a $(\mathcal{A}^{\perp x})_{\perp \mathcal{X}}$, i.e., que B é ortogonal a todo o morfismo de $\mathcal{A}^{\perp x}$. Seja $X \xrightarrow{f} Y$ um morfismo de $\mathcal{A}^{\perp x}$, seja h um morfismo de X para B e seja $h' : RX \rightarrow B$ o morfismo que satisfaz $h' \cdot r_X = h$. Por 1., $Rf \in \mathcal{A}^{\perp \mathcal{B}}$ e, então, existe um único morfismo $h^* : RY \rightarrow B$ tal que $h^* \cdot Rf = h'$.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & & \\
 \downarrow & \searrow r_X & \searrow r_Y & & \\
 & & RX & \xrightarrow{Rf} & RY \\
 \downarrow h & \nearrow h' & & \nearrow h^* & \\
 & & & & B
 \end{array}$$

Então, para $g = h^* \cdot r_Y$ é válida a igualdade $g \cdot f = h$; além disso, g é único: se $g' : Y \rightarrow B$ é outro morfismo tal que $g' \cdot f = h$, seja $g^* : RY \rightarrow B$ tal que $g^* \cdot r_Y = g$. Então

$$g^* \cdot Rf \cdot r_X = g^* \cdot r_Y \cdot f = g \cdot f = h = h^* \cdot r_Y \cdot f = h^* \cdot Rf \cdot r_X;$$

isto implica que $g^* \cdot Rf = h^* \cdot Rf$ e, como $Rf \in \mathcal{A}^{\perp \mathcal{B}}$, vem que $g^* = h^*$ e, consequentemente, $g = h$. \square

Usando 2.12 e 2.10, obtemos o seguinte

Corolário 2.13 *Se \mathcal{X} tem colimites conexos, então o involúcro ortogonal $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é um involúcro reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{X} se e só se existe uma subcategoria reflectiva \mathcal{B} de \mathcal{X} contendo \mathcal{A} e tal que a classe de todos os morfismos de \mathcal{B} ortogonais a \mathcal{A} satisfaz a condição do conjunto solução.* \square

Seja \mathcal{X} uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbb{M})$ e seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{X} . Então o involúcro \mathcal{E} -reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{X} existe e é constituído por todos os objectos X de \mathcal{X} tais que a fonte $\mathcal{X}(X, \mathcal{A})$ pertence a \mathbb{M} (cf. [2]).

Notação 2.14 Se \mathcal{X} é uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbb{M})$ e \mathcal{A} é uma subcategoria de \mathcal{X} , então designamos o involúcro \mathcal{E} -reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{X} por $\mathbb{M}(\mathcal{A})$.

A seguir, mostramos que a classe \mathcal{A}^{\perp} tem boas propriedades quando considerada em $\mathbb{M}(\mathcal{A})$.

Notação 2.15 Daqui em diante, quando \mathcal{X} for uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbb{M})$, \mathcal{M} designa a intersecção $\mathbb{M} \cap \text{Mor}(\mathcal{X})$.

Definição 2.16 Dada uma subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} , um morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ de \mathcal{X} diz-se *injectivo relativamente a \mathcal{A}* , ou *\mathcal{A} -injectivo* se, para todo $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$, a aplicação

$$\mathcal{X}(f, A) : \mathcal{X}(Y, A) \longrightarrow \mathcal{X}(X, A)$$

for sobrejectiva, ou seja, se todo o morfismo com domínio X e codomínio em \mathcal{A} for factorizável por meio de f (não necessariamente de maneira única).

Denotamos por $\text{Inj}(\mathcal{A})$ a classe de todos os morfismos de \mathcal{X} que são \mathcal{A} -injectivos.

Lema 2.17 *Seja categoria \mathcal{X} uma $(\mathcal{E}, \mathbb{M})$ com $\mathbb{M} \subseteq \text{MonoFonte}(\mathcal{X})$ e seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{X} tal que $\mathbb{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$. Então:*

1. *Um morfismo de \mathcal{X} é \mathcal{A} -cancelável se e só se for um epimorfismo;*

$$2. \mathcal{A}^\perp = \text{Inj}(\mathcal{A}) \cap \text{Epi}(\mathcal{X});$$

$$3. \mathcal{A}^\perp \subseteq \text{Epi}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{M}.$$

Demonstração.

1. Se $f : X \rightarrow Y$ é um morfismo cancelável relativamente a \mathcal{A} e $a, b : Y \rightarrow Z$ são morfismos tais que $a \cdot f = b \cdot f$, então para todo $g \in \mathcal{X}(Z, \mathcal{A})$ $g \cdot a \cdot f = g \cdot b \cdot f$, pelo que $g \cdot a = g \cdot b$. Como $\mathcal{X}(Z, \mathcal{A})$ é uma monofonte, concluímos que $a = b$.
2. É óbvio por 1., visto que um morfismo é ortogonal a \mathcal{A} se e só se for injectivo e cancelável relativamente a \mathcal{A} .
3. Devido a 2., basta mostrar que $\text{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$.

Seja $(f : X \rightarrow Y) \in \text{Inj}(\mathcal{A})$ e seja $m \cdot e$ uma factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ de f . Seja $(f_i)_I$ uma fonte de \mathbf{M} com domínio X e codomínio em \mathcal{A} . Para cada $i \in I$, existe algum f'_i tal que $f'_i \cdot f = f_i$. Então temos que

$$(f'_i \cdot m) \cdot e = f_i \cdot 1_X, \quad i \in I.$$

Visto que $(f_i)_I \in \mathcal{M}$ e $e \in \mathcal{E}$, existe um morfismo d tal que $d \cdot e = 1_X$. Como pertence a \mathcal{E} , o morfismo e é um isomorfismo e, portanto, $f \in \mathcal{M}$. \square

Usando agora 2.17 e 2.13, obtemos o seguinte

Corolário 2.18 *Seja \mathcal{X} uma categoria (E, \mathbf{M}) com colimites conexos, onde $\mathbf{M} \subseteq \text{MonoFonte}(\mathcal{X})$. Seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{X} tal que $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ é bem-copotenciada. Então o invólucro ortogonal de \mathcal{A} é reflectivo e, por conseguinte, é um invólucro reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{X} .*

Demonstração. Sob as hipóteses dadas, $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ tem colimites conexos e, por outro lado, a boa-copotenciação de $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ e o Lema 2.17 garantem que, em $\mathbf{M}(\mathcal{A})$, a classe \mathcal{A}^\perp satisfaz a condição do conjunto solução. Portanto conclui-se de 2.13 que $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é reflectiva. \square

Vem a propósito recordar aqui o seguinte resultado devido a R.-E. Hoffmann [33]:

Se \mathcal{X} é completa, bem-potenciada e bem-copotenciada e \mathcal{A} é uma subcategoria de \mathcal{X} cujo invólucro epi-reflectivo em \mathcal{X} é bem-copotenciado, então o fecho para limites de \mathcal{A} em \mathcal{X} é um invólucro reflectivo.

Esta asserção mantém-se válida se “ter colimites conexos” substituir “ser completa e bem-potenciada” e “invólucro ortogonal” substituir “fecho para limites”, como mostra o corolário seguinte.

Corolário 2.19 *Se \mathcal{X} tem colimites conexos e é bem-copotenciada e \mathcal{A} é uma subcategoria de \mathcal{X} cujo invólucro epi-reflectivo em \mathcal{X} é bem-copotenciado, então o invólucro ortogonal de \mathcal{A} em \mathcal{X} é um invólucro reflectivo.*

Demonstração. É uma consequência de 2.18 e do facto de toda a categoria \mathcal{X} com colimites conexos e bem-copotenciada ser uma categoria $(Epi, MonoFonteExtr(\mathcal{X}))$ (veja-se, por exemplo, 6.5 e 7.3 de [71] e 15.8 de [2]). \square

Fazemos notar que a maioria das categorias \mathcal{X} dos Exemplos 1.5 têm colimites conexos e são bem-copotenciadas. Portanto, nestes casos, toda a subcategoria \mathcal{A} tal que $M(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$ tem o invólucro ortogonal como um invólucro reflectivo.

Contudo, pelo Lema 2.17 é evidente que no Corolário 2.18, em vez da boa-copotenciação, podemos impôr apenas a boa-copotenciação relativamente à classe dos morfismos ortogonais a \mathcal{A} . E, de facto, a boa-copotenciação e a boa-copotenciação relativamente a \mathcal{A}^\perp podem ser diferentes, como mostra o exemplo seguinte.

Exemplo 2.20 Sejam \mathcal{X} e \mathcal{A} as categorias consideradas no Exemplo 2.5. Então o invólucro \mathcal{E} -reflectivo de \mathcal{A} é o próprio \mathcal{X} .

A categoria \mathcal{X} é bem-copotenciada relativamente a \mathcal{A}^\perp visto que, como vimos, $\mathcal{A}^\perp = Iso(\mathcal{X})$.

Mas \mathcal{X} não é bem-copotenciada; na verdade, nem sequer é bem-copotenciada relativamente a $Epi(\mathcal{X}) \cap \mathcal{M}$:

Seja X um conjunto e seja x a aplicação vazia $\emptyset \rightarrow X$. Para cada ordinal i , consideremos o objecto (Y_i, y_i) de \mathcal{X} onde

$$Y_i = X \dot{\cup} \{j \in Ord \mid j \leq i\}$$

e $y_i : Ord \rightarrow Y_i$ é definido por

$$y_i(j) = \begin{cases} j & \text{se } j \leq i \\ i & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $f_i : X \rightarrow Y$ a inclusão de X em Y_i .

Então os morfismos

$$f_i : (X, x) \longrightarrow (Y_i, y_i), \quad i \in Ord$$

formam uma classe de imersões epimórficas não isomorfas duas a duas.

3 Classes firmes de morfismos

Em [12], que é de certo modo um refinamento das ideias introduzidas em [13], G. Brummer e E. Giuli apresentaram o conceito de classes firmes de morfismos como uma abordagem do conceito de complementos de objectos no quadro da teoria das categorias.

Seja \mathcal{E} uma classe de morfismos na categoria \mathcal{X} fechada para a composição e para a composição com isomorfismos de ambos os lados. A classe \mathcal{E} diz-se *subfirme* se existir uma subcategoria \mathcal{A} \mathcal{E} -reflectiva em \mathcal{X} e tal que

$$\mathcal{E} \subseteq \{f \in Mor(\mathcal{X}) : Rf \in Iso(\mathcal{X})\},$$

onde $R : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}$ é um reflector. Se, além disso,

$$\mathcal{E} = \{f \in Mor(\mathcal{X}) : Rf \in Iso(\mathcal{X})\} \tag{I.3}$$

então dizemos que \mathcal{E} é *firme*.

A correspondente subcategoria \mathcal{A} diz-se *subfirmemente* (respectivamente, *firmemente*) \mathcal{E} -reflectiva em \mathcal{X} .

Para uma classe \mathcal{E} de \mathcal{X} que seja subfirme, o satisfazer da igualdade (I.3) é equivalente à seguinte afirmação: todo o morfismo em \mathcal{E} com codomínio em \mathcal{A} é uma reflexão. Isto traduz o comportamento dos complementos no ambiente categorial (supondo que, adicionalmente, \mathcal{E} é uma classe de monomorfismos).

Um exemplo clássico é o complemento de um espaço métrico: cada espaço métrico X admite uma reflexão $r_X : X \rightarrow RX$ na subcategoria \mathcal{A} dos espaços métricos completos sendo r_X uma imersão densa; além disso, se $f : X \rightarrow A$ é outra imersão densa em Met com $A \in Obj(\mathcal{A})$, então existe um isomorfismo f^* tal que $f^* \cdot r_X = f$, ou seja, f é uma reflexão. Consequentemente, em Met , a classe de todas as imersões densas é firme.

Notamos que, pelo facto de para toda a subcategoria reflectiva \mathcal{A} valer a igualdade

$$\mathcal{A}^\perp = \{f \in \text{Mor}(\mathcal{X}) : Rf \in \text{Iso}(\mathcal{X})\},$$

podemos reescrever as definições acima como segue:

Uma classe \mathcal{E} é *subfirme* (*firme*) se existir uma subcategoria \mathcal{A} que seja \mathcal{E} -reflectiva e tal que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}^\perp$ (respectivamente, $\mathcal{E} = \mathcal{A}^\perp$).

Por conseguinte, é óbvio que, a cada subcategoria reflectiva \mathcal{A} , corresponde uma única classe firme, justamente \mathcal{A}^\perp .

Podemos agora reformular o Teorema 1.4 de [12] do seguinte modo:

Proposição 3.1 *Se \mathcal{A} é \mathcal{E} -reflectiva em \mathcal{X} , então \mathcal{A} é subfirmemente \mathcal{E} -reflectiva em \mathcal{X} se e só se $\mathcal{A} = \mathcal{E}_\perp$.* \square

Corolário 3.2 *\mathcal{E} é subfirme se e só se \mathcal{E}_\perp é \mathcal{E} -reflectiva.* \square

Assim, de 2.9, podemos deduzir:

Corolário 3.3 *Se \mathcal{X} é uma categoria com coigualizadores múltiplos e \mathcal{E} é uma classe de morfismos de \mathcal{X} fechada para a composição e que satisfaz as condições do coigualizador, do quadrado e da pseudorefectividade, então \mathcal{E} é uma classe subfirme de \mathcal{X} .*

A partir deste resultado, podemos obter uma caracterização de classes firmes usando o lema seguinte.

Lema 3.4 *Se \mathcal{E} é uma classe de morfismos que contém todos os isomorfismos, é fechada para a composição e tal que \mathcal{E}_\perp é \mathcal{E} -reflectiva, então \mathcal{E} é cancelável à esquerda se e só se $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_\perp)^\perp$.*

Demonstração. Se $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_\perp)^\perp$, então é evidente, por 1.4, que \mathcal{E} é cancelável à esquerda. Seja \mathcal{E} cancelável à esquerda, seja $f : X \rightarrow Y$ pertencente a $(\mathcal{E}_\perp)^\perp$ e consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow r_X & & \downarrow r_Y \\ RX & \xrightarrow{Rf} & RY \end{array} \cdot$$

Então Rf é um isomorfismo e, atendendo às condições sobre \mathcal{E} , $Rf.r_X \in \mathcal{E}$. Logo, como r_Y também pertence a \mathcal{E} e \mathcal{E} é cancelável à esquerda, concluímos que $f \in \mathcal{E}$. \square

Temos agora a seguinte caracterização de classes firmes:

Teorema 3.5 *Seja \mathcal{X} uma categoria com colimites conexos e seja \mathcal{E} uma classe de morfismos de \mathcal{X} . Então \mathcal{E} é uma classe firme em \mathcal{X} se e só se as condições seguintes são satisfeitas:*

- 1) $Iso(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{E}$.
- 2) \mathcal{E} é fechada para a composição.
- 3) \mathcal{E} é cancelável à esquerda.
- 4) \mathcal{E} satisfaz a condição do coigualizador.
- 5) \mathcal{E} é estável para somas amalgamadas e para somas amalgamadas múltiplas.
- 6) \mathcal{E} satisfaz a condição do conjunto solução.

Demonstração. Se \mathcal{E} é firme, existe uma subcategoria reflectiva \mathcal{A} de \mathcal{X} tal que $\mathcal{E} = \mathcal{A}^\perp$ e, então, \mathcal{A}^\perp satisfaz todas as condições de 1) a 6).

Reciprocamente: É claro que 5) e 6) implicam que \mathcal{E} satisfaz as condições do quadrado e da pseudorefectividade. Este facto aliado a 2) e 4) implica, atendendo a 2.9, que \mathcal{E}_\perp é \mathcal{E} -reflectiva. Pelo Lema 3.4, vem que $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_\perp)^\perp$. \square

Observação 3.6 O Teorema 3.5 de [12] também caracteriza as classes firmes. Mas o nosso Teorema [12] impõe condições mais fracas à categoria \mathcal{X} do que aquele. No entanto, no que respeita às condições sobre \mathcal{E} , não sabemos comparar a “condição de conjunto solução” usada aqui com a “condição de conjunto solução” relativa à factorização de morfismos usada em 3.5 de [12].

No Teorema 3.5, provámos justamente que para uma categoria \mathcal{X} com colimites conexos, as funções $(-)_\perp$ e $(-)^{\perp}$ definem uma bijecção entre a colecção de todas as subcategorias reflectivas de \mathcal{X} e a colecção de todas as classes \mathcal{E} de morfismos que satisfazem as condições de 1) a 6).

Por conseguinte, o invólucro reflectivo de uma subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} existe se e só se o aglomerado de tais classes de morfismos que, além disso, estão contidas em \mathcal{A}^\perp , tem um

elemento máximo. Assim, o Teorema 2.10 dá uma condição necessária e suficiente para que \mathcal{A}^\perp seja o elemento máximo.

Os exemplos clássicos de completamento correspondem a classes firmes de monomorfismos (e as classes firmes que aparecem em 1.5 são todas subclasses de $\text{Mono}(\mathcal{X})$). Como para estas classes a condição do coigualizador se verifica trivialmente, obtemos o seguinte

Corolário 3.7 *Seja \mathcal{X} uma categoria com colimites conexos. Se \mathcal{E} é uma classe de monomorfismos que contém $\text{Iso}(\mathcal{X})$, então \mathcal{E} é firme se e só se for fechada para a composição, cancelável à esquerda, estável para somas amalgamadas e somas amalgamadas múltiplas e satisfizer a condição do conjunto solução.* \square

Observação 3.8 Nos exemplos de 1.5, temos que \mathcal{X} é uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbf{M})$ para \mathcal{E} a classe de todas as sobrejecções e um determinado \mathbf{M} fácil de identificar.

Em todos os casos, excepto quando \mathcal{X} é a categoria \mathcal{Tych} dos espaços de Tychonoff, $\mathcal{A}^\perp = \text{Epi}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{M}$; logo, como $\mathcal{O}(\mathcal{A})^\perp = \mathcal{A}^\perp$ e $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é reflectiva, a classe $\text{Epi}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{M}$ é firme em \mathcal{X} . Mais do que isso, atendendo a 2.17, é a maior classe firme de morfismos de \mathcal{M} e, conseqüentemente, $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é a menor subcategoria \mathcal{M} -reflectiva de \mathcal{X} .

É, portanto, legítimo perguntar se $\text{Epi}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{M}$ é também uma classe firme para \mathcal{X} a categoria dos espaços de Tychonoff, ou seja, se existe alguma subcategoria reflectiva \mathcal{A} de \mathcal{Tych} tal que $\mathcal{A}^\perp = \text{Epi}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{M}$. A resposta é negativa. Além disso, a resposta permanece negativa para toda a categoria \mathcal{X} de espaços de Hausdorff que seja epi-reflectiva em \mathcal{Top} e que tenha um espaço com mais do que um ponto (considerando sempre a classe \mathcal{M} como sendo a de todas as imersões) como se deduz de 1.8(2) de [13]. De 9.5.3 e 9.6 à frente, conclui-se que a classe das C^* -imersões é precisamente a maior classe firme de imersões em \mathcal{Tych} . Na Secção 9 também estudaremos as classes firmes maximais para várias outras categorias, incluindo algumas das mencionadas em 1.5.

Capítulo II

O operador de fecho ortogonal

Para a categoria Met e para a sua subcategoria \mathcal{A} dos espaços métricos completos, temos que:

- \mathcal{A}^\perp é constituída por todas as imersões densas;
- $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ consiste em todos os espaços X “fortemente fechados”, i.e. tal que toda a imersão de X num espaço métrico é fechada.

Neste capítulo definiremos um operador de fecho, chamado o operador de fecho ortogonal, que abarca este exemplo bem como os outros exemplos de 1.5 e 2.5 e muitos outros. Com efeito, o operador de fecho ortogonal numa categoria \mathcal{X} relativamente a uma classe conveniente de morfismos e induzido por uma subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} possibilita a caracterização de \mathcal{A}^\perp e $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ em termos de densidade e fechamento, de modo idêntico ao do exemplo acima. Ademais, permite-nos encontrar condições suficientes para que o invólucro ortogonal seja um invólucro reflectivo.

Ocupar-nos-emos ainda das relações existentes entre este operador de fecho e o operador de fecho regular.

Po último, dedicamos uma atenção especial a uma classe particular de morfismos: a maior de todas as subclasses, de uma dada classe de monomorfismos, que são estáveis para somas amalgamadas. Esta classe está estreitamente relacionada com o estudo do operador de fecho ortogonal desenvolvido aqui.

4 Operadores de fecho

Nesta secção fazemos uma síntese dos factos acerca de operadores de fecho (no sentido de [18] e [20]) que entendemos essenciais para prosseguir. Para uma informação detalhada neste assunto, remetemos o leitor para [18], [20] e [21].

Ao longo deste capítulo, \mathcal{M} denotará sempre uma classe de monomorfismos em \mathcal{X} que contém todos os isomorfismos, é fechada para a composição e é cancelável à esquerda. Consideraremos também \mathcal{M} como uma subcategoria da categoria \mathcal{X}^2 (de todos os morfismos \mathcal{X}). Neste contexto,

$$u : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{X}$$

é o functor codomínio, i.e., o functor que faz corresponder a cada morfismo $(r, s) : (X \xrightarrow{m} Y) \rightarrow (Z \xrightarrow{n} W)$ de \mathcal{M} , o morfismo $s : Y \rightarrow W$ de \mathcal{X} .

Definição 4.1 Um *operador de fecho* em \mathcal{X} relativamente a \mathcal{M} é constituído por um functor

$$c : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$$

tal que $u \cdot c = u$ e por uma transformação natural

$$\delta : Id_{\mathcal{M}} \rightarrow c$$

tal que $u \cdot \delta = Id_u$.

Portanto, um operador de fecho (c, δ) determina, para cada $m : X \rightarrow Y$ em \mathcal{M} , morfismos $c(m)$ e $d(m)$ e um quadrado comutativo,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{d(m)} & \overline{X} \\ m \downarrow & & \downarrow c(m) \\ Y & \xrightarrow{1_Y} & Y \end{array} , \quad (\text{II.1})$$

onde $\delta_m = (d(m), 1_Y) : m \rightarrow c(m)$.

Como $c(m)$ é sempre um monomorfismo, δ é determinado univocamente por c ; por isso, escreveremos usualmente c em vez de (c, δ) .

Definições 4.2 Se c é um operador de fecho em \mathcal{X} relativamente a \mathcal{M} , então um morfismo $(m : X \rightarrow Y) \in \mathcal{M}$ diz-se *c-denso* se $c(m) \cong 1_Y$. Diz-se *c-fechado* no caso de $c(m) \cong m$.

Dizemos que o operador de fecho c é *fracamente hereditário na subclasse \mathcal{N}* de \mathcal{M} se, para todo $n \in \mathcal{N}$, $d(m)$ for *c-denso*; se $\mathcal{N} = \mathcal{M}$, c diz-se apenas *fracamente hereditário*.

Dizemos que o operador de fecho c é *idempotente* se $c(m)$ for *c-fechado* para todo $m \in \mathcal{M}$.

A classe de todos os morfismos *c-densos* em \mathcal{M} designa-se por $\mathcal{E}_c^{\mathcal{M}}$ e a classe de todos os morfismos *c-fechados* em \mathcal{M} designa-se por \mathcal{M}_c .

Se c e c' forem dois operadores de fecho em \mathcal{X} relativamente ao mesmo \mathcal{M} dizemos que c é *menor ou igual do que c'* , e escrevemos $c \leq c'$, sempre que $c(m) \leq c'(m)$ para todo o $m \in \mathcal{M}$, ou seja, sempre que, para cada $m \in \mathcal{M}$, existe um morfismo t tal que $c(m) = c'(m) \cdot t$; o morfismo t é obviamente único.

Escrevemos $c = c'$ se $c \leq c'$ e $c' \leq c$, ou seja, se para cada $m \in \mathcal{M}$, $c(m) \cong c'(m)$.

Recordamos que, usando terminologia de [20], um *sistema de factorização* em \mathcal{X} relativamente a \mathcal{M} consiste na existência de um par (d_m, c_m) de morfismos de \mathcal{M} para cada $m \in \mathcal{M}$ tal que

- $m = c_m \cdot d_m$
- para quaisquer m e n em \mathcal{M} e quaisquer morfismos u e v com $v \cdot m = n \cdot u$, existe um único morfismo t tal que $t \cdot d_m = d_n \cdot u$ e $c_n \cdot t = v \cdot c_m$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \bullet & \xrightarrow{d_m} & \bullet & \xrightarrow{c_m} & \bullet \\
 \downarrow u & & \downarrow t & & \downarrow v \\
 \bullet & \xrightarrow{d_n} & \bullet & \xrightarrow{c_n} & \bullet
 \end{array}$$

Proposição 4.3 [20] *Em toda a categoria \mathcal{X} existe uma correspondência um-a-um entre os operadores de fecho e os sistemas de factorização relativamente a \mathcal{M} .* \square

Com efeito, um operador de fecho c de \mathcal{X} relativamente a \mathcal{M} induz para cada m em \mathcal{M} uma factorização

$$X \xrightarrow{d(m)} \overline{X} \xrightarrow{c(m)} Y,$$

ilustrada pelo diagrama (II.1). Além disso, estas factorizações formam um sistema de factorização em \mathcal{X} relativamente a \mathcal{M} . A mencionada correspondência um-a-um leva cada operador de fecho c para este sistema de factorização.

Proposição 4.4 ([18] e [20]) *Para um operador de fecho c em \mathcal{X} relativamente a \mathcal{M} , as asserções seguintes são equivalentes:*

- (i) c é fracamente hereditário e idempotente;
- (ii) c é fracamente hereditário e $\mathcal{E}_c^{\mathcal{M}}$ é fechado para a composição;
- (iii) c é idempotente e \mathcal{M}_c é fechado para a composição. □

Seja \mathcal{M} uma classe de morfismos em \mathcal{X} que contém todos os isomorfismos e é fechada para a composição. Recordamos que \mathcal{X} se diz \mathcal{M} -completa se os produtos fibrados de morfismos de \mathcal{M} ao longo de morfismos arbitrários existem e pertencem a \mathcal{M} , e as intersecções de famílias (possivelmente grandes) de morfismos de \mathcal{M} com codomínio comum também existem e pertencem a \mathcal{M} . O produto fibrado de um morfismo m de \mathcal{M} ao longo de um morfismo f diz-se a *imagem inversa de m por f* e designa-se por $f^{-1}(m)$.

Se \mathcal{X} é uma categoria \mathcal{M} -completa então todo o morfismo em \mathcal{M} é um monomorfismo e \mathcal{M} é cancelável à esquerda. Ademais, para cada objecto X em \mathcal{X} , a classe pré-ordenada \mathcal{M}_X de todos os morfismos de \mathcal{M} com codomínio X tem ínfimos e supremos arbitrários. Acresce ainda a existência de uma classe de morfismos \mathcal{E} (univocamente determinada por \mathcal{M}) tal que $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ é uma estrutura de factorização para morfismos em \mathcal{X} .

Se \mathcal{X} é \mathcal{M} -completa, um operador de fecho $c : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ pode ser descrito equivalentemente por uma família de aplicações

$$(c_X : \mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{M}_X)_{X \in \mathcal{X}},$$

onde $c_X(m) = c(m)$ para cada m , satisfazendo as condições:

1. $m \leq c_X(m)$, $m \in \mathcal{M}_X$ (*extensão*);
2. se $m \leq n$, então $c_X(m) \leq c_X(n)$, $m, n \in \mathcal{M}_X$ (*monotonia*);
3. $c_X(f^{-1}(m)) \leq f^{-1}(c_Y(m))$, para cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ e $m \in \mathcal{M}_Y$ (*continuidade*).

Como referimos atrás, a \mathcal{M} -completude de \mathcal{X} determina uma estrutura de factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ em \mathcal{X} . Neste caso, podemos alargar a noção de c -densidade a todos os morfismos em \mathcal{X} . Assim, um morfismo de \mathcal{X} diz-se c -denso se a parte que na sua factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ pertence a \mathcal{M} é c -densa.

Vamos agora recordar o conceito de domínio de J. Isbell [40]. Seja \mathcal{X} uma categoria de álgebras universais. Dada uma álgebra B em \mathcal{X} e uma subálgebra A de B , o *domínio de A em B* é o conjunto

$$Dom_B(A) = \{b \in B \mid \text{para quaisquer } f, g : B \rightarrow C \text{ em } \mathcal{X}, f|_A = g|_A \Rightarrow g(b) = h(b)\}.$$

J. Isbell usou esta noção para caracterizar os epimorfismos numa subcategoria fechada para subobjectos. O seu famoso Teorema do Zig-Zag caracteriza os elementos do $Dom_B(A)$ quando o coproducto de duas cópias de B existe.

Por outro lado, S. Salbany ([60]) introduziu os operadores de fecho regulares para a categoria dos espaços topológicos: para uma subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{Top} , dado um espaço Y e um subespaço $X \subseteq Y$, o fecho regular de X em Y induzido por \mathcal{A} é o subespaço

$$[X] = \cap \{Z \subseteq Y \mid Z = \text{ig}(f, g) \text{ para } f, g \in \mathcal{Top}(Y, \mathcal{A}) \text{ tal que } f|_X = g|_Y\}.$$

Na verdade, os operadores de fecho regulares podem ser definidos num ambiente categorial (veja-se [18]) e têm sido vastamente estudados. Em particular, são uma ferramenta muito útil na investigação da boa-copotenciação de algumas categorias, visto que eles permitem caracterizar os epimorfismos em termos de densidade. O domínio de uma subálgebra no sentido de Isbell e o fecho regular de um subespaço no sentido de Salbany são afinal exemplos de operadores de fecho regulares em categorias.

Definição 4.5 Seja \mathcal{X} uma categoria \mathcal{M} -completa com \mathcal{M} contendo todos os monomorfismos regulares de \mathcal{X} e seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{X} .

O *operador de fecho regular* em \mathcal{X} relativamente a \mathcal{M} e induzido por \mathcal{A} , que denotaremos por

$$r_{\mathcal{A}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M},$$

faz corresponder a cada $m \in \mathcal{M}_X$ a intersecção de todos os n de \mathcal{M}_X tais que $m \leq n$ e n é o igualizador de um par de morfismos com codomínio em \mathcal{A} .

É fácil verificar que $r_{\mathcal{A}}$ é de facto um operador de fecho no sentido definido atrás. Além disso, é idempotente.

Observação 4.6 Assinalamos aqui duas propriedades importantes e bem conhecidas do operador de fecho regular:

1. ([18, 20]) *Se \mathcal{X} tem igualizadores e $r_{\mathcal{A}}$ é um operador de fecho regular em \mathcal{X} induzido por uma subcategoria \mathcal{A} , então os morfismos $r_{\mathcal{A}}$ -densos de \mathcal{X} são exactamente os morfismos canceláveis relativamente a \mathcal{A} . Em particular, os epimorfismos de \mathcal{A} são os morfismos de \mathcal{A} que são $r_{\mathcal{A}}$ -densos.*
2. (cf. [15]) *Seja \mathcal{X} uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbf{M})$ com igualizadores, seja $\text{MonoReg}(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{M} \cap \text{Mor}(\mathcal{X})$ e sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} subcategorias de \mathcal{X} tais que $\mathbf{M}(\mathcal{B}) = \mathbf{M}(\mathcal{A})$. Então, os operadores de fecho regulares relativamente a \mathcal{M} e induzidos por \mathcal{A} e \mathcal{B} coincidem, ou seja,*

$$r_{\mathcal{A}} = r_{\mathcal{B}}.$$

Como consequência de 1. e 2., se $\mathbf{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$, então os epimorfismos de \mathcal{X} são precisamente os morfismos de \mathcal{X} que são $r_{\mathcal{A}}$ -densos.

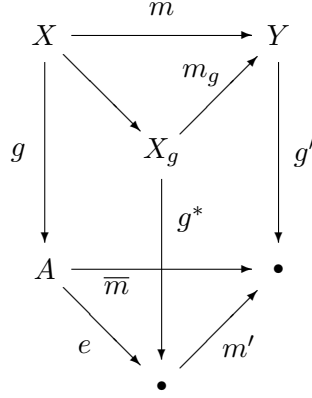
5 O operador de fecho ortogonal

Até ao fim deste capítulo, a menos que seja explicitado o contrário, \mathcal{X} será uma categoria \mathcal{M} -completa e com somas amalgamadas, tal que \mathcal{M} contém todos os isomorfismos e é fechada para a composição; a estrutura de factorização para morfismos em \mathcal{X} associada à \mathcal{M} -completude será denotada por $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$.

Nesta secção introduzimos o operador de fecho ortogonal que será o principal utensílio para o resto do capítulo.

Definição 5.1 Seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{X} . Para cada $m : X \rightarrow Y$ em \mathcal{M} , denotamos por $c_{\mathcal{A}}(m) : \overline{X} \rightarrow Y$ o morfismo de \mathcal{M} definido como se segue:

(C) Para cada $g : X \rightarrow A$ com A em \mathcal{A} , formamos uma soma amalgamada (\bar{m}, g') de (m, g) em \mathcal{X} . Seja $m' \cdot e$ uma factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ de \bar{m} e seja (m_g, g^*) um produto fibrado de (m', g') .



Seja $P_{\mathcal{A}}(m) = \{m_g \mid g : X \rightarrow A, A \in \mathcal{A}\}$. O morfismo $c_{\mathcal{A}}(m) : \bar{X} \rightarrow Y$ é a intersecção de $P_{\mathcal{A}}(m)$.

Evidentemente o morfismo $c_{\mathcal{A}}(m)$ pertence a \mathcal{M} . Provamos agora que $c_{\mathcal{A}}$ é um operador de fecho.

Proposição 5.2 *Para cada subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} , a aplicação $c_{\mathcal{A}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é um operador de fecho em \mathcal{X} relativamente a \mathcal{M} .*

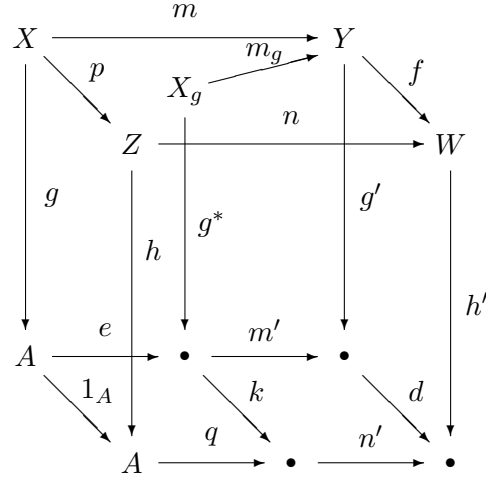
Demonstração. Mostramos primeiro que $c_{\mathcal{A}}$ é functorial. Seja

$$(p, f) : (m : X \rightarrow Y) \rightarrow (n : Z \rightarrow W)$$

um morfismo na categoria \mathcal{M} . Vamos definir $c_{\mathcal{A}}(p, f)$. Para cada $(h : Z \rightarrow A) \in \mathcal{X}(Z, \mathcal{A})$, seja (\bar{n}, h') uma soma amalgamada de (n, h) , seja $n' \cdot q$ uma factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ de \bar{n} e seja (n_h, h^*) um produto fibrado de (n', h') . Para $g = h \cdot p$, suponhamos que os morfismos \bar{m}, g', m', e, m_g e g^* são determinados como em (C). Atendendo a que

$$(h' \cdot f) \cdot m = h' \cdot n \cdot p = \bar{n} \cdot h \cdot p = \bar{n} \cdot g$$

e (\bar{m}, g') é uma soma amalgamada de (m, g) , existe um único morfismo d tal que $h' \cdot f = d \cdot g'$ e $\bar{n} = d \cdot \bar{m}$. Da última igualdade obtemos que $n' \cdot q = d \cdot m' \cdot e$ e, pela propriedade da diagonal, existe um único morfismo k tal que $k \cdot e = q$ e $n' \cdot k = d \cdot m'$.



Temos então que

$$n' \cdot (k \cdot g^*) = d \cdot m' \cdot g^* = d \cdot g' \cdot m_g = h' \cdot (f \cdot m_g).$$

Como (n_h, h^*) é um produto fibrado de (n', h') , existe um morfismo r_h tal que

$$f \cdot m_{h \cdot p} = f \cdot m_g = n_h \cdot r_h.$$

Agora, para cada $h \in \mathcal{X}(Z, \mathcal{A})$, seja t_h o morfismo único que satisfaz $m_{h \cdot p} \cdot t_h = c_{\mathcal{A}}(m)$.

Então,

$$n_h \cdot (r_h \cdot t_h) = f \cdot m_{h \cdot p} \cdot t_h = f \cdot c_{\mathcal{A}}(m).$$

Conseqüentemente, atendendo a que $c_{\mathcal{A}}(n) : \bar{Z} \rightarrow W$ é uma intersecção de $P_{\mathcal{A}}(n)$, existe um e um só morfismo $u : \bar{X} \rightarrow \bar{Z}$ tal que $f \cdot c_{\mathcal{A}}(m) = c_{\mathcal{A}}(n) \cdot u$.

Tomando

$$c_{\mathcal{A}}(p, f) = (u, f) : c_{\mathcal{A}}(m) \rightarrow c_{\mathcal{A}}(n),$$

é fácil ver que $c_{\mathcal{A}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é um functor para o qual $u \cdot c = u$, onde u é o functor codomínio de \mathcal{M} para \mathcal{X} .

Por fim, mostramos que existe uma transformação natural $\delta : Id_u \rightarrow c$ tal que $u \cdot \delta = Id_u$. Seja $(m : X \rightarrow Y) \in \mathcal{M}$. Para cada $g \in \mathcal{X}(X, \mathcal{A})$, existe um único morfismo $d_g : X \rightarrow X_g$ tal que

$$m_g \cdot d_g = m \text{ e } g^* \cdot d_g = e \cdot g.$$

Então, como $c_{\mathcal{A}}(m) : \bar{X} \rightarrow Y$ é uma intersecção de $P_{\mathcal{A}}(m)$, atendendo à primeira igualdade, existe um e um só morfismo $d_{\mathcal{A}}(m) : X \rightarrow \bar{X}$ tal que $c_{\mathcal{A}}(m) \cdot d_{\mathcal{A}}(m) = m$. A família

de morfismos

$$\delta_m = ((d_{\mathcal{A}}(m), 1_Y) : m \rightarrow_{\mathcal{A}} (m)), \quad m \in \mathcal{M},$$

define uma transformação natural $\delta : Id_{\mathcal{M}} \rightarrow c_{\mathcal{A}}$ tal que $u\delta = Id_u$. \square

Definição 5.3 O operador de fecho $c_{\mathcal{A}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ apresentado em 5.1 e 5.2 será chamado *operador de fecho ortogonal* em \mathcal{X} relativamente a \mathcal{M} induzido por \mathcal{A} .

Notação 5.4 Do mesmo modo que na demonstração anterior, ao longo desta dissertação, $d_{\mathcal{A}}(m)$ denotará sempre o único morfismo que preenche a igualdade $m = c_{\mathcal{A}}(m) \cdot d_{\mathcal{A}}(m)$.

Observação 5.5 Podemos definir o operador de fecho ortogonal, assumindo que \mathcal{X} , em vez de ser \mathcal{M} -completa, goza apenas das seguintes propriedades mais fracas:

- Se $m \in \mathcal{M}$, o produto fibrado de m ao longo de um morfismo arbitrário g com o mesmo codomínio que m existe e pertence a \mathcal{M} sempre que em \mathcal{X} existir um diagrama comutativo da forma

$$\begin{array}{ccc} & \longrightarrow & \\ \downarrow & m & \downarrow g \\ & \longrightarrow & \end{array} .$$

- Se $(X_i \xrightarrow{m_i} Y)_I$ é uma família de morfismos de \mathcal{M} tal que para algum objecto X de \mathcal{X} existem morfismos $X \xrightarrow{d_i} X_i$, $i \in I$, tais que $m_i \cdot d_i = m_{i'} \cdot d_{i'}$ para todo $i, i' \in I$, então a intersecção de $(m_i)_I$ existe e pertence a \mathcal{M} .

Por exemplo, seja Met_* a categoria que se obtém de Met tirando-lhe o espaço vazio. Então Met_* tem somas amalgamadas (apesar de Met não as ter) e satisfaz as duas condições anteriores, para \mathcal{M} a classe de todas as imersões, mas não é \mathcal{M} -completa. Um comportamento análogo tem a categoria $Norm_*$ que também se obtém de $Norm$ tirando-lhe o espaço vazio.

Observação 5.6 Como consequência imediata da definição de operador de fecho ortogonal, surgem-nos as seguintes propriedades:

1. O operador de fecho ortogonal induzido por uma subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} é discreto na subclasse de morfismos com domínios em \mathcal{A} , ou seja, para todo $m \in \mathcal{M}$ com domínio em \mathcal{A} , $c_{\mathcal{A}}(m) = m$.
2. Se \mathcal{A} e \mathcal{B} são subcategorias de \mathcal{X} tais que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, então $c_{\mathcal{B}} \leq c_{\mathcal{A}}$.

O lema seguinte será usado nas demonstrações das Proposições 5.8 e 5.9 a seguir.

Lema 5.7 *Seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{X} . Supondo que $\text{MonoCin}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{M}$, se $a, b : Y \rightarrow A$ é um par de morfismos com $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ e $(m : X \rightarrow Y) \in \mathcal{M}$, então*

$$a \cdot m = b \cdot m \implies a \cdot c_{\mathcal{A}}(m) = b \cdot c_{\mathcal{A}}(m).$$

Demonstração. Seja $g = a \cdot m = b \cdot m$ e sejam (\bar{m}, g') , $m' \cdot e$ e (m_g, g^*) determinados como em (C). Vamos mostrar que $a \cdot m_g = b \cdot m_g$. A igualdade $1_A \cdot g = a \cdot m$ implica a existência de um morfismo único t tal que $t \cdot \bar{m} = 1_A$ e $t \cdot g' = a$; logo $t \cdot m' \cdot e = t \cdot \bar{m} = 1_A$ e então, como $e \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}$, e é um isomorfismo. Analogamente, existe um morfismo único t' tal que $t' \cdot \bar{m} = 1_A$ e $t' \cdot g' = b$. Então

$$\begin{aligned} a \cdot m_g &= t \cdot g' \cdot m_g = t \cdot m' \cdot g^* = t \cdot \bar{m} \cdot e^{-1} \cdot g^* = e^{-1} \cdot g^* = \\ &= t' \cdot \bar{m} \cdot e^{-1} \cdot g^* = t' \cdot m' \cdot g^* = t' \cdot g' \cdot m_g \\ &= b \cdot m_g. \end{aligned}$$

Seja t_g o morfismo que preenche a igualdade $m_g \cdot t_g = c_{\mathcal{A}}(m)$. Então

$$a \cdot c_{\mathcal{A}}(m) = a \cdot m_g \cdot t_g = b \cdot m_g \cdot t_g = b \cdot c_{\mathcal{A}}(m). \quad \square$$

Seguidamente relacionamos o operador de fecho $c_{\mathcal{A}}$ com o operador de fecho regular induzido pela mesma subcategoria:

Proposição 5.8 *Se $\text{MonoReg}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{M}$, então, para toda a subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} , $c_{\mathcal{A}} \leq r_{\mathcal{A}}$.*

Demonstração. Dado $m : X \rightarrow Y$ em \mathcal{M} , seja n outro morfismo em \mathcal{M} com codomínio em Y tal que $m \leq n$ e $n = \text{ig}(a, b)$ onde $a, b : Y \rightarrow A$ é um par de morfismos com codomínio em \mathcal{A} . Então, temos que $a \cdot m = b \cdot m$ e, por 5.7, $a \cdot c_{\mathcal{A}}(m) = b \cdot c_{\mathcal{A}}(m)$. Mas isto implica que $c_{\mathcal{A}}(m) \leq n$.

Por conseguinte, atendendo à definição de $r_{\mathcal{A}}$, $c_{\mathcal{A}}(m) \leq r_{\mathcal{A}}(m)$. \square

É fácil concluir que o operador de fecho ortogonal é, em geral, distinto do regular. Basta reparar que se $\mathcal{A} = \mathcal{X}$ então o operador de fecho $c_{\mathcal{A}}$ é discreto e, portanto, os morfismos $c_{\mathcal{A}}$ -densos são justamente todos os morfismos de \mathcal{E} . Mas \mathcal{E} pode evidentemente ser diferente da classe dos epimorfismos, que, sob condições muito fracas, é precisamente a classe dos morfismos $r_{\mathcal{A}}$ -densos, como mencionámos em 4.6. Vários exemplos com $\mathcal{A} \neq \mathcal{X}$ e morfismos \mathcal{A} -canceláveis que não são $c_{\mathcal{A}}$ -densos serão dados mais à frente.

Vamos ver que os morfismos $c_{\mathcal{A}}$ -densos têm um papel importante na caracterização dos morfismos de \mathcal{A}^\perp .

Proposição 5.9 *Supondo que $\text{MonoCin}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{M}$, todo o morfismo $c_{\mathcal{A}}$ -denso de \mathcal{M} é \mathcal{A} -cancelável.*

Demonstração. Suponhamos que $a \cdot m = b \cdot m$, onde a e b são morfismos com codomínio em \mathcal{A} e $m : X \rightarrow Y$ é um morfismo denso em \mathcal{M} . Então $c_{\mathcal{A}}(m) \cong 1_Y$ e, atendendo a 5.7, decorre que $a = b$. \square

Corolário 5.10 *Supondo que \mathcal{E} é uma classe de epimorfismos, todo o morfismo $c_{\mathcal{A}}$ -denso é \mathcal{A} -cancelável.*

6 Morfismos densos e morfismos de \mathcal{A}^\perp

De agora em diante assumimos que \mathcal{X} é uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbf{M})$, com \mathbf{M} um aglomerado de monofontes e $\mathcal{M} = \mathbf{M} \cap \text{Mor}(\mathcal{X})$. Como consequência \mathcal{E} é uma classe de epimorfismos (cf. [2], [72]). Além disso, continuamos a supor que \mathcal{X} tem somas amalgamadas.

Seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{X} . Atendendo a 2.12, o invólucro ortogonal de \mathcal{A} em \mathcal{X} coincide com o seu invólucro ortogonal em $\mathbf{M}(\mathcal{A})$. Logo, tendo em conta 1.2.2, é evidente que o invólucro ortogonal de \mathcal{A} é um invólucro reflectivo de \mathcal{A} em $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ se e só se o for em \mathcal{X} . Consequentemente, para caracterizar o invólucro ortogonal de \mathcal{A} em \mathcal{X} , bem como para determinar condições sob as quais $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é o invólucro reflectivo, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\mathbf{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$. Isto é assumido várias vezes no

resto do capítulo. Também supomos $\mathcal{X} = \mathbf{M}(\mathcal{A})$ para caracterizar a classe \mathcal{A}^\perp . Mas, mesmo neste caso, a condição $\mathcal{X} = \mathbf{M}(\mathcal{A})$ não é restritiva, já que, como vimos em 2.12.1, um morfismo f é ortogonal a \mathcal{A} se e só se a sua reflexão em $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ é ortogonal a \mathcal{A} .

Notação 6.1 Denotamos por $PS(\mathcal{M})$ a subclasse de \mathcal{M} de todos os morfismos para os quais a soma amalgamada ao longo de qualquer morfismo pertence a \mathcal{M} .

Portanto, $PS(\mathcal{M})$ é a maior de todas as subclasses de \mathcal{M} fechadas para somas amalgamadas. Além disso, como \mathcal{M} é fechada para a composição e cancelável à esquerda, o mesmo acontece a $PS(\mathcal{M})$.

A classe $PS(\mathcal{M})$ desempenha um papel crucial em quase todos os resultados apresentados neste capítulo. A segunda parte do Lema ?? indica uma razão para isso.

Os seguintes dois lemas serão úteis no que se segue.

Lema 6.2 *Seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{X} tal que $\mathbf{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$. Um morfismo f de \mathcal{X} pertence a $PS(\mathcal{M})$ se e só se*

(P) *a soma amalgamada de f ao longo de qualquer morfismo com codomínio em \mathcal{A} pertence a \mathcal{M} .*

Demonstração. Claramente, a condição (P) é necessária. Para mostrar que também é suficiente, consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow g & & \downarrow \bar{g} \\
 Z & \xrightarrow{\bar{f}} & \bullet \\
 \downarrow h_i & & \downarrow h'_i \\
 A_i & \xrightarrow{\bar{h}_i} & \bullet
 \end{array}$$

onde ambos os quadrados interiores são somas amalgamadas, $(h_i)_I$ pertence a \mathbf{M} e $A_i \in \text{Obj}(\mathcal{A})$. Como a condição (P) é satisfeita, \bar{h}_i pertence a \mathcal{M} . Então a fonte $(\bar{h}_i \cdot h_i)_I$ pertence também a \mathbf{M} . Consequentemente, atendendo a que \mathcal{X} é uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbf{M})$, as igualdades

$$\bar{h}_i \cdot h_i = h'_i \cdot \bar{f}, \quad i \in I$$

implicam que $\bar{f} \in \mathcal{M}$. □

Lema 6.3 *Seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{X} tal que $\mathbf{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$.*

1. *$\text{Inj}(\mathcal{A})$ consiste em precisamente todos os $m \in PS(\mathcal{M})$ tais que toda a soma amalgamada de m ao longo de um morfismo com codomínio em \mathcal{A} é um monomorfismo cindido.*
2. *\mathcal{A}^\perp consiste em precisamente todos os $m \in PS(\mathcal{M})$ tais que qualquer soma amalgamada de m ao longo de um morfismo com codomínio em \mathcal{A} é um isomorfismo.*

Demonstração.

1. É óbvio que se m é um morfismo de $PS(\mathcal{M})$ tal que qualquer soma amalgamada de m ao longo de um morfismo com codomínio em \mathcal{A} é um monomorfismo cindido, então é \mathcal{A} -injectivo. Reciprocamente, seja $f : X \rightarrow Y$ pertencente a $\text{Inj}(\mathcal{A})$. Então, como mostrámos em 2.17, $f \in \mathcal{M}$. Seja $g : X \rightarrow A$ um morfismo com codomínio em \mathcal{A} e seja (\bar{f}, \bar{g}) a soma amalgamada de (f, g) . Como f é \mathcal{A} -injectivo, existe algum morfismo $g' : Y \rightarrow A$ tal que $g' \cdot f = 1_A \cdot g$. Logo existe um único morfismo t tal que $t \cdot \bar{g} = g'$ e $t \cdot \bar{f} = 1_A$; assim, \bar{f} é um monomorfismo cindido; além disso, segue-se que $\bar{f} \in \mathcal{M}$ e, portanto, atendendo a 6.2, temos que $f \in PS(\mathcal{M})$.
2. Como $\mathcal{A}^\perp \subseteq \text{Inj}(\mathcal{A})$, é claro que $\mathcal{A}^\perp \subseteq PS(\mathcal{M})$. Por outro lado, se $f \in \mathcal{A}^\perp$, então f é \mathcal{A} -cancelável e assim, por 2.17, é um epimorfismo. Agora, usando o facto de os epimorfismos serem estáveis para somas amalgamadas, conclui-se facilmente que um morfismo f pertence a \mathcal{A}^\perp se e só se a soma amalgamada de m ao longo de um morfismo com codomínio em \mathcal{A} é um isomorfismo. □

Temos agora a seguinte caracterização da classe \mathcal{A}^\perp :

Teorema 6.4 *Para uma subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} tal que $\mathbf{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$, \mathcal{A}^\perp é constituída por todos os morfismos $c_{\mathcal{A}}$ -densos em $PS(\mathcal{M})$.*

Demonstração. Seja $m \in \mathcal{A}^\perp$. Então, por 6.3.2, $m \in PS(\mathcal{M})$ e cada $m_g \in P_{\mathcal{A}}(m)$ é um isomorfismo; isto implica que $c_{\mathcal{A}}(m) \cong 1_Y$, i.e., m é denso.

Reciprocamente, seja $m : X \rightarrow Y$ pertencente a $PS(\mathcal{M})$ e tal que $c_{\mathcal{A}}(m) \cong 1_Y$. Então, todo $m_g \in P_{\mathcal{A}}(m)$ tem de ser um isomorfismo. Recordemos agora que todo o

produto fibrado de uma soma amalgamada é uma soma amalgamada, i.e., se (m', g') é uma soma amalgamada de (m, g) e (m^*, g^*) é um produto fibrado de (m', g') então (m', g') é uma soma fibrada de (m^*, g^*) . Sendo assim, para cada $g \in \mathcal{X}(X, \mathcal{A})$, uma soma amalgamada de (m, g) é uma soma amalgamada de m_g ao longo de um certo morfismo. Logo é um isomorfismo e, portanto, atendendo a 6.3.2, $m \in \mathcal{A}^\perp$. \square

Como já vimos, e em contraste com o que acontece para operadores de fecho regulares, um epimorfismo pode não ser $c_{\mathcal{A}}$ -denso mesmo admitindo que $\mathcal{X} = \mathbb{M}(\mathcal{A})$. A proposição seguinte mostra que numa subclasse especial de morfismos de \mathcal{X} os epimorfismos são exactamente os morfismos $c_{\mathcal{A}}$ -densos.

Proposição 6.5 *Seja \mathcal{D} a subclasse de $PS(\mathcal{M})$ definida por*

$$\mathcal{D} = \{n \in \mathcal{M} \mid n \cong d_{\mathcal{A}}(m) \text{ para algum } m \in PS(\mathcal{M})\}.$$

Então $\mathcal{D} \subseteq Inj(\mathcal{A})$ e, sempre que $\mathbb{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$, um morfismo de \mathcal{D} é $c_{\mathcal{A}}$ -denso se e só se for um epimorfismo.

Demonstração. Mostremos primeiro que $\mathcal{D} \subseteq Inj(\mathcal{A})$. Para $d_{\mathcal{A}}(m) : X \rightarrow \bar{X}$ em \mathcal{D} , com $m \in PS(\mathcal{M})$, se $g : X \rightarrow A$ é um morfismo com codomínio em \mathcal{A} , seja (m', g') uma soma amalgamada de (m, g) e seja (m_g, g^*) um produto fibrado de (m', g') . Então, para o morfismo único d_g tal que $m_g \cdot d_g = c_{\mathcal{A}}(m)$, temos que

$$\begin{aligned} m' \cdot g &= g' \cdot c_{\mathcal{A}}(m) \cdot d_{\mathcal{A}}(m) = g' \cdot m_g \cdot d_g \cdot d_{\mathcal{A}}(m) \\ &= m' \cdot g^* \cdot d_g \cdot d_{\mathcal{A}}(m). \end{aligned}$$

Como m' é um monomorfismo, decorre que $g = (g^* \cdot d_g) \cdot d_{\mathcal{A}}(m)$. Portanto, $d_{\mathcal{A}}(m) \in Inj(\mathcal{A})$.

Agora, por um lado, atendendo a 2.17.1 e 5.10, todo o epimorfismo em \mathcal{D} é $c_{\mathcal{A}}$ -denso; por outro lado, como $\mathbb{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$, $\mathcal{A}^\perp = Inj(\mathcal{A}) \cap Epi(\mathcal{X})$ (usando 2.17) e, pelo teorema anterior, $\mathcal{A}^\perp \subseteq \mathcal{D}$. Temos então que

$$\mathcal{A}^\perp = (\mathcal{D} \cap Inj(\mathcal{A})) \cap Epi(\mathcal{X}) = \mathcal{D} \cap Epi(\mathcal{X}).$$

Consequentemente, usando 6.4, todo o epimorfismo pertencente a \mathcal{D} é $c_{\mathcal{A}}$ -denso. \square

7 Objectos fortemente fechados e invólucros ortogonais

Em [40], J. Isbell deu a seguinte definição, no quadro duma categoria de álgebras: uma álgebra A é *absolutamente fechada* se, para qualquer imersão de A noutra álgebra B , o domínio de A em B (a definição de domínio de A em B foi dada antes da Definição 4.5) é precisamente A . Em [19], D. Dikranjan e E. Giuli estenderam este conceito ao ambiente geral dos operadores de fecho regulares. Alargando ainda este conceito a todos os operadores de fecho, obtemos a seguinte definição.

Definição 7.1 Para um operador de fecho $c : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ de \mathcal{X} , um objecto $X \in \mathcal{X}$ diz-se *absolutamente c -fechado* se todo o morfismo em \mathcal{M} com domínio X é c -fechado.

Os objectos absolutamente c -fechados foram estudados em [19] e [64], para c um operador de fecho regular.

Nesta secção veremos que:

- A subcategoria de todos os objectos absolutamente $c_{\mathcal{A}}$ -fechados está sempre contida no invólucro ortogonal $\mathcal{O}(\mathcal{A})$.
- Se $c_{\mathcal{A}}$ preserva morfismos de $PS(\mathcal{M})$ (assim, é também um operador de fecho quando restringido a $PS(\mathcal{M})$), a subcategoria de todos os objectos absolutamente fechados relativamente a

$$c_{\mathcal{A}} : PS(\mathcal{M}) \rightarrow PS(\mathcal{M})$$

coincide com o invólucro ortogonal de \mathcal{A} .

Realçamos que, pelo contrário, a subcategoria de todos os objectos absolutamente fechados relativamente ao operador de fecho regular induzido por \mathcal{A} tem um mau comportamento relativamente ao invólucro ortogonal, mesmo quando $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é reflectiva (veja-se [64] e a observação em 8.8 à frente).

Tendo em vista caracterizar o invólucro ortogonal de uma subcategoria de \mathcal{X} por meio do operador de fecho ortogonal, consideremos a seguinte

Definição 7.2 Um objecto X de \mathcal{X} diz-se *fortemente \mathcal{A} -fechado* se todo o morfismo de $PS(\mathcal{M})$ com domínio X for $c_{\mathcal{A}}$ -fechado.

Designamos por $SCI(\mathcal{A})$ a subcategoria de todos os objectos fortemente \mathcal{A} -fechados.

Vamos provar que, num quadro apropriado, a subcategoria $\mathcal{S}Cl(\mathcal{A})$ e o invólucro ortogonal $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ coincidem.

É óbvio que todo o objecto em \mathcal{A} é absolutamente $c_{\mathcal{A}}$ -fechado e que $\mathcal{S}Cl(\mathcal{A})$ contém todos os objectos absolutamente $c_{\mathcal{A}}$ -fechados. Em seguida mostramos que, quando \mathcal{X} é o invólucro \mathcal{E} -reflectivo de \mathcal{A} , a inclusão $\mathcal{S}Cl(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{A})$ também se verifica.

Proposição 7.3 *Para cada subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} , se $\mathbb{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$, então $\mathcal{S}Cl(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Seja $\mathbb{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$ e seja X um objecto fortemente \mathcal{A} -fechado de \mathcal{X} . Com o propósito de mostrar que $X \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$, consideremos $(m : Y \rightarrow Z) \in \mathcal{A}^{\perp}$ e um morfismo $f : Y \rightarrow X$. Seja agora $(n : X \rightarrow W, f' : Z \rightarrow W)$ a soma amalgamada de (m, f) . Então $(n : X \rightarrow W) \in \mathcal{A}^{\perp}$ e assim, por 6.4, n é $c_{\mathcal{A}}$ -denso, pelo que $c_{\mathcal{A}}(n) \cong 1_W$. Por outro lado, como X é fortemente \mathcal{A} -fechado, $c_{\mathcal{A}}(n) \cong n$. Temos então que $n \cong 1_W$ e $(n^{-1} \cdot f') \cdot m = f$. Fica assim provado que X é m -injectivo. Mas, por 2.17, $m \in \text{Epi}(\mathcal{X})$, o que garante que $X \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$. \square

Observação 7.4 Tanto a inclusão de \mathcal{A} na subcategoria de todos os objectos absolutamente $c_{\mathcal{A}}$ -fechados como a inclusão desta última em $\mathcal{S}Cl(\mathcal{A})$ podem ser estritas (cf. 8.8). Porém, não conhecemos nenhum exemplo para o qual se tenha $\mathcal{O}(\mathcal{A}) \neq \mathcal{S}Cl(\mathcal{A})$.

A seguir mostramos que a suposição de que $c_{\mathcal{A}}$ preserva $PS(\mathcal{M})$ -morfismos, i. e., $c_{\mathcal{A}}(m) \in PS(\mathcal{M})$ sempre que $m \in PS(\mathcal{M})$, tem consequências muito significativas.

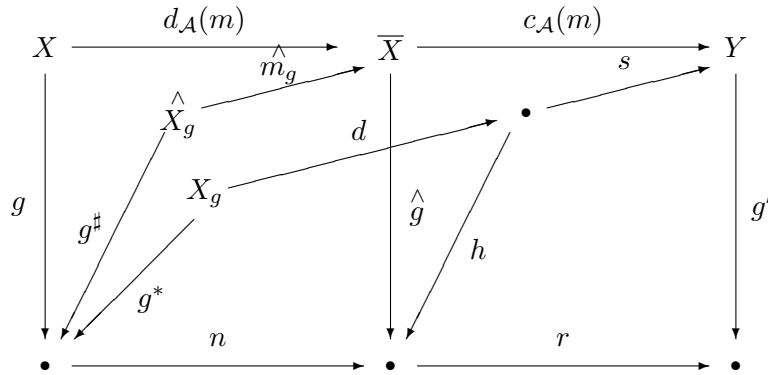
Teorema 7.5 *Se \mathcal{A} é uma subcategoria de \mathcal{X} tal que $\mathbb{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$, o operador de fecho ortogonal $c_{\mathcal{A}}$ preserva morfismos de $PS(\mathcal{M})$ se e só se for fracamente hereditário em $PS(\mathcal{M})$. Neste caso, $c_{\mathcal{A}} : PS(\mathcal{M}) \rightarrow PS(\mathcal{M})$ é um operador de fecho idempotente e fracamente hereditário e $\mathcal{O}(\mathcal{A}) = \mathcal{S}Cl(\mathcal{A})$.*

Demonstração.

I. Se $c_{\mathcal{A}}$ é fracamente hereditário em $PS(\mathcal{M})$, consideremos um morfismo $m : X \rightarrow Y$ de $PS(\mathcal{M})$, uma sua factorização $X \xrightarrow{d_{\mathcal{A}}(m)} \bar{X} \xrightarrow{c_{\mathcal{A}}(m)} Y$ e um morfismo $f : \bar{X} \rightarrow Z$. Seja (m^{\sharp}, f^{\sharp}) uma soma amalgamada de $(c_{\mathcal{A}}(m), f)$. Atendendo a 6.5, o facto de que o morfismo $d_{\mathcal{A}}(m) : X \rightarrow \bar{X}$ é $c_{\mathcal{A}}$ -denso implica que é um epimorfismo. Como (m^{\sharp}, f^{\sharp})

é uma soma amalgamada de $(c_{\mathcal{A}}(m), f)$, é fácil ver que (m^{\sharp}, f^{\sharp}) é também uma soma amalgamada de $(m, f \cdot d_{\mathcal{A}}(m))$. Então $m^{\sharp} \in \mathcal{M}$. Por conseguinte, $c_{\mathcal{A}}(m) \in PS(\mathcal{M})$.

II. Reciprocamente, provemos que, se preservar morfismos de $PS(\mathcal{M})$, $c_{\mathcal{A}}$ é fracamente hereditário. Dado $(m : X \rightarrow Y) \in PS(\mathcal{M})$, queremos mostrar que $c_{\mathcal{A}}(d_{\mathcal{A}}(m)) \cong 1_{\overline{X}}$. Para cada $g \in \mathcal{X}(X, \mathcal{A})$, seja (n, \hat{g}) uma soma amalgamada de $(d_{\mathcal{A}}(m), g)$. Posto que $PS(\mathcal{M})$ é cancelável à esquerda, $d_{\mathcal{A}}(m) \in PS(\mathcal{M})$ e, assim, $n \in \mathcal{M}$. Seja (\hat{m}_g, g^{\sharp}) um produto fibrado de (n, \hat{g}) , seja (r, g') uma soma amalgamada de $(c_{\mathcal{A}}(m), \hat{g})$, seja (s, h) um produto fibrado de (r, g') e seja (d, g^*) um produto fibrado de (n, h) , como ilustrado pelo diagrama seguinte.



Então $(s \cdot d, g^*)$ é um produto fibrado da soma amalgamada de (m, g) . Pelo que $s \cdot d \in P_{\mathcal{A}}(m)$ e, então, existe algum morfismo $t_g : \overline{X} \rightarrow X_g$ tal que $s \cdot d \cdot t_g = c_{\mathcal{A}}(m)$. Temos assim que

$$r \cdot \hat{g} = g' \cdot c_{\mathcal{A}}(m) = g' \cdot s \cdot d \cdot t_g = r \cdot h \cdot d \cdot t_g = r \cdot n \cdot g^* \cdot t_g.$$

Segue-se que $\hat{g} \cdot 1_{\overline{X}} = n \cdot g^* \cdot t_g$, porque $r \in \mathcal{M}$. O facto de (\hat{m}_g, g^{\sharp}) ser um produto fibrado de (n, \hat{g}) assegura a existência de um morfismo $w : \overline{X} \rightarrow X_g$ tal que $\hat{m}_g \cdot w = 1_{\overline{X}}$. Assim, para cada $g \in \mathcal{X}(X, \mathcal{A})$ obtemos $\hat{m}_g \cong 1_{\overline{X}}$, logo $c_{\mathcal{A}}(d_{\mathcal{A}}(m)) \cong 1_{\overline{X}}$.

III. Seja agora $c_{\mathcal{A}} : PS(\mathcal{M}) \rightarrow PS(\mathcal{M})$ um operador de fecho fracamente hereditário. Atendendo a 6.4 e ao facto de que \mathcal{A}^{\perp} é fechada para a composição, a classe de todos os morfismos $c_{\mathcal{A}}$ -densos e pertencentes a $PS(\mathcal{M})$ é fechada para a composição. Juntamente com o facto de $c_{\mathcal{A}} : PS(\mathcal{M}) \rightarrow PS(\mathcal{M})$ ser fracamente hereditário, isto implica, por 4.4, que $c_{\mathcal{A}} : PS(\mathcal{M}) \rightarrow PS(\mathcal{M})$ é idempotente.

Resta-nos mostrar que $\mathcal{O}(\mathcal{A}) \subseteq SCl(\mathcal{A})$. Seja então $X \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$. Dado $(m : X \rightarrow Y) \in PS(\mathcal{M})$, o morfismo $d_{\mathcal{A}}(m)$ é $c_{\mathcal{A}}$ -denso e pertence a $PS(\mathcal{M})$; atendendo

a 6.4, segue-se que $d_{\mathcal{A}}(m)$ pertence a \mathcal{A}^\perp . Como $X \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$ e $(d_{\mathcal{A}}(m) : X \rightarrow \overline{X}) \in \mathcal{A}^\perp$, temos que $d_{\mathcal{A}}(m)$ é um isomorfismo e, então, $c_{\mathcal{A}}(m) \cong m$. Fica assim provado que X é fortemente \mathcal{A} -fechado. Por conseguinte, usando 7.3, obtemos que $\mathcal{O}(\mathcal{A}) = SCl(\mathcal{A})$. \square

Corolário 7.6 *Se $\mathcal{M} = PS(\mathcal{M})$ e \mathcal{A} é uma subcategoria de \mathcal{X} tal que $\mathbb{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$, então $c_{\mathcal{A}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é um operador de fecho idempotente e fracamente hereditário e $\mathcal{O}(\mathcal{A}) = SCl(\mathcal{A})$.* \square

Observação 7.7 Existem categorias $(\mathcal{E}, \mathbb{M})$ para as quais vale a igualdade $\mathcal{M} = PS(\mathcal{M})$. É este o caso, por exemplo, das categorias Top , Top_0 , Met_* , $Norm_*$ e $TfAb$, quando \mathbb{M} é o aglomerado das monofontes iniciais.

Não obstante, existem vários exemplos de categorias para as quais $\mathcal{M} \neq PS(\mathcal{M})$. Na última secção do presente capítulo, estudaremos a classe $PS(\mathcal{M})$ para algumas dessas categorias.

O corolário seguinte dá condições para que o operador de fecho ortogonal e o regular coincidam.

Corolário 7.8 *Suponhamos que \mathcal{X} tem igualizadores, $MonoReg(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{M} = PS(\mathcal{M})$ e \mathcal{A} é uma subcategoria de \mathcal{X} tal que $\mathbb{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$. Se o operador de fecho regular $r_{\mathcal{A}}$ é fracamente hereditário e todos os epimorfismos de \mathcal{X} são $c_{\mathcal{A}}$ -densos, então $r_{\mathcal{A}} = c_{\mathcal{A}}$.*

Demonstração. Sob as condições do corolário, os morfismos $r_{\mathcal{A}}$ -densos são justamente os epimorfismos de \mathcal{X} e, usando 4.6, não são mais do que os morfismos $c_{\mathcal{A}}$ -densos. Seja então $m : X \rightarrow Y$ um morfismo de \mathcal{M} . Atendendo a 5.8, $c_{\mathcal{A}} \leq r_{\mathcal{A}}$ e, portanto, existe um morfismo d tal que $c_{\mathcal{A}}(m) = r_{\mathcal{A}}(m) \cdot d$. Como $r_{\mathcal{A}}$ é fracamente hereditário, o morfismo $d \cdot d_{\mathcal{A}}(m)$ é $r_{\mathcal{A}}$ -denso; logo, por hipótese, é também $c_{\mathcal{A}}$ -denso. Por outro lado, pelo facto de $c_{\mathcal{A}}$ ser um operador de fecho idempotente e fracamente hereditário (veja-se 7.6), decorre que \mathcal{X} tem um sistema de factorização ($c_{\mathcal{A}}$ -denso, $c_{\mathcal{A}}$ -fechado) relativamente a \mathcal{M} (veja-se 4.3), pelo que a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{d_{\mathcal{A}}(m)} & \bullet & \xrightarrow{d} & \bullet \\
 \downarrow 1_X & & & & \searrow r_{\mathcal{A}}(m) \\
 X & \xrightarrow{d_{\mathcal{A}}(m)} & \bullet & \xrightarrow{c_{\mathcal{A}}(m)} & Y
 \end{array}$$

implica a existência de um morfismo t tal que $t \cdot d \cdot d_{\mathcal{A}}(m) = d_{\mathcal{A}}(m)$. Assim, deduz-se que d é um isomorfismo e, conseqüentemente, $r_{\mathcal{A}}(m) \cong c_{\mathcal{A}}(m)$. \square

Acerca dos operadores de fecho regulares, e atendendo à Observação 4.6, acontece que se \mathcal{X} tem igualzadores e $Monoreg(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{M}$, então, para quaisquer duas subcategorias \mathcal{A} e \mathcal{B} de \mathcal{X} com o mesmo invólucro \mathcal{E} -reflectivo, é válida a igualdade $r_{\mathcal{A}} = r_{\mathcal{B}}$. A proposição e o corolário que vêm a seguir mostram que, sob condições apropriadas, se verifica um resultado semelhante quando *regular* é substituído por *ortogonal* e o *invólucro \mathcal{E} -reflectivo* é substituído pelo *invólucro ortogonal*.

Proposição 7.9 *Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} subcategorias de \mathcal{X} tais que $\mathbb{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$.*

1. *Se $c_{\mathcal{A}}(m) \leq c_{\mathcal{B}}(m)$ para todo $m \in PS(\mathcal{M})$, então $\mathcal{O}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{A})$.*
2. *Se $c_{\mathcal{A}}$ preserva morfismos de $PS(\mathcal{M})$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{A})$, então*

$$(c_{\mathcal{A}} : PS(\mathcal{M}) \rightarrow PS(\mathcal{M})) \leq (c_{\mathcal{B}} : PS(\mathcal{M}) \rightarrow PS(\mathcal{M})).$$

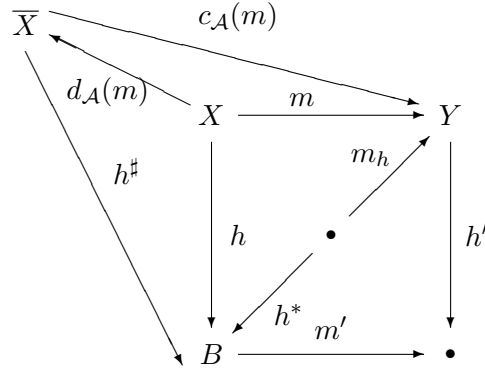
Demonstração.

1. Se $c_{\mathcal{A}} \leq c_{\mathcal{B}}$ em $PS(\mathcal{M})$, então todo o morfismo $c_{\mathcal{A}}$ -denso de $PS(\mathcal{M})$ é $c_{\mathcal{B}}$ -denso. Logo, usando 6.4, 6.5 e 5.9, obtemos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}^{\perp} &= \{m \in PS(\mathcal{M}) \mid m \text{ é } c_{\mathcal{A}}\text{-denso}\} \\
 &\subseteq \{m \in PS(\mathcal{M}) \mid m \text{ is } c_{\mathcal{B}}\text{-denso}\} \subseteq B^{\perp}
 \end{aligned}$$

e assim $\mathcal{O}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{A})$.

2. Dado $(m : X \rightarrow Y) \in PS(\mathcal{M})$, mostramos que $c_{\mathcal{A}}(m) \leq m_h$ para todo o $m_h \in P_{\mathcal{B}}(m)$ e então, como $c_{\mathcal{B}}(m) = \wedge P_{\mathcal{B}}(m)$, segue-se que $c_{\mathcal{A}}(m) \leq c_{\mathcal{B}}(m)$. Seja $h : X \rightarrow B$ um morfismo com codomínio em \mathcal{B} , seja (m', h') uma soma amalgamada de (m, h) e seja (m_h, h^*) um produto fibrado de (m', h') . Como $c_{\mathcal{A}}$ preserva morfismos de $PS(\mathcal{M})$ e $PS(\mathcal{M})$ é cancelável à esquerda, $d_{\mathcal{A}}(m) \in PS(\mathcal{M})$ e, atendendo a 7.5 e a 6.4, $d_{\mathcal{A}}(m) \in \mathcal{A}^{\perp}$. Posto que $B \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$, existe um morfismo h^{\sharp} tal que $h^{\sharp} \cdot d_{\mathcal{A}}(m) = h$.



Obtemos então que

$$h' \cdot c_{\mathcal{A}}(m) \cdot d_{\mathcal{A}}(m) = m' \cdot h = m' \cdot h\# \cdot d_{\mathcal{A}}(m)$$

e, pelo facto de $d_{\mathcal{A}}(m)$ ser um epimorfismo (por 6.5), segue-se que $h' \cdot c_{\mathcal{A}}(m) = m' \cdot h\#$. Como (m_h, h^*) é um produto fibrado de (m', h') , existe um morfismo t tal que $m_h \cdot t = c_{\mathcal{A}}(m)$, ou seja, $c_{\mathcal{A}}(m) \leq m_h$. \square

Corolário 7.10 *Se \mathcal{A} e \mathcal{B} são subcategorias de \mathcal{X} tais que $\mathbb{M}(\mathcal{A}) = \mathbb{M}(\mathcal{B}) = \mathcal{X}$ e $c_{\mathcal{A}}$ e $c_{\mathcal{B}}$ preservam morfismos de $PS(\mathcal{M})$ (em particular, se \mathcal{M} é estável para somas amalgamadas), então $c_{\mathcal{A}} = c_{\mathcal{B}}$ se e só se $\mathcal{O}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}(\mathcal{B})$.*

8 O operador de fecho ortogonal versus reflectividade

Suponhamos que $\mathbb{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$. Nesse caso, é evidente que se $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é reflectiva em \mathcal{X} então, para cada objecto X de \mathcal{X} , a reflexão de X em $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é um morfismo de $PS(\mathcal{M})$ com codomínio em $\mathcal{O}(\mathcal{A})$. O próximo teorema, que é o principal resultado desta secção, estabelece que se $c_{\mathcal{A}}$ preserva morfismos de $PS(\mathcal{M})$ e todo o objecto de \mathcal{X} é um $PS(\mathcal{M})$ -subobjecto de um objecto em $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ então $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é reflectiva.

Teorema 8.1 *Se \mathcal{A} é uma subcategoria de \mathcal{X} tal que $c_{\mathcal{A}}$ preserva morfismos de $PS(\mathcal{M})$ e para cada objecto X de \mathcal{X} existe um morfismo em $PS(\mathcal{M})$ com domínio X e codomínio em $\mathcal{O}(\mathcal{A})$, então $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é um invólucro reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{X} .*

Demonstração. Notemos que, sob os pressupostos considerados, $\mathbf{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$.

Comecemos então por provar que, quando Y é um objecto fortemente \mathcal{A} -fechado e $(m : X \rightarrow Y) \in PS(\mathcal{M})$, o domínio \overline{X} de $c_{\mathcal{A}}(m)$ é também fortemente \mathcal{A} -fechado. Dados Y e m nessas condições, seja $n : \overline{X} \rightarrow Z$ um morfismo em $PS(\mathcal{M})$. Queremos mostrar que $c_{\mathcal{A}}(n) \cong n$. Seja o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \overline{X} & \xrightarrow{n} & Z \\ c_{\mathcal{A}}(m) \downarrow & & \downarrow u \\ Y & \xrightarrow{n'} & \bullet \end{array}$$

uma soma amalgamada de $(n, c_{\mathcal{A}}(m))$. Então $n' \in PS(\mathcal{M})$ e $c_{\mathcal{A}}(n') \cong n'$. O morfismo $(c_{\mathcal{A}}(m), u) : n \rightarrow n'$ da categoria \mathcal{X}^2 pertence à categoria $PS(\mathcal{M})$. Seja $c_{\mathcal{A}}((c_{\mathcal{A}}(m), u)) = (t, u) : c_{\mathcal{A}}(n) \rightarrow c_{\mathcal{A}}(n')$. Posto que $c_{\mathcal{A}}(n') \cong n'$, existe um determinado morfismo t' para o qual o diagrama seguinte é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{c_{\mathcal{A}}(n)} & Z \\ t' \downarrow & & \downarrow u \\ Y & \xrightarrow{n'} & \bullet \end{array}$$

Portanto,

$$n' \cdot c_{\mathcal{A}}(m) \cdot d_{\mathcal{A}}(m) = u \cdot n \cdot d_{\mathcal{A}}(m) = u \cdot c_{\mathcal{A}}(n) \cdot d_{\mathcal{A}}(n) \cdot d_{\mathcal{A}}(m) = n' \cdot t' \cdot d_{\mathcal{A}}(n) \cdot d_{\mathcal{A}}(m). \quad (\text{II.2})$$

Dado que n' é um monomorfismo, segue-se que

$$c_{\mathcal{A}}(m) \cdot d_{\mathcal{A}}(m) = t' \cdot d_{\mathcal{A}}(n) \cdot d_{\mathcal{A}}(m). \quad (\text{II.3})$$

Ora, atendendo a 7.5, $c_{\mathcal{A}} : PS(\mathcal{M}) \rightarrow PS(\mathcal{M})$ é um operador de fecho idempotente e fracamente hereditário, e este facto implica que:

- $d_{\mathcal{A}}(n)$ e $d_{\mathcal{A}}(m)$ são morfismos $c_{\mathcal{A}}$ -densos que pertencem a $PS(\mathcal{M})$; em particular, por 6.5, $d_{\mathcal{A}}(m)$ é um epimorfismo;
- $c_{\mathcal{A}}(m)$ é $c_{\mathcal{A}}$ -fechado.

Então, por um lado, atendendo à igualdade (II.3), obtemos que

$$c_{\mathcal{A}}(m) \cdot 1_{\overline{X}} = t' \cdot d_{\mathcal{A}}(n);$$

por outro lado, a última igualdade e o facto de \mathcal{X} ter um sistema de factorização ($c_{\mathcal{A}}$ -denso, $c_{\mathcal{A}}$ -fechado) relativamente a $PS(\mathcal{M})$ (veja-se 4.3 e 7.5) implicam a existência de um morfismo s tal que $s \cdot d_{\mathcal{A}}(n) = 1_{\overline{X}}$. Por conseguinte, $d_{\mathcal{A}}(n)$ é um isomorfismo e, consequentemente, $c_{\mathcal{A}}(n) \cong n$.

Sejam agora $X \in \mathcal{X}$ e $(m : X \rightarrow Y) \in PS(\mathcal{M})$ com $Y \in \mathcal{O}(\mathcal{A})$. Então, atendendo a 6.4 e a 7.5, conclui-se que $d_{\mathcal{A}}(m) : X \rightarrow \overline{X}$ é uma reflexão de X em $\mathcal{O}(\mathcal{A})$. \square

Corolário 8.2 *Seja \mathcal{A} uma subcategoria de uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbb{M})$, \mathcal{M} -completa e com somas amalgamadas. Se \mathcal{M} é fechado para somas amalgamadas em $\mathbb{M}(\mathcal{A})$ e cada objecto X de $\mathbb{M}(\mathcal{A})$ é um \mathcal{M} -subobjecto de algum objecto em $\mathcal{O}(\mathcal{A})$, então o invólucro ortogonal de \mathcal{A} é também o seu invólucro reflectivo.* \square

Vem a propósito recordar aqui que os reflectores que preservam os morfismos de uma dada classe \mathcal{M} de monomorfismos foram estudados, por exemplo, em [54]. Na proposição seguinte mostramos que sob as condições precedentes os reflectores preservam sempre os morfismos de $PS(\mathcal{M})$.

Proposição 8.3 *Se \mathcal{A} é uma subcategoria \mathcal{M} -reflectiva de \mathcal{X} , então o correspondente reflector preserva morfismos de $PS(\mathcal{M})$.*

Demonstração. É evidente que, como \mathcal{A} é \mathcal{M} -reflectiva em \mathcal{X} , temos que $\mathbb{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$. Seja $R : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}$ um reflector, seja $m : X \rightarrow Y$ pertencente a $PS(\mathcal{M})$ e consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{m} & Y \\
 \downarrow r_X & & \downarrow r_Y \\
 & \bullet & \\
 & \nearrow m' & \searrow t \\
 RX & \xrightarrow{Rm} & RY
 \end{array}$$

onde (m', r') é uma soma amalgamada de (m, r_X) e t é o único morfismo que torna os dois triângulos mais pequenos comutativos. O facto de $r_X \in \mathcal{A}^\perp$ implica que $r' \in \mathcal{A}^\perp$, por 1.4.4, e então, visto que $r_Y \in \mathcal{A}^\perp$, decorre, atendendo a 1.4.2, que $t \in \mathcal{A}^\perp$, pelo que $t \in PS(\mathcal{M})$. Assim, o morfismo Rm é a composição de dois morfismos de $PS(\mathcal{M})$, logo pertence a $PS(\mathcal{M})$. \square

Observação 8.4 Da proposição anterior deduz-se que se \mathcal{M} é estável para somas amalgamadas então, para qualquer subcategoria \mathcal{M} -reflectiva \mathcal{A} de \mathcal{X} , o reflector correspondente preserva morfismos de \mathcal{M} . De facto, examinando a demonstração de 8.3, torna-se evidente que, em vez de \mathcal{M} ser estável para somas amalgamadas, basta que \mathcal{X} tenha \mathcal{M} -amalgamações, isto é, que a soma amalgamada de um par de morfismos de \mathcal{M} seja um par de morfismos de \mathcal{M} .

Proposição 8.5 *Se \mathcal{A} é uma subcategoria \mathcal{M} -reflectiva de \mathcal{X} , então:*

1. Para cada $X \xrightarrow{m} Y \in \mathcal{M}$ e cada reflexão $X \xrightarrow{r_X} RX$ de X em \mathcal{A} ,

$$c_{\mathcal{A}}(m) = m_{r_X},$$

ou seja, $c_{\mathcal{A}}(m)$ é obtido formando a soma amalgamada (\overline{m}, r') de (m, r_X) e tomando o produto fibrado do morfismo que na factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ de \overline{m} pertence a \mathcal{M} , ao longo de r' .

2. Se $c_{\mathcal{A}}$ preserva morfismos de $PS(\mathcal{M})$ então toda a reflexão de um morfismo de $PS(\mathcal{M})$ é $c_{\mathcal{A}}$ -fechada.

Proof.

1. Dado um morfismo $g : X \rightarrow A$ com codomínio em \mathcal{A} , seja $\overline{g} : RX \rightarrow A$ tal que $\overline{g} \cdot r_X = g$. Nesse caso obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{m} & Y & \xleftarrow{m_g} & X_g \\
\downarrow r_X & & \nearrow m_{r_X} & & \downarrow r' \\
& & \bullet & & \\
& & \downarrow r^* & & \\
RX & \xrightarrow{\bar{m}} & \bullet & & \\
\downarrow \bar{g} & \searrow e & \downarrow m' & & \\
& & \bullet & & \\
& & \downarrow t & & \\
A & \xrightarrow{\bar{\bar{m}}} & \bullet & \xleftarrow{m''} & \bullet \\
\downarrow \bar{g} & \searrow e' & \downarrow m'' & & \\
& & \bullet & & \\
& & \downarrow & & \\
& & \bullet & &
\end{array}$$

onde (\bar{m}, r') e $(\bar{\bar{m}}, g')$ são somas amalgamadas de (m, r_X) e (\bar{m}, \bar{g}) , respectivamente; $m' \cdot e$ e $m'' \cdot e'$ são factorizações $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ de \bar{m} e $\bar{\bar{m}}$, respectivamente; t é o único morfismo que satisfaz $t \cdot e = e' \cdot \bar{g}$ e $m'' \cdot t = g' \cdot m'$; (m_{r_X}, r^*) e (m_g, g^*) são produtos fibrados de (m', r') e $(m'', g' \cdot r')$, respectivamente.

Nestas condições existe um e um só morfismo n tal que $m_g \cdot n = m_{r_X}$. Consequentemente, para cada $m_g \in P_{\mathcal{A}}(m)$ temos que $m_{r_X} \leq m_g$ e, como m_{r_X} também pertence a $P_{\mathcal{A}}(m)$, $c_{\mathcal{A}}(m) = m_{r_X}$.

2. Suponhamos que $c_{\mathcal{A}}$ preserva morfismos de $PS(\mathcal{M})$ e seja $m \in PS(\mathcal{M})$. Queremos provar que Rm é $c_{\mathcal{A}}$ -fechado, onde R é um reflector de \mathcal{X} para \mathcal{A} . Começemos por considerar um morfismo $(m : X \rightarrow A) \in PS(\mathcal{M})$ com $A \in \mathcal{A}$. Seja m^{\sharp} o único morfismo tal que $m^{\sharp} \cdot r_X = m$. Como \mathcal{A} é reflectiva, a igualdade $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathcal{A})$ verifica-se e então, seguindo a demonstração de 8.1, temos que $r_X \cong d_{\mathcal{A}}(m)$ e, assim, $(c_{\mathcal{A}}(m) : \bar{X} \rightarrow A) \cong (m^{\sharp} : RX \rightarrow A)$. Seja agora $(m : X \rightarrow Y) \in PS(\mathcal{M})$ e seja $r_Y : Y \rightarrow RY$ uma reflexão de Y em \mathcal{A} . Posto que $r_Y \in \mathcal{A}^{\perp}$, $r_Y \in PS(\mathcal{M})$ e, portanto, $r_Y \cdot m \in PS(\mathcal{M})$. Temos então que $Rm \cong c_{\mathcal{A}}(r_Y \cdot m)$ e como, por 7.5, $c_{\mathcal{A}}$ é idempotente, Rm é $c_{\mathcal{A}}$ -fechado. \square

Os resultados 7.5 e 8.1 levam-nos a indagar quando é que o operador de fecho ortogo-

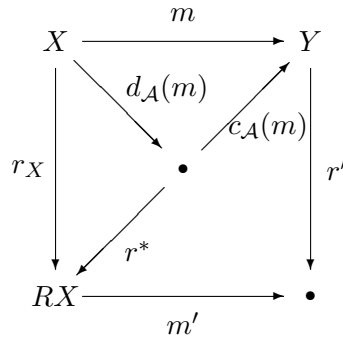
nal $c_{\mathcal{A}}$ preserva morfismos de $PS(\mathcal{M})$. A proposição seguinte permite-nos obter alguns exemplos positivos.

Proposição 8.6 *Se \mathcal{M} satisfaz a condição*

(D) *Sempre que a composição $c \cdot d$ de dois morfismos de \mathcal{M} é um epimorfismo, o primeiro, d , é também um epimorfismo.*

então, para cada subcategoria \mathcal{M} -reflectiva \mathcal{A} de \mathcal{X} , $c_{\mathcal{A}}$ preserva morfismos de $PS(\mathcal{M})$.

Demonstração. Tendo em conta o Teorema 7.5, basta provar que $c_{\mathcal{A}}$ é fracamente hereditário. Seja então $(m : X \rightarrow Y) \in PS(\mathcal{M})$. Atendendo a 8.5.1, $c_{\mathcal{A}}(m)$ é precisamente o produto fibrado da soma amalgamada de m ao longo de r_X , como ilustrado pelo diagrama seguinte



Como $r_X \in PS(\mathcal{M})$, $r' \in \mathcal{M}$ e assim $r^* \in \mathcal{M}$. Agora, usando a propriedade (D) e o facto de $r_X \in Epi(\mathcal{X})$ (por 2.17), concluímos que $d_{\mathcal{A}}(m) \in Epi(\mathcal{X})$, pelo que, atendendo a 6.5, $d_{\mathcal{A}}(m)$ é $c_{\mathcal{A}}$ -denso, como pretendido. \square

Exemplos 8.7 A seguir enumeramos alguns exemplos de categorias \mathcal{X} e classes de monomorfismos \mathcal{M} para os quais a propriedade (D) se verifica.

1. $\mathcal{X} = Set$ e \mathcal{M} é a classe de todos os monomorfismos;
2. $\mathcal{X} = Top$ ou $\mathcal{X} = Top_0$ ou $\mathcal{X} = Tych$ e \mathcal{M} é a classe de todas as imersões;
3. $\mathcal{X} = Tfab$ e \mathcal{M} é a classe de todos os monomorfismos.

Exemplos 8.8

1. Seja $\mathcal{X} = \mathcal{Top}_0$ e seja \mathbf{M} o aglomerado de todas as monofontes iniciais. Então \mathcal{M} é a classe de todas as imersões e coincide com $PS(\mathcal{M})$. Podemos considerar cada $(m : X \rightarrow Y) \in \mathcal{M}$ como a inclusão de um subespaço X em Y . Assim, se $c : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é um operador de fecho, identificamos $c(m)$ com o subespaço correspondente de Y o qual denotamos por $c(X)$.

Se \mathcal{S} é a subcategoria de todos os espaços de Sierpiński, então $\mathbf{M}(\mathcal{S}) = \mathcal{X}$. Foi provado em [60] que o operador de fecho regular associado $r_{\mathcal{S}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é o *b-fecho*, i.e., dado $Y \in \mathcal{Top}_0$, para cada subespaço X de Y ,

$$r_{\mathcal{S}}(X) = \{y \in Y \mid \overline{\{y\}} \cap H \cap X \neq \emptyset \text{ para toda a vizinhança aberta } H \text{ de } y \text{ em } Y\}.$$

Conforme provámos em 5.8, a inclusão $c_{\mathcal{S}}(X) \subseteq r_{\mathcal{S}}(X)$ acontece forçosamente para todo o subespaço X de Y . Na verdade, veremos adiante que se verifica a igualdade $c_{\mathcal{S}}(X) = r_{\mathcal{S}}(X)$.

Atendendo a 8.1, $\mathcal{S}Cl(\mathcal{S}) = \mathcal{O}(\mathcal{S})$ e $\mathcal{S}Cl(\mathcal{S})$ é o invólucro reflectivo de \mathcal{S} em \mathcal{X} , ou seja, é a subcategoria de todos os espaços sóbrios.

2. De facto, os examples de 4. a 9. em 1.5 fornecem uma situação semelhante à de cima, isto é, para a classe \mathcal{M} correspondente, verifica-se que $\mathcal{M} = PS(\mathcal{M})$, $\mathbf{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$, $c_{\mathcal{A}} = r_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{S}Cl(\mathcal{A})$ é o invólucro reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{X} . Mostraremos na próxima secção porque é que os operadores de fecho ortogonal e regular coincidem nestes casos.

3. Sejam \mathcal{X} e \mathbf{M} como em 1. e seja \mathcal{N} a subcategoria de \mathcal{Top}_0 cujos objectos são os espaços isomorfos a \mathbf{N} , onde \mathbf{N} é o conjunto $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$ com a topologia superior relativamente à ordem natural. (Ou seja, os conjuntos abertos não vazios são precisamente os da forma $\uparrow n = \{m \in \mathbf{N} \mid m \geq n\}$ para algum número natural n .)

Como $\mathbf{M}(\mathcal{N}) = \mathcal{X}$, vem que $r_{\mathcal{N}} = r_{\mathcal{X}}$ (por 4.6.2), i.e., $r_{\mathcal{N}}$ é o *b-fecho*. Mas a desigualdade $c_{\mathcal{N}} \leq r_{\mathcal{N}}$ é estrita; para vermos isso, seja Y o conjunto $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$ equipado com a topologia cujos conjuntos abertos não vazios são todos os da forma $\uparrow n \cup \{\infty\}$, $n \in \mathbf{N}$. Então \mathbf{N} é um subespaço de Y e é evidente que $r_{\mathcal{N}}(\mathbf{N}) = Y$ e que, por outro lado, $c_{\mathcal{N}}(\mathbf{N}) = \mathbf{N}$ (atendendo a ??1).

Também aqui a subcategoria $\mathcal{S}Cl(\mathcal{N})$ é o invólucro reflectivo de \mathcal{N} em \mathcal{Top}_0 .

4. Sejam \mathcal{X} e \mathcal{A} as categorias do Exemplo 2.5. Seja \mathbf{M} o aglomerado de todas as monofontes iniciais de \mathcal{X} ; claramente, $\mathbf{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$. Neste caso verifica-se a desigualdade $\mathcal{M} \neq PS(\mathcal{M})$; com efeito, seja X um conjunto, seja $Y = X \dot{\cup} \{a\}$ e seja $y = (y_i)_{i \in Ord}$ com $y_i = a$ para todo o i . Então $m : (X, x) \rightarrow (Y, y)$, onde m é a inclusão de X em Y e x é a aplicação vazia, é um morfismo de $\mathcal{M} \setminus PS(\mathcal{M})$.

É fácil verificar que os operadores de fecho $c_{\mathcal{A}}$ e $r_{\mathcal{A}}$ coincidem em \mathcal{M} , que $c_{\mathcal{A}}$ preserva morfismos de $PS(\mathcal{M})$ e que os morfismos $c_{\mathcal{A}}$ -densos de $PS(\mathcal{M})$ são exactamente os isomorfismos, logo $\mathcal{S}Cl(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$.

Observação 8.9 Evidentemente, nos exemplos de 8.8.1 e 8.8.3, as noções de objecto fortemente \mathcal{A} -fechado e objecto absolutamente $c_{\mathcal{A}}$ -fechado coincidem. Realçamos que, num certo sentido, este conceito de fechamento para objectos tem um comportamento melhor quando lidamos com o operador de fecho ortogonal do que quando lidamos com o regular. Na verdade, conforme vimos, impondo condições bastante fracas, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}Cl(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{A})$ e, supondo que $c_{\mathcal{A}}$ preserva morfismos de $PS(\mathcal{M})$, $\mathcal{O}(\mathcal{A}) = \mathcal{S}Cl(\mathcal{A})$; ao passo que, relativamente ao operador de fecho regular, acontece, por exemplo, que \mathbf{N} não é absolutamente $r_{\mathcal{N}}$ -fechado apesar de pertencer a \mathcal{N} conforme observado por M. Sobral em [64].

9 Monomorfismos estáveis para somas amalgamadas

Como acabámos de ver, para certas classes \mathcal{M} de monomorfismos, a classe $PS(\mathcal{M})$ tem um lugar relevante na caracterização de \mathcal{A}^{\perp} , de $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ e da reflectividade de $\mathcal{O}(\mathcal{A})$. Tal facto leva-nos a estudar a classe $PS(\mathcal{M})$ em categorias “do dia-a-dia”.

Acerca do estudo da estabilidade para somas amalgamadas de classes \mathcal{M} de monomorfismos, ou apenas da existência de \mathcal{M} -amalgamações (veja-se a definição em 8.4), remetemos o leitor para [45] e referências aí indicadas. Aqui estamos interessados em, mais do que saber se uma dada classe \mathcal{M} de monomorfismos é estável para somas amalgamadas, determinar a maior de todas as subclasses de \mathcal{M} estáveis para somas amalgamadas.

A questão dual, equivalente à determinação, para uma dada classe \mathcal{E} de epimorfismos, da subclasse

$\mathcal{E}' = \{e \in \mathcal{E} \mid \text{qualquer produto fibrado de } e \text{ ao longo de um morfismo arbitrário pertence a } \mathcal{E}\},$

foi investigada por vários autores. Em [16], Day e Kelly caracterizaram \mathcal{E}' para $\mathcal{X} = \mathcal{Top}$ e \mathcal{E} a classe de todos os epimorfismos regulares. Esta classe é importante na *Teoria da Descida*; de facto, em \mathcal{Top} a classe \mathcal{E}' é precisamente a classe dos morfismos de descida (veja-se [41], [53] e [65]).

Em 6.3.1, mostrámos que, se $\mathbb{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$, então $\text{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \text{PS}(\mathcal{M})$. Vamos agora ver que existem vários exemplos para os quais a igualdade $\text{Inj}(\mathcal{A}) = \text{PS}(\mathcal{M})$ se verifica.

Recordemos que se diz que uma categoria *tem* \mathcal{M} -*injectivos suficientes* quando todo objecto é um \mathcal{M} -subobjecto de algum objecto \mathcal{M} -injectivo (veja-se [2]).

Proposição 9.1 *Se \mathcal{X} é uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbb{M})$ que tem somas amalgamadas e \mathcal{M} -injectivos suficientes, então \mathcal{M} é estável para somas amalgamadas.*

Demonstração. Para $\mathcal{A} = \text{Inj}(\mathcal{M})$, i.e., para \mathcal{A} a subcategoria de todos os objectos \mathcal{M} -injectivos, vê-se facilmente que $\mathbb{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$ e, conseqüentemente, $\text{Inj}(\mathcal{A}) \subseteq \text{PS}(\mathcal{M})$. Por outro lado, é óbvio que $\mathcal{M} \subseteq \text{Inj}(\mathcal{A})$. Logo,

$$\text{Inj}(\mathcal{A}) = \mathcal{M} = \text{PS}(\mathcal{M})$$

e, assim, \mathcal{M} é estável para somas amalgamadas. □

Exemplos 9.2

1. Apresentamos aqui alguns exemplos de uma categoria \mathcal{X} e uma subcategoria \mathcal{A} tal que, para a classe \mathcal{M} de todos os monomorfismos iniciais,

$$\text{Inj}(\mathcal{A}) = \text{PS}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}.$$

- (a) $\mathcal{X} = \mathcal{Met}$ e \mathcal{A} é a subcategoria de todos os espaços métricos completos;
- (b) $\mathcal{X} = \mathcal{Norm}$ e $\mathcal{A} = \mathcal{Ban}$;
- (c) $\mathcal{X} = \mathcal{TfAb}$ e \mathcal{A} é a subcategoria de todos os grupos abelianos sem torsão e divisíveis.

2. Os exemplos enumerados a seguir são do mesmo tipo, ou seja, também vigoram as igualdades $\text{Inj}(\mathcal{A}) = \text{PS}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, mas agora \mathcal{A} é uma subcategoria gerada por um só objecto A . De facto, as categorias \mathcal{X} seguintes são subcategorias epi-reflectivas simples de Top (i.e., \mathcal{X} é o invólucro epi-reflectivo de um espaço topológico A em Top).

- (a) Em Top_0 , $\mathcal{M} = \text{Inj}(S)$, onde S denota o espaço de Sierpinski.
- (b) Para a subcategoria Ind de todos os espaços indiscretos, verifica-se $\mathcal{M} = \text{Inj}(I_2)$, onde I_2 designa o espaço indiscreto de cardinalidade 2.
- (c) Para Top , temos que $\mathcal{M} = \text{Inj}(C_1)$, onde C_1 é o espaço cujo conjunto subjacente é $\{0, 1, 2\}$ e cujo único aberto não trivial é $\{0\}$.

Observação 9.3 Afirma-se em [45] sem demonstração que, em Top_1 , todo o diagrama da forma

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{m} \\ g \downarrow \end{array}$$

onde m é uma imersão, pode ser “completado” por um par de morfismos (m', g') tais que m' é uma imersão e $g' \cdot m = m' \cdot g$. Como Top_1 tem somas amalgamadas, isto equivale a dizer que $\mathcal{M} = \text{PS}(\mathcal{M})$ para \mathcal{M} a classe de todas as imersões. Mas, na verdade, esta igualdade não se verifica em Top_1 . Mais do que isso, a identidade $\mathcal{M} = \text{PS}(\mathcal{M})$ não é válida em nenhuma subcategoria epi-reflectiva \mathcal{X} de Top que esteja contida em Top_1 e tenha um espaço com mais do que um ponto, conforme vamos mostrar de seguida¹: Começamos por lembrar que toda a subcategoria \mathcal{X} nestas condições contém todos os espaços de Hausdorff de dimensão 0. Seja agora $X = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ (com a topologia euclidiana), e consideremos a imersão $m : X \setminus \{\frac{1}{2}\} \rightarrow X$. Seja $D = \{0, 1\}$ um espaço discreto, e seja $f : X \setminus \{\frac{1}{2}\} \rightarrow D$ definido por $f(x) = 0$ para todo $x < \frac{1}{2}$ e $f(x) = 1$ para todo $x > \frac{1}{2}$. Então a soma amalgamada de m ao longo de f em \mathcal{X} é $D \rightarrow \{*\}$. Por conseguinte, $m \notin \text{PS}(\mathcal{M})$.

Nos exemplos seguintes caracterizamos a classe $\text{PS}(\mathcal{M})$ para algumas dessas subcategorias epi-reflectivas de Top .

O lema subsequente será útil para caracterizar a classe $\text{PS}(\mathcal{M})$ no próximo grupo de exemplos.

¹M. M. Clementino, private communication

Lema 9.4 *Se $\mathcal{X} = \mathbf{M}(\mathcal{A})$ e*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{m} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow \bar{g} \\ Z & \xrightarrow{\bar{m}} & W \end{array}$$

é uma soma amalgamada em \mathcal{X} , então $\bar{m} \in \mathcal{M}$ se e só se existirem fontes $(m_i : Z \rightarrow A_i)_I \in \mathbf{M}$ e $(f_i : Y \rightarrow A_i)_I$ tais que $A_i \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ e $f_i \cdot \bar{m} = m_i \cdot g$ para todo $i \in I$.

Demonstração. Seja $\bar{m} \in \mathcal{M}$; como $W \in \mathbf{M}(\mathcal{A})$, existe algum $(h_i : W \rightarrow A_i)_I \in \mathbf{M}$ com $A_i \in \text{Obj}(\mathcal{A})$, $i \in I$. Então $(m_i)_I = (h_i \cdot \bar{m})_I$ e $(f_i)_I = (h_i \cdot \bar{g})_I$ cumprem a condição requerida.

Reciprocamente, suponhamos que $(m_i)_I$ e $(f_i)_I$ gozam dessa condição. Então, para cada $i \in I$, existe t_i tal que $t_i \cdot \bar{m} = m_i$ e $t_i \cdot \bar{g} = f_i$. Agora a igualdade $(t_i)_I \cdot \bar{m} = (m_i)_I$ com $(m_i)_I \in \mathbf{M}$ implica que $\bar{m} \in \mathbf{M}$. \square

Exemplos 9.5 Nos exemplos de subcategorias epi-reflectivas de $\mathcal{T}op$ considerados neste parágrafo, \mathbf{M} denotará sempre a classe de todas as imersões. Caracterizamos a classe $PS(\mathcal{M})$ e mostramos que, nestes casos, se verifica de novo a igualdade $PS(\mathcal{M}) = \text{Inj}(\mathcal{A})$ para um conveniente espaço topológico A . Para todos os exemplos a seguir, a identidade $\mathbf{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$ foi provada em [32].

1. *Seja \mathcal{X} a categoria 0-dimHaus de todos os espaços de Hausdorff de dimensão 0 e aplicações contínuas. Então, denotando por D_2 o conjunto $\{0, 1\}$ com a topologia discreta,*

$$PS(\mathcal{M}) = \text{Inj}(D_2)$$

$$= \{X \xrightarrow{m} Y \in \mathcal{M} \mid G \text{ é aberto e fechado em } X \Rightarrow G = m^{-1}(H) \text{ para algum conjunto } H \text{ aberto e fechado em } Y\}.$$

Começemos por mostrar que $PS(\mathcal{M}) \subseteq \text{Inj}(D_2)$, donde resultará que $PS(\mathcal{M}) = \text{Inj}(D_2)$ (por 6.3.1). Seja $m : X \rightarrow Y$ pertencente a $PS(\mathcal{M})$ e consideremos um morfismo $f : X \rightarrow D_2$. Se f é constante, é claro que existe $\bar{f} : Y \rightarrow D_2$ tal que $\bar{f} \cdot m = f$. Se f não é constante, atendendo ao lema anterior, existem fontes

$(n_i : D_2 \rightarrow D_2)_I \in \mathbb{M}$ e $(g_i : Y \rightarrow D_2)_I$ tais que $n_i \cdot f = g_i \cdot m$, $i \in I$. Então, como $(n_i)_I$ é uma monofonte, existem $n : D_2 \rightarrow D_2$ e $g : Y \rightarrow D_2$ tais que $g \cdot m = n \cdot f$ e $n(0) \neq n(1)$. Se $n = 1_{D_2}$, então $\bar{f} = g$ preenche a igualdade requerida; caso contrário, $n \cdot n = 1_{D_2}$ e então $f = n \cdot n \cdot f = n \cdot g \cdot m$, pelo que podemos escolher o pretendido \bar{f} como sendo $\bar{f} = n \cdot g$.

Mostremos agora que a classe $Inj(D_2)$ é como descrita acima. Seja $m : X \rightarrow Y$ pertencente a $Inj(D_2)$ e seja G um conjunto aberto e fechado em X . Segue-se que $\chi_G : X \rightarrow D_2$, onde $\chi_G(x) = 0$ se e só se $x \in G$, é uma aplicação contínua. Seja $g : Y \rightarrow D_2$ tal que $g \cdot m = \chi_G$. Então $g^{-1}(\{0\})$ é um conjunto aberto e fechado em Y e $G = g^{-1}(\{0\}) \cap X$ (assumindo que m é uma inclusão).

Reciprocamente, dado $m : X \rightarrow Y$ satisfazendo a condição definidora do conjunto acima, consideremos um morfismo $f : X \rightarrow D_2$. Seja H aberto e fechado em Y e tal que $X \cap H = f^{-1}(\{0\})$. Então $\chi_H : Y \rightarrow D_2$ satisfaz $\chi_H \cdot m = f$.

2. Seja \mathcal{X} a categoria 0-dimTop , de todos os espaços topológicos de dimensão 0 e aplicações contínuas, e seja C_0 o conjunto $\{0, 1, 2\}$ com a topologia gerada por $\{0\}$ e $\{1, 2\}$. Então

$$PS(\mathcal{M}) = Inj(C_0)$$

$$= \{X \xrightarrow{m} Y \in \mathcal{M} \mid G \text{ é aberto e fechado em } X \Rightarrow G = m^{-1}(H) \text{ para algum conjunto } H \text{ aberto e fechado em } Y\}.$$

De facto, analogamente ao feito no exemplo anterior, podemos provar que se $m : X \rightarrow Y$ pertence a $Inj(C_0)$, então todo o conjunto G aberto e fechado em X é a imagem inversa por m de algum conjunto aberto e fechado em Y .

Reciprocamente, suponhamos que $m : X \rightarrow Y$ goza dessa propriedade. Vamos mostrar que, então, $m \in Inj(C_0)$. Dado $f : X \rightarrow C_0$, seja H um conjunto aberto e fechado em Y tal que $H \cap X = f^{-1}(\{0\})$. Nesse caso, para $\bar{f} : Y \rightarrow C_0$ definido por

$$\bar{f}(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \in H \\ 1 & \text{se } y \in f^{-1}(\{1\}) \\ 2 & \text{se } y \notin H \cup f^{-1}(\{1\}) \end{cases},$$

temos que $\bar{f} \cdot m = f$.

Resta-nos mostrar que $PS(\mathcal{M}) = \text{Inj}(C_0)$ e, como a inclusão $\text{Inj}(C_0) \subseteq PS(\mathcal{M})$ é válida (por 6.3.1), basta que $PS(\mathcal{M}) \subseteq \text{Inj}(C_0)$. Para provar esta inclusão, vamos mostrar que todo o morfismo $m : X \rightarrow Y$ de $PS(\mathcal{M})$ satisfaz a condição: todo o conjunto aberto e fechado em X é a intersecção de X com algum conjunto aberto e fechado em Y (supondo que m é uma inclusão). Seja G aberto e fechado em X . Definamos $f : X \rightarrow C_0$ pondo $f(x) = 0$ se $x \in G$ e $f(x) = 1$ se $x \notin G$. Pelo Lema 9.4, existem fontes $(m_i : C_0 \rightarrow C_0)_I \in \mathbf{M}$ e $(f_i : Y \rightarrow C_0)_I$ tais que $m_i \cdot f = f_i \cdot m$, $i \in I$. Assim, como $(m_i)_I$ é inicial, existem $j_1, \dots, j_k \in I$ e conjuntos abertos G_{j_1}, \dots, G_{j_k} em C_0 tais que $\{0\} = \bigcap_{k=1}^n m_{j_k}^{-1}(G_{j_k})$. Isto implica que $m_i^{-1}(G_i) = \{0\}$ para algum $i \in \{j_1, \dots, j_k\}$. Ademais, ou $G_i = \{0\}$ ou $G_i = \{1, 2\}$. Em ambos os casos temos que $f_i^{-1}(G_i)$ é aberto e fechado em Y e $G = f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(m_i^{-1}(G_i)) = X \cap f_i^{-1}(G_i)$.

3. Seja $\mathcal{X} = \mathcal{Tych}$ e seja \mathbf{I} o intervalo unitário fechado $[0, 1]$ com a topologia euclidiana. Então

$$PS(\mathcal{M}) = \text{Inj}(\mathbf{I}) = \{C^*\text{-imersões}\}.$$

De facto, os morfismos de $\text{Inj}(\mathbf{I})$ são afinal as C^* -imersões e uma imersão $X \hookrightarrow Y$ é uma C^* -imersão sse cada dois subconjuntos completamente separados em X são também completamente separados em Y (veja-se 1.5.2). Assim, pelo Teorema da Extensão de Tietze-Uryshon, segue-se que uma imersão de um subespaço X num espaço Y é uma C^* -imersão se e só se para cada aplicação contínua $f : X \rightarrow \mathbf{I}$ existir uma aplicação contínua $g : Y \rightarrow \mathbf{I}$ que leva todos os elementos de $f^{-1}(\{0\})$ para 0 e todos os elementos de $f^{-1}(\{1\})$ para 1. Usamos esta caracterização das C^* -imersões para mostrar que $PS(\mathcal{M}) \subseteq \{C^*\text{-imersões}\}$. Seja $m : X \rightarrow Y$ pertencente a $PS(\mathcal{M})$ e seja $f : X \rightarrow I$ uma função contínua arbitrária. Então, pelo Lema 9.4, existem fontes $(m_j : I \rightarrow I)_J \in \mathbf{M}$ e $(f_j : Y \rightarrow I)_J$ tais que $f_j \cdot m = m_j \cdot f$, $j \in J$. Como $\mathbf{M} \subseteq \text{MonoFonte}(\mathcal{X})$, existe algum $j \in J$ tal que $m_j(0) = a \neq b = m_j(1)$. Seja $h : I \rightarrow I$ uma função contínua tal que $h(a) = 0$ e $h(b) = 1$ (que necessariamente existe). Então para $g = h \cdot f_j$ temos que, para cada $x \in f^{-1}(\{0\})$ e cada $y \in f^{-1}(\{1\})$,

$$g \cdot m(x) = h \cdot f_j \cdot m(x) = h \cdot m_j \cdot f(x) = h(a) = 0$$

e, analogamente, $g \cdot m(y) = 1$. Consequentemente, $m \in \text{Inj}(I)$.

Fazemos notar que na maioria dos exemplos que temos vindo a estudar, $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é precisamente a menor subcategoria \mathcal{M} -reflectiva de \mathcal{X} . A proposição seguinte dá uma justificação para este facto.

Proposição 9.6 *Se \mathcal{A} é uma subcategoria de \mathcal{X} tal que $\mathbf{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$ e $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é reflectiva, então a igualdade $PS(\mathcal{M}) = \text{Inj}(\mathcal{A})$ implica que $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é a menor subcategoria \mathcal{M} -reflectiva de \mathcal{X} .*

Demonstração. Atendendo a 2.17 e 6.3, temos que

$$\text{Inj}(\mathcal{A}) \cap \text{Epi}(\mathcal{X}) = \mathcal{A}^\perp \subseteq PS(\mathcal{M}) \cap \text{Epi}(\mathcal{X}).$$

Para $PS(\mathcal{M}) = \text{Inj}(\mathcal{A})$ vem que $\mathcal{A}^\perp = PS(\mathcal{M}) \cap \text{Epi}(\mathcal{X})$, ou seja, \mathcal{A}^\perp é a maior de todas as classes \mathcal{B}^\perp para as quais \mathcal{B} é \mathcal{M} -reflectiva. Consequentemente, $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é a menor subcategoria \mathcal{M} -reflectiva de \mathcal{X} . \square

Todos os exemplos de 1.5 (excepto o quinto) e o exemplo 2.5 satisfazem as hipóteses da proposição anterior. Assim, para cada um deles, $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ é a menor subcategoria \mathcal{M} -reflectiva de $\mathcal{X} = \mathbf{M}(\mathcal{A})$.

Como já vimos, em geral, o operador de fecho ortogonal induzido por uma dada subcategoria é menor do que o regular induzido pela mesma subcategoria. A proposição seguinte mostra que existe quando muito uma só subcategoria \mathcal{M} -reflectiva de \mathcal{X} para a qual estes dois operadores de fecho coincidem.

Proposição 9.7 *Suponhamos que \mathcal{X} tem igualizadores e que $\text{MonoReg}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{M}$. Se $r_{\mathcal{A}} = c_{\mathcal{A}}$ para alguma subcategoria \mathcal{M} -reflectiva \mathcal{A} de \mathcal{X} , então \mathcal{A} é a menor subcategoria \mathcal{M} -reflectiva de \mathcal{X} .*

Demonstração. O facto de \mathcal{A} ser \mathcal{M} -reflectiva implica que $\mathbf{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$. Assim temos que

$$\begin{aligned} r_{\mathcal{A}} = c_{\mathcal{A}} &\implies \{\text{morfismos } r_{\mathcal{A}}\text{-densos de } PS(\mathcal{M})\} = \{\text{morfismos } c_{\mathcal{A}}\text{-densos de } PS(\mathcal{M})\} \\ &\implies \text{Epi}(\mathcal{X}) \cap PS(\mathcal{M}) = \mathcal{A}^\perp, \quad \text{atendendo a 4.6 e a 6.4.} \end{aligned}$$

Logo, por 2.17 e 6.3, concluímos que $\mathcal{A} = \mathcal{O}(\mathcal{A})$ é a menor subcategoria \mathcal{M} -reflectiva de \mathcal{X} . \square

A próxima proposição é, de certo modo, uma recíproca parcial da anterior.

Proposição 9.8 *Suponhamos que \mathcal{X} tem igualizadores, $\text{MonoReg}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{M}$ e $\mathcal{A} = (PS(\mathcal{M}) \cap \text{Epi}(\mathcal{X}))_{\perp}$. Se $r_{\mathcal{A}}$ é fracamente hereditário e $c_{\mathcal{A}}$ preserva morfismos de $PS(\mathcal{M})$, então $r_{\mathcal{A}} = c_{\mathcal{A}}$ relativamente a $PS(\mathcal{M})$.*

Demonstração. Temos que

$$\mathcal{A}^{\perp} \subseteq PS(\mathcal{M}) \cap \text{Epi}(\mathcal{X}) \subseteq ((PS(\mathcal{M}) \cap \text{Epi}(\mathcal{X}))_{\perp})^{\perp} = \mathcal{A}^{\perp},$$

pelo que

$$\mathcal{A}^{\perp} = PS(\mathcal{M}) \cap \text{Epi}(\mathcal{X}).$$

Consequentemente, atendendo a 4.6.1 e a 6.4, um morfismo de $PS(\mathcal{M})$ é $r_{\mathcal{A}}$ -denso se e só se for $c_{\mathcal{A}}$ -denso. Seja agora m um morfismo de $PS(\mathcal{M})$; atendendo a 5.8, existe um morfismo d tal que $c_{\mathcal{A}}(m) = r_{\mathcal{A}}(m) \cdot d$, e, como $r_{\mathcal{A}}$ é fracamente hereditário, o morfismo $d \cdot d_{\mathcal{A}}(m)$ é $r_{\mathcal{A}}$ -denso, logo é também $c_{\mathcal{A}}$ -denso. Dado que $c_{\mathcal{A}}$ é um operador de fecho idempotente e fracamente hereditário (por 7.5), decorre que \mathcal{X} tem um sistema de factorização ($c_{\mathcal{A}}$ -denso, $c_{\mathcal{A}}$ -fechado) relativamente a \mathcal{M} (veja-se 4.3) e, assim, a igualdade

$$r_{\mathcal{A}}(m) \cdot (d \cdot d_{\mathcal{A}}(m)) = (c_{\mathcal{A}}(m) \cdot d_{\mathcal{A}}(m)) \cdot 1_X$$

implica a existência de um morfismo t tal que $t \cdot d \cdot d_{\mathcal{A}}(m) = d_{\mathcal{A}}(m)$. Consequentemente d é um isomorfismo e $r_{\mathcal{A}}(m) \cong c_{\mathcal{A}}(m)$, como pretendido. \square

É claro que a igualdade $PS(\mathcal{M}) = \text{Inj}(\mathcal{A})$ depende da escolha da subcategoria \mathcal{A} . Por exemplo, sejam \mathcal{S} e \mathcal{N} as subcategorias de Top_0 definidas em 8.8.1 e 8.8.2, respectivamente. Então $\mathcal{M} = \text{Inj}(\mathcal{S}) \neq \text{Inj}(\mathcal{N})$.

De facto, se \mathcal{A} e \mathcal{B} são subcategorias de uma categoria \mathcal{X} com $\mathbb{M}(\mathcal{A}) = \mathbb{M}(\mathcal{B})$, então a identidade $\text{Inj}(\mathcal{A}) = \text{Inj}(\mathcal{B})$ implica que $\mathcal{A}^{\perp} = \mathcal{B}^{\perp}$ (por 2.17.2), pelo que terá de ser $\mathcal{O}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}(\mathcal{B})$.

Caracterizamos a seguir a classe $PS(\mathcal{M})$ para \mathcal{M} a classe de todas as imersões, numa outra subcategoria epi-reflectiva de Top , a subcategoria Top_1 de todos os espaços T_1 .

Proposição 9.9 Em \mathcal{Top}_1 , a imersão de um subespaço X num espaço Y pertence a $PS(\mathcal{M})$ para \mathcal{M} a classe de todas as imersões se e só se satisfizer a seguinte condição

$$(S) \quad (A, B \subseteq X \text{ e } \overline{A}^X \cap \overline{B}^X = \emptyset) \Rightarrow \overline{A}^Y \cap \overline{B}^Y = \emptyset.$$

Demonstração.

I. Seja o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{m} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow \bar{g} \\ Z & \xrightarrow{\bar{m}} & W \end{array} \quad (II.4)$$

uma soma amalgamada em \mathcal{Top} com $X, Y, Z \in \mathcal{Top}_1$ e m uma imersão. Podemos supor que m e \bar{m} são inclusões, $W = Z \dot{\cup} (Y \setminus X)$ e

$$\bar{g}(y) = \begin{cases} y & \text{se } y \in Y \setminus X \\ g(y) & \text{se } y \in X \end{cases}.$$

O conjunto W é dotado da topologia final induzida por \bar{m} e \bar{g} , ou seja, um subconjunto U de W é aberto se e só se ambos os conjuntos $\bar{m}^{-1}(U)$ e $\bar{g}^{-1}(U)$ são abertos em Z e Y , respectivamente. Assim, a soma amalgamada de m ao longo de g em \mathcal{Top}_1 é $r_W \cdot \bar{m}$ onde $r_W : W \rightarrow RW$ é a reflexão de W em \mathcal{Top}_1 .

Seja $q : W \rightarrow \tilde{W}$ o quociente de W determinado pela menor relação de equivalência \sim em W tal que

$$w \in \overline{\{w'\}}^W \implies w \sim w'.$$

É claro que a reflexão $r_W : W \rightarrow RW$ se pode factorizar através de q .

II. Provemos que (S) é necessária. Se não se verificasse, existiriam dois subconjuntos fechados de X , digamos F_1 e F_2 , tais que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ mas $y \in \overline{F_1}^Y \cap \overline{F_2}^Y$ para algum $y \in Y \setminus X$. Nesse caso poder-se-ia definir uma aplicação

$g : X \rightarrow Z = X \setminus (F_1 \cup F_2) \dot{\cup} \{1, 2\}$ pondo

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \notin F_1 \cup F_2 \\ 1 & \text{se } x \in F_1 \\ 2 & \text{se } x \in F_2 \end{cases}$$

O espaço Z com a topologia quociente induzida por g seria claramente T_1 . Porém a soma amalgamada em \mathcal{Top}_1 de m ao longo de g não seria uma aplicação injectiva: dado

um conjunto aberto U em W tal que $y \in U$, então, como $y \in \overline{F_1^Y} \cap \overline{F_2^Y}$, teríamos que $\overline{g^{-1}(U)} \cap F_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$, e, conseqüentemente, $1, 2 \in U$; por conseguinte, $y \in \overline{\{1\}}^W \cap \overline{\{2\}}^W$, donde $q(1) = q(2)$. Logo q não seria injectiva e, portanto, $r_W \cdot \overline{m}$ também não seria injectiva, muito menos pertencente a \mathcal{M} .

III. Para provar que a condição **(S)** também é suficiente, comecemos por verificar as duas propriedades seguintes da soma amalgamada ilustrada em (II.4):

(i) Se $y \in Y \setminus X$ e $z \in Z$, então $y \in \overline{\{z\}}^W$ se e só se $y \in \overline{g^{-1}(z)}^Y$;

(ii) Se $w, w' \in W$, $w \neq w'$ e $w \in \overline{\{w'\}}^W$, então $w \in Y \setminus X$ e $w' \in Z$.

Demonstração de (i): Se $y \in \overline{g^{-1}(z)}^Y$ e H é um conjunto aberto em W que contém y , então $\overline{g^{-1}(H)} \cap g^{-1}(z) \neq \emptyset$ e isto implica que $z \in H$; portanto, $y \in \overline{\{z\}}^W$.

Reciprocamente, se $y \notin \overline{g^{-1}(z)}^Y$, então existe um conjunto aberto A em Y tal que $y \in A$ mas $A \cap g^{-1}(z) = \emptyset$. Seja B um conjunto aberto em Y tal que $B \cap X = X \setminus g^{-1}(z)$. Então $H = A \cup B$ é um subconjunto aberto de Y tal que $y \in H$ e $H \cap X = X \setminus g^{-1}(z)$. Seja $U = (H \setminus X) \cup (Z \setminus \{z\})$. Então, U é um conjunto aberto em W tal que $y \in U$ mas $z \notin U$, assim $y \notin \overline{\{z\}}^W$.

Demonstração de (ii): Por um lado, se $w' \in Y \setminus X$, o conjunto $W \setminus \{w'\}$ é aberto em W , contém w e não contém w' , então $w \notin \overline{\{w'\}}^W$. Por outro lado, se $w, w' \in Z$, seja V um conjunto aberto em Z tal que $w \in V$ mas $w' \notin V$; então $H = V \cup B \setminus X$, onde B é um conjunto aberto em Y tal que $g^{-1}(V) = B \cap X$, é aberto em W e contém w mas não w' ; conseqüentemente, $w \notin \overline{\{w'\}}^W$.

Portanto, se $w \in \overline{\{w'\}}^W$, tem de ser $w \in Y \setminus X$ e $w' \in Z$.

Suponhamos agora que a condição **(S)** se verifica. Vamos mostrar que, então, para cada morfismo $g : X \rightarrow Z$ com $Z \in \mathcal{Top}_1$, a aplicação $q \cdot \overline{m}$ é uma imersão e \widetilde{W} é um espaço T_1 . O facto de \widetilde{W} ser um espaço T_1 implica que q é uma reflexão de W para \mathcal{Top}_1 e assim $q \cdot \overline{m}$ é uma soma amalgamada de m ao longo de g em \mathcal{Top}_1 . Conseqüentemente, se $q \cdot \overline{m}$ é uma imersão concluímos que m pertence a $PS(\mathcal{M})$.

- $q \cdot \bar{m}$ é injectiva:

$$\begin{aligned} q \cdot \bar{m}(z) = q \cdot \bar{m}(z') &\Leftrightarrow q(z) = q(z') \\ &\Leftrightarrow \exists y \in Y \setminus X : y \in \overline{\{z\}}^W \cap \overline{\{z'\}}^W, \quad \text{por (ii),} \\ &\Leftrightarrow \exists y \in Y \setminus X : y \in \overline{g^{-1}(z)}^Y \cap \overline{g^{-1}(z')}^Y, \quad \text{por (i).} \end{aligned}$$

A última condição implica que $z = z'$, visto que, doutro modo, $g^{-1}(z)$ e $g^{-1}(z')$ seriam subconjuntos fechados disjuntos de X e então, por **(S)**, $\overline{g^{-1}(z)}^Y$ e $\overline{g^{-1}(z')}^Y$ seriam também disjuntos.

- \tilde{W} é um espaço T_1 :

Vamos mostrar que para cada $b \in \tilde{W}$, $q^{-1}(b)$ é fechado em W , e, portanto, $\{b\}$ é fechado em \tilde{W} , ficando então provado que \tilde{W} é T_1 . Na verdade, atendendo a **(S)** e às propriedades (i) e (ii), é fácil concluir que se $z, z' \in Z$ e $z \neq z'$ então $q(z) \neq q(z')$. Assim, usando (ii) de novo, vem que

$$q^{-1}(b) = \{y\} \quad \text{com } y \in Y \setminus X \quad \text{ou} \quad q^{-1}(b) = \{z\} \cup \{y \in Y \setminus X \mid y \in \overline{\{z\}}^W\}.$$

Ora, $\{y\}$ é claramente fechado em W ; quanto ao outro caso, temos que

$$\begin{aligned} \bar{m}^{-1}(q^{-1}(b)) &= \{z\}, \quad \text{que é fechado em } Z, \quad \text{e} \\ \bar{g}^{-1}(q^{-1}(b)) &= g^{-1}(z) \cup \{y \in Y \setminus X \mid y \in \overline{\{z\}}^W\} \\ &= g^{-1}(z) \cup \{y \in Y \setminus X \mid y \in \overline{g^{-1}(z)}^Y\}, \quad \text{por (i)} \\ &= \overline{g^{-1}(z)}^Y \end{aligned}$$

Por conseguinte, $q^{-1}(b)$ é fechado em W .

- $q \cdot \bar{m}$ é inicial:

Vamos mostrar que, para cada conjunto fechado F de Z , existe $E \subseteq W$ tal que $q^{-1}(q(E))$ é fechado em W (pelo que $q(E)$ é fechado em \tilde{W}) e $F = Z \cap q^{-1}(q(E)) = (q \cdot \bar{m})^{-1}(q(E))$. Dado F fechado em Z , seja $E = \overline{(g^{-1}(F))^Y} \setminus X \cup F$. O conjunto E é fechado em W . Vamos mostrar que, além disso, $q^{-1}(q(E)) = E$, logo $q(E)$ é fechado. De facto, $q^{-1}(q(E)) = E \cup E_1 \cup E_2$ onde

$$E_1 = \{z \in Z \mid y \in \overline{\{z\}}^W, \text{ para algum } y \in E \cap (Y \setminus X)\}$$

e

$$E_2 = \{y \in Y \setminus X \mid y \in \overline{\{z\}}^W, \text{ para algum } z \in (E \cup E_1) \cap Z\}.$$

Quanto a $z \in E_1$, temos $y \in \overline{g^{-1}(F)}^Y \cap \overline{g^{-1}(z)}^Y$, logo, atendendo à condição **(S)**, $g^{-1}(F) \cap g^{-1}(z) \neq \emptyset$, portanto $z \in F \subseteq E$.

Agora, quanto a $y \in E_2$, o facto de $z \in E \cup E_1 = E$ e E ser fechado implica que $\overline{\{z\}}^W \subseteq E$; assim, como $y \in \overline{\{z\}}^W$, concluímos que $y \in E$. \square

Observação 9.10 Atendendo a 9.9 é claro que em \mathcal{Top}_1 a classe de todas as imersões fechadas está contida em $PS(\mathcal{M})$ para \mathcal{M} a classe de todas as imersões. Mas esta inclusão é estrita. Para o mostrar, seja Y um espaço T_1 que tem um subespaço infinito X tal que X está equipado com a topologia cofinita. Então a inclusão de X em Y satisfaz a condição **(S)** mas não é fechado.

Capítulo III

Espaços α -sóbrios

É um facto bem conhecido que o aglomerado de todas as subcategorias \mathcal{E} -reflectivas de uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbf{M})$ é um “reticulado” completo relativamente à inclusão. Vários autores têm contribuído para o estudo do “reticulado” das subcategorias epi-reflectivas de categorias “do dia-a-dia” (veja-se, e.g., [24] e suas referências). Em particular, conforme observado por H. Herrlich [24], decorre de resultados apresentados em [76], [46] e [43] que o “reticulado” das subcategorias epi-reflectivas de $\mathcal{H}aus$ contém uma classe própria bem-ordenada e que, se assumirmos a não existência de cardinais mensuráveis, o mesmo se passa com $\mathcal{H}Comp$.

Acerca de subcategorias epi-reflectivas de Top_0 , referimos, a título de exemplo, o trabalho desenvolvido em [50], [31], [39] e [48].

Vamos, neste capítulo, fazer uso dos resultados obtidos no anterior para mostrar que o “reticulado” das subcategorias epi-reflectivas de Top_0 também contém uma classe própria bem-ordenada. Todo o ordinal α equipado com a topologia de Alexandrov é um espaço topológico T_0 . Como é sabido, para $\alpha = 2$ o invólucro reflectivo de α em Top_0 é a subcategoria dos *espaços sóbrios*. Aqui, caracterizamos o operador de fecho ortogonal induzido em Top_0 pela categoria cujo único objecto é α (que para $\alpha = 2$ coincide com o *b-fecho*). Definimos então *espaço α -sóbrio* para cada $\alpha \geq 2$ de tal modo que o invólucro reflectivo de α em Top_0 é a subcategoria dos espaços α -sóbrios. Além disso, obtemos uma correspondência bijectiva que preserva a ordem entre uma classe própria de ordinais e os correspondentes invólucros (epi-)reflectivos, ficando assim determinada a classe própria bem-ordenada de subcategorias epi-reflectivas de Top_0 anunciada acima.

A nossa principal ferramenta é o conceito de operador de fecho ortogonal.

10 Os operadores de fecho ortogonais c_α em \mathcal{Top}_0

Seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{Top}_0 e seja \mathcal{M} a classe de todas as imersões em \mathcal{Top}_0 . Com o intuito de simplificar, trataremos as imersões como inclusões de subespaços. Assim, como em \mathcal{Top}_0 as imersões são estáveis para somas amalgamadas, temos que um operador de fecho ortogonal em \mathcal{Top}_0 relativamente a \mathcal{M} e induzido por uma subcategoria \mathcal{A} faz corresponder, a cada subespaço X de um espaço Y , um outro subespaço $c_{\mathcal{A}}(X)$ que é a intersecção de todos os subespaços X_g de Y que são produtos fibrados de alguma soma amalgamada de m ao longo de algum $g \in \mathcal{Top}_0(X, \mathcal{A})$.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{m} & Y \\
 \searrow & & \nearrow \\
 & X_g & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 A & \longrightarrow & \bullet
 \end{array}$$

g (vertical arrow from X to A)
 m (horizontal arrow from X to Y)
 \bullet (bullet point at the bottom right)

É evidente que, para um espaço em \mathcal{Top}_0 , ser fortemente \mathcal{A} -fechado significa justamente ser absolutamente $c_{\mathcal{A}}$ -fechado, ou seja, cada uma das suas imersões num outro espaço é $c_{\mathcal{A}}$ -fechada.

Decorre agora facilmente a seguinte

Proposição 10.1 *Se \mathcal{Top}_0 é o invólucro epi-reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{Top} , então o operador de fecho $c_{\mathcal{A}}$ é idempotente e fracamente hereditário e o invólucro (epi-)reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{Top}_0 é constituído por todos os espaços fortemente \mathcal{A} -fechados.*

Demonstração. Se \mathcal{Top}_0 é o invólucro epi-reflectivo \mathcal{A} em \mathcal{Top} , então, para cada espaço X de \mathcal{Top}_0 , existe uma monofonte inicial pequena $(X \xrightarrow{f_i} A_i)_I$, com codomínio em \mathcal{A} . Assim, o morfismo $\langle f_i \rangle: X \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$ é uma imersão com codomínio em $\mathcal{O}(\mathcal{A})$. Atendendo a 3.7 e a 4.1, concluímos que o invólucro reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{Top}_0 é a subcategoria

de todos os espaços fortemente \mathcal{A} -fechados. Ela coincide com o invólucro epi-reflectivo já que em Top_0 a classe \mathcal{A}^\perp é constituída por todos os epimorfismos. \square

Vamos agora estudar o operador de fecho ortogonal $c_{\mathcal{A}}$ para um certo tipo de subcategorias \mathcal{A} de Top_0 .

É bem sabido que, dado um espaço X em Top_0 , podemos definir uma ordem parcial em X , a *ordem de especialização*, pondo $x \leq y$ se e só se $x \in \overline{\{y\}}$. Dado um conjunto parcialmente ordenado (X, \leq) , existem duas maneiras canónicas de definir uma topologia T_0 em X para a qual \leq é a ordem de especialização:

- a *topologia de Alexandrov*, que consiste em todos os conjuntos superiores, i.e., conjuntos U tais que se $x \in U$ e $x \leq y$ então $y \in U$;
- a *topologia do intervalo superior*, que é a menor topologia que contém todos os conjuntos da forma

$$X \setminus \downarrow x$$

onde $\downarrow x = \{y \in X \mid y \leq x\}$.

A primeira das duas topologias é a topologia maximal, e a segunda é a topologia minimal, de entre todas as topologias para as quais (X, \leq) é a ordem de especialização.

Seja $\alpha > 0$ um ordinal. Vamos considerar α como sendo um espaço topológico contemplado com a topologia de Alexandrov. Assim, como os conjuntos abertos não triviais de α são todos os conjuntos superiores $\uparrow \beta = \{\delta \in \alpha \mid \delta \geq \beta\}$ (com $\beta \in \alpha$), α é um espaço T_0 . De realçar que os subconjuntos próprios fechados de α são exactamente os ordinais menores do que α , ou seja, um conjunto $\gamma \subset \alpha$ é fechado em α se e só se $\gamma \in \alpha$.

É óbvio que o ordinal 2 é o espaço de Sierpiński. Ademais, para $\alpha \geq 2$, temos uma imersão $2 \hookrightarrow \alpha$ em Top_0 e, então, como Top_0 é o invólucro epi-reflectivo de 2 em Top , é também o invólucro epi-reflectivo de α em Top . Se \mathcal{A} é a subcategoria plena e fechada para isomorfismos de Top_0 gerada por α , denotamos por c_α o respectivo operador de fecho ortogonal e, analogamente, usamos a designação *fortemente α -fechado*.

Ao longo deste capítulo, o conjunto de todos os abertos de um espaço X será denotado por $\Omega(X)$.

Como observámos em 8.8.1, o operador de fecho c_2 é justamente o operador do b -fecho, usado primeiramente por Baron em [9] para caracterizar os epimorfismos em \mathcal{Top}_0 . Relembramos que se X é um subespaço de Y então um elemento y de Y pertence a $c_2(X)$ se e só se

(b) Para cada $H \in \Omega(Y)$ com $y \in H$, $\overline{\{y\}} \cap H \cap X \neq \emptyset$.

É conhecido que (b) é equivalente à condição

(b') Para conjuntos abertos arbitrários H e H' em Y tais que $H \cap X = H' \cap X$, temos que $y \in H$ se e só se $y \in H'$.

Além disso, é fácil verificar que (b') é também equivalente à condição

(b₂) Para cada aberto G de X , há um ordinal $\beta_0 < 2$ tal que, dados conjuntos abertos H_0, H_1 e H_2 de Y tais que $H_0 \cap X = X$, $H_1 \cap X = G$ e $H_2 \cap X = \emptyset$, temos que $y \in H_\delta$ se e só se $\delta \leq \beta_0$.

Com o propósito de generalizar esta caracterização do c_2 -fecho a todos os c_α -fechos, com α um ordinal, vamos considerar a seguinte definição:

Uma família $(G_\delta)_{\delta < \alpha}$ de conjuntos abertos de X diz-se uma α -sucessão contínua sempre que para cada $x \in X$ existir um ordinal $\beta_x < \alpha$ tal que

$$x \in G_\delta \text{ sse } \delta \leq \beta_x.$$

É óbvio que uma sucessão α -contínua é decrescente, i.e., $G_{\delta_1} \supseteq G_{\delta_2}$ para $\delta_1 \leq \delta_2$. É também claro que $G_0 = X$.

Dados agora um ordinal $\alpha \geq 1$ e um subespaço X de um espaço Y de \mathcal{Top}_0 , consideremos a seguinte assunção sobre um determinado $y \in Y$:

(b _{α}) Para cada α -sucessão contínua $(G_\delta)_{\delta < \alpha}$ de conjuntos abertos de X , há um ordinal $\beta_0 < \alpha$ tal que para cada família $(H_\delta)_{\delta \leq \alpha}$ de conjuntos abertos de Y com $H_\delta \cap X = G_\delta$ para todo $\delta < \alpha$ e $H_\alpha \cap X = \emptyset$, temos que $y \in H_\delta$ se e só se $\delta \leq \beta_0$.

A seguir mostramos que podemos caracterizar o c_α -fecho de um subespaço em \mathcal{Top}_0 , para $\alpha \geq 1$, por meio da condição (b _{α}). Para isso vamos usar o seguinte

Lema 10.2 *Se X é um subespaço de Y em Top_0 e $y \in Y$ então, para cada $\alpha \geq 1$, a condição (b_α) é equivalente à condição*

(b'_α) para toda a função contínua $g : X \rightarrow \alpha$ há um ordinal $\beta_0 < \alpha$ tal que para todo o $H \in \Omega(Y)$ e todo o $\beta \leq \alpha$ com $H \cap X = g^{-1}(\uparrow \beta)$, $y \in H$ se e só se $\beta \leq \beta_0$ ¹.

Demonstração. É imediato tendo em atenção que a aplicação que faz corresponder a cada função contínua $g : X \rightarrow \alpha$ a família

$$(g^{-1}(\uparrow \delta))_{\delta < \alpha}$$

é uma bijecção de $hom(X, \alpha)$ para o conjunto de todas as α -sucessões contínuas de conjuntos abertos de X . □

Proposição 10.3 *Se X é um subespaço de Y em Top_0 e $y \in Y$, então $y \in c_\alpha(X)$ se e só se satisfizer a condição (b_α) .*

Demonstração. Atendendo ao lema anterior, basta mostrar que $y \in c_\alpha(X)$ se e só se satisfizer a condição (b'_α) . Como para $y \in X$ o resultado é trivial, assumimos que $y \in Y \setminus X$.

Suponhamos então que y satisfaz a condição (b'_α) . Mostramos primeiro que $y \in \overline{X}$ (onde \overline{X} denota o fecho usual de X em Y). De facto, seja $H \in \Omega(Y)$ tal que $H \cap X = \emptyset$; definamos $g : X \rightarrow \alpha$ pondo $g(x) = 0$, $x \in X$. Como $g^{-1}(\uparrow 1) = \emptyset = \emptyset \cap X$, o ordinal β_0 requerido por (b'_α) tem de ser menor do que 1, logo $\beta_0 = 0$, e a igualdade $H \cap X = g^{-1}(\uparrow 1)$ implica que $y \notin H$.

Seja agora $g : X \rightarrow \alpha$ uma função contínua arbitrária e consideremos a seguinte soma amalgamada em Top , onde $m : X \rightarrow Y$ é a imersão de X em Y .

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{m} & Y \\
 g \downarrow & & \downarrow g' \\
 \alpha & \xrightarrow{m'} & W
 \end{array} \tag{III.1}$$

¹Para $g : X \rightarrow \alpha$, $g^{-1}(\uparrow \alpha)$ é o conjunto vazio. Para $\alpha \geq 2$, “ $\beta \leq \alpha$ ” pode ser substituído equivalentemente por “ $\beta < \alpha$ ”.

Supomos que $m' : \alpha \rightarrow W$ é a inclusão de α em $\alpha \dot{\cup} (Y \setminus X)$. Assim, a soma amalgamada de m ao longo de g em \mathcal{Top}_0 é o par $(r_W \cdot m', r_W \cdot g')$, onde r_W é a reflexão de W em \mathcal{Top}_0 . Seja β_0 o ordinal cuja existência é garantida por (b'_α) . Vamos mostrar que, para cada $U \in \Omega(W)$, $y \in U$ se e só se $\beta_0 \in U$, tirando-se então que $r_W(y) = r_W(\beta_0)$ e, conseqüentemente, $y \in X_g$. Seja $U \in \Omega(W)$, i.e., $(g')^{-1}(U) \in \Omega(Y)$ e $(m')^{-1}(U) \in \Omega(\alpha)$. Se $y \in U$, então $y \in (g')^{-1}(U)$ e, portanto, como $y \in \bar{X}$, $(g')^{-1}(U) \cap X \neq \emptyset$. Logo, tendo em conta que $(g')^{-1}(U) \cap X = g^{-1}((m')^{-1}(U))$, o conjunto $(m')^{-1}(U)$ é não vazio e, então, $(m')^{-1}(U) = \uparrow \beta$ para algum $\beta < \alpha$; ademais, posto que y satisfaz (b'_α) , tem de ser $\beta \leq \beta_0$. Obtemos assim que

$$\begin{aligned} y \in U & \quad \text{se e só se } y \in (g')^{-1}(U) \\ & \quad \text{se e só se } (m')^{-1}(U) = \uparrow \beta \text{ para algum } \beta \leq \beta_0 \\ & \quad \text{se e só se } \beta_0 \in (m')^{-1}(U) = \uparrow \beta \text{ para algum } \beta \\ & \quad \text{se e só se } \beta_0 \in U. \end{aligned}$$

Por conseguinte, $y \in X_g$ para cada $g \in \text{hom}(X, \alpha)$, ficando assim provado que $y \in c_\alpha(X)$.

Reciprocamente, seja $y \in c_\alpha(X)$ e seja $g \in \text{hom}(X, \alpha)$. Consideremos a soma amalgamada correspondente definida como em (III.1) e seja X_g a imagem inversa de α por meio de $r_W \cdot g'$. Então $y \in X_g$, o que é equivalente a dizer que existe um ordinal $\beta_0 < \alpha$ tal que $r_W(y) = r_W(\beta_0)$; além disso, este ordinal é único atendendo a que a estabilidade das imersões para somas amalgamadas em \mathcal{Top}_0 assegura que $r_W \cdot m'$ é injectiva. Seja $H \in \Omega(Y)$ e $\beta \leq \alpha$ tais que $g^{-1}(\uparrow \beta) = H \cap X$. Definamos $U = (H \setminus X) \dot{\cup} \uparrow \beta$; então $U \in \Omega(W)$. Ora, a igualdade $r_W(y) = r_W(\beta_0)$ é válida justamente quando, para todo o $G \in \Omega(W)$, $y \in G$ se e só se $\beta_0 \in G$; assim, para o conjunto aberto U considerado, temos que $y \in (g')^{-1}(U)$ se e só se $\beta_0 \in \uparrow \beta$, i.e., $y \in H$ se e só se $\beta \leq \beta_0$. \square

Corolário 10.4 *Se α e β são ordinais tais que $\alpha \leq \beta$ então $c_\beta \leq c_\alpha$.*

Demonstração. Sejam X um subespaço de Y em \mathcal{Top}_0 e $y \in c_\beta(X)$. Seja $g : X \rightarrow \alpha$ uma aplicação contínua e seja ainda $e : \alpha \hookrightarrow \beta$ a inclusão de α em β . Então, como y satisfaz a condição (b'_β) , existe um ordinal $\beta_0 < \beta$ tal que para todo o $H \in \Omega(Y)$ e todo o $\delta \leq \beta$ preenchendo a igualdade $H \cap X = (e \cdot g)^{-1}(\uparrow \delta)$, $y \in H$ se e só se $\delta \leq \beta_0$. Como $(e \cdot g)^{-1}(\uparrow \delta) = \emptyset$ para $\delta \geq \alpha$, necessariamente $\beta_0 < \alpha$ e este β_0 verifica a condição (b'_α) para $g : X \rightarrow \alpha$. Conseqüentemente, $y \in c_\alpha(X)$. \square

Observação 10.5 O operador de fecho c_n coincide com o operador de b -fecho para todos os $n \geq 1$. Com efeito, se X é um subespaço de Y e $y \in c_2(X)$, seja

$$X = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_{n-1}$$

uma n -sucessão contínua. Então, para cada $k = 1, \dots, n-1$,

$$X = G_0 \supseteq G_k$$

é uma 2-sucessão contínua. Consequentemente, por (b_2) , ela determina um ordinal $\delta_k < 2$ tal que, para cada família $(H_\delta)_{\delta \leq 2}$ de conjuntos abertos de Y com $H_0 \cap X = G_0$, $H_1 \cap X = G_k$ e $H_2 \cap X = \emptyset$, $y \in H_\delta$ se e só se $\delta \leq \delta_k$. É fácil concluir que o ordinal

$$\beta_0 = \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k$$

satisfaz a condição (b_n) para y e a n -sucessão contínua dada.

Consequentemente, $y \in c_n(X)$. Atendendo agora a 10.4, segue-se que $c_2 = c_n$, para $n \in \omega_0 \setminus 2$.

Por outro lado, c_2 é estritamente menor do que c_1 . Para o mostrar, consideremos a imersão $m : 2 \rightarrow 3$ definida por $m(0) = 0$ e $m(1) = 2$. Então $c_2(m) = m$, visto que o domínio de m é 2 (por ??). Mas $c_1(m) = 1_3$; isto verifica-se facilmente atendendo a que, para cada subespaço X de Y , podemos caracterizar $c_1(X)$ do seguinte modo:

$$y \in c_1(X) \text{ se e só se } y \in \overline{X} \text{ e, para cada } H \in \Omega(Y), \text{ se } X \subseteq H \text{ então } y \in H.$$

Com efeito, uma 1-sucessão contínua é constituída apenas pelo conjunto X e, neste caso, β_0 tem de ser igual a 0. Assim, por um lado, se $H \cap X = \emptyset$, então $y \notin H$ e, por outro lado, se $H \cap X = X$, isto é, $X \subseteq H$, então $y \in H$.

11 Espaços α -sóbrios

Definições 11.1 1. Seja X um espaço de $\mathcal{T}op_0$ e seja $\alpha \geq 1$. Um subespaço fechado F de X diz-se α -irreduzível se satisfizer as seguintes condições:

- (i_0) F é irreduzível, i.e., para conjuntos abertos arbitrários G_1 e G_2 , se $F \cap G_1 \cap G_2 = \emptyset$ então $F \cap G_1 = \emptyset$ ou $F \cap G_2 = \emptyset$.

- (i_α) Para toda a α -sucessão contínua $(G_\delta)_{\delta < \alpha}$ de conjuntos abertos em X tal que $F \cap (\bigcap_{\delta \in \alpha} G_\delta) = \emptyset$, o conjunto $\{\delta < \alpha \mid F \cap G_\delta \neq \emptyset\}$ tem um máximo.
2. Um espaço T_0 diz-se α -sóbrio se cada um dos seus conjuntos fechados α -irredutíveis é o fecho de um único ponto.

Observações 11.2

1. Fazemos notar que a condição (i_α) implica que um conjunto fechado α -irredutível seja diferente do vazio.

É claro que, para todo o ordinal finito $n \neq 0$, um conjunto fechado não vazio é n -irredutível se e só se satisfizer a condição (i_0) (visto que (i_n) se verifica trivialmente). Consequentemente, ser um espaço n -sóbrio significa apenas ser um espaço sóbrio. Contudo, introduzimos a noção de α -sóbrio também para ordinais α finitos tendo em vista as caracterizações 11.3 e 11.4 adiante. Elas “funcionam” bem para todos os $\alpha \geq 2$, mas não para $\alpha = 1$, como veremos. Vem a propósito realçar o facto de \mathcal{Top}_0 ser o invólucro (epi-)reflectivo de α em \mathcal{Top} só se $\alpha > 1$.

2. Combinando (i_0) com (i_α) obtemos a seguinte condição que é equivalente à conjunção das duas anteriores:

(I_α) Para toda a α -sucessão contínua $(G_\delta)_{\delta < \alpha}$ com $G_\delta = A_1^\delta \cap A_2^\delta$ e A_1^δ e A_2^δ quaisquer em $\Omega(X)$, tais que $F \cap (\bigcap_{\delta < \alpha} G_\delta) = \emptyset$, existe um ordinal $\delta_0 < \alpha$ tal que $F \cap G_{\delta_0} \neq \emptyset$ e $F \cap A_j^{\delta_0+1} = \emptyset$ para $j = 1$ ou $j = 2$.

3. É bem conhecido que a condição (i_0) de 11.1 sobre F é equivalente a

(i'_0) Se F é a reunião de dois conjuntos fechados então F é igual a um deles.

Usando o Lemma 10.2, é simples verificar que (i_α) é equivalente a

(i'_α) Para toda a aplicação $g : X \rightarrow \alpha$, o conjunto $g(F)$ tem um máximo.

A formulação (i'_α) da condição (i_α) será muito útil no seguimento.

Proposição 11.3 *Para cada ordinal $\alpha \geq 2$, um espaço X de \mathcal{Top}_0 é α -sóbrio se e só se for fortemente α -fechado.*

Demonstração. Suponhamos que X não é um espaço α -sóbrio. Isto quer dizer que X tem um conjunto F fechado e α -irreduzível que não é o fecho de um único ponto. Definamos Y como se segue:

$$Y = X \dot{\cup} \{a\}$$

$$\Omega(Y) = \{H \mid H \in \Omega(X) \text{ e } H \cap F = \emptyset\} \cup \{H \cup \{a\} \mid H \in \Omega(X) \text{ e } H \cap F \neq \emptyset\}.$$

É imediato que $\Omega(Y)$ é fechado para reuniões arbitrárias e intersecções finitas; quanto a estas, fazemos notar que basta usar a irreduzibilidade de F para concluir que $\bigcap_{i=1}^2 (H_i \dot{\cup} \{a\}) \in \Omega(Y)$ onde $H_i \dot{\cup} \{a\} \in \Omega(Y)$ para $i = 1, 2$.

Mostremos que $Y \in \mathcal{Top}_0$. É evidente que quaisquer dois pontos distintos de X são “separados” por algum conjunto aberto de Y ; ademais, se x é um ponto de X e $x \notin F$, existe algum $H \in \Omega(X)$ tal que $x \in H$ e $H \cap F = \emptyset$ e, então, H é um conjunto aberto de Y que separa x de a . Consideremos agora o ponto a e um qualquer $x \in F$. Se $x \in F$, então $\overline{\{x\}} \neq F$ por hipótese sobre F e usando 11.2.3. Então existem $x' \in F$ e $G \in \Omega(X)$ tais que $x' \in G$ mas $x \notin G$. Por conseguinte, $G \dot{\cup} \{a\} \in \Omega(Y)$ “separa” a de x .

É óbvio que X é um subespaço de Y . Vamos mostrar que $a \in c_\alpha(X)$ mostrando que a satisfaz a condição (b'_α) ; concluiremos assim que X não é fortemente α -fechado. Seja $g : X \rightarrow \alpha$ uma aplicação contínua. Por hipótese sobre F e por 11.2.3, há um ordinal $\beta_0 \in \alpha$ tal que $\beta_0 = \max g(F)$. Com o intuito de mostrar que β_0 satisfaz o requerido em (b'_α) de 10.2, tomemos $H \in \Omega(Y)$ e $\beta \leq \alpha$ tais que $H \cap X = g^{-1}(\uparrow \beta)$. Então, por um lado, se $a \in H$, verifica-se a igualdade $H = g^{-1}(\uparrow \beta) \dot{\cup} \{a\}$ com $g^{-1}(\uparrow \beta) \cap F \neq \emptyset$ e, por definição de β_0 , segue-se que $\beta \leq \beta_0$. Por outro lado, se $a \notin H$, então $H = g^{-1}(\uparrow \beta)$ e $g^{-1}(\uparrow \beta) \cap F = \emptyset$; assim, $\beta_0 \notin \uparrow \beta$, i.e., $\beta_0 < \beta$.

Reciprocamente, assumamos que X é α -sóbrio. Seja X um subespaço de Y , sendo este um espaço T_0 , e seja $y \in Y$ tal que $y \in c_\alpha(X)$. Queremos mostrar que y tem de ser um ponto de X .

Seja $\overline{\{y\}}$ o fecho de $\{y\}$ em Y . Começemos por notar que, pelo Corolário 10.4, $y \in c_2(X)$ e, então, como c_2 é o operador de b -fecho, segue-se sem dificuldade que $\overline{\{y\}} \cap X$ é um conjunto fechado de X que satisfaz a condição (i'_0) (que, por sua vez, é equivalente a (i_0) , atendendo a 11.2.3). Por outro lado, $\overline{\{y\}} \cap X$ satisfaz a condição (i_α) ; para o mostrar, provemos que preenche a condição (i'_α) (veja-se 11.2.3). De facto, como $y \in c_\alpha(X)$, para cada aplicação contínua $g : X \rightarrow \alpha$, seja $\beta_0 \in \alpha$ o ordinal cuja existência

é garantida na condição (b_α) . Vamos mostrar que $\beta_0 = \max g(\overline{\{y\}} \cap X)$. Seja $x \in \overline{\{y\}} \cap X$; então, para algum $H \in \Omega(Y)$, $g^{-1}(\uparrow g(x)) = H \cap X$, e, como $x \in H \cap \overline{\{y\}}$, y tem de pertencer a H , pelo que $g(x) \leq \beta_0$. Seja agora $H \in \Omega(Y)$ tal que $H \cap X = g^{-1}(\uparrow \beta_0)$; então $y \in H$ e, como $y \in c_2(X)$, $\overline{\{y\}} \cap X \cap H \neq \emptyset$, ou seja, existe algum $x \in \overline{\{y\}} \cap X$ tal que $g(x) \in \uparrow \beta_0$. Mas, como vimos, $g(x) \leq \beta_0$; então $g(x) = \beta_0$ e β_0 é o máximo pretendido.

Logo, como X é um espaço α -sóbrio e $\overline{\{y\}} \cap X$ é α -irredutível, $\overline{\{y\}} \cap X = \overline{\{x\}} \cap X$ para algum $x \in X$. Assim, por um lado, $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$; por outro lado, dado $H \in \Omega(Y)$ com $y \in H$, temos que $\overline{\{x\}} \cap H \neq \emptyset$, visto que $\overline{\{x\}} \cap H \cap X = \overline{\{y\}} \cap H \cap X \neq \emptyset$, e, então, $x \in H$; conseqüentemente, temos a inclusão $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$. Agora, como $\overline{\{y\}} = \overline{\{x\}}$ e Y é um espaço T_0 , segue-se que $y = x$. \square

Corolário 11.4 *Para cada ordinal $\alpha \in \text{Ord} \setminus 2$, o invólucro (epi-)reflectivo de α em Top_0 é a subcategoria plena de todos os espaços α -sóbrios.*

Demonstração. É uma consequência imediata da proposição anterior e de 10.1. \square

Daqui em diante, para cada $\alpha \in \text{Ord} \setminus 2$, denotaremos a subcategoria plena dos espaços α -sóbrios por $\text{Sob}(\alpha)$.

Corolário 11.5 *Para $\alpha, \beta \in \text{Ord} \setminus 2$ tais que $\alpha \leq \beta$, $\text{Sob}(\alpha) \subseteq \text{Sob}(\beta)$.*

Demonstração. É uma consequência da proposição anterior e do Corolário 10.4. \square

12 A cadeia das subcategorias $\text{Sob}(\alpha)$

Como vimos, para $n \in \omega_0 \setminus 2$, $\text{Sob}(n) = \text{Sob}(2)$. Seguidamente, vamos tratar da questão de saber para que ordinais $\alpha < \beta$ a subcategoria $\text{Sob}(\alpha)$ está estritamente contida em $\text{Sob}(\beta)$.

Recordamos, em primeiro lugar, algumas definições e factos acerca de cardinais, extraídos essencialmente de [49], e que são necessários para o que se segue.

Um *cardinal* é justamente um ordinal que não é equipotente com nenhum dos ordinais que contém.

Um cardinal diz-se *regular* se não se puder escrever como a soma indexada por um cardinal que lhe é inferior de ordinais menores que ele próprio. Por outras palavras, um cardinal λ é regular se, para qualquer conjunto $\Gamma \subseteq \lambda$ com cardinalidade menor do que λ , se verifica $\bigcup \Gamma < \lambda$. Por exemplo, ω_0 e ω_1 são regulares; além disso, para todo o cardinal infinito α , α^+ é regular, representando α^+ o menor cardinal que é maior do que α . Já o cardinal ω_ω , por exemplo, não é regular visto ser a reunião de todos os ω_i com $i \in \omega$.

Se α e β são ordinais, dizemos que α é *cofinal com* β se existir uma função f estritamente crescente com domínio β tal que

$$\bigcup_{\gamma < \beta} (f(\gamma) + 1) = \alpha.$$

Se α é um ordinal limite e α é cofinal com β , então β também é um ordinal limite e, neste caso, a cofinalidade de α com β significa exactamente que existe uma função estritamente crescente $f : \beta \rightarrow \alpha$ tal que

$$\bigcup_{\gamma < \beta} f(\gamma) = \alpha.$$

Recordemos ainda que um ordinal infinito α é um cardinal regular se e só se não for cofinal com nenhum ordinal menor do que α .

Para todo o ordinal α , o *carácter de cofinalidade* de α , denotado por $cf(\alpha)$, é o menor ordinal β tal que α é cofinal com β . Se α é um ordinal limite, então $cf(\alpha)$ é um cardinal regular.

Denotemos por $\mathcal{O}rd$ a categoria cujos objectos são todos os ordinais e cujos morfismos são todas as aplicações que preservam a ordem. O lema seguinte, que estabelece que, a menos de um isomorfismo concreto, $\mathcal{O}rd$ é uma subcategoria plena de $\mathcal{T}op_0$, ser-nos-á de grande utilidade no teorema a seguir.

Lema 12.1 *A função que transforma cada ordinal num espaço T_0 equipando-o com a topologia de Alexandrov é uma imersão concreta e plena de $\mathcal{O}rd$ em $\mathcal{T}op_0$.*

Demonstração. Pretendemos mostrar que uma aplicação $f : \alpha \rightarrow \beta$ entre dois ordinais preserva a ordem se e só se for contínua relativamente às topologias de Alexandrov.

De facto, a ordem de especialização para estas topologias coincide com a ordem usual e é bem sabido que se X e Y são espaços T_0 , toda a aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ preserva a ordem de especialização.

Reciprocamente, se $f : \alpha \rightarrow \beta$ preserva a ordem, dado $\delta \in \beta$, seja

$$\gamma_0 = \min\{\gamma \in \alpha \mid f(\gamma) \in \uparrow \delta\};$$

então, $f^{-1}(\uparrow \delta) = \uparrow \gamma_0$. Consequentemente, f é contínua. \square

O teorema seguinte permite-nos concluir que existe uma classe própria bem-ordenada de subcategorias $Sob(\alpha)$ com $\alpha \in Ord$.

Teorema 12.2 *Dados ordinais $\beta > \alpha \geq 2$, então $Sob(\alpha)$ está estritamente contida em $Sob(\beta)$ se e só se existir um cardinal infinito regular λ tal que $\alpha \leq \lambda \leq \beta$.*

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta, \lambda \in Ord \setminus 2$ tais que $\alpha < \beta$ e $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ com λ um cardinal infinito regular. O conjunto fechado λ de β satisfaz trivialmente (i'_0) ; vamos mostrar que também satisfaz (i'_α) , pelo que λ é α -irredutível.

Seja $g : \beta \rightarrow \alpha$ uma aplicação contínua.

Se $\lambda < \beta$, seja $\delta \in \alpha$ tal que $g(\lambda) = \delta$; então, como a continuidade de g é equivalente à preservação da ordem (por 12.1), segue-se que $\theta \in \lambda \Rightarrow g(\theta) \leq g(\lambda) = \delta$ e, consequentemente, $\lambda \subseteq g^{-1}(\downarrow \delta)$.

Se $\lambda = \beta$, posto que $\alpha = \bigcup_{\delta \in \alpha} \downarrow \delta$, obtemos $\lambda \subseteq \bigcup_{\delta \in \alpha} g^{-1}(\downarrow \delta)$ e, então, como $\alpha < \lambda$ e λ é regular, $\lambda \subseteq g^{-1}(\downarrow \delta)$ para algum $\delta \in \alpha$.

Fica assim assegurada a existência de $\delta_0 = \min\{\delta \in \alpha \mid \lambda \subseteq g^{-1}(\downarrow \delta)\}$. Ademais, $\lambda \cap g^{-1}(\{\delta_0\}) \neq \emptyset$, pelo que $\delta_0 = \max g(\lambda)$. Com efeito, se $\lambda \cap g^{-1}(\{\delta_0\}) = \emptyset$, então $\lambda \subseteq \bigcup_{\delta \in \delta_0} g^{-1}(\downarrow \delta)$; mas, como λ é regular, resulta que $\lambda \subseteq g^{-1}(\downarrow \delta)$ para algum $\delta \in \delta_0$, o que contradiz a definição de δ_0 . Por conseguinte, $\delta_0 \in g(\lambda)$.

Portanto, acabámos de mostrar que λ é um conjunto fechado α -irredutível de β . Mas λ não é o fecho de um único ponto; de facto, um conjunto é o fecho de um único ponto se e só se é um ordinal sucessor. Concluimos assim que β não é um espaço α -sóbrio e, por conseguinte, a inclusão $Sob(\alpha) \subseteq Sob(\beta)$ é estrita.

Reciprocamente, suponhamos que não existe nenhum cardinal infinito regular entre α e β . Os únicos subconjuntos fechados de β que não são o fecho de um conjunto singular são os ordinais limite. Vamos mostrar que eles não são α -irredutíveis, pelo que $\beta \in Sob(\alpha)$

e $Sob(\alpha) = Sob(\beta)$. Seja γ um ordinal limite em β , seja λ o seu carácter de cofinalidade (que é um cardinal infinito regular) e seja

$$f : \lambda \rightarrow \gamma$$

uma função estritamente crescente tal que

$$\gamma = \bigcup_{\delta \in \lambda} f(\delta).$$

Por hipótese, λ tem de ser menor do que α e, de acordo com as assunções sobre f , para cada $\phi \in \gamma$ existe algum $\delta \in \lambda$ tal que $\phi < f(\delta)$ e, assim, o conjunto $\{\delta \in \lambda \mid \phi \leq f(\delta)\}$ não é vazio. Podemos então definir uma aplicação

$$g : \beta \rightarrow \alpha$$

do seguinte modo:

$$g(\phi) = \begin{cases} \min\{\delta \in \lambda \mid \phi \leq f(\delta)\}, & \text{se } \phi \in \gamma, \\ \lambda, & \text{se } \phi \notin \gamma. \end{cases}$$

É óbvio que g é não-decrescente, logo contínua, atendendo a 12.1. Mas γ não verifica (i'_α) em relação a g ; efectivamente, temos que $g(\gamma) = \lambda$, visto que a definição de g e o facto de f ser estritamente crescente implica que, para cada $\delta \in \lambda$, $g(f(\delta)) = \delta$. \square

Corolário 12.3 *A família $(Sob(\alpha))$, onde α percorre a classe dos cardinais infinitos, é uma classe própria bem-ordenada que está contida no “reticulado” das subcategorias epi-reflectivas de Top_0 .*

Demonstração. Se α e β são cardinais infinitos e $\alpha < \beta$ então existe algum cardinal infinito regular entre eles, visto que, para todo o cardinal infinito α , o cardinal α^+ é regular. Ocorre, então, a desigualdade $Sob(\alpha) \neq Sob(\beta)$. Usando agora 11.5, obtemos o resultado expresso acima. \square

Observação 12.4 Realmente, atendendo a 12.2 e a 12.3, os ordinais $\alpha > 2$ para os quais $(Sob(\alpha))$ contém estritamente $(Sob(\beta))$ para todo o $\beta < \alpha$ são precisamente todos os cardinais infinitos e todos os ordinais que são o sucessor de um cardinal infinito regular. Temos assim que

$$\begin{aligned} Sob(2) \subset Sob(\omega_0) \subset Sob(\omega_0 + 1) = Sob(\omega_0 + \omega_0) = \cdots = Sob(\omega_0 \cdot \omega_0) = \cdots \\ \cdots \subset Sob(\omega_1) \subset Sob(\omega_1 + 1) = \cdots \subset Sob(\omega_\omega) = Sob(\omega_\omega + 1) = \cdots \end{aligned}$$

Observação 12.5 Na secção anterior caracterizámos o invólucro epi-reflectivo de cada ordinal dotado com a topologia de Alexandrov em \mathcal{Top}_0 . Em [48], S. Mantovani considerou cada ordinal α equipado com a topologia do intervalo superior, i.e., os conjuntos abertos não triviais são da forma $\{\delta \in \alpha \mid \delta > \beta\}$, $\beta \in \alpha$, e caracterizou os invólucros epi-reflectivos destes espaços em \mathcal{Top}_0 . É evidente que, para cada ordinal α , a topologia do intervalo superior e a topologia de Alexandrov coincidem se e só se $\alpha \leq \omega_0$: para $\alpha > \omega_0$, cada ordinal limite em α é fechado para a topologia de Alexandrov, mas não para a do intervalo superior. Para $\alpha > \omega_0$, os invólucros epi-reflectivos obtidos neste capítulo são diferentes dos invólucros de S. Mantovani, como decorre do facto de todo o ordinal sucessor com a topologia do intervalo superior ser um espaço sóbrio. Mais geralmente, prova-se em [48] que para α e β com a topologia do intervalo superior os invólucros epi-reflectivos correspondentes coincidem se e só se $cf(\alpha) = cf(\beta)$. Para além disso, S. Mantovani mostrou que estes invólucros epi-reflectivos não são comparáveis no “reticulado” das subcategorias epi-reflectivas de \mathcal{Top}_0 . Portanto, a nossa definição de espaço α -sóbrio fornece uma generalização mais natural do conceito de espaço sóbrio. Nomeadamente, e em contraste com os invólucros epi-reflectivos de S. Mantovani, temos que:

1. A função

$$Ord \setminus 2 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{Top}_0),$$

onde $\mathcal{L}(\mathcal{Top}_0)$ denota o “reticulado” das subcategorias epi-reflectivas de \mathcal{Top}_0 , que faz corresponder, a cada ordinal α , a subcategoria $Sob(\alpha)$, preserva a ordem (pelo Corolário 11.5).

2. Como mostrámos no Lema 12.1, a classe de todos os ordinais e todas as aplicações que preservam a ordem pode ser considerada como uma subcategoria concreta plena de \mathcal{Top}_0 , dotando cada ordinal com a topologia de Alexandrov. Isto já não acontece se a topologia do intervalo superior substituir a de Alexandrov. De facto, seja

$$f : \omega + 1 \longrightarrow \omega + 1$$

definida por

$$\begin{aligned} f(\delta) &= 0 \quad \text{para todo o } \delta \in \omega; \\ f(\omega) &= \omega. \end{aligned}$$

Então f preserva a ordem, 1 é um conjunto fechado para ambas as topologias, a de Alexandrov e a do intervalo superior, mas o conjunto $f^{-1}(1) = \omega$ não é fechado para a topologia do intervalo superior.

Capítulo IV

Invólucros sólidos

Categorias sólidas são categorias concretas nas quais toda a cofonte estruturada tem um levantamento semifinal. É bem conhecido que estas categorias, introduzidas, sob diferentes nomes, por V. Trnková [75] e R.-E. Hoffmann [35, 36], retêm propriedades da categoria base, tais como a completude, a cocompletude e outras relevantes, e são ainda suficientemente gerais para abarcar todas as categorias “bem-comportadas” na Topologia e na Álgebra; veja-se [2] para mais detalhes.

Há, contudo, uma propriedade em relação à qual estas categorias são menos satisfatórias: parece não ser possível encontrar um procedimento geral para a construção de uma extensão sólida tão pequena quanto possível, i.e., um *invólucro sólido*, de uma categoria concreta arbitrária. Isto contrasta com a situação das *categorias topológicas*, i.e., categorias nas quais toda a cofonte estruturada tem um levantamento final: o *invólucro topológico*, habitualmente chamado *complemento de MacNeille*, introduzido por H. Herrlich [27], foi construído para o caso geral por J. Adámek, H. Herrlich e G. E. Strecker [1] no sentido de que, quando essa construção é legítima, ela fornece um invólucro topológico, e, quando não é legítima, o invólucro topológico não existe.

No presente capítulo estudamos condições sob as quais uma dada categoria concreta tem um invólucro sólido. Continuamos assim a investigação iniciada por J. Rosický [55, 56, 57] que apresentou, inter alia, uma categoria concreta sobre \mathcal{Set} que não tem um invólucro sólido, apesar de ter uma extensão sólida finalmente densa (veja-se 13.11 adiante). Em [57], Rosický mostra que, assumindo o axioma (M) da não-existência de uma classe própria de cardinais mensuráveis, há uma categoria concreta sobre \mathcal{Set} contendo

uma subcategoria pequena finalmente densa que não tem um invólucro sólido. Baseando-nos em resultados de J. Adámek, J. Rosický e V. Trnková ([5], [7], [57]), mostramos que, mais do que isso, a existência de invólucros sólidos para categorias concretas sobre \mathcal{Set} com uma subcategoria pequena finalmente densa é equivalente ao *Princípio Fraco de Vopěnka*. ((M) implica a negação do Princípio Fraco de Vopěnka, veja-se [7].)

A existência de invólucros sólidos e a de invólucros reflectivos estão intimamente ligadas, como veremos neste capítulo.

13 Invólucro sólido

Recordamos que uma *categoria concreta* sobre uma categoria \mathcal{X} é um par (\mathcal{A}, U) , onde \mathcal{A} é uma categoria e $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$ é um functor fiel; um *functor concreto* de (\mathcal{A}, U) para outra categoria concreta (\mathcal{B}, V) sobre \mathcal{X} , denotado por $F : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{B}, V)$, é um functor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $U = V \cdot F$.

Uma referência adequada para uma informação de base sobre categorias concretas é [2].

Para todas as categorias concretas (\mathcal{A}, U) , assumiremos sempre que U é *amnóstico*, i.e., todo o isomorfismo de \mathcal{A} cuja imagem por U é uma identidade é necessariamente uma identidade.

Uma categoria concreta bem conhecida é \mathcal{Top} equipada com o habitual functor de esquecimento sobre \mathcal{Set} . Uma propriedade importante de \mathcal{Top} é a seguinte:

- (1) Se (X_i, τ_i) são espaços topológicos, $i \in I$, e $(f_i : X_i \rightarrow X)_I$ é uma família de aplicações, então existe uma única topologia τ em X , a topologia final relativamente a $(f_i)_I$, tal que, se (Y, ν) é um espaço topológico e $g : X \rightarrow Y$ é uma função para a qual $g \cdot f_i$ é contínua para todo $i \in I$, então $g : (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ é uma função contínua.

De facto, muitas das propriedades de \mathcal{Top} podem ser obtidas de (1).

Várias categorias concretas conhecidas satisfazem a condição anterior e são então chamadas categorias topológicas. Mais precisamente, recordamos que:

Se (\mathcal{A}, U) é uma categoria concreta, então uma cofonte $(f_i : A_i \rightarrow A)_I$ em \mathcal{A} diz-se

U -final se todo o morfismo $g : UA \rightarrow UB$ de \mathcal{X} é a imagem por U de algum morfismo de \mathcal{A} sempre que todos os $g \cdot f_i$ são a imagem por U de morfismos de \mathcal{A} . A noção dual é fonte U -inicial.

Uma categoria concreta (\mathcal{A}, U) diz-se *topológica* se toda a cofonte U -estruturada $(x_i : UA_i \rightarrow X)_I$ tem um levantamento U -final $(f_i : A_i \rightarrow A)_I$, i.e., $UA = X$ e $(f_i : A_i \rightarrow A)_I$ é U -final. Podemos definir uma categoria topológica de modo equivalente como sendo uma categoria concreta (\mathcal{A}, U) para a qual toda a fonte U -estruturada $(x_i : X \rightarrow UA_i)_I$ tem um levantamento U -inicial. A fidelidade e a amnesticidade de U asseguram a unicidade de cada levantamento U -final (ou U -inicial).

As categorias topológicas têm propriedades muito boas (ver, e.g., [2]); recordamos aqui que, em particular, se (\mathcal{A}, U) é uma categoria topológica sobre \mathcal{X} , então

(p₁) U é um adjunto direito;

(p₂) \mathcal{A} é (co)completa sempre que \mathcal{X} é (co)completa;

(p₃) Se (\mathcal{A}, U) tem fibras pequenas (i.e., para todo o objecto X de \mathcal{X} a colecção de todos os objectos de \mathcal{A} para os quais $UA = X$ é um conjunto), então \mathcal{A} é bem-(co)potenciada sempre que \mathcal{X} é bem-(co)potenciada.

Vários exemplos de categorias topológicas podem ser encontrados em [2]. Vamos agora descrever um exemplo de categorias concretas que são topológicas, não obstante a sua origem algébrica, e que serão muito úteis no seguimento.

Exemplo 13.1 Seguindo terminologia de [6], seja Σ um *domínio de relações λ -árias*, isto é, Σ é um conjunto de símbolos relacionais, tais que, para cada $\sigma \in \Sigma$, temos uma dada aridade $ar(\sigma)$ sendo $ar(\sigma)$ um conjunto com $card(ar(\sigma)) < \lambda$. Uma *estrutura relacional* A de tipo Σ consiste num conjunto subjacente X_A e em relações $\sigma_A \subseteq X_A^{ar(\sigma)}$ para cada σ . A categoria $\mathcal{Rel}(\Sigma)$ tem, como objectos, todas as estruturas relacionais de tipo Σ e, como morfismos, todos os homomorfismos, i.e., aplicações que preservam as relações correspondentes.

A categoria $\mathcal{Rel}(\Sigma)$, com o usual functor de esquecimento sobre \mathcal{Set} , é topológica. Com efeito, dadas estruturas relacionais A_i , $i \in I$, e uma cofonte $(f_i : X_{A_i} \rightarrow X)_I$ em \mathcal{Set} , definimos um levantamento final tomando a estrutura relacional A definida por

$$X_A = X \quad \text{e, para todo } \sigma \in \Sigma, \quad \sigma_A = \bigcup_{i \in I} \{(f_i(a_t))_{t \in ar(\sigma)} \mid (a_t)_{t \in ar(\sigma)} \in \sigma_{A_i}\}.$$

A noção de categoria sólida, que recordamos a seguir, generaliza a de categoria topológica (bem como a de categoria topologicamente algébrica, veja-se [2]). Na verdade, as categorias sólidas surgem com abundância em Topologia e Álgebra.

Definição 13.2 Uma categoria concreta (\mathcal{A}, U) diz-se *sólida* se, para cada cofonte U -estruturada $S = (UA_i \xrightarrow{x_i} X)_I$, existir um morfismo U -estruturado $X \xrightarrow{y} UB$ tal que:

- (i) $y \cdot x_i$ é a imagem por U de um morfismo $A_i \rightarrow B$ de \mathcal{A} para cada $i \in I$;
- (ii) sempre que um morfismo U -estruturado $X \xrightarrow{z} UC$ é tal que $z \cdot x_i$ é a imagem por U de um morfismo de \mathcal{A} para todo $i \in I$, então há um único morfismo $B \xrightarrow{f} C$ em \mathcal{A} tal que $Uf \cdot y = z$.

Observações 13.3 (cf.[71])

1. Este conceito é substancialmente mais fraco do que o de categoria topológica. Não obstante, ele retém algumas das propriedades mais significativas, e.g. (p_1) e (p_2) mencionadas anteriormente.
2. Outras propriedades relevantes envolvendo solidez são as seguintes:
 - (a) Os funtores sólidos, i.e., funtores fiéis $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$ tais que (\mathcal{A}, U) é sólida, são fechados para a composição.
 - (b) Se \mathcal{A} é uma subcategoria reflectiva de uma categoria \mathcal{B} , então o functor inclusão $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ é sólido.

O problema seguinte tem sido estudado por vários autores, relativamente a diversas propriedades (cf., por exemplo, [62] e referências aí indicadas): Dada uma categoria concreta (\mathcal{A}, U) , existe uma extensão de (\mathcal{A}, U) com boas propriedades, e.g., uma extensão topológica ou uma extensão sólida? E, se for esse o caso, existe uma que seja a menor?

Aqui, estamos particularmente interessados na existência da menor extensão sólida.

Para sermos mais precisos na terminologia, recordemos que:

Uma imersão concreta plena $E : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{B}, V)$ diz-se uma *extensão de (\mathcal{A}, U)* . Também dizemos que (\mathcal{B}, V) é uma extensão de (\mathcal{A}, U) .

Uma extensão $E : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{B}, V)$ de (\mathcal{A}, U) é *finalmente densa* se para cada objecto B de \mathcal{B} existir uma cofonte V -final $(f_i : EA_i \rightarrow B)_I$ com cada A_i em \mathcal{A} .

Dualmente, temos a noção de extensão *inicialmente densa*.

Definição 13.4 Se $E_1 : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{B}_1, V_1)$ e $E_2 : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{B}_2, V_2)$ são extensões finamente densas de (\mathcal{A}, U) , dizemos que E_1 é *menor ou igual do que* E_2 sempre que existir uma imersão concreta plena $F : (\mathcal{B}_1, V_1) \rightarrow (\mathcal{B}_2, V_2)$ tal que $F \cdot E_1 = E_2$.

É óbvio que esta relação “menor ou igual do que” é reflexiva e transitiva; além disso, é “quase” anti-simétrica: se E_1 é menor ou igual do que E_2 e E_2 é menor ou igual do que E_1 , então as duas extensões de (\mathcal{A}, U) são isomorfas, isto é, existe um isomorfismo concreto F tal que $F \cdot E_1 = E_2$. Isto é uma consequência do próximo lema.

Lema 13.5 *Dadas imersões concretas plenas finalmente densas $E_i : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{B}_i, V_i)$, $i = 1, 2$, existe quando muito uma imersão concreta plena $F : (\mathcal{B}_1, V_1) \rightarrow (\mathcal{B}_2, V_2)$ tal que $F \cdot E_1 = E_2$.*

Demonstração. Sejam F e F' imersões concretas plenas tais que $F \cdot E_1 = F' \cdot E_1 = E_2$. Para cada $B \in \text{Obj}(\mathcal{B}_1)$, temos que $(f_i : E_1 A_i \rightarrow B)_I$ é a cofonte de todos os morfismos com codomínio B e domínio em $E_1(\mathcal{A})$ se e só se $(F f_i : E_2 A_i \rightarrow FB)_I$ e $(F' f_i : E_2 A_i \rightarrow F'B)_I$ são as cofontes de todos os morfismos com codomínio FB e $F'B$, respectivamente, e domínio em $E_2(\mathcal{A})$. Como E_2 é finalmente densa, ambas as cofontes $(F f_i : E_2 A_i \rightarrow FB)_I$ e $(F' f_i : E_2 A_i \rightarrow F'B)_I$ são finais. Portanto, pelo facto de F e F' serem concretos e tendo em conta que V_2 é amnésico, decorre que $FB = F'B$. Como $V_2 \cdot F = V_2 \cdot F'$ e V_2 é fiel, segue-se que F e F' coincidem também nos morfismos. \square

Recordemos que, dada uma categoria concreta (\mathcal{A}, U) sobre \mathcal{X} , uma cofonte U -estruturada $S = (UA_i \xrightarrow{f_i} X)_I$ diz-se *fechada* se contiver todos os morfismos $g : UB \rightarrow X$ tais que para cada $h : X \rightarrow UA$, o morfismo $h \cdot g$ de \mathcal{X} é a imagem por U de um morfismo de \mathcal{A} sempre que o mesmo acontece com todos os $h \cdot f_i$.

Podemos considerar a quase-categoria de todas as cofontes U -estruturadas fechadas tomando como morfismos de $S = (UA_i \xrightarrow{f_i} X)_I$ para $S' = (UA_j \xrightarrow{g_j} Y)_J$ todos os morfismos $f : X \rightarrow Y$ de \mathcal{X} tais que $f \cdot f_i$ pertence a S' , para todo $i \in I$. Conforme mostrado por J. Adámek, H. Herrlich e G. Strecker em [1], uma categoria concreta (\mathcal{A}, U) tem uma menor extensão topológica se e só se o aglomerado das U -cofontes fechadas é legítimo e, neste caso, a categoria das U -cofontes fechadas é a menor extensão topológica, usu-

almente chamada *complemento de MacNeille*. Ela coincide (a menos de isomorfismo) com toda a extensão topológica inicial e finalmente densa da categoria concreta dada.

O próximo resultado, devido a Hoffmann e Tholen, é muito importante para este capítulo. (Naturalmente, se $E : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{B}, V)$ é uma extensão, então dizemos que (\mathcal{A}, U) , ou simplesmente \mathcal{A} , é reflectiva em (\mathcal{B}, V) , ou \mathcal{B} , desde que $E(\mathcal{A})$ seja reflectiva em \mathcal{B} .)

Proposição 13.6 ([37, 71]) *Uma categoria concreta é sólida se e só se tiver um complemento de MacNeille e for reflectiva nele.* \square

Vamos agora definir invólucro sólido de uma categoria concreta.

Definição 13.7 Uma extensão $E^s : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{A}^s, U^s)$ de uma categoria concreta (\mathcal{A}, U) é um *invólucro sólido* de (\mathcal{A}, U) se for:

- (i) uma extensão sólida finalmente densa de (\mathcal{A}, U) ;
- (ii) menor ou igual do que qualquer outra extensão sólida finalmente densa de (\mathcal{A}, U) .

Posto que, atendendo a 13.5, um invólucro sólido, caso exista, é único a menos de isomorfismo, referir-nos-emos muitas vezes a ele como sendo *o invólucro sólido*.

Nesta secção, mostraremos que, se uma categoria concreta tem um invólucro sólido, ele é o seu invólucro reflectivo em alguma extensão sólida finalmente densa.

Faremos uso do seguinte

Lema 13.8 *Uma categoria sólida é reflectiva em cada uma das suas extensões finalmente densas.*

Demonstração. Seja (\mathcal{A}, U) uma categoria sólida e seja $E : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{B}, V)$ uma extensão finalmente densa de (\mathcal{A}, U) . Se $(f_i : EA_i \rightarrow B)_I$ é a cofonte de todos os morfismos com domínio em $E(\mathcal{A})$ e codomínio B , seja $p : VB \rightarrow UA$ o levantamento semi-final da cofonte U -estruturada $(Vf_i : UA_i \rightarrow VB)_I$. Como $(f_i)_I$ é V -final, $p : VB \rightarrow VEA$ é a imagem por V de um morfismo de \mathcal{B} , i.e., existe um morfismo $\bar{p} : B \rightarrow EA$ em \mathcal{B} tal que $V\bar{p} = p$. É agora simples verificar que o morfismo $\bar{p} : B \rightarrow EA$ é uma reflexão de B em E . \square

Fazemos notar que o problema da existência de um invólucro sólido ou, até, de uma extensão sólida, faz sentido apenas para categorias concretas que têm um complemento

de MacNeille. Na verdade, se $E : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{B}, V)$ é uma extensão sólida, o completamento de MacNeille de (\mathcal{B}, V) existe (por 13.6) e é uma extensão topológica de (\mathcal{A}, U) , o que garante que (\mathcal{A}, U) tenha um completamento de MacNeille([1]).

Conseqüentemente, de futuro, assumiremos sempre que
as categorias concretas consideradas têm um completamento de MacNeille.

Teorema 13.9 *Uma categoria concreta (\mathcal{A}, U) tem um invólucro sólido se e só se existir um invólucro reflectivo de \mathcal{A} em cada uma das suas extensões sólidas finalmente densas. Além disso, se o invólucro sólido existir, ele é concretamente isomorfo a cada um desses invólucros reflectivos.*

Demonstração. Seja

$$E^s : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{A}^s, U^s)$$

o invólucro sólido de (\mathcal{A}, U) e seja $E : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{B}, V)$ uma extensão sólida finalmente densa. Atendendo a 13.5 e a 13.7, existe uma única imersão concreta plena $F : (\mathcal{A}^s, U^s) \rightarrow (\mathcal{B}, V)$ tal que $F \cdot E^s = E$. Como E é finalmente densa, F é também finalmente densa e, atendendo a 13.8, $F(\mathcal{A}^s)$ é reflectiva em \mathcal{B} , porque (\mathcal{A}^s, U^s) é sólida. Mostramos agora que $F(\mathcal{A}^s)$ é o invólucro reflectivo de $E(\mathcal{A})$ em \mathcal{B} . Seja \mathcal{C} uma subcategoria reflectiva de \mathcal{B} que contém $E(\mathcal{A})$. Então (\mathcal{C}, V') , onde V' é a restrição de V a \mathcal{C} , é uma extensão sólida finalmente densa de \mathcal{A} , porque uma subcategoria concreta e reflectiva de uma categoria sólida é sólida, por 13.3.2. Portanto, de 13.5 e 13.7, decorre que $F(\mathcal{A}^s)$ é uma subcategoria de \mathcal{C} .

Reciprocamente, seja

$$E^t : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{A}^t, U^t)$$

o completamento de MacNeille de (\mathcal{A}, U) e seja A^r o invólucro reflectivo de $E^t(\mathcal{A})$ em \mathcal{A}^t . Então, (\mathcal{A}^r, U^r) , onde U^r é a restrição de U^t a \mathcal{A}^r , é uma extensão sólida finalmente densa de (\mathcal{A}, U) . Mais do que isso, (\mathcal{A}^r, U^r) é um invólucro sólido de (\mathcal{A}, U) :

Dada uma extensão sólida finalmente densa $E : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{B}, V)$, seja $F^t : (\mathcal{B}, V) \rightarrow (\mathcal{B}^t, V^t)$ o completamento de MacNeille de (\mathcal{B}, V) . Então, $F^t \cdot E : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{B}^t, V^t)$ é uma extensão topológica de (\mathcal{A}, U) e, portanto, existe uma imersão concreta plena $G : (\mathcal{A}^t, U^t) \rightarrow (\mathcal{B}^t, V^t)$ tal que $G \cdot E^t = F^t \cdot E$.

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{A}, U) & \xrightarrow{E^t} & (\mathcal{A}^t, U^t) \\
 \downarrow E & \swarrow E^r & \nearrow \\
 & (\mathcal{A}^r, U^r) & \\
 \downarrow & & \downarrow G \\
 (\mathcal{B}, V) & \xrightarrow{F^t} & (\mathcal{B}^t, V^t)
 \end{array}$$

É claro que G é finalmente densa e, como (\mathcal{A}^t, U^t) é sólida, conclui-se de 13.8, que $G(\mathcal{A}^t)$ é reflectiva em \mathcal{B}^t . Mas, por hipótese, $G \cdot E^t(\mathcal{A})$ tem um invólucro reflectivo em \mathcal{B}^t . Logo, esse invólucro tem de coincidir com o invólucro reflectivo de $G \cdot E^t(\mathcal{A})$ em $G(\mathcal{A}^t)$ que, obviamente, é $G(\mathcal{A}^r)$. Consequentemente, o invólucro reflectivo de $G \cdot E^t(\mathcal{A})$ em \mathcal{B}^t é concretamente isomorfo a \mathcal{A}^r . Analogamente, F^t é finalmente densa, (\mathcal{B}, V) é sólida e, portanto, $F^t(\mathcal{B})$ é reflectiva em \mathcal{B}^t . Então o invólucro reflectivo de $F^t \cdot E(\mathcal{A}) = G \cdot E^t(\mathcal{A})$ em \mathcal{B}^t coincide com o invólucro reflectivo de $F^t \cdot E(\mathcal{A})$ em $F^t(\mathcal{B})$. Assim, \mathcal{A}^r é concretamente isomorfa ao invólucro reflectivo de $E(\mathcal{A})$ em \mathcal{B} . Por conseguinte, a extensão (\mathcal{A}^r, U^r) de (\mathcal{A}, U) é menor ou igual do que a extensão (\mathcal{B}, V) . \square

Observações 13.10

1. Como acabámos de ver, a existência de um invólucro sólido de uma dada categoria concreta depende da existência de um invólucro reflectivo conveniente. É de salientar que a recíproca também é verdadeira: a existência do invólucro reflectivo de uma dada subcategoria depende da existência do invólucro sólido de uma adequada categoria concreta. Na verdade, seja \mathcal{A} uma subcategoria de uma categoria \mathcal{X} . Então $(\mathcal{X}, 1_{\mathcal{X}})$ e (\mathcal{A}, E) , onde E é a inclusão de \mathcal{A} em \mathcal{X} , são categorias concretas sobre \mathcal{X} ; ademais, $(\mathcal{A}, E) \hookrightarrow (\mathcal{X}, 1_{\mathcal{X}})$ é o completamento de MacNeille de (\mathcal{A}, E) e, assim, o invólucro reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{X} , caso exista, é o invólucro sólido de (\mathcal{A}, E) .
2. Dada uma propriedade P sobre categorias concretas, uma extensão $E : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{B}, V)$ diz-se uma P -extensão desde que (\mathcal{B}, V) satisfaça a propriedade P . Um P -invólucro de (\mathcal{A}, U) é uma P -extensão finalmente densa de (\mathcal{A}, U) que é menor ou

igual do que qualquer outra P -extensão finalmente densa. Para várias propriedades P e para algumas classes E de morfismos, o invólucro E -reflectivo em cada P -extensão finalmente densa de (\mathcal{A}, U) é um P -invólucro de (\mathcal{A}, U) ([62]). Mas há uma diferença importante entre o invólucro sólido e vários outros P -invólucros: a existência dos P -invólucros considerada em [62] é garantida pela de P -extensões finalmente densas; ao passo que tal garantia não se mantém para o invólucro sólido, mesmo se a categoria base for $\mathcal{S}et$, como vamos ver no Exemplo 13.11.

O exemplo seguinte de uma categoria concreta sobre $\mathcal{S}et$ que tem uma extensão sólida finalmente densa mas não tem um invólucro sólido foi apresentado por Rosický em 1.2 de [56], usando uma linguagem de teoria de modelos. Seguidamente, descrevemos este exemplo utilizando uma abordagem diferente que acentua a relação entre o problema da existência de um invólucro sólido e o da existência de um invólucro reflectivo.

Exemplo 13.11 (cf [56]) Seja \mathcal{C}_1 a categoria que se obtém fazendo o coproducto da categoria dos conjuntos com a categoria dos sup-semi-reticulados completos e juntando os seguintes morfismos: para cada conjunto X e cada sup-semi-reticulado completo A , $\mathcal{C}_1(X, A)$ consiste em todas as aplicações de X para o conjunto subjacente a A . Seja \mathcal{C}_2 a categoria definida de modo análogo considerando a categoria das álgebras com uma operação unária em vez da dos sup-semi-reticulados completos. Para os funtores de esquecimento naturais $U_i : \mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{S}et$, as categorias \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 são sólidas. Seja $(\mathcal{A}, U) = (\mathcal{C}_1, U_1) \times (\mathcal{C}_2, U_2)$ o producto de (\mathcal{C}_1, U_1) e (\mathcal{C}_2, U_2) na quase-categoria $CAT(\mathcal{S}et)$ das categorias concretas sobre $\mathcal{S}et$ e funtores concretos entre elas. Recordamos que \mathcal{A} é a subcategoria da categoria producto $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ tendo por objectos todos os pares (C_1, C_2) tais que C_1 e C_2 têm o mesmo conjunto subjacente e tendo por morfismos todos os $f : (C_1, C_2) \rightarrow (D_1, D_2)$, onde $f : C_i \rightarrow D_i$ é um morfismo de \mathcal{C}_i , $i = 1, 2$. O functor U é definido por $U(C_1, C_2) = U_1 C_1 = U_2 C_2$ e $Uf = f$. Vamos mostrar que (\mathcal{A}, U) não tem um invólucro sólido. Seja $E_i^t : (\mathcal{C}_i, U_i) \rightarrow (\mathcal{C}_i^t, U_i^t)$ o completamento de MacNeille de (\mathcal{C}_i, U_i) , $i = 1, 2$, e $(\mathcal{T}, V) = (\mathcal{C}_1^t, U_1^t) \times (\mathcal{C}_2^t, U_2^t)$. A categoria concreta (\mathcal{T}, V) é sólida, visto ser topológica. Além disso, (\mathcal{T}, V) é cocompleta, visto ser sólida sobre uma categoria cocompleta (por 13.3.1). Consideremos as categorias $(\mathcal{A}_1, V_1) = (\mathcal{C}_1, U_1) \times (\mathcal{C}_2^t, U_2^t)$ e $(\mathcal{A}_2, V_2) = ((\mathcal{C}_1^t, U_1^t) \times (\mathcal{C}_2, U_2))$. É óbvio que existem imersões concretas plenas $G_i : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{A}_i, V_i)$ e $F_i : (\mathcal{A}_i, V_i) \rightarrow (\mathcal{T}, V)$, $i = 1, 2$, tais que $F_1 \cdot G_1 = F_2 \cdot G_2$ e $F_1(\mathcal{A}_1) \cap F_2(\mathcal{A}_2) = F_1 \cdot G_1(\mathcal{A}) = F_2 \cdot G_2(\mathcal{A})$.

$$\begin{array}{ccc}
 & (\mathcal{A}_1, V_1) = (\mathcal{C}_1, U_1) \times (\mathcal{C}_2^t, U_2^t) & \\
 G_1 \nearrow & & \searrow F_1 \\
 (\mathcal{C}_1, U_1) \times (\mathcal{C}_2, U_2) = (\mathcal{A}, U) & & (\mathcal{T}, V) = (\mathcal{C}_1^t, U_1^t) \times (\mathcal{C}_2^t, U_2^t) \\
 G_2 \searrow & & \nearrow F_2 \\
 & (\mathcal{A}_2, V_2) = (\mathcal{C}_1^t, U_1^t) \times (\mathcal{C}_2, U_2) &
 \end{array}$$

Além disso, as categorias $F_i(\mathcal{A}_i)$ são reflectivas em \mathcal{T} porque \mathcal{C}_i é reflectiva em \mathcal{C}_i^t e \mathcal{C}_i^t é topológica, $i = 1, 2$. Então, como $F_1 \cdot G_1(\mathcal{A})$ é a intersecção de duas subcategorias reflectivas, para concluir que não tem um involúcro reflectivo, basta mostrar que ela não é reflectiva. De facto, $F_1 \cdot G_1(\mathcal{A})$ não é cocompleta: Seja C_1 o sup-semi-reticulado livre gerado pelo conjunto de todos os números naturais, seja C_2 o conjunto subjacente a C_1 , seja D_2 a álgebra unária gerada por um conjunto singular e seja D_1 o conjunto subjacente a D_2 ; então, o coproducto de (C_1, C_2) e (D_1, D_2) não existe em \mathcal{A} . Por conseguinte, $F_1 \cdot G_1(\mathcal{A})$ não pode ser reflectiva na categoria cocompleta \mathcal{T} . Por outro lado, $F_1 \cdot G_1 : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{T}, V)$ é finalmente densa, como consequência do facto de E_1^t e E_2^t serem finalmente densos e, para $i = 1, 2$, C_i ter estruturas discretas que são preservadas por E_i^t (ver [2]). Portanto, atendendo a 13.9, (\mathcal{A}, U) não tem um involúcro sólido.

14 Invólucros ortogonais e involúcros sólidos

Tendo presentes os dois primeiros capítulos e a última secção, um importante candidato para ser o involúcro sólido de uma categoria concreta é o involúcro ortogonal no completamento de MacNeille. Eis, pois, a razão pela qual usaremos, durante o resto deste capítulo, a noção seguinte.

Definição 14.1 Por *invólucro ortogonal de uma categoria concreta* (\mathcal{A}, U) entenderemos a extensão de (\mathcal{A}, U) ao involúcro ortogonal da sua imagem no completamento de MacNeille.

Veremos que, sob condições adequadas, o involúcro ortogonal é um involúcro sólido.

Proposição 14.2 *O invólucro ortogonal de uma categoria concreta (\mathcal{A}, U) é menor ou igual do que toda a extensão sólida finalmente densa de (\mathcal{A}, U) .*

Demonstração. Seja (\mathcal{A}, U) uma categoria concreta com complemento de MacNeille $E^t : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{A}^t, U^t)$, seja \mathcal{A}^o o invólucro ortogonal de $E^t(\mathcal{A})$ em \mathcal{A}^t , U^o a restrição de U^t a \mathcal{A}^o e $E^o : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{A}^o, U^o)$ a co-restrição de E^t a (\mathcal{A}^o, U^o) . Se

$$E : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{B}, V)$$

é uma extensão sólida finalmente densa, sejam \mathcal{A}^1 o invólucro ortogonal de $E(\mathcal{A})$ em \mathcal{B} , U^1 a restrição de V a \mathcal{A}^1 e $E^1 : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{A}^1, U^1)$ a extensão correspondente. Seja $F^t : (\mathcal{B}, V) \rightarrow (\mathcal{B}^t, V^t)$ o complemento de MacNeille de (\mathcal{B}, V) ; então, existe uma imersão concreta plena $G : (\mathcal{A}^o, U^o) \rightarrow (\mathcal{B}^t, V^t)$ tal que $G \cdot E^o = F^t \cdot E$.

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{A}, U) & \xrightarrow{E^t} & (\mathcal{A}^t, U^t) \\
 \downarrow E^1 & \searrow E^o & \uparrow \\
 (\mathcal{A}^1, U^1) & & (\mathcal{A}^o, U^o) \\
 \downarrow & & \downarrow G \\
 (\mathcal{B}, V) & \xrightarrow{F^t} & (\mathcal{B}^t, V^t)
 \end{array}$$

Então, atendendo a 2.12.2 e a 13.8, concluímos que G estabelece um isomorfismo concreto entre (\mathcal{A}^o, U^o) e o invólucro ortogonal de $F^t \cdot E(\mathcal{A})$ em \mathcal{B}^t , que, através de F^t , é concretamente isomorfo a (\mathcal{A}^1, U^1) . Portanto as duas extensões finalmente densas E^o e E^1 são isomorfas, ficando assim claro que E^o é menor ou igual do que E . \square

Corolário 14.3 *Se o invólucro ortogonal de uma categoria concreta (\mathcal{A}, U) é sólido então é o invólucro sólido de (\mathcal{A}, U) .* \square

Para o caso particular das categorias concretas sobre *Set* com um complemento de MacNeille com fibras pequenas, a proposição anterior é estabelecida em [56] no Teorema 1.1 (veja-se também [57], onde a tradução da terminologia de teoria de modelos para a categorial é referida).

- Observações 14.4**
1. A prova de 14.2 mostra que obtemos uma definição equivalente de invólucro ortogonal de uma categoria concreta se, em 14.1, substituirmos “o completamento de MacNeille” por “alguma extensão sólida finalmente densa”.
 2. Sempre que $E : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{B}, V)$ é uma extensão sólida finalmente densa de (\mathcal{A}, U) , o invólucro ortogonal $E^1 : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{A}^1, U^1)$, de acordo com o descrito acima, é um invólucro sólido se e só se \mathcal{A}^1 é reflectiva em \mathcal{B} , como se conclui usando a observação 1. anterior, 13.8 e o facto de uma subcategoria reflectiva de uma categoria sólida ser sólida.
 3. Seja (\mathcal{A}, U) uma categoria concreta sobre uma categoria com colimites conexos e seja $E : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{B}, V)$ uma extensão sólida finalmente densa de (\mathcal{A}, U) . Então, atendendo a 2.10 e ao facto de uma categoria sólida ter todos os colimites que existirem na categoria base (ver [71]), o invólucro ortogonal de (\mathcal{A}, U) é o seu invólucro sólido se e só se a classe $[E(\mathcal{A})]^{\perp_{\mathcal{B}}}$ satisfizer a condição de conjunto solução em \mathcal{B} .

Proposição 14.5 *Seja (\mathcal{A}, U) uma categoria concreta sobre uma categoria completa e bem-potenciada. Se (\mathcal{A}, U) tem um completamento de MacNeille com fibras pequenas e \mathcal{A} tem um conjunto co-gerador, então (\mathcal{A}, U) tem um invólucro sólido.*

Demonstração. Seja $E^t : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{A}^t, U^t)$ um completamento de MacNeille com fibras pequenas de (\mathcal{A}, U) . Então, das hipóteses sobre a categoria base, segue-se que \mathcal{A}^t é completa e bem-potenciada. Agora, a demonstração decorre do Teorema Especial do Functor Adjunto (veja-se V.8 em [49]): Seja \mathcal{A}^l o fecho para limites de $E^t(\mathcal{A})$ em \mathcal{A}^t ; então, \mathcal{A}^l é completa e bem-potenciada e tem um conjunto co-gerador. Consequentemente, \mathcal{A}^l é reflectiva em \mathcal{A}^t e, portanto, é um invólucro sólido de \mathcal{A} . \square

Em [57] foi mostrado que toda a categoria concreta pequena sobre \mathcal{Set} tem um invólucro sólido. Da proposição anterior obtemos o seguinte resultado mais geral:

Corolário 14.6 *Toda a categoria concreta pequena sobre uma categoria completa e bem-potenciada tem um invólucro sólido.* \square

Uma categoria concreta sobre uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbf{M})$ diz-se \mathbf{M} -topológica se toda a fonte estruturada em \mathbf{M} tem um levantamento inicial. É bem conhecido que, para uma categoria concreta (\mathcal{A}, U) sobre uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbf{M})$, são válidas as seguintes implicações:

$$(\mathcal{A}, U) \text{ é topológica} \implies (\mathcal{A}, U) \text{ é } \mathbf{M}\text{-topológica} \implies (\mathcal{A}, U) \text{ é sólida.}$$

O invólucro \mathbf{M} -topológico de uma categoria concreta sobre uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbf{M})$ é a menor extensão \mathbf{M} -topológica finalmente densa. No caso de ela existir, é precisamente o invólucro \mathcal{E} -reflectivo no completamento de MacNeille (ver, e.g., [62]).

Teorema 14.7 *Seja (\mathcal{A}, U) uma categoria concreta sobre uma categoria \mathcal{X} cocompleta e $(\mathcal{E}, \mathbf{M})$ com $\mathbf{M} \subseteq \text{MonoFonte}(\mathcal{X})$, e seja $E^m : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{A}^m, U^m)$ o invólucro \mathbf{M} -topológico de (\mathcal{A}, U) .*

1. *Se \mathcal{A}^m é bem-copotenciada relativamente a bimorfismos U^m -iniciais então (\mathcal{A}, U) tem um invólucro sólido.*
2. *Se em \mathcal{X} todo o epimorfismo é cindido e $\text{Epi}(\mathcal{A}^m) = (U^m)^{-1}(\text{Epi}(\mathcal{X}))$, então $E^m : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{A}^m, U^m)$ é um invólucro sólido de (\mathcal{A}, U) .*

Demonstração.

1. Se \mathcal{X} é uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbf{M})$, então \mathcal{A}^m é uma categoria $(\mathcal{E}', \mathbf{M}')$ com $\mathcal{E}' = (U^m)^{-1}(\mathcal{E})$ e $\mathbf{M}' = (U^m)^{-1}(\mathbf{M}) \cap \text{InicialFonte}(U^m)$. Logo, atendendo a 2.17.3 e a 14.4.3, o invólucro ortogonal de (\mathcal{A}, U) é um invólucro sólido.
2. Seja $g : B \rightarrow C$ um bimorfismo inicial em \mathcal{A}^m . Sendo inicial e sendo $U^m g$ um epimorfismo cindido em \mathcal{X} , segue-se que g é um epimorfismo cindido em \mathcal{A}^m . Portanto, g é um isomorfismo de \mathcal{A}^m . Então, por 2.17.3, $[E^m(\mathcal{A})]^{\perp_{\mathcal{A}^m}}$ é constituído apenas por isomorfismos. Por conseguinte, o invólucro ortogonal de $E^m(\mathcal{A})$ em \mathcal{A}^m é \mathcal{A}^m , e, atendendo a 14.3 e a 14.4.1, $E^m : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{A}^m, U^m)$ é o invólucro sólido de (\mathcal{A}, U) . \square

Corolário 14.8 *Se (\mathcal{A}, U) é uma categoria concreta sobre Set com um invólucro mono-topológico (\mathcal{B}, U) no qual todo o epimorfismo é uma sobrejecção então (\mathcal{B}, U) é também o invólucro sólido de (\mathcal{A}, U) . \square*

Corolário 14.9 *Seja (\mathcal{A}, U) uma categoria concreta sobre uma categoria \mathcal{X} cocompleta e $(\mathcal{E}, \mathbf{M})$ com $\mathbf{M} \subseteq \text{MonoFonte}(\mathcal{X})$. Se em \mathcal{X} todo o epimorfismo é cindido e o completamento de MacNeille de (\mathcal{A}, U) é um invólucro \mathbf{M} -topológico de (\mathcal{A}, U) , então é também o invólucro sólido de (\mathcal{A}, U) .*

Demonstração. Decorre de 14.7.2 e do facto de se ter $\text{Epi}(\mathcal{A}^t) = (U^t)^{-1}(\text{Epi}(\mathcal{X}))$ quando $E^t : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{A}^t, U^t)$ é o completamento de MacNeille. \square

Exemplos 14.10 Nos exemplos seguintes, para cada categoria \mathcal{A} equipada com o functor de esquecimento óbvio, descrevemos o completamento de MacNeille, o invólucro monotopológico, o invólucro sólido e o invólucro ortogonal de \mathcal{A} , denotados por \mathcal{A}^t , \mathcal{A}^m , \mathcal{A}^s e \mathcal{A}^o , respectivamente. Por \mathcal{A}^l denotamos o fecho para limites de \mathcal{A} em \mathcal{A}^t . Descrevemos também as classes $\mathcal{A}^{\perp \mathcal{A}^t}$ e $\mathcal{A}^{\perp \mathcal{A}^m}$.

1. Para os exemplos (a)-(c) próximos, temos que $\mathcal{A}^{\perp \mathcal{A}^t} = \text{Iso}(\mathcal{A}^t)$, $\mathcal{A}^{\perp \mathcal{A}^m} = \text{Iso}(\mathcal{A}^m)$ e $\mathcal{A}^l = \mathcal{A}^o = \mathcal{A}^s = \mathcal{A}^m = \mathcal{A}^t$.

- (a) (cf. [27]) \mathcal{A} é um conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) considerado como uma categoria concreta sobre a categoria constituída por um único objecto e um único morfismo. O completamento de MacNeille de (P, \leq) é precisamente um completamento de MacNeille da categoria concreta \mathcal{A} .
- (b) (cf. [27]) \mathcal{A} é a categoria concreta sobre Set constituída por todos os espaços topológicos finitos e aplicações contínuas. Então \mathcal{A}^t é a categoria FinGen dos espaços finitamente gerados e aplicações contínuas.
- (c) (cf. [1]) \mathcal{A} é a categoria concreta sobre Set constituída por todos os espaços topológicos compactos e aplicações contínuas. Neste caso, \mathcal{A}^t é a categoria CompGen dos espaços compactamente gerados.

2. (a) (cf. [34]) Um *espaço quase-métrico* é um par (X, d) onde X é um conjunto e d é uma aplicação $d : X \times X \rightarrow [0, \infty]$ tal que, para cada $x, y, z \in X$,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d(y, x), \\ d(x, x) &= 0 \\ d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Uma função $f : (X, d) \rightarrow (Y, e)$ diz-se *não-expansiva* se $e(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ para cada $x, y \in X$. Um espaço quase-métrico (X, d) diz-se *separado* se, para todos os $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ implicar $x = y$. Dizemos que um espaço quase-métrico separado (X, d) é *completo* se toda a sua sucessão de Cauchy convergir.

Seja \mathcal{A} a categoria \mathcal{Met} , i.e., a categoria concreta sobre \mathcal{Set} dos espaços métricos e aplicações não-expansivas. Então \mathcal{A}^t é a categoria \mathcal{QMet} dos espaços quase-métricos e aplicações não-expansivas, \mathcal{A}^m é a subcategoria plena dos espaços quase-métricos separados e \mathcal{A}^s é a subcategoria plena dos espaços quase-métricos separados e completos.

- (b) (cf. [38]) Seja \mathcal{Vec} a categoria dos espaços vectoriais sobre \mathbb{K} , para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , e aplicações lineares. Um *espaço quase-normado* sobre \mathbb{K} é um par $(X, \|\cdot\|)$ onde $X \in \mathcal{Vec}$ e $\|\cdot\|$ é uma função de X para $[0, \infty]$ tal que, para todos os $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \quad \text{e} \\ \|x + y\|^2 &\leq \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Uma aplicação $f : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (Y, \|\cdot\|)$ é *não-expansiva* se $\|f(x)\|^2 \leq \|x\|$ para todo o $x \in X$. Um espaço quase-normado diz-se *separado* se $\|x\| = 0$ só quando $x = 0$ e diz-se *completo* se as sucessões de Cauchy são necessariamente convergentes.

Seja \mathcal{A} a categoria \mathcal{Ban} dos espaços de Banach sobre \mathbb{K} e aplicações não-expansivas. \mathcal{Ban} é uma categoria concreta sobre a categoria \mathcal{Vec} . Neste caso, \mathcal{A}^t coincide com a categoria \mathcal{QNorm} dos espaços quase-normados e aplicações não-expansivas, \mathcal{A}^m é a subcategoria plena dos espaços quase-normados separados e \mathcal{A}^s é a subcategoria plena dos espaço quase-normados separados e completos.

Nos exemplos (a) e (b) anteriores, $\mathcal{A}^{\perp \mathcal{A}^t}$ é constituída pelos morfismos de \mathcal{A}^t que são iniciais e \mathcal{A} -canceláveis, i.e., por todos os morfismos iniciais e densos de \mathcal{A}^t , e $\mathcal{A}^{\perp \mathcal{A}^m}$ é a classe de todas as imersões densas. Além disso, $\mathcal{A}^l = \mathcal{A}^o = \mathcal{A}^s \neq \mathcal{A}^m \neq \mathcal{A}^t$.

3. É um facto bem conhecido que a categoria \mathcal{Top} é o completamento de MacNeille da subcategoria \mathcal{A} constituída apenas pelo espaço de Sierpiński. Neste caso, \mathcal{Top}_0 é o invólucro monotopológico de \mathcal{A} e \mathcal{Sob} é o seu invólucro sólido. Já vimos que

$\mathcal{A}^{\perp m}$ consiste em todas as imersões b -densas. Conclui-se sem dificuldade que $\mathcal{A}^{\perp t}$ é constituída por todos os morfismos iniciais b -densos

4. Seja \mathcal{A} a categoria descrita em 2.5. Com o functor de esquecimento óbvio, \mathcal{A} é uma categoria concreta sobre $\mathcal{S}et$. Esta categoria \mathcal{A} foi introduzida por Rosický em [56] com a intenção de mostrar que uma categoria concreta sobre $\mathcal{S}et$ pode ser completa e simultaneamente ter um invólucro sólido diferente dela própria. Nesse artigo, ele descreve o invólucro ortogonal de \mathcal{A} como uma categoria de modelos de uma teoria de primeira ordem e conclui que ele é afinal o invólucro sólido. Aqui, chegamos à mesma conclusão começando por apresentar um completamento de MacNeille de \mathcal{A} .

O completamento de MacNeille \mathcal{A}^t de \mathcal{A} pode descrever-se como sendo a seguinte categoria:

- Os objectos são pares

$$(X, x)$$

com X um conjunto e $x = (X_i)_{i \in Ord}$ uma colecção de subconjuntos de X tais que ou todos os X_i são vazios ou são todos não vazios e, neste caso, se $X_i \cap X_k \neq \emptyset$ para algum par (i, k) com $i < k$, então, para todo $j \geq i$, $X_j = X_i$.

- Um morfismo

$$f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$$

é uma função $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(X_i) \subseteq Y_i$ para cada i .

Para mostrar que \mathcal{A}^t é o completamento de MacNeille de \mathcal{A} , vamos provar que:

- (a) \mathcal{A}^t é uma categoria topológica sobre $\mathcal{S}et$;
 (b) \mathcal{A} é inicial e finalmente densa em \mathcal{A}^t .

(a): É evidente que \mathcal{A}^t é uma categoria. É também claro que, com o functor de esquecimento óbvio, é uma categoria concreta sobre $\mathcal{S}et$. Para concluirmos que é topológica, seja $((X^k, x^k))_K$, onde $x^k = (X_i^k)_{i \in Ord}$, uma família de objectos de \mathcal{A}^t e seja $(f^k : X^k \rightarrow X)_K$ uma família de morfismos em $\mathcal{S}et$. Vamos mostrar que existe uma colecção $x = (X_i)_{i \in Ord}$ de subconjuntos de X tal que a cofonte

$((X^k, x^k) \xrightarrow{f^k} (X, x))_K$ é final. Como o caso em que $X_i^k = \emptyset$ para todo o $i \in Ord$ e $k \in K$ é trivial, suponhamos que, algum $k \in K$, $X_i^k \neq \emptyset$ para todo o $i \in Ord$. Definamos $x = (X_i)_{i \in Ord}$ como segue:

Seja primeiro $\hat{X}_i = \cup_K f^k(X_i^k)$ para todo o $i \in Ord$, e consideremos a classe

$$C = \{i \in Ord, \hat{X}_i \cap \hat{X}_j \neq \emptyset \text{ para algum } j \neq i\}. \quad (\text{IV.1})$$

Esta classe é claramente não-vazia. Seja i_0 o seu mínimo. Ponhamos agora

$$X_i = \begin{cases} \hat{X}_i, & \text{se } i < i_0 \\ \cup_{j \geq i_0} \hat{X}_j, & \text{se } i \geq i_0 \end{cases}$$

É simples verificar que, deste modo, $((X^k, x^k) \xrightarrow{f^k} (X, x))_K$ é uma cofonte final.

(b): Seja (X, x) com $x = (X_i)_{i \in Ord}$ um objecto de \mathcal{A}^t . Se $X_i = \emptyset$ para todo o $i \in Ord$, então, por um lado, a fonte $((X, x) \xrightarrow{c_a} (X \dot{\cup} \{*\}, \bar{a}))_{a \in X \dot{\cup} \{*\}}$, onde \bar{a} é a função de Ord para $X \dot{\cup} \{*\}$ definida por $\bar{a}(i) = a$ para todo o $i \in Ord$ e $c_a : X \rightarrow X \dot{\cup} \{*\}$ é a aplicação constantemente igual a a , é inicial com codomínio em \mathcal{A} . Por outro lado, a cofonte vazia com codomínio (X, x) é final.

Se $X_i \neq \emptyset$ para $i \in Ord$, seja (\tilde{X}, \tilde{x}) o objecto de \mathcal{A} que se obtém de (X, x) pela junção para cada $i \in Ord$ de todos os elementos de X_i num só designado por x_i . Assim obtemos um quociente $q : X \rightarrow \tilde{X}$. É fácil confirmar que o morfismo \mathcal{A}^t

$$(X, x) \xrightarrow{q} (\tilde{X}, \tilde{x}) \quad (\text{IV.2})$$

é inicial. Para ver que existe uma cofonte final com codomínio (X, x) e domínio em \mathcal{A} , consideremos o mínimo i_0 da subclasse de Ord definida por $\{i \in Ord, X_i \cap X_j \neq \emptyset \text{ para algum } j \neq i\}$; então $X_i = X_{i_0}$ para todo o $i \geq i_0$. Seja E a colecção de todos os $e = (e_i)_{i \in Ord}$ tais que

$$\begin{aligned} e_i &\in X_i, & \text{se } i < i_0; \\ e_i &= z, & \text{se } i \geq i_0, \text{ onde } z \in X_{i_0}. \end{aligned}$$

É simples verificar que $((X, e) \xrightarrow{1_X} (X, x))_{e \in E}$ é uma cofonte final.

Conclui-se sem dificuldade que um objecto (X, x) de \mathcal{A}^t é o domínio de alguma monofonte inicial com codomínio em \mathcal{A} se e só se $(X, x) \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ ou $x = (\emptyset)_{i \in Ord}$.

Consequentemente, o invólucro monotopológico \mathcal{A}^m é a subcategoria plena de \mathcal{A}^t constituída por todos os objectos de \mathcal{A} e pelos objectos $(X, x) \in \mathcal{A}^t$ para os quais $X_i = \emptyset$, $i \in Ord$. É claro que \mathcal{A}^m é, a menos de um isomorfismo concreto, a categoria \mathcal{X} descrita em 2.5.

A classe \mathcal{A}^\perp na categoria \mathcal{A}^t consiste em todos os morfismos $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ de \mathcal{A}^t tais que

- (i) $f(a) \in Y_i \cap f(X) \Rightarrow a \in X_i$, para todo $a \in X$, $i \in Ord$;
- (ii) $Y \setminus \bigcup_i Y_i \subseteq f(X)$;
- (iii) se $f(a) = f(b)$ então $a = b$ or $a, b \in X_i$ para algum i .

Na verdade, seja $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ um morfismo de \mathcal{A}^t ortogonal a \mathcal{A} . O facto de \mathcal{A} ser inicialmente densa em \mathcal{A}^t e existir uma bijecção entre as famílias $\mathcal{A}^t(X, \mathcal{A})$ e $\mathcal{A}^t(Y, \mathcal{A})$ de todos os morfismos com domínio X e Y , respectivamente, e codomínio em \mathcal{A} , implica que f seja inicial. Isto significa que f satisfaz (i). Um cálculo simples permite concluir que a \mathcal{A} -cancelabilidade de f é equivalente a (ii). Por último, sejam $a, b \in X$ tais que $f(a) = f(b)$ e a e b não pertencem simultaneamente ao mesmo X_i seja qual for o $i \in Ord$. Se $x = (\emptyset)_{i \in Ord}$, seja $X \xrightarrow{q} X \dot{\cup} \{*\}$ a inclusão de X em $X \dot{\cup} \{*\}$ e seja $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i \in Ord}$ tal que $\bar{x}_i = *$ para todo o $i \in Ord$. Então $(X, x) \xrightarrow{q} (X \dot{\cup} \{*\}, \bar{x})$ é um morfismo de \mathcal{A}^t com domínio em \mathcal{A} . Se $x \neq (\emptyset)_{i \in Ord}$, definamos $q : (X, x) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$ como em (IV.2). Em ambos os casos, existe um morfismo \bar{q} de \mathcal{A}^t tal que $\bar{q} \cdot f = q$ e, como $q(a) \neq q(b)$, segue-se que $f(a) \neq f(b)$. Reciprocamente, suponhamos que f satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) e seja $(X, x) \xrightarrow{g} (Z, z)$ um morfismo de \mathcal{A}^t com codomínio em \mathcal{A} . Então o morfismo $\bar{g} : (Y, y) \rightarrow (Z, z)$ definido por $\bar{g}(c) = z_i$, se $c \in Y_i$ e $\bar{g}(c) = d$ tal que $f(d) = c$, se $c \in Y \setminus \bigcup_{i \in Ord} Y_i$ é o único tal que $\bar{g} \cdot f = g$.

Por outro lado, conforme vimos em 2.5, a classe \mathcal{A}^\perp em \mathcal{A}^m é constituída por todos os isomorfismos de \mathcal{A}^m .

Temos, portanto, que $A^l \neq A^o = A^s = A^m \neq A^t$.

5. Atendendo à Observação 13.10.1., o Exemplo 2.2 fornece um exemplo de uma categoria concreta cujo invólucro sólido é diferente do invólucro ortogonal.

A próxima proposição estabelece que em várias categorias o invólucro reflectivo de cada subcategoria, caso exista, tem de coincidir com o invólucro ortogonal. Como consequência, para várias categorias concretas, se existir um invólucro sólido, ele coincide com o invólucro ortogonal (Corolário 14.12).

Proposição 14.11 *O invólucro reflectivo de uma subcategoria numa categoria topológica com fibras pequenas sobre Set , caso exista, coincide com o invólucro ortogonal.*

Demonstração. Do Teorema 4.1.3 e da Proposição 3.1.2 de [22], decorre que se \mathcal{X} satisfizer os requisitos seguintes

é completa, cocompleta e bem-copotenciada;

tem uma estrutura de factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ para morfismos com $\mathcal{E} = Epi(\mathcal{X})$;

tem um separador;

para toda a família numerável $(C_i \xrightarrow{m_i} B)_{i \in \omega}$ de \mathcal{M} -subobjectos de um objecto B arbitrário em \mathcal{X} , e dado um qualquer morfismo g com codomínio em B , o supremo de todas as imagens inversas de m_i por meio de g é igual à imagem inversa do supremo de todos os m_i por meio de g (i.e., $\bigvee_{i \in \omega} g^{-1}(m_i) = g^{-1}(\bigvee_{i \in \omega} m_i)$);

então, para cada morfismo f de \mathcal{X} , a subcategoria $\{f\}_\perp$ é reflectiva.

Seja \mathcal{X} uma categoria topológica com fibras pequenas sobre Set . Posto que Set satisfaz todas as condições enumeradas acima, para a classe \mathcal{E} de todos os epimorfismos e a classe \mathcal{M} de todos os monomorfismos, segue-se que \mathcal{X} também satisfaz todas aquelas condições para a classe \mathcal{E} de todos os epimorfismos e a classe \mathcal{M} de todos os monomorfismos iniciais (cf. 21.16 e 21.17 de [2]).

Consequentemente, para cada morfismo f de \mathcal{X} , a subcategoria $\{f\}_\perp$ é reflectiva. Portanto, atendendo a 1.2, se a subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} tem um invólucro reflectivo em \mathcal{X} ele tem de coincidir com o invólucro ortogonal de \mathcal{A} em \mathcal{X} . \square

Recordemos que as categorias concretas que têm um complemento de MacNeille com fibras pequenas foram completamente caracterizadas por Adámek, Herrlich e Strecker ([1]) e que elas são exactamente as chamadas categorias concretas *com fibras pequenas fortes*.

Corolário 14.12 *Se uma categoria concreta com fibras pequenas fortes sobre Set tem invólucro sólido, ele coincide com o invólucro ortogonal.* \square

Observação 14.13 É de notar que, contudo, o invólucro sólido de uma categoria concreta com fibras pequenas fortes sobre Set pode não coincidir com o fecho para limites no seu completamento de MacNeille, como o prova a categoria \mathcal{A} de 14.10.4 que é concreta sobre Set e, de facto, tem fibras pequenas fortes.

15 Invólucros sólidos e Princípio de Vopěnka

Começemos por recordar a noção de categoria localmente apresentável. Seja λ um cardinal regular e seja X um objecto de uma dada categoria \mathcal{X} ; dizemos que X é λ -apresentável se todos os funtores $\text{hom}(X, -) : \mathcal{X} \rightarrow \text{Set}$ preservam colimites λ -directos. Uma *categoria localmente apresentável* é uma categoria cocompleta que, para algum cardinal regular λ , tem um conjunto S de objectos λ -apresentáveis tal que todo o objecto é um colimite λ -directo de objectos de S .

Para uma descrição detalhada das categorias localmente apresentáveis, remetemos o leitor para o livro [6] de J. Adámek e J. Rosický.

Toda a categoria das estruturas de um dado tipo Σ , onde Σ é constituído por símbolos operacionais e relacionais é localmente apresentável ([6]). Em particular, a categoria $\text{Rel}(\Sigma)$ das estruturas relacionais de tipo Σ descrita em 13.1 é localmente apresentável.

Um exemplo de uma tal categoria é a categoria dos grafos Gra , i.e., a categoria dos conjuntos com uma relação binária e homomorfismos entre eles.

Consideremos os seguintes três axiomas da teoria de conjuntos:

Princípio de Vopěnka: Gra não possui nenhuma subcategoria plena e discreta com uma classe própria de objectos;

Princípio Fraco de Vopěnka: Ord^{op} não pode ser imersa plenamente em Gra (onde Ord é a classe parcialmente ordenada de todos os ordinais considerada como uma categoria e Ord^{op} é a sua categoria dual);

(M): não existem cardinais mensuráveis arbitrariamente grandes.

Conforme provado em [7], o Princípio de Vopěnka implica o Princípio Fraco de Vopěnka e implica também a negação de *(M)*.

Assumindo o Princípio de Vopěnka, as categorias localmente apresentáveis são precisamente as categorias cocompletas com uma subcategoria densa (veja-se 6.14 em [6]).

O resultado seguinte, fundamental no entendimento do problema da existência de invólucros reflectivos, foi provado por J. Adámek, J. Rosický e V. Trnková em [7].

Teorema 15.1 ([7]) *Seja \mathcal{B} uma categoria localmente apresentável. Sob a assunção do Princípio Fraco de Vopěnka, o fecho para limites de cada subcategoria de \mathcal{B} é reflectivo.*

□

A ideia de que, no tocante a categorias concretas sobre \mathcal{Set} , a existência de um invólucro sólido também pode depender de um princípio de teoria de conjuntos envolvendo cardinais “muito grandes” é devida a J. Rosický que mostrou, em [57], que assumindo o axioma (M) existe uma categoria concreta sobre \mathcal{Set} com uma subcategoria pequena finalmente densa, que não tem um invólucro sólido. Vamos agora provar um melhoramento deste resultado: para categorias concretas sobre \mathcal{Set} com uma subcategoria pequena finalmente densa, a existência de invólucros sólidos é equivalente ao Princípio Fraco de Vopěnka.

Teorema 15.2 *As seguintes asserções são equivalentes:*

- (a) *Toda a categoria concreta sobre \mathcal{Set} com uma subcategoria pequena finalmente densa tem um invólucro sólido.*
- (b) *Verifica-se o Princípio Fraco de Vopěnka.*

Demonstração.

(b) \Rightarrow (a): Seja (\mathcal{A}, U) uma

categoria concreta sobre \mathcal{Set} e seja \mathcal{C} uma subcategoria pequena finalmente densa de \mathcal{A} . Definamos uma categoria $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}$ do modo seguinte:

- Os objectos são pares

$$(X, \alpha)$$

onde X é um conjunto e α é uma cofonte U -estruturada com domínio em \mathcal{C} , codomínio X e tal que, para todos os morfismos $c : C' \rightarrow C$ em \mathcal{C} e $g : UC \rightarrow X$ em α , o morfismo $g \cdot Uc$ pertence a α .

- Os morfismos são da forma

$$f : (X, \alpha) \rightarrow (Y, \beta),$$

sendo $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação tal que, para cada $g \in \alpha$, $f \cdot g \in \beta$.

O par

$$(\mathcal{A}_C, U_C),$$

onde U_C é definido por $U_C(X, \alpha) = X$ e $U_C(f) = f$, é uma categoria concreta sobre Set .

Além disso, seja

$$E_C : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_C$$

o functor tal que, para cada $A \in \mathcal{A}$, $E_C(A) = (UA, \alpha)$ onde α é a cofonte de todos os morfismos Ug com $(g : C \rightarrow A) \in Mor(\mathcal{A})$ e $C \in \mathcal{C}$, e, para cada $f \in Mor(\mathcal{A})$, $E_C(f) = Uf$.

Então temos as duas propriedades seguintes:

1. (ver [38]) $E_C : (\mathcal{A}, U) \rightarrow (\mathcal{A}_C, U_C)$ é uma extensão topológica finalmente densa de (\mathcal{A}, U) .
2. (ver [55, 6]) \mathcal{A}_C é uma categoria localmente apresentável.

Atendendo à propriedade 2. anterior e a 15.1, obtemos que, sob a assunção do Princípio Fraco de Vopěnka, o fecho para limites de $E_C(\mathcal{A})$ em \mathcal{A}_C constitui um invólucro reflectivo, e, tendo em conta 1.2.2, 14.4.2 e a propriedade 1. acima, ele é um invólucro sólido de (\mathcal{A}, U) .

(a) \Rightarrow (b): Reciprocamente, vamos mostrar que, assumindo a negação do Princípio Fraco de Vopěnka, existe uma categoria concreta sobre Set com uma subcategoria pequena finalmente densa que não tem um invólucro sólido. A nossa principal ferramenta é uma construção dada em [5] I.13. Assumindo a negação do Princípio Fraco de Vopěnka, existem:

- (i) uma classe de grafos $L_i = (Y_i, \beta_i)$, $i \in Ord$, tal que

$$hom(L_i, L_j) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } i < j \\ \{l_{ij} : L_i \rightarrow L_j\} & \text{se } i \geq j \end{cases}$$

e, visto que, neste caso, temos também a negação do Princípio de Vopěnka,

- (ii) uma classe de grafos $K_i = (X_i, \alpha_i)$, $i \in Ord$, tal que

$$hom(K_i, K_j) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } i \neq j \\ \{1_{K_i}\} & \text{se } i = j \end{cases}.$$

Na categoria $\mathcal{Rel}(2, 2, 1)$ das estruturas com duas relações binárias e uma relação unária, consideremos os objectos seguintes:

$$A_i = (X_i \dot{\cup} Y_i \dot{\cup} \{t_i\}, \alpha_i \cup Y_i \times \{t_i\}, \beta_i \cup X_i \times \{t_i\}, \{t_i\})$$

para todo o $i \in Ord$. Para cada ordinal i , tomemos

$$\bar{A}_i = \amalg_{k \leq i} A_k$$

e

$$\mathcal{M} = \{v_i : A_0 \rightarrow \bar{A}_i \mid i \in Ord\}$$

onde os $v_i : A_0 \rightarrow \bar{A}_i$ são as injecções do coproducto. Queremos mostrar que \mathcal{M}_\perp não é reflectiva em $\mathcal{Rel}(2, 2, 1)$.

Para cada $j \in Ord$, seja B_j o objecto que se obtém de \bar{A}_j pela junção de todos os pontos de X_j num só designado por s_j , i.e.,

$$\begin{aligned} B_j &= (Q_j, \gamma_j, \delta_j, \epsilon_j) \\ &= \amalg_{k < j} A_k \amalg (\{s_j\} \dot{\cup} Y_j \dot{\cup} \{t_j\}, \{(s_j, s_j)\} \cup Y_j \times \{t_j\}, \beta_j \cup \{(s_j, t_j)\}, \{t_j\}). \end{aligned}$$

Mostremos que todos os B_j pertencem a \mathcal{M}_\perp . Para isso, observemos em primeiro lugar que, para $i, j \in Ord$ arbitrários, a cardinalidade de $\text{hom}(A_i, B_j)$ é 1. De facto:

$$\begin{aligned} \text{Se } i \geq j, \text{ seja } f_{ij} : A_i &\rightarrow B_j \text{ definido por} \\ f(x) &= s_j, \quad x \in X_i \\ f(y) &= l_{ij}(y), \quad y \in Y_i \\ f(t_i) &= t_j. \end{aligned}$$

É óbvio que f_{ij} é um homomorfismo. Mais, é o único de A_i para B_j . Com efeito, se existisse um morfismo $g : A_i \rightarrow B_j$ tal que $g(t_i) = t_k$ com $k < j$, então $f(Y_i) \times \{f(t_i)\} = f(Y_i) \times \{t_k\}$ teria de estar contido em γ_j e, similarmemente, $f(X_i) \times \{t_k\}$ teria de estar contido em δ_j . Isto implicaria, respectivamente, que $f(Y_i) \subseteq Y_k$ e $f(X_i) \subseteq X_k$. Mas, neste caso, existiria um homomorfismo de A_i para A_k , o que é contraditório com a definição dos A_i 's! Um argumento semelhante mostra que se $g : A_i \rightarrow B_j$ é tal que $g(t_i) = t_j$ então tem de ser $g = f_{ij}$ como definido acima.

$$\begin{aligned} \text{Se } i < j, \text{ seja } f_{ij} : A_i &\rightarrow B_j \text{ definido por} \\ f(x) &= x, \quad x \in X_i \\ f(y) &= y, \quad y \in Y_i \\ f(t_i) &= t_i. \end{aligned}$$

É também fácil verificar que este é o único homomorfismo de A_i para B_j .

Fica assim claro que, para cada $i, j \in Ord$, existe um único homomorfismo de \bar{A}_i para B_j , digamos

$$g_{ij} : \bar{A}_i \rightarrow B_j;$$

além disso, os diagramas

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{v_i} & \bar{A}_i \\ f_{0j} \downarrow & & \swarrow g_{ij} \\ B_j & & \end{array}$$

são comutativos. Consequentemente, todos os B_j são ortogonais a \mathcal{M} .

Mostramos, seguidamente, que A_0 não admite nenhuma reflexão em \mathcal{M}_\perp .

Se, pelo contrário, existe uma reflexão

$$A_0 \xrightarrow{r} A_0^*$$

em \mathcal{M}_\perp , então, como $A_0^* \in \mathcal{M}_\perp$, para cada $i \in Ord$, obtemos um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{v_i} & \bar{A}_i \\ r \downarrow & & \swarrow p_i \\ A_0^* & & \end{array} .$$

Vamos mostrar que, assim, $p_i(i) \neq p_{i'}(i')$ para todo $i \neq i'$, o que é obviamente falso. De facto, para $i \neq i'$, seja j um ordinal maior do que i e i' e seja $f_j^* : A_0^* \rightarrow B_j$ o morfismo único que torna o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{r} & A_0^* \\ f_{0j} \downarrow & & \swarrow f_j^* \\ B_j & & \end{array} .$$

comutativo.

Então, tem de ter-se

$$f_j^* \cdot p_i(t_i) = g_{ij}(t_i) = t_i \quad \text{e} \quad f_j^* \cdot p_{i'}(t_{i'}) = g_{i'j}(t_{i'}) = t_{i'};$$

consequentemente, $p_i(t_i) \neq p_{i'}(t_{i'})$.

Tomemos agora

$$C_1 = (\{0, 1\}, \{(0, 1)\}, \emptyset, \emptyset), \quad C_2 = (\{0, 1\}, \emptyset, \{(0, 1)\}, \emptyset) \quad \text{e} \quad C_3 = (\{0\}, \emptyset, \emptyset, \{0\}).$$

Vê-se imediatamente que o conjunto $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$ é finalmente denso em $\mathcal{R}el(2, 2, 1)$. Por outro lado, como a relação unária em C_1 e em C_2 é vazia, não existem homomorfismos de A_0 para C_1 ou C_2 ; como a subcategoria $\{K_i, i \in Ord\}$ é discreta em $\mathcal{G}ra$, concluímos que $\alpha_0 \neq \emptyset$ e de novo $hom(A_0, C_3) = \emptyset$. Decorre então que C_1, C_2 e C_3 pertencem a \mathcal{M}_\perp e, assim, \mathcal{C} é um conjunto finalmente denso de \mathcal{M}_\perp .

Além disso, a categoria $\mathcal{R}el(2, 2, 1)$ é topológica, atendendo a 13.1, logo é uma extensão sólida finalmente densa de \mathcal{M}_\perp .

Por 1.2, o invólucro ortogonal de \mathcal{M}_\perp em $\mathcal{R}el(2, 2, 1)$ é \mathcal{M}_\perp e, como \mathcal{M}_\perp não é reflectiva e $\mathcal{R}el(2, 2, 1)$ é localmente apresentável, segue-se de 2.4 que \mathcal{M}_\perp não tem um invólucro reflectivo em $\mathcal{S}tr(2, 2, 1)$. Por conseguinte, usando 13.9, concluímos que a categoria concreta \mathcal{M}_\perp não tem um invólucro sólido. \square

Capítulo V

Multi-reflectividade e multicolimites

O artigo [44] de Kaput foi um ponto de partida para o estudo de generalizações do conceito de reflectividade. Uma destas generalizações, multi-reflectividade, que foi investigada por vários autores (e.g., [11, 17, 74, 10, 61, 8]), tem consequências muito relevantes tais como o fecho para limites conexos e a existência de multicolimites.

Neste capítulo, estudamos a interdependência entre multi-reflectividade, multicolimites, limites conexos e multi-solidez, e generalizamos alguns resultados bem conhecidos, que envolvem colimites, limites e solidez, aos correspondentes para os anteriores conceitos. Em particular, damos condições sob as quais uma categoria multicocompleta tem limites conexos e provamos que uma categoria concreta (\mathcal{A}, U) que seja bem-copotenciada e cuja categoria base seja multicocompleta é multi-sólida se e só se \mathcal{A} é multicocompleta e U é um multiadjunto direito.

16 Multi-reflectividade

Definição 16.1

1. Seja $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$ um functor. Uma *fonte universal* de X para U é uma U -fonte $(X \xrightarrow{\eta_j} UA_j)_J$ tal que para cada U -morfismo $X \xrightarrow{x} UB$ existe um e um só par (j, f)

com $j \in J$ e $f : A_j \rightarrow B$ satisfazendo a igualdade $Uf \cdot \eta_j = x$. O functor U diz-se um *multiadjunto direito* se, para cada $X \in \text{Obj}(\mathcal{X})$, existir uma fonte universal de X para U .

2. Uma subcategoria \mathcal{A} de uma categoria \mathcal{X} é *multi-reflectiva* se o functor inclusão $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{X}$ for um multiadjunto direito. Neste caso, uma fonte universal de X para o functor inclusão diz-se uma *multi-reflexão de X em \mathcal{A}* .

Se, para alguma classe $\mathcal{E} \subseteq \text{Mor}(\mathcal{X})$, todas as multi-reflexões são formadas apenas por morfismos de \mathcal{E} , então a subcategoria \mathcal{A} diz-se *multi- \mathcal{E} -reflectiva* em \mathcal{X} . Se, para algum aglomerado $\mathbf{M} \subseteq \text{Source}(\mathcal{X})$, toda a multi-reflexão pertence a \mathbf{M} , dizemos que \mathcal{A} é *\mathbf{M} -multi-reflectiva*.

Exemplos 16.2 ([17, 74])

1. A categoria \mathcal{Fld} dos corpos é uma subcategoria multi-reflectiva da categoria \mathcal{Rng} dos anéis comutativos unitários. Dado um anel comutativo unitário X , seja \mathcal{I} o conjunto de todos os ideais maximais de X e, para cada $I \in \mathcal{I}$, seja f_I o homomorfismo quociente de X em X/I . Então, a fonte

$$(X \xrightarrow{f_I} X/I)_{I \in \mathcal{I}}$$

é uma multi-reflexão.

2. A categoria dos conjuntos linearmente ordenados é uma subcategoria da categoria dos conjuntos parcialmente ordenados e aplicações estritamente crescentes. Dado um conjunto parcialmente ordenado (X, \leq) , a família

$$(id_X : (X, \leq) \rightarrow (X, <))_{<} \text{ é uma ordem linear em } X \text{ contendo } \leq$$

é uma multi-reflexão.

3. Seja \mathcal{Con} a categoria dos espaços topológicos conexos e não vazios. Então a sua categoria dual $\mathcal{Con}^{\text{op}}$ é multi-reflectiva em $\mathcal{Top}^{\text{op}}$, i.e. \mathcal{Con} é multicorefectiva em \mathcal{Top} . Para cada espaço topológico X , a multicoreflexão consiste nas inclusões de todas as componentes conexas de X .

Analogamente, a categoria dos espaços conexos por arcos é multicorefectiva em \mathcal{Top} e a categoria dos grafos conexos é multicorefectiva em \mathcal{Gra} .

4. Um anel $X \in \mathcal{Rng}$ diz-se *conexo* sempre que o seu espectro primo for conexo em relação à topologia de Zaraski. Equivalentemente, X é conexo se os seus únicos idempotentes forem 0 e 1. A categoria \mathcal{A} dos anéis conexos é uma subcategoria multi-reflectiva de \mathcal{Rng} .

Para mostrar a veracidade da afirmação anterior, seja $X \in \mathcal{Rng}$ e seja \mathbf{J} o conjunto de todos os ideais próprios J de X tais que

$$x^2 - x \in J \Rightarrow (x \in J \text{ ou } x - 1 \in J).$$

Dado um ideal I de X , é óbvio que X/I é conexo se e só se $I \in \mathbf{J}$. Seja \mathbf{K} o conjunto de todos os elementos minimais de \mathbf{J} . Então para cada $J \in \mathbf{J}$ há um único $K \in \mathbf{K}$ tal que $K \subseteq J$. Consequentemente, a fonte

$$(X \xrightarrow{q} X/K)_{K \in \mathbf{K}}$$

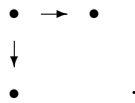
é uma multi-reflexão de X em \mathcal{A} .

Definições 16.3 Um *multicolimite* de um diagrama $D : I \rightarrow \mathcal{X}$ é uma família de cofontes $((Di \xrightarrow{l_i^k} L_k)_I)_K$ naturais para D tais que para cada cofonte $(Di \xrightarrow{u_i} X)_I$ natural para D existe um e um só par $(k, L_k \xrightarrow{t} X)$ tal que $k \in K$ e $u_i = t \cdot l_i^k$ para todo o $i \in I$. Cada uma das cofontes naturais $(Di \xrightarrow{l_i^k} L_k)_I$ é chamada *componente do multicolimite*.

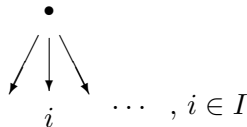
Uma categoria \mathcal{X} é *multicompleta* sempre que todo o diagrama pequeno em \mathcal{X} tem um multicolimite.

Em geral, usamos, relativamente aos multicolimites, a terminologia dos colimites juntando o prefixo “multi”. Por exemplo:

- Uma *multi-soma amalgamada* é um multicolimite de um diagrama com esquema



- Uma *multi-soma amalgamada múltipla* é um multicolimite de um diagrama com esquema



onde I pode ser um conjunto ou uma classe própria.

- Um *multicoigualizador múltiplo* é um multicolimite com um esquema da forma

$$\bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \bullet$$

onde a família de todos os morfismos é um conjunto ou uma classe própria.

Observação 16.4 Algumas das propriedades bem conhecidas de colimites podem ser facilmente generalizadas aos multicolimites. Por exemplo:

1. Toda a componente de um multicolimite é uma epi-cofonte.
2. Toda a componente de uma multi-soma amalgamada de um epimorfismo ao longo de outro morfismo é um epimorfismo.
3. Se \mathcal{X} tem uma estrutura de factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ para morfismos, então:
 - (a) toda a componente de uma multi-soma amalgamada de um morfismo em \mathcal{E} ao longo de qualquer outro morfismo pertence a \mathcal{E} ;
 - (b) se $(X \xrightarrow{d_k} Z_k, (Y_i \xrightarrow{d_{ik}} Z_k)_I)_K$ é uma multi-soma amalgamada múltipla de uma família $(X \xrightarrow{e_i} Y_i)_I$ de morfismos de \mathcal{E} , então cada morfismo d_k pertence a \mathcal{E} .

Exemplos 16.5 Em [17], Diers apresenta uma grande variedade de exemplos de categorias multicocompletas que não são cocompletas. É este o caso, por exemplo, das categorias Fld , Rng e Con^{op} .

É sabido que as noções de reflectividade e cocompletude podem ser interpretadas em termos da existência de objectos iniciais para categorias convenientes. Vamos agora considerar uma generalização de objecto inicial que nos leva a uma interpretação similar acerca de multi-reflectividade e multicolimites.

Definição 16.6 Uma família $(A_i)_I$ de objectos de uma categoria \mathcal{A} diz-se *inicial* em \mathcal{A} , se para cada objecto A de \mathcal{A} existir um único par (i, f) com $i \in I$ e $f : A_i \rightarrow A$.

Observações 16.7

1. Tendo em conta a Definição 16.6, é claro que, se $(A_i)_I$ é uma família inicial em \mathcal{A} e B_1, B_2, B_3 são objectos de \mathcal{A} para os quais existe um diagrama da forma

$$B_1 \rightarrow B_2 \leftarrow B_3,$$

então o único $i_j \in I$ tal que $\mathcal{A}(A_{i_j}, B_j) \neq \emptyset$ é o mesmo para todos os $j = 1, 2, 3$. Consequentemente, a família $(A_i)_I$ é inicial se e só se, para cada componente conexa \mathcal{C} de \mathcal{X} , existir um único $i \in I$ tal que A_i é um objecto inicial em \mathcal{C} .

Temos, portanto, que:

- (a) Um functor $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$ é um multiadjunto direito se e só se para cada objecto X de \mathcal{X} a categoria $X \downarrow U$ tem uma família inicial, ou, equivalentemente, cada componente conexa da categoria $X \downarrow U$ tem um objecto inicial. Evidentemente, tal família inicial forma a fonte universal correspondente de X para U . Cada objecto inicial que é parte da família inicial diz-se uma *componente da fonte universal*.

Por consequência, sempre que dois morfismos $X \xrightarrow{x} UB$ e $X \xrightarrow{y} UC$ pertencem à mesma componente conexa de $X \downarrow U$, então eles são factorizáveis através da mesma componente da fonte universal de X para U . Logo, um multiadjunto direito é um adjunto direito se e só se, para cada $X \in \text{Obj}(\mathcal{X})$, a categoria $X \downarrow U$ é conexa.

- (b) Dada uma categoria \mathcal{X} e um diagrama $D : I \rightarrow \mathcal{X}$ em \mathcal{X} , denotemos por $D \downarrow \mathcal{X}$ a quase-categoria das cofontes naturais para D , ou seja, os objectos de $D : I \rightarrow \mathcal{X}$ são todas as cofontes naturais para D e os morfismos são todos os

$$h : (Di \xrightarrow{f_i} X)_{i \in \text{Obj}(I)} \longrightarrow (Di \xrightarrow{g_i} Y)_{i \in \text{Obj}(I)}$$

onde $h : X \rightarrow Y$ é um morfismo de \mathcal{X} tal que $h \cdot f_i = g_i$ para todo o $i \in \text{Obj}(I)$. O diagrama $D : I \rightarrow \mathcal{X}$ tem um multicolimite se e só se a quase-categoria $D \downarrow \mathcal{X}$ tem uma família inicial. Os elementos desta família são precisamente as componentes do multicolimite e, obviamente, cada componente é um objecto inicial na sua componente conexa em $D \downarrow \mathcal{X}$.

2. Por definição, é claro que cada família inicial é única a menos de isomorfismo, i.e., se $(A_i)_I$ e $(B_j)_J$ são famílias iniciais de uma dada categoria, então existe uma bijecção $\phi : I \rightarrow J$ e isomorfismos $h_i : A_i \rightarrow B_{\phi(i)}$ para todo o $i \in I$.

Consequentemente, uma fonte universal é única a menos de isomorfismo e o mesmo acontece com um multicolimite.

3. Na definição de família inicial dada acima, I é vazio sempre que \mathcal{A} é uma categoria vazia. além disso, em contraste com a definição de família inicial apresentada por Y. Diers ([17]), permitimos que I seja uma classe. De facto, os resultados principais que obtemos daqui para a frente são verdadeiros independentemente de aceitarmos classes ou não na definição de família inicial. Isto salienta o facto de que a multi-reflectividade é uma noção local e que apenas a “pequenez local” tem realmente um papel a desempenhar. Para ilustrar o significado da obrigatoriedade de I ser um conjunto, fazemos notar que, por exemplo, uma categoria pequena discreta tem uma família inicial, em ambos os sentidos, ao passo que uma categoria grande discreta só tem uma família inicial se admitirmos que a família pode ser indexada por uma classe própria. De modo semelhante, dada uma subcategoria \mathcal{A} de uma categoria \mathcal{X} , uma multi-reflexão de um objecto X de \mathcal{X} em \mathcal{A} no sentido “grande” é uma multi-reflexão de X para \mathcal{A} no sentido “pequeno” se e só se a família de todas as componentes conexas da categoria $X \downarrow \mathcal{A}$ é um conjunto.

As duas proposições seguintes generalizam resultados bem conhecidos acerca dos funtores adjuntos aos funtores multiadjuntos.

Proposição 16.8 (c.f. [17])

1. *Os funtores multiadjuntos à direita preservam limites conexos.*
2. *Sendo \mathcal{X} uma categoria com limites conexos, um functor $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$ é um multiadjunto direito se e só se preservar limites conexos e, para cada objecto X de \mathcal{X} , toda a componente conexa de $X \downarrow U$ tiver um conjunto fracamente inicial.* □

De salientar que se considerarmos multiadjuntos direitos no sentido de Diers (i.e., as fontes universais são indexadas por conjuntos), então em 16.8.2 podemos substituir “para cada objecto X de \mathcal{X} , toda a componente conexa de $X \downarrow U$ tem um conjunto fracamente inicial” por “ U satisfaz a condição do conjunto solução”. Este resultado foi efectivamente provado em [17]. A asserção 16.8.1 foi também provada por Diers para o caso em que as

fontes universais são indexadas por conjuntos. Uma adaptação fácil das demonstrações em [17] fornece 16.8 para a presente definição de multiadjunto direito, i.e., para o caso em que as fontes universais podem ser indexadas por classes próprias.

Proposição 16.9 ([17, 74]) *Se \mathcal{A} é uma subcategoria multi-reflectiva de uma categoria multicompleta, então \mathcal{A} é multicompleta.* \square

A próxima proposição mostra a importância do facto de uma família inicial poder ser vazia.

Proposição 16.10 *Seja \mathcal{X} uma categoria com a propriedade seguinte:*

(**T**) *Para quaisquer dois morfismos f e g com o mesmo domínio existem morfismos u e v para os quais o quadrado*

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f} & \\ \downarrow g & & \downarrow u \\ & \xrightarrow{v} & \end{array}$$

comuta.

Então toda a subcategoria multi-reflectiva \mathcal{A} de \mathcal{X} , tal que $\mathcal{X}(X, \mathcal{A}) \neq \emptyset$ para cada X em \mathcal{X} , é reflectiva em \mathcal{X} .

Demonstração. Seja X um objecto de \mathcal{X} e seja $(r_i : X \rightarrow A_i)_I$ uma multi-reflexão de X em \mathcal{A} , que é não vazia visto que $\mathcal{X}(X, \mathcal{A}) \neq \emptyset$. Para cada par $i, j \in I$, existe algum par de morfismos $(u : A_i \rightarrow W, v : A_j \rightarrow W)$ tal que $u \cdot r_i = v \cdot r_j$. Seja $s : W \rightarrow A$ um morfismo com codomínio em \mathcal{A} ; então $s \cdot u$ e $s \cdot v$ são morfismos de \mathcal{A} e $s \cdot u \cdot r_i = s \cdot v \cdot r_j$. Logo r_i e r_j pertencem à mesma componente conexa de $X \downarrow \mathcal{A}$ e, por 16.7.1(a), concluímos que $i = j$. Por conseguinte, I é singular e, assim, X tem uma reflexão em \mathcal{A} . \square

É evidente que cada uma das seguintes condições sobre \mathcal{X} implica a condição (**T**):

- \mathcal{X} tem somas amalgamadas;
- \mathcal{X} tem multi-somas amalgamadas não vazias;

- \mathcal{X} tem um objecto terminal.

Definição 16.11 Seja \mathcal{A} uma subcategoria da categoria \mathcal{X} . Uma subcategoria \mathcal{B} de \mathcal{X} diz-se um *invólucro multi-reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{X}* se for multi-reflectiva em \mathcal{X} , contiver \mathcal{A} e estiver contida em toda a subcategoria multi-reflectiva de \mathcal{X} que contenha \mathcal{A} .

Se, em cima, substituirmos “multi-reflectiva” por “multi- \mathcal{E} -reflectiva” (“ \mathbb{M} -multi-reflectiva, respectivamente), obtemos a definição de *invólucro multi- \mathcal{E} -reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{X}* (*invólucro \mathbb{M} -multi-reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{X}* , respectivamente).

Seja \mathcal{X} uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbb{M})$. Então toda a subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} tem um invólucro \mathcal{E} -reflectivo em \mathcal{X} que consiste exactamente em todos os objectos de \mathcal{X} que são domínios de fontes de \mathbb{M} com codomínios em \mathcal{A} . Vamos agora provar que, se \mathcal{X} é uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbb{M})$ que é bem-copotenciada em relação a \mathcal{E} , então toda a subcategoria tem um invólucro multi- \mathcal{E} -reflectivo.

Faremos uso da definição e do lema seguintes.

Definição 16.12 Dado um functor $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$, uma fonte $(X \xrightarrow{f_i} GA_i)_I$ diz-se *G -conexa* se a subcategoria de $X \downarrow G$ constituída por todos os f_i é conexa.

Se \mathcal{A} é uma subcategoria de \mathcal{X} , uma fonte $(X \xrightarrow{f_i} A_i)_I$ de \mathcal{X} diz-se *\mathcal{A} -conexa* se for conexa relativamente ao functor inclusão.

Uma fonte $(X \xrightarrow{f_i} X_i)_I$ de \mathcal{X} que seja \mathcal{X} -conexa diz-se simplesmente *conexa*.

Lema 16.13 *Se \mathcal{X} é uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbb{M})$ e \mathcal{A} é uma subcategoria multi- \mathcal{E} -reflectiva de \mathcal{X} , então um objecto X de \mathcal{X} pertence a \mathcal{A} se e só se for o domínio de alguma fonte \mathcal{A} -conexa em \mathbb{M} .*

Demonstração. Se X pertencer a \mathcal{A} , então a fonte de todos os morfismos com domínio X e codomínio em \mathcal{A} contém a identidade 1_X e, conseqüentemente, é uma fonte \mathcal{A} -conexa que pertence a \mathbb{M} .

Reciprocamente, seja $(X \xrightarrow{f_i} A_i)_I$ uma fonte \mathcal{A} -conexa que pertence a \mathbb{M} e seja $(X \xrightarrow{r_j} B_j)_J$ uma multi- \mathcal{E} -reflexão de X em \mathcal{A} . Então, como $(f_i)_I$ é \mathcal{A} -conexa, todos os morfismos f_i são factorizáveis através do mesmo r_j para algum $j \in J$. Conseqüentemente, como $r_j \in \mathcal{E}$ e $(f_i)_I \in \mathbb{M}$, segue-se que r_j é um isomorfismo e, portanto, X pertence a \mathcal{A} . \square

Para \mathcal{X} uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbb{M})$ e \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{X} , consideremos uma cadeia $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in Ord}$ de subcategorias de \mathcal{X} definida como segue:

- A categoria \mathcal{A}_0 é justamente \mathcal{A} .
- Para cada $\alpha \in Ord$,

$$\mathcal{A}_{\alpha+1}$$

consiste em todos os objectos X de \mathcal{X} tais que X é o domínio de alguma fonte \mathcal{A}_α -conexa que pertence a \mathbf{M} .

- Para cada ordinal limite λ ,

$$\mathcal{A}_\lambda = \cup_{\alpha < \lambda} \mathcal{A}_\alpha.$$

Denotemos a reunião de todas estas subcategorias, $\cup_{\alpha \in Ord} \mathcal{A}_\alpha$, por

$$c\mathbf{M}(\mathcal{A}).$$

Proposição 16.14 *Se \mathcal{A} é uma subcategoria de uma categoria \mathcal{X} que é $(\mathcal{E}, \mathbf{M})$ e bem-copotenciada em relação a \mathcal{E} , então $c\mathbf{M}(\mathcal{A})$ é o invólucro multi- \mathcal{E} -reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{X} .*

Demonstração. Vamos usar os dois resultados seguintes de Salicrup [61]:

- I .** Se \mathcal{X} é uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbf{M})$ bem-copotenciada em relação a \mathcal{E} , então, para cada fonte $(m_i : X \rightarrow Y_i)_I$ pertencente a \mathbf{M} , existe um conjunto $J \subseteq I$ tal que $(m_i : X \rightarrow Y_i)_J$ pertence a \mathbf{M} .
- II .** Se \mathcal{X} é uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbf{M})$ bem-copotenciada em relação a \mathcal{E} e \mathcal{A} é uma subcategoria de \mathcal{X} , então as seguintes asserções são equivalentes:
- (i) \mathcal{A} é multi- \mathcal{E} -reflectiva em \mathcal{X} .
 - (ii) Se, para cada $i \in I$, o diagrama seguinte

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{m_i} & A_i \\ & \searrow g & \swarrow f_i \\ & & A \end{array}$$

comuta em \mathcal{X} , sendo f_i um morfismo de \mathcal{A} , e $(m_i : X \rightarrow A_i)_I$ pertencente a \mathbf{M} , então $X \in Obj(\mathcal{A})$.

Seja \mathcal{A} uma subcategoria de uma categoria \mathcal{X} que é $(\mathcal{E}, \mathbf{M})$ e bem-copotenciada em relação a \mathcal{E} . Vamos mostrar que $c\mathbf{M}(\mathcal{A})$ satisfaz a condição **(ii)**.

Suponhamos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{m_i} & Y_i \\ & \searrow g & \swarrow f_i \\ & & Y \end{array}$$

é comutativo em \mathcal{X} , para cada $i \in I$, sendo todos os f_i morfismos de $c\mathbf{M}(\mathcal{A})$ e $(m_i : X \rightarrow Y_i)_I$ pertencente a \mathbf{M} . Então, pela condição **I**, existe um conjunto $J \subseteq I$ tal que $(m_i : X \rightarrow Y_i)_J$ pertence a \mathbf{M} . Como J é um conjunto, existe algum $\alpha \in Ord$ tal que $f_i \in \mathcal{A}_\alpha$, $i \in J$. Logo, $X \in Obj(\mathcal{A}_{\alpha+1})$ e, portanto, $X \in Obj(c\mathbf{M}(\mathcal{A}))$. Para mostrar que $c\mathbf{M}(\mathcal{A})$ é a menor subcategoria multi- \mathcal{E} -reflectiva contendo \mathcal{A} , seja \mathcal{B} uma outra subcategoria multi- \mathcal{E} -reflectiva de \mathcal{X} contendo \mathcal{A} . Então $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ e, para cada $\alpha \in Ord$, se $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{B}$ então, pelo Lema 16.13, $\mathcal{A}_{\alpha+1} \subseteq \mathcal{B}$. Consequentemente, atendendo à construção das subcategorias \mathcal{A}_λ , conclui-se que, para cada ordinal λ , $\mathcal{A}_\lambda \subseteq \mathcal{B}$ e, portanto, $c\mathbf{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}$. \square

Observação 16.15 De acordo com a demonstração de Salicrup do resultado **II**, sob as hipóteses do teorema anterior, as multi- \mathcal{E} -reflexões dos objectos de \mathcal{X} em $c\mathbf{M}(\mathcal{A})$ são indexadas por um conjunto.

17 Multicompletude e limites conexos

Como vimos, o papel desempenhado pelos colimites e limites quando lidamos com o conceito de reflectividade passa, às vezes, a ser desempenhado por, respectivamente, multicolimites e limites conexos se estivermos a tratar da multi-reflectividade. Vamos prosseguir na exploração de algumas outras similitudes entre os pares colimites/limites e multicolimites/limites conexos. O estudo que se segue foi inspirado pelo artigo [3] (bem como pela secção 12 de [2]) onde os autores dão condições sob as quais uma categoria cocompleta é completa. Vamos portanto examinar a questão da multicompletude de

uma categoria que tem limites conexos.

Seja $D : I \rightarrow \mathcal{A}$ um diagrama pequeno em \mathcal{A} . Como em [2], denotamos por \mathcal{S}^D a categoria cujos objectos são todas as fontes $(A, (f_i)_{Obj(I)})$ naturais para D , cujos morfismos $(A, (f_i)_{Obj(I)}) \xrightarrow{h} (A', (f'_i)_{Obj(I)})$ são todos os morfismos $h : A \rightarrow A'$ de \mathcal{A} tais que $f'_i \cdot h = f_i$ para todo o $i \in Obj(I)$, e cujas identidades e lei de composição são como em \mathcal{A} . Também denotamos por $D^* : \mathcal{S}^D \rightarrow \mathcal{A}$ o functor de esquecimento dado por

$$D^*((A, (f_i)_{Obj(I)}) \xrightarrow{h} (A', (f'_i)_{Obj(I)})) = (A \xrightarrow{h} A').$$

Dualmente, definimos a categoria das cofontes naturais para D , que denotamos por \mathcal{S}_D , e representamos por $D_* : \mathcal{S}_D \rightarrow \mathcal{A}$ o functor de esquecimento correspondente.

Lema 17.1 *Se $D : I \rightarrow \mathcal{A}$ é um diagrama pequeno conexo numa categoria \mathcal{A} multicompleta, então a categoria \mathcal{S}^D é cocompleta.*

Demonstração. Seja $D_o : J \rightarrow \mathcal{S}^D$ um diagrama pequeno tal que, para cada $j \in Obj(J)$, $D_o(j) = (A_j, (f_{ji})_I)$. Seja $((A_j \xrightarrow{c_j^k} L^k)_{j \in Obj(J)})_{k \in K}$ um multicolimite do diagrama determinado pela composição $J \xrightarrow{D_o} \mathcal{S}^D \xrightarrow{D^*} \mathcal{A}$. Verifica-se facilmente que, para cada objecto i de I , $(A_j \xrightarrow{f_{ji}} Di)_{j \in Obj(J)}$ é uma cofonte natural para $D^* \cdot D_o$; então existe um único $k \in K$ e um único morfismo $g_i : L^k \rightarrow Di$ tal que $g_i \cdot c_j^k = f_{ji}$, para todo o objecto j de J . Mas o facto de I ser conexa implica que todas as cofontes naturais $(A_j \xrightarrow{f_{ji}} Di)_{j \in Obj(J)}$ pertencem à mesma componente conexa de $\mathcal{S}_{D^* \cdot D_o}$. Portanto, o k de K cuja existência referimos atrás é o mesmo para todos os i em $Obj(I)$. É agora simples concluir que $(g_i : L^k \rightarrow Di)_{i \in Obj(I)}$ é uma fonte natural para D e $((A_j, (f_{ji})_{Obj(I)}) \xrightarrow{c_j^k} (L^k, (g_i)_{Obj(I)})_{Obj(J)})$ é um colimite de D_o . \square

Recordemos que uma subcategoria \mathcal{B} de uma categoria \mathcal{A} se diz *densa para colimites* em \mathcal{A} sempre que cada objecto de \mathcal{A} é o colimite de algum diagrama pequeno com codomínio em \mathcal{B} . Dualmente, definimos subcategoria *densa para limites*.

Introduzimos agora a seguinte definição:

Definição 17.2 Uma subcategoria \mathcal{B} de \mathcal{A} diz-se *densa para multicolimites* em \mathcal{A} se para cada objecto A em \mathcal{A} existir um diagrama pequeno $D : I \rightarrow \mathcal{B}$ e uma cofonte natural $(l_i : Di \rightarrow A)_{i \in I}$ que seja uma componente do multicolimite de D .

Proposição 17.3 *Toda a categoria multicocompleta com uma subcategoria pequena densa para multicolimites tem limites conexos.*

Demonstração. Seja \mathcal{B} uma subcategoria pequena densa para multicolimites de uma categoria multicocompleta \mathcal{A} . Seja $D : I \rightarrow \mathcal{A}$ um diagrama pequeno conexo. Mostrar que D tem um limite em \mathcal{A} é equivalente a mostrar que \mathcal{S}^D tem um objecto terminal. Além disso, como, pelo Lema 17.1, \mathcal{S}^D é cocompleta, para mostrar que \mathcal{S}^D tem um objecto terminal basta mostrar que tem um objecto fracamente terminal (ver [2]). Seja I^* a subcategoria de \mathcal{S}^D de todas as fontes naturais para D com domínio em \mathcal{B} . Como \mathcal{B} é pequena, também o é I^* e o functor inclusão $I^* \hookrightarrow \mathcal{S}^D$ tem um colimite, visto \mathcal{S}^D ser cocompleta. Seja

$$(S \xrightarrow{c_S} R)_{S \in I^*}, \quad \text{com } R = (C, (p_i)_{Obj(I)}).$$

esse colimite. Pretendemos provar que $R = (C, (p_i)_{Obj(I)})$ é um objecto fracamente terminal de \mathcal{S}^D . Com efeito, seja $S = (f_i : A \rightarrow Di)_{Obj(I)}$ pertencente a \mathcal{S}^D . Por hipótese, existe um diagrama pequeno $\bar{D} : N \rightarrow \mathcal{B}$ e uma cofonte $(t_n : \bar{D}n \rightarrow A)_{n \in Obj(N)}$ natural para \bar{D} que é uma componente de um multicolimite de $N \xrightarrow{\bar{D}} \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$. Para cada objecto n de N , a fonte $S_n = (\bar{D}n \xrightarrow{t_n} A \xrightarrow{f_i} Di)_{i \in Obj(I)}$ pertence a I^* . Vamos ver que $(\bar{D}n \xrightarrow{c_{S_n}} C)_{n \in Obj(N)}$ é uma cofonte natural para \bar{D} , ou seja, $(\bar{D}n \xrightarrow{c_{S_n}} C)_{n \in Obj(N)}$ pertence a $\mathcal{S}_{\bar{D}}$. Seja, então, $d : m \rightarrow n$ um morfismo de N . Como $(t_n)_{n \in Obj(N)}$ é uma cofonte natural para \bar{D} , segue-se que $t_m = t_n \cdot \bar{D}d$ e portanto $f_i \cdot t_m = (f_i \cdot t_n) \cdot \bar{D}d$ para todo o $i \in Obj(I)$. Isto significa que $\bar{D}d$ é um morfismo em I^* de S_m para S_n . Logo $c_{S_m} = \bar{D}d \cdot c_{S_n}$, como pretendido. Por conseguinte, existe uma componente do multicolimite de $N \xrightarrow{\bar{D}} \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$ que é precisamente o objecto inicial da componente conexa de $\mathcal{S}_{\bar{D}}$ que contém $(\bar{D}n \xrightarrow{c_{S_n}} C)_{n \in Obj(N)}$. Mas $(\bar{D}n \xrightarrow{c_{S_n}} C)_{n \in Obj(N)}$ e $(\bar{D}n \xrightarrow{t_n} A)_{n \in Obj(N)}$ pertencem à mesma componente conexa de $\mathcal{S}_{\bar{D}}$, visto que, dado $i \in Obj(I)$, temos os seguintes morfismos em $\mathcal{S}_{\bar{D}}$:

$$(\bar{D}n \xrightarrow{t_n} A)_{Obj(N)} \xrightarrow{f_i} (\bar{D}n \xrightarrow{t_n} A \xrightarrow{f_i} Di)_{Obj(N)} \xleftarrow{p_i} (\bar{D}n \xrightarrow{c_{S_n}} C)_{Obj(N)}.$$

Consequentemente, $(\bar{D}n \xrightarrow{t_n} A)_{Obj(N)}$ é a componente do multicolimite de \bar{D} mencionada acima. Logo há um morfismo $w : A \rightarrow C$ tal que $w \cdot t_n = c_{S_n}$ para todos os objectos n de

N . Atendendo a que, para cada objecto $n \in \text{Obj}(N)$ e cada objecto $i \in \text{Obj}(I)$, se verifica $p_i \cdot w \cdot t_n = f_i \cdot t_n$ e $(t_n)_{\text{Obj}(N)}$ é uma epi-cofonte, conclui-se que $p_i \cdot w = f_i$ para todo o $i \in \text{Obj}(I)$. Por conseguinte, w é um morfismo em \mathcal{S}^D com domínio $S = (A \xrightarrow{f_i} Di)_{i \in \text{Obj}(I)}$ e codomínio $R = (C \xrightarrow{p_i} Di)_{i \in \text{Obj}(I)}$. \square

A proposição seguinte dá condições sob as quais uma categoria com limites conexos é multicocompleta.

Proposição 17.4 *Toda a categoria com limites conexos e tal que cada uma das suas componentes conexas tem uma subcategoria pequena densa para limites é multicocompleta.*

Demonstração. Seja \mathcal{A} uma categoria sob as hipóteses da proposição e seja $D : I \rightarrow \mathcal{A}$ um diagrama pequeno em \mathcal{A} . Queremos mostrar que D tem um multicolimite em \mathcal{A} . Seja $(\mathcal{C}_k)_{k \in K}$ a família de todas as componentes conexas da categoria S_D de todas as cofontes naturais para D . Mostrar que D tem um multicolimite é equivalente a mostrar que cada componente conexa \mathcal{C}_k tem um objecto inicial. Assim, basta provar que

(i) \mathcal{C}_k tem limites conexos (então, em particular, \mathcal{C}_k tem igualizadores)

e

(ii) \mathcal{C}_k tem um objecto fracamente inicial.

Demonstração de (i): Seja $\bar{D} : J \rightarrow \mathcal{C}_k$ um diagrama pequeno conexo tal que $\bar{D}j = (Di \xrightarrow{f_{ij}} Aj)_{\text{Obj}(I)}$ e consideremos o diagrama

$$J \xrightarrow{\bar{D}} \mathcal{C}_k \xrightarrow{E_k} S_D \xrightarrow{D_*} \mathcal{A}$$

onde E_k é o functor inclusão. Como \mathcal{A} tem limites conexos, o functor $D_* \cdot E_k \cdot \bar{D}$ tem um limite em \mathcal{A} , seja ele

$$(L \xrightarrow{l_j} Aj)_{j \in \text{Obj}(J)}.$$

É fácil ver que o facto de \bar{D} ser um functor implica que, para cada $i \in \text{Obj}(I)$, $(Di \xrightarrow{f_{ij}} Aj)_{j \in \text{Obj}(J)}$ é uma fonte natural para $D_* \cdot E_k \cdot \bar{D}$. Então, existe um único morfismo $t_i : Di \rightarrow L$ tal que $l_j \cdot t_i = f_{ij}$ para todo o $j \in \text{Obj}(J)$. A cofonte $(Di \xrightarrow{t_i} L)_{i \in \text{Obj}(I)}$ é natural para D , visto que, dado um morfismo $d : i \rightarrow i'$ de I , as igualdades

$$l_j \cdot t_{i'} \cdot Dd = f_{i'j} \cdot Dd = f_{ij} = l_j \cdot t_i \quad \text{para todo o } j \in \text{Obj}(J)$$

implicam que $t_{i'} \cdot Dd = t_i$. Além disso, a S_D -fonte

$$((Di \xrightarrow{t_i} L)_{i \in \text{Obj}(I)} \xrightarrow{l_j} (Di \xrightarrow{f_{ij}} A_j)_{i \in \text{Obj}(I)})_{j \in \text{Obj}(J)}$$

é um limite de \bar{D} . A naturalidade desta fonte relativamente a \bar{D} é uma consequência da naturalidade de $(L \xrightarrow{l_j} A_j)_{\text{Obj}(J)}$ para $D_* \cdot E_k \cdot \bar{D}$. Para mostrar que ela é um limite de \bar{D} , seja

$$((Di \xrightarrow{v_i} V)_{i \in \text{Obj}(I)} \xrightarrow{u_j} (Di \xrightarrow{f_{ij}} A_j)_{i \in \text{Obj}(I)})_{j \in \text{Obj}(J)}$$

uma outra fonte natural para \bar{D} . A naturalidade desta fonte implica que a fonte $(u_j : V \rightarrow A_j)_{j \in \text{Obj}(J)}$ seja natural para $D_* \cdot E_k \cdot \bar{D}$. Como $(L \xrightarrow{l_j} A_j)_{\text{Obj}(J)}$ é um limite de $D_* \cdot E_k \cdot \bar{D}$, existe um único morfismo $t : V \rightarrow L$ tal que $l_j \cdot t = u_j$ para todo o $j \in J$. Ademais, t é um morfismo em S_D definido de $(Di \xrightarrow{v_i} V)_{\text{Obj}(I)}$ para $(Di \xrightarrow{t_i} L)_{\text{Obj}(I)}$. De facto, para cada $i \in \text{Obj}(I)$, como

$$l_j \cdot t \cdot v_i = u_j \cdot v_i = f_{ij} = l_j \cdot t_i \quad \text{para todo o } j \in \text{Obj}(J),$$

temos $t \cdot v_i = t_i$. Consequentemente, t é o único morfismo em S_D de $(Di \xrightarrow{v_i} V)_{\text{Obj}(I)}$ para $(Di \xrightarrow{t_i} L)_{\text{Obj}(I)}$ tal que $l_j \cdot t = u_j$ para todo o $j \in \text{Obj}(J)$.

Demonstração de (ii): Seja \mathcal{A}_k a subcategoria de \mathcal{A} constituída por todos os codomínios de cofontes naturais para D pertencentes a \mathcal{C}_k . Então, \mathcal{A}_k é conexa, visto \mathcal{C}_k o ser. Por hipótese, a componente conexa de \mathcal{A} que contém \mathcal{A}_k tem uma subcategoria pequena densa para limites, seja ela \mathcal{B} . Seja I_* a subcategoria de \mathcal{C}_k de todas as cofontes naturais para D com codomínio em \mathcal{B} . Como \mathcal{C}_k é conexa, para cada par S e S' de objectos em \mathcal{C}_k podemos escolher um conjunto finito de objectos de \mathcal{C}_k , digamos, $I_{(S,S')} = \{S_r = (Di \xrightarrow{g_{ri}} A_r)_{i \in \text{Obj}(I)}, r = 1, \dots, m\}$, para os quais existe um diagrama da forma

$$S \longrightarrow S_1 \longleftarrow S_2 \longrightarrow \dots \longleftarrow S_m \longrightarrow S'.$$

Seja I_{**} a subcategoria de \mathcal{C}_k constituída por todos os objectos em $I_* \cup (\cup_{S,S' \in I_*} I_{(S,S')})$. Então I_{**} é claramente uma subcategoria pequena conexa de \mathcal{C}_k . Consequentemente, por (i), o functor inclusão $I_{**} \hookrightarrow \mathcal{C}_k$ tem um limite em \mathcal{C}_k . Seja ele

$$(S_o \xrightarrow{p_S} S)_{S \in I_{**}}$$

com $S_o = (Di \xrightarrow{l_i} A)_{i \in \text{Obj}(I)}$. Mostremos que S_o é um objecto fracamente inicial de \mathcal{C}_k . Na verdade, seja $\hat{S} = (Di \xrightarrow{h_i} \hat{A})_{i \in \text{Obj}(I)}$ pertencente a \mathcal{C}_k . Então, existe um

diagrama pequeno $\hat{D} : N \rightarrow \mathcal{B}$ que tem como limite uma fonte com domínio \hat{A} , seja ela $(\hat{A} \xrightarrow{t_n} B_n)_{n \in \text{Obj}(N)}$. É claro que, para cada $n \in \text{Obj}(N)$, a cofonte $S_n = (Di \xrightarrow{h_i} \hat{A} \xrightarrow{t_n} B_n)_{i \in \text{Obj}(I)}$ pertence a I_{**} . Por outro lado, a fonte $(A \xrightarrow{p_{S_n}} B_n)_{n \in \text{Obj}(N)}$ é natural para \hat{D} . De facto, seja $n \xrightarrow{d} n'$ um morfismo de N . A naturalidade de $(t_n)_{n \in \text{Obj}(N)}$ implica que $\hat{D}d \cdot t_n = t_{n'}$ e, portanto, que $\hat{D}d \cdot (t_n \cdot h_i) = t_{n'} \cdot h_i$ para todo o $i \in \text{Obj}(I)$. Ou seja, $\hat{D}d$ é um morfismo de $I_{**} S_n$ para $S_{n'}$. Consequentemente, como $(S_o \xrightarrow{p_S} S)_{S \in I_{**}}$ é um limite, temos que $\hat{D}d \cdot p_{S_n} = p_{S_{n'}}$. Além disso, existe um único morfismo $A \xrightarrow{w} \hat{A}$ tal que $t_n \cdot w = p_{S_n}$ para todo o $n \in \text{Obj}(N)$. Agora, para cada $i \in \text{Obj}(I)$, temos $t_n \cdot w \cdot l_i = p_{S_n} \cdot l_i = t_n \cdot h_i$ ($n \in \text{Obj}(N)$). Então, como $(t_n)_{n \in \text{Obj}(N)}$ é um limite, segue-se que $w \cdot l_i = h_i$ for al $i \in \text{Obj}(I)$, ou seja, w é um morfismo em \mathcal{C}_k definido de S_o para \hat{S} . \square

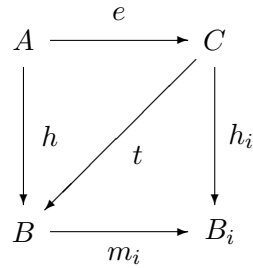
Recordamos que uma monofonte $(m_i)_I$ se diz *extremal* sempre que satisfizer a seguinte condição

(E) todo o epimorfismo e através do qual todos os m_i se factorizam é um isomorfismo.

É sabido que toda a categoria cocompleta e bem-copotenciada é uma categoria $(\text{Epi}, \text{ExtrMonoFonte})$ (isto decorre, por exemplo, de 6.5 e 7.3 de [71]).

Lema 17.5 *Se \mathcal{A} é uma categoria multicocompleta e bem-copotenciada, então:*

- (i) *Toda a fonte conexa em \mathcal{A} admite uma factorização $(\text{Epi}, \text{ExtrMonoFonte})$.*
- (ii) *Se $(B \xrightarrow{m_i} B_i)_I$ é uma monofonte conexa extremal, $A \xrightarrow{e} C$ é um epimorfismo, $A \xrightarrow{h} B$ é um morfismo e $(C \xrightarrow{h_i} B_i)_I$ é uma fonte tal que $m_i \cdot h = h_i \cdot e$ para todo o $i \in I$, então existe um único morfismo $t : C \rightarrow B$ tal que $t \cdot e = h$ e $m_i \cdot t = h_i$ para todo o $i \in I$.*



Demonstração.

(i) Seja $(f_i : A \rightarrow A_i)_I$ uma fonte conexa e consideremos a família indexada por K de todos os pares $(e_k, (m_{ki})_I)$ onde $e_k : A \rightarrow E_k$

é um epimorfismo e, para todo o $i \in I$, $m_{ki} : E_k \rightarrow A_i$ são morfismos tais que

$$m_{ki} \cdot e_k = f_i. \quad (\text{V.1})$$

Formemos agora a multicointersecção da família $(e_k)_{k \in K}$. De (V.1) segue-se que existem uma única componente da multicointersecção, digamos

$$(e : A \rightarrow B; (g_k : E_k \rightarrow B)_K),$$

e um único morfismo $m_i : B \rightarrow A_i$ tais que

$$m_i \cdot e = f_i \text{ e } m_i \cdot g_k = m_{ki} \text{ para todo o } k \in K.$$

Como a \mathcal{A} -fonte $(f_i)_I$ é conexa e todos os e_k são epimorfismos, conclui-se que todos os $(f_i, (m_{ki})_K)$ com $i \in I$ pertencem à mesma componente conexa da quase-categoria das cofontes naturais para o diagrama $A \xrightarrow{e_k} E_k$, $k \in K$. Portanto, a componente $(e, (g_k)_K)$ da multicointersecção, cuja existência mencionámos, é a mesma para todo o $i \in I$. Logo, $(A \xrightarrow{e} B \xrightarrow{m_i} A_i)_I$ é uma factorização de $(f_i)_I$, com $e \in \text{Epi}(\mathcal{A})$. Como $(f_i)_I$ é conexa e e é um epimorfismo, é evidente que $(m_i)_I$ é conexa.

Mostremos, em primeiro lugar, que $(m_i)_I$ satisfaz a condição (E) acima. Seja d um epimorfismo e seja $(l_i)_I$ uma fonte tal que $m_i = l_i \cdot d$ para todo o $i \in I$. Então $(f_i)_I = (l_i)_I \cdot (d \cdot e)$ e, portanto, $d \cdot e = e_k$ para algum $k \in K$. Logo, temos a igualdade $g_k \cdot d \cdot e = e$, que implica que $g_k \cdot d = 1$. Assim, d é um isomorfismo. Para mostrar que $(m_i)_I$ é uma monofonte, sejam a e b morfismos com codomínio em B e tal que $m_i \cdot a = m_i \cdot b$ para todo o $i \in I$. Então para cada $i \in I$ existem uma componente $B \xrightarrow{c} C$ do multicoigualizador de (a, b) e um morfismo $r_i : C \rightarrow A_i$ tais que $r_i \cdot c = m_i$. Como $(m_i)_I$ é conexa, a componente $B \xrightarrow{c} C$ é a mesma para todo o m_i . Consequentemente, a igualdade $(m_i)_I = (r_i)_I \cdot c$, com c um epimorfismo, implica que c é um isomorfismo, visto que $(m_i)_I$ satisfaz a condição (E). Portanto, $a = b$.

(ii) Formemos uma multi-soma amalgamada de e ao longo de h . Para cada $i \in I$, a igualdade $h_i \cdot e = m_i \cdot h$ implica a existência de uma única componente (\hat{e}, \hat{h}) da multi-soma amalgamada de (e, h) e de um único morfismo t_i tal que $t_i \cdot \hat{e} = m_i$ e $t_i \cdot \hat{h} = h_i$. Como $(m_i)_I$ é conexa e $e \in \text{Epi}(\mathcal{A})$, todos os pares (m_i, h_i) pertencem à mesma componente conexa da categoria das cofontes naturais para o diagrama (e, h) e, assim, o mesmo par (\hat{e}, \hat{h}) corresponde a cada um deles. Consequentemente, temos que $(m_i)_I = (t_i)_I \cdot \hat{e}$ e, como \hat{e} é

um epimorfismo (por 16.4.2) e $(m_i)_I$ preenche a condição (E), \hat{e} é um isomorfismo. Por conseguinte, $t = \hat{e}^{-1} \cdot \hat{h}$ é o morfismo pretendido. \square

Lembramos aqui que, dada uma categoria \mathcal{A} , um objecto S de \mathcal{A} se diz um *separador* em \mathcal{A} se para cada par de morfismos $f, g : A \rightarrow B$ com $f \neq g$, existir algum morfismo $S \xrightarrow{h} A$ tal que $f \cdot h \neq g \cdot h$.

Teorema 17.6 *Toda a categoria multicocompleta e bem-copotenciada com um separador tem limites conexos.*

Demonstração. Seja \mathcal{A} uma categoria multicocompleta e bem-copotenciada e seja S um separador de \mathcal{A} .

I. Mostremos que cada objecto B é um quociente de alguma componente dum multicoproducto de S indexado por $\mathcal{A}(S, B)$. De facto, seja

$$\left((S \xrightarrow{\sigma_g^t} C^t)_{g \in \mathcal{A}(S, B)} \right)_{t \in T} \tag{V.2}$$

um multicoproducto de S indexado por $\mathcal{A}(S, B)$. Então, existe um único par $(t_o, C^{t_o} \xrightarrow{w} B)$ tal que os triângulos

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{g} & B \\ \sigma_g^{t_o} \downarrow & \nearrow w & \\ C^{t_o} & & \end{array} \tag{V.3}$$

são comutativos para todo o $g \in \mathcal{A}(S, B)$. Além disso, o facto de S ser um separador implica que w seja um epimorfismo. Evidentemente, se $\mathcal{A}(S, B) = \emptyset$, então o multicoproducto de S indexado por $\mathcal{A}(S, B)$ não é mais do que uma família inicial de \mathcal{A} .

II. Provemos que se $(B \xrightarrow{m_i} A_i)_I$ é uma monofonte pequena não vazia com $\mathcal{A}(S, B) \neq \emptyset$ então o domínio B é o quociente de alguma componente de um multicoproducto de S indexado por $\prod_{i \in I} \mathcal{A}(S, A_i)$. Atendendo a I. basta mostrar que cada componente do multicoproducto de S indexada por $\mathcal{A}(S, B)$ é um quociente de alguma componente do multicoproducto de S indexado por $\prod_{i \in I} \mathcal{A}(S, A_i)$. Mas o facto de $(B \xrightarrow{m_i} A_i)_I$ ser uma monofonte implica que a função $\varphi : \mathcal{A}(S, B) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{A}(S, A_i)$ que a cada $g \in \mathcal{A}(S, B)$ faz corresponder $(m_i \cdot g)_I$ seja injectiva. Basta pois provar o seguinte resultado mais geral:

Se N e M são conjuntos não vazios tais que $N \subseteq M$, e B é um objecto de \mathcal{A} , então cada componente do multicoproducto de B indexado por N é um quociente de alguma componente do multicoproducto de B indexado por M .

Seja então $(\nu_n : B \rightarrow C)_{n \in N}$ uma componente do multicoproducto de B indexado por N . Fixemos n_o em N e tomemos, para cada $m \in M$,

$$\delta_m = \begin{cases} \nu_m & \text{se } m \in N \\ \nu_{n_o} & \text{se } m \notin N \end{cases}.$$

Então existem uma única componente do multicoproducto de B indexado por M , digamos, $(\theta_m : B \rightarrow L)_{m \in M}$, e um único morfismo $u : L \rightarrow C$ tais que $u \cdot \theta_m = \delta_m$, $m \in M$. Logo $(\theta_n : B \rightarrow L)_{n \in N}$ e $(\nu_n : B \rightarrow C)_{n \in N}$ pertencem à mesma componente conexa da categoria de todas as cofontes $(g_n : B \rightarrow X)_{n \in N}$, já que

$$(\theta_n : B \rightarrow L)_{n \in N} \xrightarrow{u} (\nu_n : B \rightarrow C)_{n \in N}$$

é um morfismo naquela categoria. Isto determina a existência de um único morfismo $v : C \rightarrow L$ tal que $v \cdot \nu_n = \theta_n$ para todo o $n \in N$. Então $u \cdot v \cdot \nu_n = u \cdot \theta_n = \delta_n = \nu_n$ para todo o $n \in N$; Portanto, $u \cdot v = 1_C$ e, assim, $u : L \rightarrow C$ é um epimorfismo cindido.

III. Provemos que, dada uma família pequena não vazia $(A_i)_I$ de objectos em \mathcal{A} , existe um conjunto $\mathbf{F}_{(A_i)_I}$ de objectos de \mathcal{A} tal que cada domínio B de uma monofonte com codomínio $(A_i)_I$, i.e., da forma $(B \xrightarrow{m_i} A_i)_I$, é um quociente de algum objecto em $\mathbf{F}_{(A_i)_I}$. O conjunto $\mathbf{F}_{(A_i)_I}$ é a reunião de $\{C\}$ e \mathbf{F} , para C e \mathbf{F} obtidos como a seguir se descreve:

(a) É claro que todos os objectos B que são o domínio de uma monofonte com codomínio $(A_i)_I$ pertencem à mesma componente conexa de \mathcal{A} ; consequentemente, todos esses objectos B que, além disso, verificam $\mathcal{A}(S, B) = \emptyset$ são quocientes dum objecto inicial da componente conexa de \mathcal{A} que os contém.

(b) Vamos mostrar que existe um conjunto \mathbf{F} de componentes do multicoproducto de S indexado por $\prod_{i \in I} \mathcal{A}(S, A_i)$ tal que cada domínio B de uma monofonte da forma $(B \xrightarrow{m_i} A_i)_I$ com $\mathcal{A}(S, B) \neq \emptyset$ é um quociente de algum objecto em \mathbf{F} .

Para cada monofonte $(B \xrightarrow{m_i} A_i)_I$ com $\mathcal{A}(S, B) \neq \emptyset$, seja

$$\mathbf{G}_{(B, (m_i)_I)} = \{(m_i \cdot g)_I \in \prod_{i \in I} \mathcal{A}(S, A_i) \mid g \in \mathcal{A}(S, B)\}.$$

Como a família $\{\mathbf{G}_{(B,(m_i)_I)} \mid (B \xrightarrow{m_i} A_i)_I \text{ é uma monofonte}\}$ está contida no conjunto de todos os subconjuntos de $\prod_{i \in I} \mathcal{A}(S, A_i)$, é também um conjunto. Escolhamos então um conjunto $\{(B^j, (m_i^j)_I), j \in J\}$ de monofontes com codomínio $(A_i)_I$ tal que para cada monofonte $(B, (m_i)_I)$ com codomínio $(A_i)_I$ existe um e um só $j \in J$ tal que $\mathbf{G}_{(B,(m_i)_I)} = \mathbf{G}_{(B^j,(m_i^j)_I)}$. Por II., temos assegurada a existência de um conjunto $\mathbf{F} = \{C^j, j \in J\}$ de componentes de um multicoproducto de S indexado por $\prod_{i \in I} \mathcal{A}(S, A_i)$ tal que B^j é um quociente de C^j . Mostramos a seguir que para cada monofonte $(B \xrightarrow{m_i} A_i)_I$ com $\mathcal{A}(S, B) \neq \emptyset$ o domínio B é um quociente de algum C^j .

Sejam $(B \xrightarrow{m_i} A_i)_I$ e $(B^j \xrightarrow{m_i^j} A_i)_I$ duas monofontes tais que $\mathbf{G}_{(B,(m_i)_I)} = \mathbf{G}_{(B^j,(m_i^j)_I)}$. Então podemos definir um isomorfismo ϕ entre $\mathcal{A}(S, B)$ e $\mathcal{A}(S, B^j)$ pondo, para cada $g \in \mathcal{A}(S, B)$, $\phi(g) = h$ tal que $(m_i \cdot g)_I = (m_i^j \cdot h)_I$. Consequentemente, é claro que o multicoproducto (V.2) de S indexado por $\mathcal{A}(B, S)$ é também um multicoproducto de S indexado por $\mathcal{A}(S, B^j)$. Então, existe um único par $(t', C^{t'} \xrightarrow{w'} B^j)$ tal que os triângulos

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{h} & B^j \\
 \sigma_g^{t'} \downarrow & & \nearrow w' \\
 C^{t'} & &
 \end{array} \tag{V.4}$$

onde $\phi(g) = h$, são comutativos para todo o $g \in \mathcal{A}(S, B)$. Como anteriormente, w' é um epimorfismo e podemos assumir que $C^{t'} = C^j$. Consequentemente, da comutatividade dos diagramas (V.3) e (V.4), obtemos as igualdades $(m_i^j \cdot w') \cdot \sigma_g^{t'} = (m_i \cdot w) \cdot \sigma_g^{t_o}$ para todo o $g \in \mathcal{A}(S, B)$, o que implica que $t' = t_o$ e $m_i^j \cdot w' = m_i \cdot w$, visto que $((\sigma_g^t)_{\mathcal{A}(S,B)})_T$ ser um multicoproducto. Logo B é também um quociente de C^j .

IV. Dado que para cada $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ existe um conjunto $\mathbf{F}_{(A)}$ tal que cada subobjecto de A é um quociente de algum objecto em $\mathbf{F}_{(A)}$, é agora evidente a boa-potenciação de \mathcal{A} .

Para mostrar que \mathcal{A} tem limites conexos, seja $D : I \rightarrow \mathcal{A}$ um diagrama pequeno conexo em \mathcal{A} . Pelo Lema 17.1, a categoria S^D das fontes naturais para D é cocompleta. Logo, para mostrar que S^D tem um objecto terminal - que será, então, o limite de

D - basta mostrar que tem um objecto fracamente terminal. Seja $\mathbf{F}_{(Di)Obj(I)}$ o conjunto escolhido como atrás e seja I^* o conjunto de todas as fontes naturais para D com domínio em $\mathbf{F}_{(Di)Obj(I)}$. Como I^* é pequena, o diagrama $I^* \hookrightarrow S^D$ tem um colimite em S^D , seja ele

$$((B, (f_i)_{Obj(I)}) \xrightarrow{\mu_{(B, f_i)}} (C, (w_i)_{Obj(I)}))_{(B, (f_i)) \in I^*}.$$

Pelo Lema 17.5, a fonte conexa $(C \xrightarrow{w_i} Di)_{Obj(I)}$ tem uma factorização $(Epi, ExtrMonoFonte)$, digamos $(C \xrightarrow{e} L \xrightarrow{l_i} Di)_{Obj(I)}$. Vamos mostrar que $(L \xrightarrow{l_i} Di)_{Obj(I)}$ é um objecto fracamente terminal de S^D . Seja $(A \xrightarrow{g_i} Di)_{Obj(I)}$ pertencente a S^D e seja $(A \xrightarrow{d} B \xrightarrow{n_i} Di)_{Obj(I)}$ uma factorização $(Epi, ExtrMonoFonte)$ de $(g_i)_{Obj(I)}$. Então há algum objecto E em $\mathbf{F}_{(Di)Obj(I)}$ e algum epimorfismo $E \xrightarrow{q} B$. É claro que $(E \xrightarrow{q} B \xrightarrow{n_i} Di)_{Obj(I)}$ é natural para D e, portanto, pertence a I^* . Consequentemente, temos a igualdade $n_i \cdot q = l_i \cdot (e \cdot \mu_{(E, n_i \cdot q)})$ para todo o $i \in Obj(I)$. Então, de novo pelo Lema 17.5, existe um único $t : B \rightarrow L$ tal que $t \cdot q = e \cdot \mu_{(E, n_i \cdot q)}$ e $l_i \cdot t = n_i$ para todo o $i \in Obj(I)$. Por conseguinte, $t \cdot d$ é claramente um morfismo de S^D definido de $(A, (g_i)_{Obj(I)})$ para $(L, (l_i)_{Obj(I)})$. \square

Observação 17.7 Seja \mathcal{A} uma categoria com objecto terminal. Nesse caso, é trivial concluir que se \mathcal{A} é multicocompleta então é cocompleta. Além disso, se \mathcal{A} tem limites conexos então é completa. Isto decorre do facto do produto $\prod_{i \in I} A_i$ coincidir com o limite do diagrama constituído por todos os morfismos de A_i para um objecto terminal.

18 Categorias multi-sólidas

O conceito de solidez para uma categoria concreta revelou-se extremamente útil na unificação das categoria concretas “bem comportadas” na topologia, álgebra e outros campos da matemática. Recordamos que, para uma categoria concreta (\mathcal{A}, U) que seja bem-copotenciada e tenha uma categoria base cocompleta, ser sólida é equivalente a \mathcal{A} ser cocompleta e U ter um adjunto esquerdo (ver [71]). Na presente secção estudamos uma generalização das categorias concretas sólidas às multi-sólidas, introduzida por W. Tholen [74] sob a designação de “strongly locally semitopological”??. O resultado essencial é que uma categoria concreta (\mathcal{A}, U) que seja bem-copotenciada sobre

uma categoria multicompleta é multi-sólida se e só se \mathcal{A} é multicompleta e U é um multiadjunto direito. Assim, estas categorias incluem exemplos tais como a categoria dos conjuntos estritamente linearmente ordenados ou a categoria dos corpos. Este resultado melhora o Teorema 6.3 de [74], usando uma abordagem diferente que realça a similaridade entre o comportamento das categorias sólidas e o das multi-sólidas.

Definição 18.1 Uma categoria concreta (\mathcal{A}, U) é *multi-sólida* se para cada U -cofonte $S = (UA_i \xrightarrow{x_i} X)_I$ existir uma U -fonte $(X \xrightarrow{y_j} UB_j)_J$ tal que

- (i) $y_j \cdot x_i$ é a imagem de um morfismo $A_i \rightarrow B_j$ de \mathcal{A} por meio de U para cada $i \in I$, $j \in J$;
- (ii) sempre que um morfismo U -estruturado $X \xrightarrow{y} UB$ é tal que $y \cdot x_i$ é a imagem de um morfismo de \mathcal{A} por meio de U para todo o $i \in I$, então existe um único par (j, f) com $j \in J$ e $B_j \xrightarrow{f} B$ satisfazendo $Uf \cdot y_j = y$.

A U -fonte $(X \xrightarrow{y_j} UB_j)_J$ diz-se um *multi-levantamento semifinal* de S .

Exemplos 18.2 (cf. [73])

1. Categorias sólidas (i.e., o caso em que J é um conjunto singular).
2. A categoria dos conjuntos estritamente linearmente ordenados é multi-sólida sobre a categoria dos conjuntos estritamente parcialmente ordenados.
3. A categoria \mathcal{Fld} dos corpos é multi-sólida sobre a categoria \mathcal{Rng} dos anéis comutativos unitários.
4. Um functor $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$ diz-se *localmente pleno* se, para cada diagrama comutativo da forma

$$\begin{array}{ccc} UA & \xrightarrow{f} & UB \\ UA & \searrow & \swarrow UB \\ & UC & \end{array}$$

f é o morfismo de \mathcal{X} subjacente a algum morfismo de \mathcal{A} definido de A para B .

Se $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$ é um multiadjunto direito fiel e localmente pleno, então a categoria concreta (\mathcal{A}, U) é multi-sólida. Para o mostrar, seja $(UA_i \xrightarrow{x_i} X)_I$ uma U -cofonte e consideremos a U -fonte $(X \xrightarrow{z_t} UC_t)_T$ de todos os U -morfismos tais que $z_t \cdot x_i$ é a imagem por U de um morfismo de \mathcal{A} com domínio A_i e codomínio C_t , para todo $i \in I$. Seja $(X \xrightarrow{\eta_k} UB_k)_K$ a sub-fonte da fonte universal de X para U de todos os morfismos $X \xrightarrow{\eta_k} UB_k$ tal que $Ug_t \cdot \eta_k = z_t$ para algum $t \in T$ e algum morfismo $g_t : B_k \rightarrow C_t$ de \mathcal{A} . Então, para cada $i \in I$, temos o diagrama comutativo seguinte

$$\begin{array}{ccccc} UA_i & \xrightarrow{x_i} & X & \xrightarrow{\eta_k} & UB_k \\ & \searrow z_t \cdot x_i & & \nearrow Ug_t & \\ & & UC_t & & \end{array}$$

onde $z_t \cdot x_i$ é o morfismo de \mathcal{X} subjacente a algum morfismo de A_i para C_t . Consequentemente, como U é localmente pleno, temos que $\eta_k \cdot x_i$ é a imagem de um morfismo de \mathcal{A} definido de A_i para B_k . É agora claro que $(X \xrightarrow{\eta_k} UB_k)_K$ constitui um multi-levantamento semi-final de $(x_i)_I$.

Muitos outros exemplos de topologia, álgebra e geometria podem ser encontrados em [73].

Observações 18.3

1. É claro que uma categoria multi-sólida é sólida se e só se, para cada $X \in \text{Obj}(\mathcal{X})$, a categoria $X \downarrow U$ é conexa.
2. Atendendo à definição, conclui-se imediatamente que se (\mathcal{A}, U) é uma categoria multi-sólida, então U é um multiadjunto direito, sendo a fonte universal de X para U um multi-levantamento semifinal da fonte vazia com domínio X .

Além disso, como observado por W. Tholen em [74], se (\mathcal{A}, U) é uma categoria multi-sólida sobre uma categoria multicocompleta, então \mathcal{A} é multicocompleta.

Teorema 18.4 *Seja \mathcal{X} uma categoria multicocompleta. Então uma categoria concreta (\mathcal{A}, U) sobre \mathcal{X} com \mathcal{A} bem-copotenciada é multi-sólida se e só se U é um multiadjunto direito e \mathcal{A} é multicocompleta.*

Demonstração. Atendendo a 18.3.2, falta apenas provar a suficiência. Seja $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$ um multiadjunto direito fiel. Mostremos que toda a U -cofonte $(UA_i \xrightarrow{x_i} X)_I$ tem um multi-levantamento semifinal. Consideremos a fonte U -estruturada $(X \xrightarrow{z_t} UC_t)_T$ de todos os U -morfismos z_t tais que, para todo o $i \in I$, $z_t \cdot x_i$ é o morfismo de \mathcal{X} subjacente a algum morfismo de \mathcal{A} definido de A_i para C_t . Então

$$T = \bigcup_{j \in J} T_j,$$

onde, para cada $j \in J$, $(X \xrightarrow{z_t} UC_t)_{T_j}$ é uma componente conexa da U -fonte $(z_t)_T$. Como U é um multiadjunto direito, para cada $t \in T$ existe um único par (η, f) tal que $\eta : X \rightarrow UD$ pertence à fonte universal de X para U e $f : D \rightarrow C_t$ preenche $Uf \cdot \eta = z_t$. Para cada $j \in J$, a U -conexidade da fonte $(Z \xrightarrow{z_t} UC_t)_{T_j}$ implica que o U -morfismo η seja o mesmo para todo o z_t com $t \in T_j$. para cada $t \in T_j$ denotamos o par anterior por

$$(\eta_j : X \rightarrow UD_j, f_t : D_j \rightarrow C_t).$$

Para cada $j \in J$, seja $(D_j \xrightarrow{d_j} B_j \xrightarrow{l_t} C_t)_{T_j}$ uma factorização $(Epi, ExtrMonofonte)$ de $(f_t)_{T_j}$ que, pelo Lema 17.5, existe. Pretendemos mostrar que

$$(X \xrightarrow{\eta_j} UD_j \xrightarrow{Ud_j} UB_j)_J$$

é um multi-levantamento semifinal de $(UA_i \xrightarrow{x_i} X)_I$. De facto, se $X \xrightarrow{y} UB$ é tal que $y \cdot x_i$ é a imagem de um morfismo de \mathcal{A} para todo o $i \in I$, então $B = C_t$ e $y = z_t$ para algum $t \in T$. Seja j o único elemento em J tal que $t \in T_j$; então

$$y = Ul_t \cdot (Ud_j \cdot \eta_j). \tag{V.5}$$

Além disso, como $(\eta_j)_J$ é uma sub-fonte de uma fonte universal de X para U e d_j é um \mathcal{A} -epimorfismo, conclui-se que (j, l_t) é o único par para o qual a igualdade (V.5) se verifica. \square

Capítulo VI

Multi-reflectividade e multiortogonalidade

Nos dois primeiros capítulos estudámos as relações existentes entre invólucros ortogonais e reflectivos; em particular, foram dadas condições sob as quais uma subcategoria ortogonal é reflectiva. No presente capítulo estudamos a existência e a caracterização do invólucro multi-reflectivo de uma dada subcategoria. Nomeadamente, investigamos uma generalização dos resultados sobre ortogonalidade e reflectividade no contexto da multi-ortogonalidade e multi-reflectividade. Relacionamos multiortogonalidade com ortogonalidade via *complementos para produtos grandes livres* e obtemos condições suficientes para o invólucro multiortogonal de uma subcategoria ser o seu invólucro multi-reflectivo.

Para além disso, estendemos a noção de operador de fecho ortogonal a categorias com multi-somas amalgamadas - em vez de somas amalgamadas - e usamos este operador de fecho para exprimir a multiortogonalidade de fontes em termos de densidade e invólucros multi-reflectivos em termos de fechamento.

19 Multiortogonalidade

O principal propósito desta e das secções segintes é encontrar condições sob as quais o invólucro multiortogonal seja um invólucro multi-reflectivo.

Começamos por recordar o conceito de multiortogonalidade.

Seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{X} . Quando passamos da noção de reflectividade para a de ortogonalidade, alargamos a classe de todas as reflexões de objectos de \mathcal{X} em \mathcal{A} , ou seja, a classe de todos os morfismos $X \xrightarrow{f} A$ com codomínio em \mathcal{A} tal que

- (o) cada morfismo $X \xrightarrow{g} A'$ com codomínio em \mathcal{A} é factorizado através de f de modo único,

considerando a classe de todos os morfismos $X \xrightarrow{f} Y$, com codomínio não necessariamente em \mathcal{A} , que preenchem a condição (o).

A noção de multiortogonalidade é obtida de forma análoga a partir da de multi-reflectividade. Este conceito tem sido estudado por vários autores (veja-se, por exemplo, [10] na situação dual, [6] e suas referências).

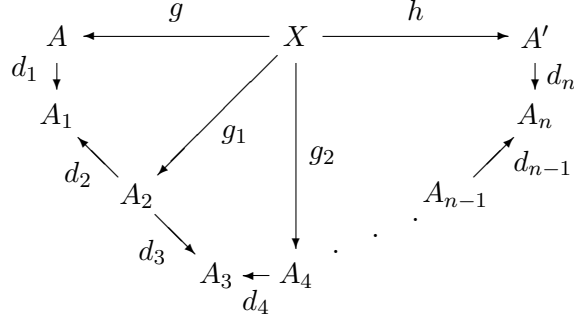
Definições 19.1 Seja $X \in \text{Obj}(\mathcal{X})$ e seja $S = (Y, (f_i : Y \rightarrow Z_i)_{i \in I})$ uma fonte em \mathcal{X} . Dizemos que X é *multiortogonal a S* , ou S é *multiortogonal a X* , e escrevemos $X \perp S$, sempre que, para cada morfismo $Y \xrightarrow{g} X$, existir um único par (i, \bar{g}) onde $i \in I$ e $\bar{g} : Z_i \rightarrow X$ é um morfismo tal que $\bar{g} \cdot f_i = g$.

Se \mathcal{A} é uma subcategoria de \mathcal{X} , denotamos por \mathcal{A}^\perp o aglomerado de todas as fontes S tal que, para cada $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$, $A \perp S$.

Se \mathcal{S} é um aglomerado de fontes, denotamos por \mathcal{S}_\perp a subcategoria de todos os X em \mathcal{X} tais que, para cada $S \in \mathcal{S}$, $X \perp S$.

Uma subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} diz-se *multiortogonal* se coincidir com \mathcal{S}_\perp para algum aglomerado \mathcal{S} de fontes.

Observação 19.2 Para cada fonte $S = (X \xrightarrow{f_i} Y_i)_I$ em \mathcal{A}^\perp , temos que, se $g : X \rightarrow A$ e $h : X \rightarrow A'$ pertencem à mesma componente conexa de $X \downarrow \mathcal{A}$, então g e h são factorizáveis através do mesmo f_i . Com efeito, sejam g e h pertencentes à mesma componente conexa; isto significa que existe um diagrama comutativo do tipo



com A_1, A_2, \dots, A_n em \mathcal{A} . Sejam g e g_1 factorizáveis através de f_i e $f_{i'}$, respectivamente. Então, o morfismo $d_1 \cdot g = d_2 \cdot g_1$ é factorizável por f_i e $f_{i'}$ simultaneamente; portanto, $i = i'$. Usando o mesmo argumento para g_1 e g_2 , e assim por diante, concluímos que h é também factorizado através de f_i .

Como consequência, se para cada X em \mathcal{X} a categoria $X \downarrow \mathcal{A}$ é conexa então $\mathcal{A}^\perp = \mathcal{A}^\perp$.

As proposições seguintes mostram que a interdependência entre as noções de multi-reflectividade, multicompletude, multiortogonalidade e limites conexos é paralela à existente entre as noções de reflectividade, cocompletude, ortogonalidade e completude.

Proposição 19.3

1. Se \mathcal{A} e \mathcal{B} são subcategorias de \mathcal{X} e \mathcal{S} e \mathcal{T} são aglomerados de fontes de \mathcal{X} , então:

- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \implies \mathcal{A}^\perp \supseteq \mathcal{B}^\perp$
- $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \implies \mathcal{S}_\perp \supseteq \mathcal{T}_\perp$
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}_\perp \iff \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}^\perp$

2. Para toda a subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} , cada uma das asserções (a)-(c) a seguir implica a próxima:

- (a) \mathcal{A} é multi-reflectiva;
- (b) \mathcal{A} é multiortogonal;
- (c) \mathcal{A} é fechada para limites conexos.

3. Para toda a família $(\mathcal{S}_i)_I$ de aglomerados de fontes, temos que

$$\bigcap_{i \in I} (\mathcal{S}_i)_\perp = (\bigcup_{i \in I} \mathcal{S}_i)_\perp.$$

Demonstração. As demonstrações de 1. e 3. e da implicação $(a) \Rightarrow (b)$ de 2. fazem-se sem dificuldade. A implicação $(b) \Rightarrow (c)$ de 2. é provada em [6] para o caso da multiortogonalidade relativamente a fontes pequenas. A demonstração facilmente se adapta para o caso em que as fontes são indexadas por classes. \square

De 19.3.1, tira-se que a subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} é multiortogonal se e só se $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^\perp)_\perp$ e que a subcategoria $(\mathcal{A}^\perp)_\perp$ é a menor subcategoria multiortogonal de \mathcal{X} contendo \mathcal{A} . Assim, faremos uso da seguinte

Definição 19.4 Dada uma subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} , o *invólucro multiortogonal de \mathcal{A}* em \mathcal{X} é a subcategoria $(\mathcal{A}^\perp)_\perp$ que será denotada por $\underline{\underline{\mathcal{O}}}(\mathcal{A})$.

Definições 19.5 Um aglomerado \mathcal{S} de fontes em \mathcal{X} diz-se

- *cancelável à esquerda* sempre que para quaisquer fontes $S = (X \xrightarrow{f_i} Y_i)_I$ e $S_i = (Y_i \xrightarrow{g_{ij}} Z_{ij})_{j \in J_i}$, $i \in I$, tais que S_i pertence a \mathcal{S} for all $i \in I$ e a composição $(S_i)_I \cdot S = (X \xrightarrow{g_{ij} \cdot f_i} Z_{ij})_{i \in I, j \in J_i}$ também pertence a \mathcal{S} , então S pertence a \mathcal{S} .
- *cancelável à direita* sempre que para quaisquer fontes $S = (X \xrightarrow{f_i} Y_i)_I$ e $S_i = (Y_i \xrightarrow{g_{ij}} Z_{ij})_{j \in J_i}$, $i \in I$, tais que a fonte S e a composição $(S_i)_I \cdot S = (X \xrightarrow{g_{ij} \cdot f_i} Z_{ij})_{i \in I, j \in J_i}$ pertencem a \mathcal{S} , então S_i também pertence a \mathcal{S} para todo o $i \in I$.

Proposição 19.6 *Seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{X} .*

1. *Se $(f_i)_I$ pertence a \mathcal{A}^\perp , então cada f_i é \mathcal{A} -cancelável.*
2. $\mathcal{A}^\perp \subseteq \mathcal{A}^{\perp\perp}$ e $\underline{\underline{\mathcal{O}}}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{A})$.
3. $\mathcal{A}^{\perp\perp}$ é fechada para a composição, ou seja, se as fontes $S = (X \xrightarrow{f_i} Y_i)_I$ e $S_i = (Y_i \xrightarrow{g_{ij}} Z_{ij})_{j \in J_i}$, $i \in I$, pertencem a \mathcal{A}^\perp , então a composição $(S_i)_I \cdot S = (X \xrightarrow{g_{ij} \cdot f_i} Z_{ij})_{i \in I, j \in J_i}$ também pertence a \mathcal{A}^\perp .
4. $\mathcal{A}^{\perp\perp}$ é cancelável à esquerda e à direita.

Demonstração.

1. e 2. são óbvias.

3. Sejam $(X \xrightarrow{f_i} Y_i)_I$ e $(Y_i \xrightarrow{g_{ij}} Z_{ij})_{J_i}$, $i \in I$, fontes em \mathcal{A}^\perp e seja $h : X \rightarrow A$ um morfismo com codomínio em \mathcal{A} . Então, existe um único par (i, \bar{h}) tal que $\bar{h} \cdot f_i = h$; e assim existe um único par $(j, \bar{\bar{h}})$ tal que $j \in J_i$ e $\bar{\bar{h}} \cdot g_{ij} = \bar{h}$. É claro que, então, $((i, j), \bar{\bar{h}})$ é o único par com $(i, j) \in \coprod_{i \in I} J_i$, onde

$$\coprod_{i \in I} J_i = \cup_{i \in I} \{(i, j) \mid j \in J_i\},$$

e tal que $\bar{\bar{h}} \cdot (g_{ij} \cdot f_i) = h$.

4. Para mostrar que \mathcal{A}^\perp é cancelável à esquerda, sejam $S = (f_i : X \rightarrow Y_i)_{i \in I}$ e $S_i = (g_{ij} : Y_i \rightarrow Z_{ij})_{j \in J_i}$, $i \in I$, fontes tais que S_i pertence a \mathcal{A}^\perp para todo o $i \in I$ e a composição $(S_i)_I \cdot S$ também pertence a \mathcal{A}^\perp . Seja $h : X \rightarrow A$ um morfismo com codomínio em \mathcal{A} . Então existe um único par $((i, j), h')$ tal que $(i, j) \in \coprod_{i \in I} J_i$ e $h' \cdot g_{ij} \cdot f_i = h$. Logo, o par $(i, h' \cdot g_{ij})$ é tal que $i \in I$ e

$$(h' \cdot g_{ij}) \cdot f_i = h. \quad (\text{VI.1})$$

Para mostrar que este par é único, seja (i', h'') um par com $i' \in I$ e $h'' \cdot f_{i'} = h$. Então, como $S_{i'} \in \mathcal{A}^\perp$, existem $j' \in J_{i'}$ e $g : Z_{i'j'} \rightarrow A$ tais que $g \cdot g_{i'j'} = h'$. Consequentemente, $g \cdot (g_{i'j'} \cdot f_{i'}) = h$ e, como $(S_i)_I \cdot S \in \mathcal{A}^\perp$, segue-se que $i = i'$ e $j = j'$. Quanto à unicidade de $h' \cdot g_{ij}$ na igualdade (VI.1), seja u um morfismo tal que $u \cdot f_i = h$. Então, como $S_i \in \mathcal{A}^\perp$, existe um único par $((i, j'), u')$ tal que $u = u' \cdot g_{ij'}$ e, portanto,

$$u' \cdot (g_{ij'} \cdot f_i) = u \cdot f_i = h = h' \cdot (g_{ij} \cdot f_i);$$

então, $j' = j$ e $u' = h'$, pelo que $u = u' \cdot g_{ij}^j = h' \cdot g_{ij}$.

Mostremos que \mathcal{A}^\perp também é cancelável à direita. Sejam $S = (f_i : X \rightarrow Y_i)_{i \in I}$ e $S_i = (g_{ij} : Y_i \rightarrow Z_{ij})_{j \in J_i}$, $i \in I$, fontes tais que S e a composição $(S_i)_I \cdot S$ pertence a \mathcal{A}^\perp . Fixemos $i \in I$ e seja $h : Y_i \rightarrow A$ um morfismo com codomínio em \mathcal{A} . Então, existe um único par $((i', j), h')$ tal que $h' \cdot (g_{i'j} \cdot f_{i'}) = h \cdot f_i$. Mas, como $(f_i)_I \in \mathcal{S}$, esta igualdade garante que $i = i'$ e $h' \cdot g_{ij} = h$. Agora, se $j' \in J_i$ é tal que, para algum morfismo h'' , se tem que $h' \cdot g_{ij} = h = h'' \cdot g_{ij'}$, então $h' \cdot (g_{ij} \cdot f_i) = h'' \cdot (g_{ij'} \cdot f_i)$ e, como $(S_i)_I \cdot S \in \mathcal{A}^\perp$, $j = j'$ e $h = h''$. Por conseguinte, (j, h') é o único par com $j \in J_i$ e h' preenchendo a igualdade $h' \cdot g_{ij} = h$. \square

Definimos a seguir o completamento livre para produtos grandes de uma dada categoria, o que nos permite estabelecer relações interessantes entre as noções de multiortogonalidade e ortogonalidade.

Definições 19.7

1. Dada uma categoria \mathcal{X} , o *completamento livre para produtos grandes de \mathcal{X}* , denotado por $\Pi^l(\mathcal{X})$, é a quase-categoria definida do seguinte modo:

- os objectos são famílias (possivelmente grandes) $(X_i)_I$ de objectos de \mathcal{X} ;
- os morfismos são da forma

$$(X_i)_I \xrightarrow{(\alpha, (f_j)_J)} (Y_j)_J$$

onde $\alpha : J \rightarrow I$ é uma função e, para cada j , $f_j : X_{\alpha(j)} \rightarrow Y_j$ é um morfismo de \mathcal{X} ;

- a composição e os morfismos identidade são óbvios.

É claro que \mathcal{X} é uma subcategoria de $\Pi^l(\mathcal{X})$, identificando os objectos de \mathcal{X} com as famílias indexadas por conjuntos singulares.

2. Se $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$ é um functor entre as categorias \mathcal{A} e \mathcal{X} , definimos o functor $\Pi^l(U) : \Pi^l(\mathcal{A}) \rightarrow \Pi^l(\mathcal{X})$ pondo

$$\begin{aligned} \Pi^l(U)((A_i)_I) &= (UA_i)_I \\ \Pi^l(U)(\alpha, (f_j)_J) &= (\alpha, (Uf_j)_J). \end{aligned}$$

Observação 19.8 Denotemos por $\Pi^s(\mathcal{X})$ a subcategoria da quase-categoria $\Pi^l(\mathcal{X})$ constituída por todas as famílias $(X_i)_I$ tais que I é um conjunto; analogamente, dado um functor $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$, definimos o functor $\Pi^s(U) : \Pi^s(\mathcal{A}) \rightarrow \Pi^s(\mathcal{X})$. Conforme observado por Y. Diers [17], $\Pi^s(\mathcal{X})$ é o completamento livre para produtos de \mathcal{X} , nomeadamente:

- (i) $\Pi^s(\mathcal{X})$ tem produtos.
- (ii) Para cada functor $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, onde \mathcal{Y} é uma categoria com produtos, existe um functor $F^* : \Pi^s(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{Y}$ que preserva produtos e estende F (i.e., $FX = F^*X$ e $Ff = F^*f$), único a menos de isomorfismo.

Passa-se com $\Pi^l(\mathcal{X})$ uma situação análoga, apenas com a diferença de que os produtos são substituídos por produtos grandes (e \mathcal{Y} é agora uma quase-categoria arbitrária com produtos grandes).

Além disso, Y. Diers ([17]) provou que

- A.** \mathcal{X} tem limites conexos se e só se $\Pi^s(\mathcal{X})$ é completa;
- B.** \mathcal{X} é multicocompleta se e só se $\Pi^s(\mathcal{X})$ é cocompleta;
- C.** $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$ é um multiadjunto direito se e só se $\Pi^s(U) : \Pi^s(\mathcal{A}) \rightarrow \Pi^s(\mathcal{X})$ é um adjunto direito (veja-se também [74]).

Os dois lemas seguintes são úteis para o que se segue. Fazemos notar que eles estendem as asserções **B.** e **C.** em 19.8 ao caso em que as multi-reflexões e os multicolimites podem ser indexados por classes próprias.

Lema 19.9

1. Se \mathcal{A} é a subcategoria de \mathcal{X} , então um objecto $(X_i)_I$ de $\Pi^l(\mathcal{X})$ tem uma reflexão em $\Pi^l(\mathcal{A})$ se e só se, para cada $i \in I$, X_i tem uma multi-reflexão em \mathcal{A} .
2. $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$ é um multiadjunto direito se e só se $\Pi^l(U) : \Pi^l(\mathcal{A}) \rightarrow \Pi^l(\mathcal{X})$ é um adjunto direito.

Demonstração.

1. Seja

$$(X_i)_I \xrightarrow{(\alpha, (a_j)_J)} (A_j)_J$$

uma reflexão de $(X_i)_I$ em $\Pi^l(\mathcal{A})$. Vamos mostrar que para cada $i_o \in I$ a fonte

$$(X_{i_o} \xrightarrow{a_j} A_j)_{\alpha(j)=i_o}$$

é uma multi-reflexão de X_{i_o} em \mathcal{A} . Na verdade, se $X_{i_o} \xrightarrow{g} A$ é um morfismo com codomínio em \mathcal{A} , então $(X_i)_I \xrightarrow{(\beta, g)} A$, com $\beta(\bullet) = i_o$, é um morfismo de $\Pi^l(\mathcal{X})$ com codomínio em $\Pi^l(\mathcal{A})$; então, existe um único morfismo $(\bar{\beta}, \bar{g}) : (A_j)_J \rightarrow A$ em $\Pi^l(\mathcal{A})$ tal que $(\bar{\beta}, \bar{g}) \cdot (\alpha, (a_j)_J) = (\beta, g)$, ou seja, $\alpha \cdot \bar{\beta} = \beta$ e $\bar{g} \cdot a_{\alpha(\bar{\beta}(\bullet))} = g$.

Por conseguinte, tomando $j = \bar{\beta}(\bullet)$, o par (j, \bar{g}) é o único para o qual $\alpha(j) = i$ e $\bar{g} \cdot a_j = g$.

Reciprocamente, para cada $i \in I$ seja

$$(X_i \xrightarrow{r_j^i} A_j^i)_{j \in J_i}$$

uma multi-reflexão de X_i em \mathcal{A} . Seja

$$K = \dot{\cup}_{i \in I} J_i = \cup_{i \in I} \{(j, i) \mid j \in J_i\}$$

e definamos $\alpha : K \rightarrow I$ por $\alpha(j, i) = i$. É fácil concluir que

$$(X_i)_I \xrightarrow{(\alpha, (r_j^i)_{(j,i) \in K})} (A_j^i)_{(j,i) \in K}$$

é uma reflexão de $(X_i)_I$ em $\Pi^l(\mathcal{A})$.

2. É uma consequência de 1. □

Lema 19.10

1. *Seja \mathcal{D} uma quase-categoria cujos objectos formam um conjunto. Para cada categoria \mathcal{X} , todo o diagrama $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{X}$ tem um multicolimite se e só se todo o diagrama $D : \mathcal{D} \rightarrow \Pi^l(\mathcal{X})$ tem um colimite.*
2. *\mathcal{X} é multicocompleta se e só se $\Pi^l(\mathcal{X})$ tem colimites de todos os diagramas $D : \mathcal{D} \rightarrow \Pi^l(\mathcal{X})$ tais que \mathcal{D} é uma quase-categoria cujos objectos formam um conjunto.*

Demonstração.

1. Seja \mathcal{D} uma quase-categoria tal que $Obj(\mathcal{D})$ é um conjunto. Seja $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{X}$ um diagrama em \mathcal{X} , e seja $(Dd \xrightarrow{(l_d^i)_I} (X_i)_I)_{d \in Obj(\mathcal{D})}$ um colimite de $\mathcal{D} \xrightarrow{D} \mathcal{X} \hookrightarrow \Pi^l(\mathcal{X})$ em $\Pi^l(\mathcal{X})$. É então imediato que $((Dd \xrightarrow{l_d^i} X_i)_{d \in Obj(\mathcal{D})})_{i \in I}$ é um multicolimite de D em \mathcal{X} .

Reciprocamente, seja $D : \mathcal{D} \rightarrow \Pi^l(\mathcal{X})$ um diagrama em $\Pi^l(\mathcal{X})$ tal que, para cada objecto d de \mathcal{D} ,

$$Dd = (X_{i_d})_{I_d}$$

e para cada morfismo $t : d \rightarrow d'$,

$$D(d \xrightarrow{t} d') = (X_{i_d})_{I_d} \xrightarrow{(\alpha^t, (f_i^t)_{I_{d'}})} (X_{i_{d'}})_{I_{d'}} .$$

Seja I a subclasse da classe $J = \prod_{d \in \text{Obj}(\mathcal{D})} I_d$ constituída por todos os $(i_d)_{d \in \text{Obj}(\mathcal{D})} \in J$ tais que para cada \mathcal{D} -morfismo $d \xrightarrow{t} d'$ a função $I_{d'} \xrightarrow{\alpha^t} I_d$ satisfaz $\alpha^t(i_{d'}) = i_d$. Assim, para cada $i = (i_d)_{d \in \text{Obj}(\mathcal{D})} \in I$ obtemos um functor $D_i : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{X}$ definido por $D_i d = X_{i_d}$ e $D_i(d \xrightarrow{t} d') = (X_{i_d} \xrightarrow{f_{i_{d'}}^t} X_{i_{d'}})$. Por hipótese, para cada $i \in I$, o functor $D_i : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{X}$ tem um multicolimite em \mathcal{X} , seja ele $((D_i d \xrightarrow{l_{ik}} L_{ik})_{d \in \text{Obj}(\mathcal{D})})_{k \in K_i}$. Seja $K = \dot{\cup}_{i \in I} K_i = \cup_{i \in I} \{(k, i) \mid k \in K_i\}$ e seja $\alpha : K \rightarrow I_d$ definido por $\alpha(k, i) = \alpha(k, (i_d)_{d \in \text{Obj}(\mathcal{D})}) = i_d$. Então, conclui-se facilmente que

$$((X_{i_d})_{I_d} \xrightarrow{(\alpha, (l_{ik})_{(k,i) \in K})} (L_{ik})_{(k,i) \in K})_{d \in \text{Obj}(\mathcal{D})}$$

é um colimite do functor $D : \mathcal{D} \rightarrow \Pi^l(\mathcal{X})$.

2. Decorre de 1., visto que o facto de \mathcal{X} ter multicolimites de funtores cujo domínio é uma categoria pequena implica que \mathcal{X} tem multicolimites de funtores cujo domínio é uma quase-categoria com apenas um conjunto de objectos. De facto, isto é uma consequência da asserção seguinte cuja verificação não oferece dificuldade:

Seja $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{X}$ um functor tal que \mathcal{D} é uma quase-categoria cujos objectos constituem um conjunto. Seja $\tilde{\mathcal{D}}$ a categoria quociente obtida de \mathcal{D} do seguinte modo: $\text{Obj}(\tilde{\mathcal{D}}) = \text{Obj}(\mathcal{D})$, e, para cada par de objectos $d, d' \in \text{Obj}(\mathcal{D})$, definimos uma relação de equivalência \sim na classe $\mathcal{D}(d, d')$ pondo $f \sim f'$ se e só se $Df = Df'$ e definimos $\tilde{\mathcal{D}}(d, d')$ como sendo o conjunto de todas as classes de equivalência de \sim em $\mathcal{D}(d, d')$.

Seja $\tilde{D} : \tilde{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{X}$ o functor quociente correspondente.

Então, se $\tilde{D} : \tilde{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{X}$ tem um multicolimite em \mathcal{X} , o mesmo acontece a $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{X}$ e, ademais, os dois multicolimites coincidem. \square

Observação 19.11 Se é verdade que, quando passamos da categoria $\Pi^s(\mathcal{X})$ para a quase-categoria $\Pi^l(\mathcal{X})$, obtemos ainda relações interessantes entre os colimites desta e os multicolimites da categoria \mathcal{X} , o mesmo não acontece relativamente aos limites em

$\Pi^l(\mathcal{X})$ versus limites conexos de \mathcal{X} . Com efeito, o facto de \mathcal{X} ter limites conexos não implica a existência de igualizadores em $\Pi^l(\mathcal{X})$ como mostra o exemplo seguinte:

Seja $\mathcal{X} = \mathcal{S}et$ e consideremos o seguinte diagrama em $\Pi^l(\mathcal{X})$

$$\begin{array}{ccc} & & (\alpha, (f_i)_I) \\ & \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} & \\ (A_i)_I & & (B_i)_I \\ & \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} & \\ & & (\beta, (g_i)_I) \end{array}$$

onde I é a classe de todos os ordinais, a função $\alpha : I \rightarrow I$ leva cada ordinal para zero, $\beta = id_I$ e, para cada $i \in I$, $A_i = \{0, 1\}$ e $B_i = \{0\}$; $f_i : A_0 \rightarrow B_i$ e $g_i : A_i \rightarrow B_i$ são obviamente funções constantes. Vamos mostrar que este par de morfismos não tem igualizador em $\Pi^l(\mathcal{S}et)$. Assumamos que, pelo contrário, $(c_k)_K \xrightarrow{(\gamma, (h_i)_I)} (A_i)_I$ é um igualizador do par. Então, em particular, $\gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \beta$ e, conseqüentemente, para cada $i \in I$, $\gamma(i) = \gamma(\beta(i)) = \gamma(\alpha(i)) = \gamma(0)$; então, γ é uma aplicação constante. Além disso, o $\Pi^l(\mathcal{S}et)$ -morfismo $C_{\gamma(0)} \xrightarrow{(h_i)_I} (A_i)_I$ igualiza o par $((\alpha, (f_i)_I), (\beta, (g_i)_I))$. Mas, então, por um lado, $C_{\gamma(0)} \xrightarrow{(h_i)_I} (A_i)_I$ igualiza o par $((\alpha, (f_i)_I), (\beta, (g_i)_I))$ e, por outro lado, o triângulo

$$\begin{array}{ccc} & & (\gamma, (h_i)_I) \\ & \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} & (A_i)_I \\ (\delta, id_{C_{\gamma(0)}}) \uparrow & & \swarrow (h_i)_I \\ C_{\gamma(0)} & & \end{array}$$

onde a aplicação $\delta : \{\bullet\} \rightarrow K$ é definida por $\delta(\bullet) = \gamma(0)$, é comutativo. Conseqüentemente, K tem de ser singular e

$$\begin{array}{ccccc} & & & & (\alpha, (f_i)_I) \\ & & & & \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \\ C_{\gamma(0)} & \xrightarrow{(h_i)_I} & (A_i)_I & & (B_i)_I \\ & & & & \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \\ & & & & (\beta, (g_i)_I) \end{array}$$

é o diagrama de um igualizador. Mostremos agora que, então, para cada ordinal α , existe uma aplicação injectiva do produto $\{0, 1\}^\alpha$ em $C_{\gamma(0)}$, o que é absurdo. Seja α um ordinal. Sejam $\pi_i : \{0, 1\}^\alpha \rightarrow \{0, 1\}$, $i \in \alpha$, as projecções correspondentes e definamos $\{0, 1\}^\alpha \xrightarrow{r_i} A_i$ pondo $r_i = \pi_i$ se $i \in \alpha$, $r_i = \pi_0$, caso contrário. Então $\{0, 1\}^\alpha \xrightarrow{(r_i)_I} (A_i)_I$ é um morfismo em $\Pi^l(\mathcal{S}et)$ que igualiza o par $((\alpha, (f_i)_I), (\beta, (g_i)_I))$. Então, existe um

único morfismo $t : \{0, 1\}^\alpha \rightarrow C_{\gamma(0)}$ tal que $h_i \cdot t = r_i$, para todo o ordinal i . De facto, t é injectiva:

$$\begin{aligned} t \cdot a = t \cdot b &\Rightarrow h_i \cdot t \cdot a = h_i \cdot t \cdot b \text{ para todo o } i \\ &\Rightarrow r_i \cdot a = r_i \cdot b \text{ para todo o } i \\ &\Rightarrow \pi_i \cdot a = \pi_i \cdot b \text{ para todo o } i \in \alpha \\ &\Rightarrow a = b. \end{aligned}$$

Com a finalidade de relacionarmos multiortogonalidade com ortogonalidade via completamentos livres para produtos grandes, vamos usar a definição seguinte.

Notação 19.12 Dado um aglomerado \mathcal{S} de fontes em \mathcal{X} , denotamos por $\Pi^l(\mathcal{S})$ o aglomerado de todos os morfismos $(X_i)_I \xrightarrow{(\alpha, (f_j)_J)} (Y_j)_J$ de $\Pi^l(\mathcal{X})$ tais que para cada $i \in I$ a fonte $(X_i \xrightarrow{f_i} Y_j)_{\alpha(j)=i}$ pertence a \mathcal{S}

Daqui para a frente, quando usarmos os operadores \perp e \perp , consideraremos sempre \perp em \mathcal{X} e \perp em $\Pi^l(\mathcal{X})$.

Proposição 19.13 *Para uma subcategoria \mathcal{A} da categoria \mathcal{X} e um aglomerado \mathcal{S} de fontes em \mathcal{X} que contenha todos os isomorfismos, verificam-se as seguintes propriedades:*

1. $\Pi^l(\mathcal{A}^\perp) = (\Pi^l(\mathcal{A}))^\perp$;
2. $(\Pi^l(\mathcal{S}))_\perp = \Pi^l(\mathcal{S}_\perp)$;
3. $\Pi^l(\underline{\underline{\mathcal{O}}}(\mathcal{A})) = \mathcal{O}(\Pi^l(\mathcal{A}))$.

Demonstração.

1. Esta igualdade decorre das seguintes equivalências cuja veracidade é simples de concluir:

uma fonte $(X_i)_I \xrightarrow{(\alpha, (f_j)_J)} (Y_j)_J$ pertence a $\Pi^l(\mathcal{A}^\perp)$

se e só se, para cada $i \in I$, $(X_i \xrightarrow{f_j} Y_j)_{\alpha(j)=i}$ pertence a \mathcal{A}^\perp

se e só se, para cada $i \in I$, $X_i \xrightarrow{(f_j)_{\alpha(j)=i}} (Y_j)_{\alpha(j)=i}$ pertence a $(\Pi^l(\mathcal{A}))^\perp$

se e só se $(X_i)_I \xrightarrow{(\alpha, (f_j)_J)} (Y_j)_J$ pertence a $(\Pi^l(\mathcal{A}))^\perp$.

2. Seja $(B_k)_K \in (\Pi^l(\mathcal{S}))_\perp$; com o intuito de provar que $(B_k)_K \in \Pi^l(\mathcal{S}_\perp)$, mostremos que, para cada $k \in K$, $B_k \in \mathcal{S}_\perp$. Seja $(X \xrightarrow{f_j} Y_i)_I \in \mathcal{S}$. Fixemos $k_o \in K$ e seja $h : X \rightarrow B_{k_o}$ um morfismo de \mathcal{X} . Podemos definir um morfismo em $\Pi^l(\mathcal{X})$,

$$(Z_k)_K \xrightarrow{(\alpha, (g_j)_J)} (W_j)_J$$

do modo seguinte:

$$Z_k = \begin{cases} X & \text{se } k = k_o \\ B_k & \text{se } k \neq k_o \end{cases}$$

$$J = I \dot{\cup} (K \setminus \{k_o\})$$

$$W_j = \begin{cases} Y_j & \text{se } j \in I \\ B_j & \text{se } j \in K \setminus \{k_o\} \end{cases}$$

$$\alpha(j) = \begin{cases} k_o & \text{se } j \in I \\ j & \text{se } j \in K \setminus \{k_o\} \end{cases}$$

os \mathcal{X} -morfismos $g_j : Z_{\alpha(j)} \rightarrow W_j$ são definidos por

$$g_j = \begin{cases} f_j & \text{se } j \in I \\ 1_{B_j} & \text{se } j \in K \setminus \{k_o\} \end{cases}.$$

Como $\text{Iso}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{S}$, é evidente que o morfismo $(Z_k)_K \xrightarrow{(\alpha, (g_j)_J)} (W_j)_J$ pertence a $\Pi^l(\mathcal{S})$.

Por outro lado, podemos definir um morfismo em $\Pi^l(\mathcal{X})$,

$$(Z_k)_K \xrightarrow{(\beta, (h_k)_K)} (B_k)_K$$

pondo

$$\beta = 1_K$$

$$h_k = \begin{cases} h & \text{se } k = k_o \\ 1_{B_k} & \text{se } k \neq k_o \end{cases}.$$

Então, existe um único morfismo em $\Pi^l(\mathcal{X})$,

$$(\bar{\beta}, (\bar{h}_k)_K) : (W_j)_J \rightarrow (B_k)_K,$$

tal que

$$(\bar{\beta}, (\bar{h}_k)_K) \cdot (\alpha, (g_j)_J) = (\beta, (h_k)_K).$$

É agora fácil concluir que o par

$$(\bar{\beta}(k_o), \bar{h}_{k_o})$$

é o único tal que $\bar{\beta}(k_o) \in I$ e o morfismo $\bar{h}_{k_o} : Y_{\beta(k_o)} \rightarrow B_{k_o}$ satisfaz a igualdade $\bar{h}_{k_o} \cdot f_{\beta(k_o)} = h$.

Reciprocamente, seja $(B_k)_K \in \Pi^l(\mathcal{S}_\perp)$ e seja $(X_i)_I \xrightarrow{(\alpha, (f_j)_J)} (Y_j)_J$ pertencente a $\Pi^l(\mathcal{S})$. Para mostrar que $(\alpha, (f_j)_J) \perp (B_k)_K$, seja

$(X_i)_I \xrightarrow{(\beta, (g_k)_K)} (B_k)_K$ um morfismo em $\Pi^l(\mathcal{X})$. Para cada $k \in K$, consideremos $i = \beta(k)$; a fonte $(X_i \xrightarrow{f_i} Y_j)_{\alpha(j)=i}$ pertence a \mathcal{S} ; logo, existe um e um só par (j_k, \bar{g}_k) com $\alpha(j_k) = i$ e $\bar{g}_k : Y_j \rightarrow B_k$ tal que $\bar{g}_k \cdot f_{j_k} = g_k$. É simples verificar que o $\Pi^l(\mathcal{X})$ -morfismo

$$(\gamma, (\bar{g}_k)_K),$$

com $\gamma : K \rightarrow J$ definido por $\gamma(k) = j_k$, é o único tal que

$$(\gamma, (\bar{g}_k)_K) \cdot (\alpha, (f_j)_J) = (\beta, (g_k)_K).$$

3. Decorre de 1. e 2. De facto, temos que

$$\begin{aligned}\Pi^l(\underline{\underline{\mathcal{O}(\mathcal{A})}}) &= \Pi^l((\mathcal{A}^\perp)_\perp) = (\Pi^l(\mathcal{A}^\perp))_\perp = ((\Pi^l(\mathcal{A}))^\perp)_\perp \\ &= \mathcal{O}(\Pi^l(\mathcal{A})).\end{aligned}$$

□

20 Invólucros multiortogonais e multi-reflectivos

Nesta secção, investigamos condições sob as quais o invólucro multiortogonal é multi-reflectivo. Em particular, vamos mostrar que o Teorema 2.10 para reflectividade tem um paralelo para multi-reflectividade.

Seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{X} .

Para cada $X \in \text{Obj}(\mathcal{X})$, consideramos a quase-categoria X/\mathcal{A}^\perp definida como se segue:

- os objectos são todas as fontes em \mathcal{A}^\perp com domínio X ;
- os morfismos são os morfismos $(\alpha, (a_j)_J) : (Y_i)_I \rightarrow (Z_j)_J$ em $\Pi^l(\mathcal{X})$ com $a_j \cdot f_{\alpha(j)} = g_j$ para cada $j \in J$;
- as identidades e a composição de morfismos são como é de esperar.

Evidentemente, quando a categoria $X \downarrow \mathcal{A}$ é conexa, a quase-categoria X/\mathcal{A}^\perp coincide com a categoria X/\mathcal{A}^\perp definida na segunda secção do Capítulo I, imediatamente antes de 2.6.

O lema seguinte é óbvio.

Lema 20.1 *Seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{X} e seja $(X, (r_j : X \rightarrow A_j)_{j \in J})$ uma fonte em \mathcal{X} . Então:*

1. $(r_j)_J$ é uma multi-reflexão de X em \mathcal{A} se e só se pertencer a \mathcal{A}^\perp e $A_j \in \text{Obj}(\mathcal{A})$, $j \in J$.
2. Toda a multi-reflexão de X em \mathcal{A} é um objecto terminal de X/\mathcal{A}^\perp . □

O teorema seguinte estabelece condições sob as quais o segundo item do lema anterior admite a recíproca.

Teorema 20.2 *Se \mathcal{X} é uma categoria com multicolimites conexos e \mathcal{A} é uma subcategoria de \mathcal{X} , então o invólucro multiortogonal de \mathcal{A} em \mathcal{X} , $\underline{\underline{\mathcal{O}}}(\mathcal{A})$, é multi-reflectivo em \mathcal{X} se e só se para cada $X \in \text{Obj}(\mathcal{X})$ a quase-categoria X/\mathcal{A}^\perp tem um conjunto fracamente terminal.*

Demonstração. A necessidade é clara. Reciprocamente, assumamos que, para $X \in \text{Obj}(\mathcal{X})$, X/\mathcal{A}^\perp tem um conjunto fracamente terminal. Queremos provar que X tem uma multi-reflexão em $\underline{\underline{\mathcal{O}}}(\mathcal{A})$. Pelo Lema 19.9 e pela Proposição 19.13, basta mostrar que X tem uma reflexão em $\mathcal{O}(\Pi^l(\mathcal{A}))$. Mas, em 2.9 e 2.10, provámos o seguinte:

Se \mathcal{X} tem colimites conexos, \mathcal{A} é uma subcategoria de \mathcal{X} e X é um \mathcal{X} -objecto tal que X/\mathcal{A}^\perp tem um conjunto fracamente terminal, então X/\mathcal{A}^\perp tem um objecto terminal e, mais, ele é uma reflexão de X para $\mathcal{O}(\mathcal{A})$.

Por 19.10.1, o facto de \mathcal{X} ter multicolimites conexos implica que a quase-categoria $\Pi^l(\mathcal{X})$ tem multi-somas amalgamadas e multi-igualizadores de famílias, eventualmente grandes, de morfismos. Consequentemente, como $X/(\Pi^l(\mathcal{A}))^\perp$ tem um conjunto fracamente terminal, verifica-se facilmente, usando uma técnica semelhante à de 2.9, que $X/(\Pi^l(\mathcal{A}))^\perp$ tem um objecto terminal que é uma reflexão de X em $\mathcal{O}(\Pi^l(\mathcal{A}))$. Por conseguinte, X tem uma multi-reflexão em $\underline{\underline{\mathcal{O}}}(\mathcal{A})$. \square

Consideremos as categorias \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{X} do Exemplo 2.11. Para cada objecto X de \mathcal{X} , a categoria $X \downarrow \mathcal{A}$ é conexa, o que implica que os invólucros multiortogonais de \mathcal{A} em \mathcal{B} e em \mathcal{X} coincidam com o invólucro ortogonal de \mathcal{A} em \mathcal{B} e o invólucro ortogonal em \mathcal{X} , respectivamente. Fazemos notar que, em particular, este exemplo também nos permite concluir que é possível ter subcategorias \mathcal{A} e \mathcal{B} de \mathcal{X} tais que \mathcal{A} está contida em \mathcal{B} mas o invólucro multiortogonal de \mathcal{A} em \mathcal{X} é diferente do invólucro multiortogonal de \mathcal{A} em \mathcal{B} , mesmo quando \mathcal{B} é multiortogonal em \mathcal{X} . Vamos mostrar que os dois invólucros multiortogonais coincidem quando \mathcal{B} é multi-reflectiva em \mathcal{X} .

Observação 20.3 Seja \mathcal{B} uma subcategoria multi-reflectiva de \mathcal{X} e, dada uma fonte

$S = (X \xrightarrow{f_i} Y_i)_I$ em \mathcal{X} , consideremos os seguintes diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f_i} & Y_i \\
 \downarrow r_{\varepsilon_S(i,k)} = r_j & & \downarrow r_{ik} \\
 B_{\varepsilon_S(i,k)} = B_j & \xrightarrow{g_{ik}} & B_{ik}
 \end{array} \tag{VI.2}$$

onde $(r_j : X \rightarrow B_j)_{j \in J}$ é a multi-reflexão de X em \mathcal{B} , $(r_{ik} : Y_i \rightarrow B_{ik})_{k \in K_i}$ é a multi-reflexão de Y_i em \mathcal{B} , $i \in I$, e, para cada (i, k) com $i \in I$ e $k \in K_i$, j é o único elemento de J tal que $r_{ik} \cdot f_i$ é factorizável através de r_j e $g_{ik} : B_j \rightarrow B_{ik}$ é o único morfismo tal que $g_{ik} \cdot r_j = r_{ik} \cdot f_i$. Ponhamos $j = \varepsilon_S(i, k)$.

Sabemos que $\Pi^l(\mathcal{B})$ é reflectiva em $\Pi^l(\mathcal{X})$ e, a partir dos diagramas anteriores, obtemos o diagrama seguinte

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{(f_i)_I} & (Y_i)_I \\
 \downarrow (r_j)_J & & \downarrow (r_{ik})_{k \in K, i \in I} \\
 (B_j)_J & \xrightarrow{(g_{ik})} & (B_{ik})_{k \in K, i \in I}
 \end{array} \tag{VI.3}$$

em $\Pi^l(\mathcal{X})$, onde $(r_j)_J$ é a reflexão de X em $\Pi^l(\mathcal{B})$, $(r_{ik})_{k \in K, i \in I}$ é a reflexão de $(Y_i)_I$ em $\Pi^l(\mathcal{B})$ e $(g_{ik})_{k \in K, i \in I}$ é a imagem de $(f_i)_I$ em $\Pi^l(\mathcal{B})$ através do reflector.

Consequentemente, de 2.12.1 e 19.13 segue-se que se \mathcal{B} é uma subcategoria multi-reflectiva de \mathcal{X} e \mathcal{A} é uma subcategoria de \mathcal{B} , então $\mathcal{A}^{\perp_{\mathcal{X}}}$ é a colecção de todas as fontes $S = (X \xrightarrow{f_i} Y_i)_I$ tais que no diagrama acima a fonte $(B_j \xrightarrow{g_{ik}} B_{ik})_{(i,k) \in \varepsilon_S^{-1}(\{j\})}$ pertence a $\mathcal{A}^{\perp_{\mathcal{B}}}$ para todo o $j \in J$.

Por outro lado, como para uma subcategoria reflectiva \mathcal{A} de uma categoria \mathcal{X} os morfismos de \mathcal{A}^{\perp} são exactamente aqueles cuja imagem pelo reflector é um isomorfismo, conclui-se que: Se \mathcal{B} é uma subcategoria multi-reflectiva de \mathcal{X} , a fonte $S = (f_i : X \rightarrow Y_i)_{i \in I}$ pertence a \mathcal{B}^{\perp} se e só se $\varepsilon_S : \coprod_{i \in I} K_i \rightarrow J$ é uma bijecção e todos os morfismos $B_j \xrightarrow{g_{ik}} B_{ik}$ são isomorfismos.

Usando novamente a relação entre multiortogonalidade e ortogonalidade via “operador” Π^l , obtemos a seguinte

Proposição 20.4 *Se \mathcal{B} é uma subcategoria multi-reflectiva de \mathcal{X} e \mathcal{A} é uma subcategoria de \mathcal{B} , então o invólucro multiortogonal de \mathcal{A} em \mathcal{B} coincide com o invólucro multiortogonal de \mathcal{A} em \mathcal{X} .*

Demonstração. Seja \mathcal{B} uma subcategoria multi-reflectiva de \mathcal{X} e seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{B} . Então $\Pi^l(\mathcal{B})$ é uma sub-quase-categoria reflectiva de $\Pi^l(\mathcal{X})$ e $\Pi^l(\mathcal{A})$ é uma sub-quase-categoria de $\Pi^l(\mathcal{B})$. Atendendo a 2.12.2, temos que

$$((\Pi^l(\mathcal{A}))^{\perp_{\Pi^l(\mathcal{X})}})^{\perp_{\Pi^l(\mathcal{X})}} = ((\Pi^l(\mathcal{A}))^{\perp_{\Pi^l(\mathcal{B})}})^{\perp_{\Pi^l(\mathcal{B})}},$$

o que, por 19.13, implica que

$$\Pi^l((\mathcal{A}^{\perp_{\mathcal{X}}})^{\perp_{\mathcal{X}}}) = \Pi^l((\mathcal{A}^{\perp_{\mathcal{B}}})^{\perp_{\mathcal{B}}});$$

logo,

$$\Pi^l((\mathcal{A}^{\perp_{\mathcal{X}}})^{\perp_{\mathcal{X}}}) \cap \mathcal{X} = \Pi^l((\mathcal{A}^{\perp_{\mathcal{B}}})^{\perp_{\mathcal{B}}}) \cap \mathcal{X},$$

ou seja,

$$(\mathcal{A}^{\perp_{\mathcal{X}}})^{\perp_{\mathcal{X}}} = (\mathcal{A}^{\perp_{\mathcal{B}}})^{\perp_{\mathcal{B}}}.$$

□

O lema seguinte mostra que, se \mathcal{X} é uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbf{M})$, o aglomerado \mathcal{A}^{\perp} tem propriedades interessantes quando considerado no \mathcal{E} -invólucro reflectivo $\mathbf{M}(\mathcal{A})$.

Lema 20.5 *Seja \mathcal{X} uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbf{M})$ com $\mathbf{M} \subseteq \text{MonoFonte}(\mathcal{X})$. Se \mathcal{A} é uma subcategoria de \mathcal{X} tal que $\mathbf{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$ e $(f_i : X \rightarrow Y_i)_{i \in I}$ pertence a \mathcal{A}^{\perp} , então*

1. $f_i \in \text{Epi}(\mathcal{X})$, $i \in I$;
2. $(f_i)_I$ pertence a \mathbf{M} .

Demonstração.

1. Para i fixado em I , sejam $g, h : Y_i \rightarrow Z$ morfismos tais que $g \cdot f_i = h \cdot f_i$. Como $Z \in \mathbf{M}(\mathcal{A})$, existe uma fonte $(m_j : Z \rightarrow A_j)_J$ pertencente a \mathbf{M} e com $A_j \in \text{Obj}(\mathcal{A})$, $j \in J$. Para cada $j \in J$, temos que a igualdade $m_j \cdot g \cdot f_i = m_j \cdot h \cdot f_i$ implica que $m_j \cdot g = m_j \cdot h$, visto f_i ser \mathcal{A} -cancelável. Consequentemente, como $\mathbf{M} \subseteq \text{MonoFonte}(\mathcal{X})$, $g = h$.
2. Seja $f_i = n_i \cdot e$, $i \in I$, uma factorização $(\mathcal{E}, \mathbf{M})$ de $(f_i)_I$ e seja $(m_k : X \rightarrow A_k)_K$ uma fonte em \mathbf{M} com $A_k \in \text{Obj}(\mathcal{A})$. Para cada k , existe um único par $(\alpha(k), s_k : Y_{\alpha(k)} \rightarrow A_k)$ tal que $\alpha(k) \in I$ e $m_k = s_k \cdot f_{\alpha(k)}$. Então, atendendo às igualdades $m_k \cdot id_X = (s_k \cdot n_{\alpha(k)}) \cdot e$, $k \in K$, e à propriedade da diagonal para $(\mathcal{E}, \mathbf{M})$, segue-se que e é um isomorfismo, pelo que $(f_i)_I$ pertence a \mathbf{M} . \square

Combinando agora este lema com 20.4 e 20.2, obtemos o seguinte

Teorema 20.6 *Seja \mathcal{X} uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbf{M})$ com $\mathbf{M} \subseteq \text{MonoFonte}(\mathcal{X})$ e suponhamos que \mathcal{X} tem multicolimites conexos. Se \mathcal{A} é uma subcategoria de \mathcal{X} tal que $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ é bem-copotenciada, então o invólucro multiortogonal de \mathcal{A} é multi-reflectivo e, portanto, é o invólucro multi-reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{X} .*

Demonstração. Sob estas hipóteses, $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ tem multicolimites conexos. Por outro lado, a boa-copotenciação de $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ garante, por 20.5.1., que X/\mathcal{A}^\perp tem um conjunto fracamente terminal. Por conseguinte, por 20.2, vem que $\underline{\mathcal{O}}(\mathcal{A})$ é multi-reflectiva. \square

Observação 20.7 É evidente que, sob as condições do teorema anterior, toda a \mathcal{A} -multi-reflexão é apenas um conjunto.

Na última secção do primeiro capítulo estudámos o conceito de classes firmes de morfismos. A seguir, estendemos o conceito de firmeza a aglomerados de fontes.

Definição 20.8 Um aglomerado \mathcal{S} de fontes diz-se *subfirme* sempre que existir uma subcategoria \mathcal{A} \mathcal{S} -multi-reflectiva tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}^\perp$. Se, além disso, $\mathcal{S} = \mathcal{A}^\perp$, \mathcal{S} diz-se *firme*.

Uma tal subcategoria \mathcal{A} diz-se *subfirmemente* (respectivamente, *firmemente*) \mathcal{S} -multi-reflectiva em \mathcal{X} .

Proposição 20.9 *Um aglomerado \mathcal{S} de fontes é subfirme se e só se \mathcal{S}_\perp é \mathcal{S} -multi-reflectiva e, neste caso, \mathcal{S}_\perp é a única subcategoria de \mathcal{X} subfirmemente \mathcal{S} -multi-reflectiva.*

Demonstração. Se \mathcal{S}_\perp é \mathcal{S} -multi-reflectiva, então, como $\mathcal{S} \subseteq (\mathcal{S}_\perp)^\perp$, \mathcal{S} é subfirme.

Reciprocamente, seja \mathcal{S} subfirme. Isto significa que existe uma subcategoria \mathcal{A} \mathcal{S} -multi-reflectiva em \mathcal{X} tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}^\perp$. Consequentemente, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^\perp)_\perp \subseteq \mathcal{S}_\perp$. Mostremos agora que a inclusão contrária também se verifica e, portanto, \mathcal{S}_\perp é a única subcategoria subfirmemente \mathcal{S} -multi-reflectiva. Seja $X \in \mathcal{S}_\perp$ e seja $(r_i : X \rightarrow A_i)_{i \in I}$ a \mathcal{S} -multi-reflexão de X em \mathcal{A} . Então, existe algum $i \in I$ e algum $t : A_i \rightarrow X$ tal que $t \cdot r_i = id_X$, porque $X \in \mathcal{S}_\perp$. Isto implica $r_i \cdot t \cdot r_i = r_i$ e, consequentemente, $r_i \cdot t = id_{A_i}$. Logo r_i é um isomorfismo e $X \in \mathcal{A}$. \square

Definições 20.10 Seja \mathcal{S} um aglomerado de fontes numa categoria multicompleta \mathcal{X} .

(a) Dizemos que \mathcal{S} satisfaz a *condição do multicoigualizador* se, dadas fontes $(X \xrightarrow{f_i} Y_i)_I$ e $(X \xrightarrow{g_j} Z_j)_J$ em \mathcal{S} e uma família de pares $(\alpha^k, (h_j^k)_J)$, indexada por K , tal que $\alpha^k : J \rightarrow I$ é uma função e $h_j^k : Y_{\alpha^k(j)} \rightarrow Z_j$ é um \mathcal{X} -morfismo com

$$h_j^k \cdot f_{\alpha^k(j)} = g_j,$$

então para cada $(i, j) \in I \times J$ o multicoigualizador múltiplo da família

$$\{h_j^k : Y_i \rightarrow Z_j \mid \alpha^k(j) = i\}$$

pertence a \mathcal{S} .

(b) Dizemos que \mathcal{S} é *estável para multi-somas amalgamadas* sempre que, dada uma fonte $(X \xrightarrow{f_i} Y_i)_I$ em \mathcal{S} e um \mathcal{X} -morfismo $X \xrightarrow{g} Z$, se, para cada $i \in I$, $(Z \xrightarrow{g_{ik}} W_{ik})_{k \in K_i}$ é a multi-soma amalgamada de f_i ao longo de g , então a fonte $(Z \xrightarrow{g_{ik}} W_{ik})_{k \in K_i, i \in I}$ pertence a \mathcal{S} .

(c) Dizemos que \mathcal{S} é *estável para multi-somas amalgamadas múltiplas* sempre que, dada uma família $\{T_k, k \in K\}$ de fontes em \mathcal{S} indexada por um conjunto K , com

$$T_k = (X \xrightarrow{f_{i_k}^k} Y_{i_k}^k)_{i \in I_k},$$

se, para cada $i = (i_k)_{k \in K}$ em $I = \prod_{k \in K} I_k$, a multi-soma amalgamada múltipla de $(X \xrightarrow{f_{i_k}^k} Y_{i_k}^k)_{k \in K}$ é uma fonte de \mathcal{S} .

Observação 20.11 Comparando as definições anteriores com 2.6, vê-se imediatamente que (a) é equivalente a afirmar que $\Pi^l(\mathcal{S})$ satisfaz a condição do coigualizador em $\Pi^l(\mathcal{X})$, (b) é equivalente a afirmar que $\Pi^l(\mathcal{S})$ é estável para somas amalgamadas em $\Pi^l(\mathcal{X})$ e (c) é equivalente a afirmar que $\Pi^l(\mathcal{S})$ é estável para somas amalgamadas múltiplas em $\Pi^l(\mathcal{X})$.

Logo, atendendo a 1.4.4-5, 2.7.1 e 19.13, conclui-se que, dada uma subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} , o aglomerado \mathcal{A}^\perp satisfaz as condições (a), (b) e (c).

É fácil verificar que o aglomerado $\Pi^l(\mathcal{S})$ contém todos os $\Pi^l(\mathcal{X})$ -isomorfismos, é fechado para a composição e cancelável à esquerda se e só se, respectivamente, a classe \mathcal{S} contém todos os \mathcal{X} -isomorfismos, é fechada para a composição e cancelável à esquerda. Portanto, usando 3.5, obtemos o seguinte

Teorema 20.12 *Se \mathcal{X} é uma categoria multicompleta e \mathcal{S} é um aglomerado de fontes em \mathcal{X} , então \mathcal{S} é firme se e só se as condições seguintes forem preenchidas:*

1. $\text{Iso}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{S}$.
2. \mathcal{S} é fechado para a composição.
3. \mathcal{S} é cancelável à esquerda.
4. \mathcal{S} satisfaz a condição do multicoigualizador.
5. \mathcal{S} é estável para multi-somas amalgamadas e multi-somas amalgamadas múltiplas.
6. Para cada $X \in \text{Obj}(\mathcal{X})$, a quase-categoria X/\mathcal{S} tem um conjunto fracamente terminal. □

Exemplo 20.13 Seja $\mathcal{X} = \text{Top}^{op}$ e seja $\mathcal{A} = \text{Con}^{op}$. Então o aglomerado firme \mathcal{A}^\perp é constituído por todas as fontes duais das epi-cofontes $(Y_j \xrightarrow{f_j} X)_J$ em Top tais que

- (a) f_j é uma imersão, para todo o $j \in J$;
- (b) as imagens $\text{Im}(f_j)$ são disjuntas duas a duas;
- (c) toda a imersão f_j preserva componentes conexas, isto é, se C é uma componente conexa de Y_j então $f_j(C)$ é uma componente conexa de X .

De facto, para a classe \mathcal{M} de todas as imersões em \mathcal{Top} e \mathbb{E} o aglomerado de todas as epi-cofontes em \mathcal{Top} , temos que \mathcal{Top}^{op} é uma categoria $(\mathcal{M}^{op}, \mathbb{E}^{op})$. Como \mathcal{Con}^{op} é \mathbb{E}^{op} -multi-reflectiva em \mathcal{Top}^{op} (ver 16.2.3), decorre de 20.5 que

(i) $\mathcal{A}^\perp \subseteq \mathbb{E}^{op}$, ou seja, cada fonte em \mathcal{A}^\perp é a dual duma epi-cofonte $(Y_j \xrightarrow{f_j} X)_J$ em \mathcal{Top}^{op} e

(ii) tal epi-cofonte $(f_j)_J$ satisfaz a condição (a).

A condição (b) é clara visto que, se $Im(f_i) \cap Im(f_j) \neq \emptyset$, então cada componente conexa dessa intersecção teria de ser factorizável por simultaneamente f_i e f_j . Para mostrar que $(f_j)_J$ satisfaz (c), seja $C \xrightarrow{c} Im(f_j)$ a imersão duma componente conexa de $Im(f_j)$ e seja C' a componente conexa de X que contém C . Então, como $(f_j)_J \in \mathcal{A}^\perp$, existe $i \in J$ tal que $C' \subseteq Im(f_i)$. Mas então $f_j \cdot c$ é factorizado por simultaneamente f_j e f_i , o que implica que $i = j$ e, conseqüentemente, $C' \subseteq Im(f_j)$. Portanto, $C = C'$.

Reciprocamente, seja $(Y_j \hookrightarrow X)_J$ uma epi-cofonte onde cada Y_j é um subespaço de X , os subespaços Y_j são disjuntos dois a dois e cada componente conexa em Y_j é uma componente conexa em X . Seja $C \xrightarrow{g} X$ uma aplicação contínua dum espaço conexo C para X . Então, como $(Y_j \hookrightarrow X)_J$ é uma epi-cofonte, temos que $g(C) \subseteq \cup_{j \in J} Y_j$. Logo $g(C) \cap Y_j \neq \emptyset$ para algum $j \in J$. Seja C' a componente conexa de X que contém $g(C)$; então $C' \cap Y_j \neq \emptyset$ e, por (c), tem de ter-se $C' \subseteq Y_j$; conseqüentemente $g(C) \subseteq Y_j$. A condição (b) assegura que este j é o único tal que g se factoriza através de Y_j .

Observação 20.14 Interessa salientar que todos os resultados que obtivemos sobre multiortogonalidade se mantêm válidos se consistentemente interpretarmos multi-reflexões e multicolimites como sendo indexados só por conjuntos, \mathcal{A}^\perp for constituído apenas pelas fontes pequenas multiortogonais a \mathcal{A} e o aglomerado de fontes \mathcal{S} considerado nesta secção for suposto conter apenas fontes pequenas.

21 Uma generalização do operador de fecho ortogonal

Vamos agora tratar da generalização do operador de fecho ortogonal definido no Capítulo II. Mostraremos que o operador de fecho ortogonal é também um bom utensílio no estudo da multi-reflectividade do invólucro multiortogonal de uma dada subcategoria.

De agora em diante, \mathcal{X} é uma categoria com multi-somas amalgamadas e \mathcal{M} é uma

classe de monomorfismos de \mathcal{X} que contém todos os isomorfismos, é fechada para a composição e tal que \mathcal{X} é \mathcal{M} -completa. Além disso, $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ a estrutura de factorização para morfismos determinada pela \mathcal{M} -completude de \mathcal{X} .

Notações 21.1 Dada uma subcategoria \mathcal{A} da categoria \mathcal{X} , denotamos por

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$$

a subcategoria de \mathcal{X} de todos os objectos X de \mathcal{X} tais que $\mathcal{X}(X, \mathcal{A}) \neq \emptyset$.

Para cada classe \mathcal{M} de morfismos de \mathcal{X} ,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \mathcal{M} \cap \text{Mor}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}}).$$

Analogamente, para cada aglomerado \mathbb{M} de fontes em \mathcal{X} ,

$$\mathbb{M}_{\mathcal{A}} = \mathbb{M} \cap \text{Fonte}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}}).$$

Proposição 21.2 *Para toda a subcategoria \mathcal{A} de uma categoria \mathcal{X} ,*

1. $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ é multi-reflectiva em \mathcal{X} .
2. Se \mathcal{X} é uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbb{M})$, é \mathcal{M} -completa e tem multi-somas amalgamadas, então a subcategoria $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ é uma categoria $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \mathbb{M}_{\mathcal{A}})$, é $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ -completa e tem multi-somas amalgamadas.

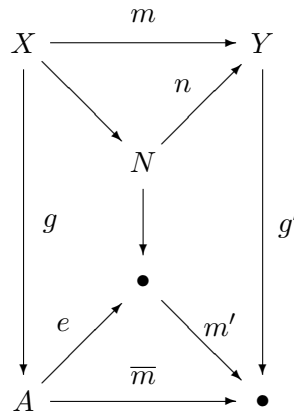
Demonstração.

1. É claro que, dado um objecto X de \mathcal{X} , se ele pertencer a $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$, então a multi-reflexão é constituída apenas pela identidade 1_X ; caso contrário, a multi-reflexão de X em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ é a fonte vazia com domínio X .
2. O facto de a \mathcal{M} -completude de \mathcal{X} implicar a $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ -completude de $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ ser uma categoria $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \mathbb{M}_{\mathcal{A}})$ sempre que \mathcal{X} é uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbb{M})$ é uma consequência da seguinte propriedade óbvia de $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$: Se $X \xrightarrow{f} Y$ é um \mathcal{X} -morfismo tal que Y pertence a $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$, então X também pertence a $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$. □

No seguimento, a categoria $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ desempenha um papel importante. Pela proposição anterior, a questão da existência de uma multi-reflexão para cada objecto de \mathcal{X} em \mathcal{A} reduz-se à da existência de uma multi-reflexão para cada objecto de $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ em \mathcal{A} . Além disso, por 20.4, o invólucro multiortogonal de \mathcal{A} em \mathcal{X} coincide com o invólucro multiortogonal de \mathcal{A} em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$, e, então, podemos restringir o estudo da multi-refletividade do invólucro multiortogonal de \mathcal{A} em \mathcal{X} à categoria $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$.

Definições 21.3 Seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{X} .

Para cada morfismo $m : X \rightarrow Y$ em $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, seja $P_{\mathcal{A}}(m)$ a classe de todos os morfismos $n : N \rightarrow Y$ tais que existem um morfismo $g : X \rightarrow A$, com $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$, e morfismos \bar{m}, g', m' , e tais que (\bar{m}, g') é uma componente da multi-soma amalgamada de (m, g) em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$, $\bar{m} = m' \cdot e$ é a factorização $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ de \bar{m} e $n : N \rightarrow Y$ é o produto fibrado de m' ao longo de g' .



É claro que cada morfismo n em $P_{\mathcal{A}}(m)$ é um $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ -subobjecto de Y que contém m .
Seja

$$c_{\mathcal{A}}(m) = \bigwedge P_{\mathcal{A}}(m).$$

Denotamos por $d_{\mathcal{A}}(m)$ o único morfismo de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ tal que $m = c_{\mathcal{A}}(m) \cdot d_{\mathcal{A}}(m)$.

Proposição 21.4 Para cada subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} , $c_{\mathcal{A}} : \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ é um operador de fecho em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$.

Demonstração. Atendendo a 4.3, basta provar que, para cada diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{m} & Y \\
 \downarrow p & & \downarrow f \\
 Z & \xrightarrow{n} & W
 \end{array} \tag{VI.4}$$

com $m, n \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, existe um único morfismo f' tal que o diagrama seguinte

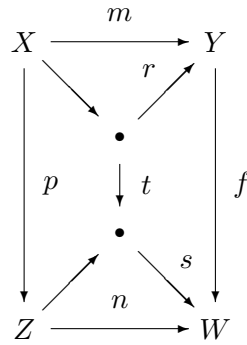
$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{d_{\mathcal{A}}(m)} & \bullet & \xrightarrow{c_{\mathcal{A}}(m)} & Y \\
 \downarrow p & & \downarrow f' & & \downarrow f \\
 Z & \xrightarrow{d_{\mathcal{A}}(n)} & \bullet & \xrightarrow{c_{\mathcal{A}}(n)} & W
 \end{array} \tag{VI.5}$$

é comutativo.

Seja (\bar{n}, h') uma componente de uma multi-soma amalgamada de n ao longo de algum morfismo $h : Z \rightarrow A$ com A em \mathcal{A} . Então, a multi-soma amalgamada de m ao longo de $h \cdot p$ é não vazia, visto que a multi-soma amalgamada de n ao longo de h também o é. Além disso, atendendo à universalidade, existem uma única componente (\bar{m}, g') da multi-soma amalgamada de $(m, h \cdot p)$ e um único morfismo d tais que $d \cdot \bar{m} = \bar{n}$ e $d \cdot g' = h' \cdot f$. Sejam $n' \cdot q$ e $m' \cdot e$ as factorizações $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ de \bar{n} e \bar{m} , respectivamente, seja (s, h^*) um produto fibrado de (n', h') e seja (r, g^*) um produto fibrado de (m', g') . A igualdade $n' \cdot q = (d \cdot m') \cdot e$ implica a existência de um único morfismo l tal que $n' \cdot l = d \cdot m'$ e $l \cdot e = q$. Consequentemente,

$$n' \cdot (l \cdot g^*) = d \cdot m' \cdot g^* = d \cdot g' \cdot r = h' \cdot (f \cdot r)$$

e, como (s, h^*) é um produto fibrado de (n', h') , existe um único morfismo t tal que $s \cdot t = f \cdot r$ e $h^* \cdot t = l \cdot g^*$. Concluímos assim que, para cada $s \in P_{\mathcal{A}}(n)$, existem morfismos $r \in P_{\mathcal{A}}(m)$ e t tais que o diagrama



é comutativo. Por conseguinte, como $c_{\mathcal{A}}(m)$ e $c_{\mathcal{A}}(n)$ são as intersecções de, respectivamente, $P_{\mathcal{A}}(m)$ e $P_{\mathcal{A}}(n)$, isto prova a existência de um único morfismo f' tal que o diagrama (VI.5) é comutativo. \square

Definição 21.5 O operador de fecho $c_{\mathcal{A}} : \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ acabado de definir será chamado o operador de fecho ortogonal em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ relativamente a $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ induzido por \mathcal{A} .

Observações 21.6

1. Se \mathcal{X} tem somas amalgamadas e \mathcal{A} é uma subcategoria de \mathcal{X} tal que $\mathcal{X}_{\mathcal{A}} = \mathcal{X}$, então $c_{\mathcal{A}} : \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ é precisamente o operador de fecho ortogonal definido no Capítulo II (ver 5.1 e 5.3).
2. Analogamente ao que acontece para o operador de fecho ortogonal definido no Capítulo II, para o presente operador de fecho ortogonal e para subcategorias \mathcal{A} e \mathcal{B} de \mathcal{X} temos que:
 - (a) O operador de fecho $c_{\mathcal{A}}$ é discreto na subclasse dos morfismos com domínio em \mathcal{A} .
 - (b) Se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ então $c_{\mathcal{B}} \leq c_{\mathcal{A}}$.
 - (c) Se $SplitMono(\mathcal{X}_{\mathcal{A}}) \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, então, para cada par $a, b : Y \rightarrow A$ de morfismos, com $A \in Obj(\mathcal{A})$ e cada $X \xrightarrow{m} Y$ em $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$

$$a \cdot m = b \cdot m \implies a \cdot c_{\mathcal{A}}(m) = b \cdot c_{\mathcal{A}}(m).$$

3. Do mesmo modo, tal como para o operador de fecho ortogonal definido no Capítulo II, para a generalização dada, temos que, se $MonoReg(\mathcal{X}_{\mathcal{A}}) \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, então:

- (a) $c_{\mathcal{A}} \leq r_{\mathcal{A}}$, onde $r_{\mathcal{A}}$ denota o operador de fecho regular relativamente a $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ induzido por \mathcal{A} ;
- (b) todo o morfismo $c_{\mathcal{A}}$ -denso em $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ é \mathcal{A} -cancelável.

22 Densidade e multiortogonalidade

Até ao fim do capítulo, assumimos que a categoria \mathcal{X} (que é suposta ter multi-somas amalgamadas e ser \mathcal{M} -completa) é, além disso, uma categoria $(\mathcal{E}, \mathbb{M})$, com $\mathbb{M} \subseteq \text{MonoFonte}(\mathcal{X})$ e $\mathcal{M} = \mathbb{M} \cap \text{Mor}(\mathcal{X})$.

Seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{X} e seja $\mathbb{M}(\mathcal{A})$ o invólucro \mathcal{E} -reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{X} .

Tendo em conta que, por 20.4, o invólucro multiortogonal de \mathcal{A} em \mathcal{X} coincide com o invólucro multiortogonal de \mathcal{A} em $\mathbb{M}(\mathcal{A})$, daqui para afrente assumiremos várias vezes que $\mathcal{X} = \mathbb{M}(\mathcal{A})$, o que claramente implica $\mathcal{X}_{\mathcal{A}} = \mathbb{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$.

Por outro lado, recordemos que em $\mathbb{M}(\mathcal{A})$ todo o morfismo \mathcal{A} -cancelável é um epimorfismo, atendendo a 2.17. Logo, por 21.6.3(b), segue-se que:

Todo o morfismo $c_{\mathcal{A}}$ -denso em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ é um epimorfismo.

Este facto será usado frequentemente.

Definição 22.1 Seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{X} . Uma fonte $(f_i : X \rightarrow Y_i)_{i \in I}$ de \mathcal{X} diz-se \mathcal{A} -disjunta sempre que, para cada par (i, j) em I^2 com $i \neq j$, não existir nenhum diagrama comutativo da forma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_i} & Y_i \\ \downarrow f_j & & \downarrow \\ Y_j & \longrightarrow & A \end{array}$$

com $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$.

Observação 22.2 É claro que obtemos uma definição equivalente à dada em 22.1 se substituirmos “ $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ ” por “ $A \in \text{Obj}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}})$ ”. Além disso, se $(f_i : X \rightarrow Y_i)_{i \in I}$ é uma fonte \mathcal{A} -disjunta de $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$, então, para cada par $(i, j) \in I^2$ com $i \neq j$, o par (f_i, f_j) tem uma multi-soma amalgamada vazia em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$.

Definições 22.3 Dada uma subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} , consideremos as seguintes classes e aglomerados:

$PC(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ é a classe constituída por todos os morfismos f de $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ tais que todas as componentes da multi-soma amalgamada de f em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ ao longo de um morfismo com codomínio em \mathcal{A} pertencem a $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.

$PS(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ é a intersecção de $PC(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ com $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.

$PS(\mathbb{M}_{\mathcal{A}})$ é o aglomerado constituído por todas as fontes $(X, (f_i)_I) \in \mathbb{M}_{\mathcal{A}}$ tais que cada f_i pertence a $PC(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ e para cada morfismo g com domínio X e codomínio em \mathcal{A} existe algum $i \in I$ tal que a multi-soma amalgamada de f_i ao longo de g em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ é não-vazia.

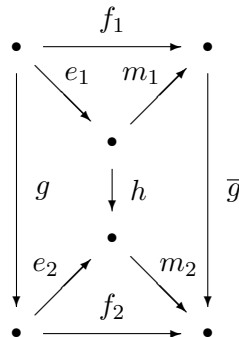
Observação 22.4

É óbvio que, se $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ tem somas amalgamadas, então $PS(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ é constituído por precisamente todos as fontes disjuntas de $PS(\mathbb{M}_{\mathcal{A}})$ e este aglomerado não é mais do que a classe $PS(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ no sentido usado no Capítulo II.

Os dois lemas seguintes reúnem algumas propriedades das multi-somas amalgamadas que serão muito úteis no que se segue.

Lema 22.5

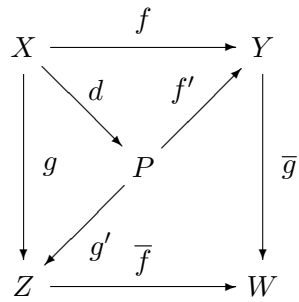
1. Se $f, g, \bar{f}, \bar{g}, f'$ e g' são morfismos de \mathcal{X} tais que (\bar{f}, \bar{g}) é uma componente da multi-soma amalgamada de (f, g) e (f', g') é o produto fibrado de (\bar{f}, \bar{g}) , então (\bar{f}, \bar{g}) é também uma componente da multi-soma amalgamada de (f', g') .
2. Seja



um diagrama comutativo e sejam e_1 e e_2 epimorfismos. Se (f_2, \bar{g}) é uma componente da multi-soma amalgamada de (f_1, g) , então (m_2, \bar{g}) é uma componente da multi-soma amalgamada de (m_1, h) ; o recíproco é verdadeiro se e_2 for um isomorfismo.

Demonstração.

1. No seguinte diagrama



seja (\bar{f}, \bar{g}) uma componente da multi-soma amalgamada de (f, g) , seja (f', g') o produto fibrado de (\bar{f}, \bar{g}) e seja d o único morfismo que torna ambos os triângulos mais pequenos comutativos. Então existem uma única componente (f^*, g^*) da multi-soma amalgamada de (f', g') e um único morfismo t tais que $t \cdot g^* = \bar{g}$ e $t \cdot f^* = \bar{f}$. Mas então (f^*, g^*) pertence à mesma componenete conexa que (\bar{f}, \bar{g}) na categoria de todas as cofontes naturais para o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow g & & \\
 Z & & \cdot
 \end{array}$$

Portanto, existe um único morfismo t' tal que $t' \cdot \bar{f} = f^*$ e $t' \cdot \bar{g} = g^*$. Agora, como (\bar{f}, \bar{g}) e (f^*, g^*) são componentes de multi-somas amalgamadas, são epi-cofontes e, consequentemente, das igualdades

$$t \cdot t' \cdot \bar{f} = t \cdot f^* = \bar{f} \quad \text{e} \quad t \cdot t' \cdot \bar{g} = t \cdot g^* = \bar{g}$$

$$t' \cdot t \cdot f^* = t' \cdot \bar{f} = f^* \quad \text{e} \quad t' \cdot t \cdot g^* = t' \cdot \bar{g} = g^*$$

decorre que t é um isomorfismo.

2. Sob as condições dadas, seja (f_2, \bar{g}) uma componente da multi-soma amalgamada de (f_1, g) . Queremos mostrar que (m_2, \bar{g}) é uma componente da multi-soma amalgamada de (m_1, h) . Como $m_2 \cdot h = \bar{g} \cdot m_1$, existem uma única componente (\hat{m}, \hat{h}) da multi-soma amalgamada de (m_1, h) e um único morfismo t tais que $t \cdot \hat{h} = \bar{g}$ e $t \cdot \hat{m} = m_2$. Como $\hat{m} \cdot h = \hat{h} \cdot m_1$, temos que

$$(\hat{m} \cdot e_2) \cdot g = \hat{m} \cdot h \cdot e_1 = \hat{h} \cdot m_1 \cdot e_1 = \hat{h} \cdot f_1.$$

Por outro lado, como

$$t \cdot (\hat{m} \cdot e_2) = m_2 \cdot e_2 = f_2 \quad \text{e} \quad t \cdot \hat{h} = \bar{g},$$

segue-se que $(\hat{m} \cdot e_2, \hat{h})$ e (f_2, \bar{g}) pertencem à mesma componente conexa da categoria de todas as cofontes naturais do diagrama

$$\begin{array}{ccc} & f_1 & \\ \bullet & \rightarrow & Y \\ & \downarrow & g \\ \bullet & & \end{array} .$$

Por conseguinte, existe um único u tal que $u \cdot f_2 = \hat{m} \cdot e_2$ e $u \cdot \bar{g} = \hat{h}$. Logo $u \cdot t = 1$ e $t \cdot u = 1$, pelo que t é um isomorfismo como pretendido.

Seja agora e_2 um isomorfismo e seja (m_2, \bar{g}) uma componente da multi-soma amalgamada de (m_1, h) . Seja $((\hat{f}, \hat{g}), s)$ o único par tal que (\hat{f}, \hat{g}) é uma componente da multi-soma amalgamada de (f_1, g) e s verifica as igualdades $s \cdot \hat{f} = f_2$ e $s \cdot \hat{g} = \bar{g}$. Então, como e_1 é um epimorfismo, segue-se que $(s \cdot f_2 \cdot e_2^{-1}) \cdot h = (s \cdot \hat{g}) \cdot m_1$. É agora fácil ver que s é um isomorfismo e, consequentemente, (f_2, \bar{g}) é uma componente da multi-soma amalgamada de (f_1, g) . \square

Lema 22.6 *Seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{X} e seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo de $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ em $PC(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$. Então*

1. *Toda a componente da multi-soma amalgamada de f em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ ao longo de outro morfismo pertence a $PC(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$.*
2. *Se $m \cdot e$ é uma factorização $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ de f , então $m \in PS(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$.*
3. *Se f é $c_{\mathcal{A}}$ -denso, então toda a componente da multi-soma amalgamada de f em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ ao longo de outro morfismo é $c_{\mathcal{A}}$ -densa.*

Demonstração.

1. Seja (\bar{f}, \bar{g}) uma componente da multi-soma amalgamada de f ao longo de um morfismo $g : X \rightarrow Z$ de $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$. Seja $(\bar{\bar{f}}, \bar{h})$ uma componente da multi-soma amalgamada de \bar{f} ao longo de um morfismo $h : Z \rightarrow A$ com codomínio em \mathcal{A} . Então vê-se facilmente que $(\bar{\bar{f}}, \bar{h} \cdot \bar{g})$ é uma componente da multi-soma amalgamada de f ao longo de $h \cdot g$. Consequentemente, $\bar{\bar{f}} \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.
2. Seja $g : Z \rightarrow A$, onde Z é o domínio de m , um morfismo com codomínio em \mathcal{A} . Se (\bar{m}, \bar{g}) é uma componente da multi-soma amalgamada de m ao longo de g então, usando o facto de e ser um epimorfismo, é fácil concluir que (\bar{m}, \bar{g}) é também uma componente da multi-soma amalgamada de f ao longo de $g \cdot e$. Por conseguinte, como $f \in PC(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$, temos que $\bar{m} \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.
3. Seja $f : X \rightarrow Y$ $c_{\mathcal{A}}$ -denso e seja (\bar{f}, \bar{g}) uma componente da multi-soma amalgamada de f ao longo de $g : X \rightarrow Z$. Sejam $X \xrightarrow{e} E \xrightarrow{m} Y$ e $Z \xrightarrow{d} E \xrightarrow{n} W$ as factorizações $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ de f e \bar{f} , respectivamente. Então existe um único h tal que $n \cdot h = \bar{g} \cdot m$ e $d \cdot g = h \cdot e$. Assim, por 22.5.2, (n, \bar{g}) é uma componente da multi-soma amalgamada de (m, h) . Mostremos que n é $c_{\mathcal{A}}$ -denso. Seja $l : D \rightarrow A$ um morfismo com codomínio em \mathcal{A} , seja (\bar{n}, \bar{l}) uma componente da multi-soma amalgamada de (n, l) e seja (\hat{n}, \hat{l}) o produto fibrado de (\bar{n}, \bar{l}) . Queremos mostrar que \hat{n} é um isomorfismo. Seja (\hat{m}, \hat{g}) o produto fibrado de (\hat{n}, \bar{g}) ; então $(\hat{m}, \hat{l} \cdot \hat{g})$ é o produto fibrado de $(\bar{n}, \bar{l} \cdot \bar{g})$. Mas então, como $(\bar{n}, \bar{l} \cdot \bar{g})$ é uma componente da multi-soma amalgamada de $(m, l \cdot h)$ e m é $c_{\mathcal{A}}$ -denso, \hat{m} tem de ser um isomorfismo; então, por 22.5.1, \bar{n} é um isomorfismo, e o mesmo acontece a \hat{n} .
□

Definições 22.7 Seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{X} , seja $(X \xrightarrow{f_i} Y_i)_I$ uma fonte em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ e seja $m_i \cdot e_i$ uma factorização $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ de f_i , para cada i .

1. A fonte $(X \xrightarrow{f_i} Y_i)_I$ diz-se $c_{\mathcal{A}}$ -densa se cada morfismo m_i é $c_{\mathcal{A}}$ -denso.
2. O operador de fecho ortogonal $c_{\mathcal{A}}$ diz-se *fracamente hereditário relativamente ao aglomerado* $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{M}_{\mathcal{A}}$ sempre que, para cada $(f_i)_I \in \mathbb{N}$, a fonte $(d_{\mathcal{A}}(m_i) \cdot e_i)_I$ é $c_{\mathcal{A}}$ -densa e pertence a \mathbb{N} .

Proposição 22.8 *Se \mathcal{A} é uma subcategoria de \mathcal{X} tal que $\mathbf{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$, então a classe \mathcal{A}^\perp em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ consiste em precisamente todos as fontes $c_{\mathcal{A}}$ -densas em $PS(\mathbf{M}_{\mathcal{A}})$ que são \mathcal{A} -disjuntas.*

Demonstração. Seja $(f_i : X \rightarrow Y_i)_{i \in I}$ pertencente a \mathcal{A}^\perp em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$. Então $(f_i)_I$ pertence a $\mathbf{M}_{\mathcal{A}}$ (por 20.5) e é claramente \mathcal{A} -disjunta. Para mostrar que $(f_i)_I$ pertence a $PS(\mathbf{M}_{\mathcal{A}})$, seja $i \in I$, seja $X \xrightarrow{g} A$ um morfismo com codomínio em \mathcal{A} e seja $(A \xrightarrow{\bar{f}} W, Y_i \xrightarrow{\bar{g}} W)$ uma componente da multi-soma amalgamada de (f_i, g) em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$. Então, como $W \in \text{Obj}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}})$, existe algum morfismo $h : W \rightarrow A'$ com codomínio em \mathcal{A} . Mas então g e $h \cdot \bar{g} \cdot f_i$ pertencem à mesma componente conexa de $X \downarrow \mathcal{A}$; portanto, como $h \cdot \bar{g} \cdot f_i$ se factoriza através de f_i , o morfismo g é também factorizável por meio de f_i , atendendo a 19.2. Isto implica que há um morfismo $W \xrightarrow{t} A$ tal que $t \cdot \bar{f} = 1_A$. Mas, por outro lado, f_i é \mathcal{A} -cancelável, então, por 2.17, é um epimorfismo e, assim, \bar{f} é também um epimorfismo. Por conseguinte, \bar{f} é um isomorfismo. Isto mostra que $(f_i)_I$ pertence a $PS(\mathbf{M}_{\mathcal{A}})$. Para mostrar que cada f_i é $c_{\mathcal{A}}$ -denso, seja $X \xrightarrow{e_i} X_i \xrightarrow{m_i} Y_i$ uma factorização $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ de f_i e seja $X_i \xrightarrow{h} A$ um morfismo com codomínio em \mathcal{A} . Seja (\bar{m}, \bar{h}) uma componente da multi-soma amalgamada de m_i ao longo de h , em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$. Então por 22.6.2, $\bar{m} \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$. Consequentemente, por 22.5.2, (\bar{m}, \bar{h}) é também uma componente da multi-soma amalgamada de f_i ao longo de $h \cdot e_i$. Logo, como mostrámos atrás, \bar{m} é necessariamente um isomorfismo e, assim, o produto fibrado de \bar{m} ao longo de \bar{h} é também um isomorfismo. Como a classe $P_{\mathcal{A}}(m_i)$ é constituída apenas por isomorfismos, segue-se que $c_{\mathcal{A}}(m_i)$ é um isomorfismo, ou seja, m_i é $c_{\mathcal{A}}$ -denso. Além disso, como a multi-soma amalgamada de m_i ao longo de g é também a multi-soma amalgamada de m_i ao longo de $g \cdot e$ (por 22.5.2) e o produto fibrado de um isomorfismo é um isomorfismo, conclui-se que todo o f_i é $c_{\mathcal{A}}$ -denso.

Reciprocamente, seja $(f_i : X \rightarrow Y_i)_{i \in I}$ uma fonte \mathcal{A} -disjunta e $c_{\mathcal{A}}$ -densa em $PS(\mathbf{M}_{\mathcal{A}})$ e seja $g : X \rightarrow A$ um morfismo com codomínio em \mathcal{A} . Então para algum $i \in I$ a multi-soma amalgamada de f_i ao longo de g é não vazia e, ademais, cada uma das suas componentes pertence a $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$. Seja (\bar{f}, \bar{g}) uma componente desta multi-soma amalgamada e seja $X \xrightarrow{e_i} X_i \xrightarrow{m_i} Y_i$ uma factorização $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ de f_i . Então, como $\bar{f} \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, há um morfismo t tal que $t \cdot e_i = g$ e $\bar{f} \cdot t = \bar{g} \cdot m_i$. Logo, por 22.5.2, (\bar{f}, \bar{g}) é uma componente da multi-soma amalgamada de m_i ao longo de t . Consequentemente, como m_i é $c_{\mathcal{A}}$ -denso, o produto fibrado de \bar{f} ao longo de \bar{g} é um isomorfismo e, então, atendendo a 22.5.1, \bar{f}

é também um isomorfismo. Consequentemente, g é factorizável através de f_i . Ademais, $\bar{f}^{-1} \cdot \bar{g}$ é o único morfismo tal que $g = (\bar{f}^{-1} \cdot \bar{g}) \cdot f_i$, visto o facto de f_i ser $c_{\mathcal{A}}$ -denso implicar que seja um epimorfismo (por 21.6.3(b) e 2.17). Por outro lado, a \mathcal{A} -disjunção de $(f_i)_I$ assegura a unicidade do i tal que g é factorizável por meio de f_i . \square

23 Fechamento e multi-reflectividade

Nesta secção, determinamos condições para que o invólucro multiortogonal de uma subcategoria seja um invólucro multi-reflectivo e caracterizamos tal invólucro multi-reflectivo em termos de fechamento via operador de fecho ortogonal.

Definição 23.1 Dada uma subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} , um objecto X de $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ diz-se *fortemente multi- \mathcal{A} -fechado* sempre que, para cada fonte $(f_i : X \rightarrow Y_i)_{i \in I}$ em $PS(\mathbb{M}_{\mathcal{A}})$, todos os f_i são $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ -morfismos $c_{\mathcal{A}}$ -fechados.

Denotamos por $\underline{\underline{SCL}}(\mathcal{A})$ a subcategoria de $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ de todos os objectos fortemente multi- \mathcal{A} -fechados.

Observação 23.2 Se $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ tem somas amalgamadas, então $\underline{\underline{SCL}}(\mathcal{A})$ é a subcategoria $\mathcal{SCL}(\mathcal{A})$ de todos os objectos fortemente \mathcal{A} -fechados em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$, como definido no Capítulo II.

Proposição 23.3 Dada uma subcategoria \mathcal{A} de \mathcal{X} , we have that:

1. $\mathcal{A} \subseteq \underline{\underline{SCL}}(\mathcal{A})$;
2. Se $\mathbb{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{X}_{\mathcal{A}}$, então $\underline{\underline{SCL}}(\mathcal{A}) \subseteq \underline{\underline{O}}(\mathcal{A})$;
3. Se \mathcal{A} é \mathbb{M} -multi-reflectiva em \mathcal{X} , então $\mathcal{A} = \underline{\underline{SCL}}(\mathcal{A}) = \underline{\underline{O}}(\mathcal{A})$.

Demonstração.

1. Seja $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ e seja $(A \xrightarrow{f_i} Y_i)_I$ uma fonte em $PS(\mathbb{M}_{\mathcal{A}})$. Então, para algum $i \in I$, a multi-soma amalgamada de f_i ao longo de 1_A é não vazia. Seja (\bar{m}, d) uma componente dessa multi-soma amalgamada. Se $A \xrightarrow{e_i} X_i \xrightarrow{m_i} Y_i$ é uma factorização $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \mathbb{M}_{\mathcal{A}})$ de f_i , obtemos a igualdade

$$(d \cdot m_i) \cdot e_i = \bar{m} \cdot 1_A.$$

Consequentemente, existe um único morfismo t tal que $t \cdot e_i = 1_A$ e, assim, e_i é um isomorfismo. Logo, $f_i \in \mathcal{M}_A$. Atendendo a 21.6.2(a), é claro que f_i é também c_A -fechado.

2. Consideremos, em \mathcal{X}_A , um objecto X fortemente multi- \mathcal{A} -fechado, uma fonte $(Y \xrightarrow{f_i} Z_i)_I$ multiortogonal a \mathcal{A} e um morfismo $g : Y \rightarrow X$. Para cada $i \in I$, seja $((h_i^k, d_i^k))_{k \in K_i}$ a multi-soma amalgamada em \mathcal{X}_A de f_i ao longo de g . A família $(h_i^k)_{k \in K_i, i \in I}$ é não vazia, visto $X \in \mathcal{X}_A$. Além disso, a fonte $(h_i^k)_{k \in K_i, i \in I}$ pertence a \mathcal{A}^\perp (por 20.11), logo também pertence a $PS(\mathbb{M}_A)$ (por 22.8). Agora, como X é fortemente multi- \mathcal{A} -fechado, temos que todos os h_i^k são \mathcal{M}_A -morfismos c_A -fechados. Por outro lado, como $(h_i^k)_{k \in K_i, i \in I} \in \mathcal{A}^\perp$, cada morfismo h_i^k é c_A -denso, por 22.8. Sendo c_A -fechado e c_A -denso, h_i^k é um isomorfismo e, consequentemente, $g : Y \rightarrow X$ é factorizável através de f_i . É evidente que existe apenas um tal i , visto que $(f_i)_I$ é \mathcal{A} -disjunta. E a factorização é única visto f_i ser c_A -denso, logo um epimorfismo.
3. Se \mathcal{A} é \mathbb{M} -multi-reflectiva, então, atendendo a 19.3, $\mathcal{A} = \underline{\underline{\mathcal{O}}}(\mathcal{A})$ e, por outro lado, por 1. e 2., $\mathcal{A} \subseteq \underline{\underline{SCL}}(\mathcal{A}) \subseteq \underline{\underline{\mathcal{O}}}(\mathcal{A})$. Por conseguinte, segue-se que $\mathcal{A} = \underline{\underline{SCL}}(\mathcal{A}) = \underline{\underline{\mathcal{O}}}(\mathcal{A})$.
□

Teorema 23.4 *Seja \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{X} tal que:*

1. $\mathbb{M}_A(\mathcal{A}) = \mathcal{X}_A$;
2. c_A é fracamente hereditário relativamente a $PS(\mathbb{M}_A)$;
3. para cada objecto X em \mathcal{X}_A , existe uma fonte $(f_i : X \rightarrow Y_i)_I$ em $PS(\mathbb{M}_A)$ com $Y_i \in \underline{\underline{SCL}}(\mathcal{A})$ para todo o $i \in I$.

então $\underline{\underline{\mathcal{O}}}(\mathcal{A})$ coincide com $\underline{\underline{SCL}}(\mathcal{A})$ e é um invólucro multi-reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{X} .

Demonstração. Em primeiro lugar, mostremos que

- (i) c_A é fracamente hereditário relativamente a $PS(\mathbb{M}_A)$,
- (ii) c_A preserva morfismos de $PS(\mathbb{M}_A)$,
- (iii) o operador de fecho ortogonal

$$c_A : PS(\mathbb{M}_A) \rightarrow PS(\mathbb{M}_A)$$

é idempotente e fracamente hereditário.

De facto:

- (i) Seja $m : X \rightarrow Y$ um morfismo de $PS(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$, então a fonte constituída pelos morfismos m e 1_X pertence a $PS(\mathbb{M}_{\mathcal{A}})$; logo, por hipótese, a fonte $(X, (d_{\mathcal{A}}(m), 1_X))$ é $c_{\mathcal{A}}$ -densa e, em particular, $d_{\mathcal{A}}(m)$ é $c_{\mathcal{A}}$ -denso.
- (ii) Seja $m : X \rightarrow Y$ um morfismo de $PS(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ e seja $X \xrightarrow{d_{\mathcal{A}}(m)} \overline{X} \xrightarrow{c_{\mathcal{A}}(m)} Y$ a factorização determinada por $c_{\mathcal{A}}$. Seja $g : \overline{X} \rightarrow A$ um morfismo com codomínio em \mathcal{A} e seja $(\overline{m}, \overline{g})$ uma componente da multi-soma amalgamada de $c_{\mathcal{A}}(m)$ ao longo de g . Como $d_{\mathcal{A}}(m)$ é $c_{\mathcal{A}}$ -denso, é um epimorfismo e, então, de 22.5.2, $(\overline{m}, \overline{g})$ é uma componente duma multi-soma amalgamada de m ao longo de $g \cdot d_{\mathcal{A}}(m)$, logo $\overline{m} \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$; consequentemente, $c_{\mathcal{A}}(m) \in PS(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$.
- (iii) Resta mostrar que $c_{\mathcal{A}} : PS(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}) \rightarrow PS(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ é idempotente e, por 4.4, basta mostrar que a classe de todos os morfismos $c_{\mathcal{A}}$ -densos de $PS(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ é fechada para a composição. Sejam $X \xrightarrow{m} Y$ e $Y \xrightarrow{n} Z$ morfismos $c_{\mathcal{A}}$ -densos de $PS(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ e seja $X \xrightarrow{g} A$ um morfismo com codomínio em \mathcal{A} . Seja (r, s) uma componente da multi-soma amalgamada de $(n \cdot m, g)$. Vamos mostrar que, por um lado, $r \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ e, por outro lado, o produto fibrado de r ao longo de s é um isomorfismo. Seja $((\overline{m}, \overline{g}), t)$ o par único tal que $(\overline{m}, \overline{g})$ é uma componente da multi-soma amalgamada de (m, g) e t é um morfismo tal que $t \cdot \overline{m} = r$ e $t \cdot \overline{g} = s \cdot n$. Então, como $\overline{m} \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ e m é $c_{\mathcal{A}}$ -denso, o produto amalgamado de \overline{m} ao longo de \overline{g} é um isomorfismo e, assim, por 22.5.1, conclui-se que \overline{m} é um isomorfismo. Agora, como m é um epimorfismo, por ser $c_{\mathcal{A}}$ -denso, atendendo a 22.5.2, decorre que (r, s) é uma componente da multi-soma amalgamada de $(n, \overline{m}^{-1} \cdot \overline{g})$. Logo, como o codomínio do morfismo $\overline{m}^{-1} \cdot g$ está em \mathcal{A} e $n \in PS(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$, temos que $r \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$. Por outro lado, o facto de n ser $c_{\mathcal{A}}$ -denso implica que o produto fibrado de r ao longo de s é um isomorfismo. Por conseguinte, $P_{\mathcal{A}}(n \cdot m)$ só contém isomorfismos e, consequentemente, $n \cdot m$ é $c_{\mathcal{A}}$ -denso.

A inclusão $\underline{\underline{SCL}}(\mathcal{A}) \subseteq \underline{\underline{Q}}(\mathcal{A})$ é imediata de 23.3.2.

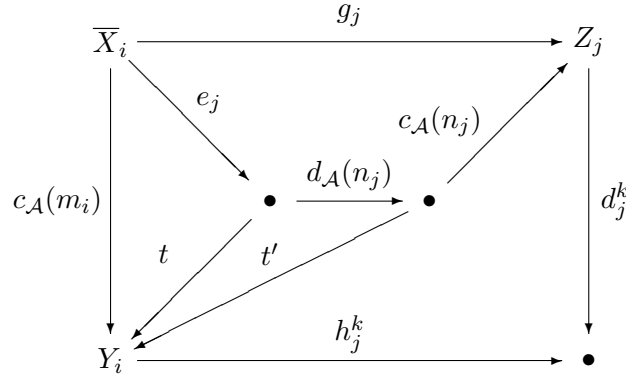
Mostremos agora que $\underline{\underline{SCL}}(\mathcal{A})$ é multi-reflectiva em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$, pelo que se conclui que $\underline{\underline{SCL}}(\mathcal{A}) = \underline{\underline{Q}}(\mathcal{A})$ e $\underline{\underline{Q}}(\mathcal{A})$ é o invólucro multi-reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{X} . Seja X um objecto em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ e seja $(f_i : X \rightarrow Y_i)_I$ pertencente a $PS(\mathbb{M}_{\mathcal{A}})$ com $Y_i \in \underline{\underline{SCL}}(\mathcal{A})$ para todo o $i \in I$. Seja $X \xrightarrow{e_i} X_i \xrightarrow{m_i} Y_i$ uma factorização $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ de cada f_i e seja $m_i = X_i \xrightarrow{d_{\mathcal{A}}(m_i)} \overline{X}_i \xrightarrow{c_{\mathcal{A}}(m_i)} Y_i$.

Vamos ver primeiro que, para cada $i \in I$, \overline{X}_i é um objecto de $\underline{SCL}(\mathcal{A})$. Dado $i \in I$, seja $(\overline{X}_i \xrightarrow{g_j} Z_j)_J$ pertencente a $PS(\mathbf{M}_{\mathcal{A}})$. A família $((h_j^k, d_j^k))_{k \in K_j, j \in J}$, onde $(h_j^k, d_j^k)_{k \in K_j}$ é a multi-soma amalgamada de g_j ao longo de $c_{\mathcal{A}}(m_i)$ em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$, é não vazia, visto $(g_j)_J$ pertencer a $PS(\mathbf{M}_{\mathcal{A}})$ e $Y_i \in \text{Obj}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}})$. Além disso, usando 22.6.1, é óbvio que a fonte $(h_j^k)_{k \in K_j, j \in J}$ pertence a $PS(\mathbf{M}_{\mathcal{A}})$. Então, como Y_i pertence a $\underline{SCL}(\mathcal{A})$, todos os h_j^k são $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ -morfismos $c_{\mathcal{A}}$ -fechados. Para cada $j \in J$, seja $g_j = n_j \cdot e_j$ a factorização $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ de g_j . Agora, para cada $j \in J$ e cada $k \in K_j$, como $h_j^k \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ e $e_j \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$, segue-se, de 4.3, que existe um único morfismo t tal que

$$h_j^k \cdot t = d_j^k \cdot n_j \quad (\text{VI.6})$$

$$\text{e } t \cdot e_j = c_{\mathcal{A}}(m_i). \quad (\text{VI.7})$$

Da igualdade (VI.6), conclui-se que $h_j^k \cdot t = d_j^k \cdot c_{\mathcal{A}}(n_j) \cdot d_{\mathcal{A}}(n_j)$ e assim, como h_j^k é $c_{\mathcal{A}}$ -fechado, existe um único morfismo t' tal que $h_j^k \cdot t' = d_j^k \cdot c_{\mathcal{A}}(n_j)$ e $t' \cdot d_{\mathcal{A}}(n_j) = t$.



Consequentemente, temos

$$c_{\mathcal{A}}(m_i) = t \cdot e_j = t' \cdot d_{\mathcal{A}}(n_j) \cdot e_j. \quad (\text{VI.8})$$

Agora, o facto de, na igualdade (VI.7), $e_j \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ e $c_{\mathcal{A}}(m_i) \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ implica que e_j seja um isomorfismo, porque $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ é um sistema de factorização para morfismos e $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \subseteq \text{Epi}(\mathcal{X}_{\mathcal{A}})$. Por conseguinte,

$$c_{\mathcal{A}}(m_i) \cdot e_j^{-1} = t' \cdot d_{\mathcal{A}}(n_j). \quad (\text{VI.9})$$

Por outro lado, o facto de $c_{\mathcal{A}} : PS(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}) \rightarrow PS(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ ser um operador de fecho idempotente e fracamente hereditário implica que $d_{\mathcal{A}}(n_j)$ seja $c_{\mathcal{A}}$ -denso (logo, um epimorfismo) e, ademais, que $c_{\mathcal{A}}(m_i)$ seja $c_{\mathcal{A}}$ -fechado.

Então, pela igualdade VI.9, há um e um só morfismo s tal que

$$s \cdot d_{\mathcal{A}}(n_j) = e_j^{-1}.$$

Esta igualdade implica que o epimorfismo $d_{\mathcal{A}}(n_j)$ seja também um isomorfismo, ou seja, n_j é $c_{\mathcal{A}}$ -fechado. Consequentemente, como e_j é um isomorfismo, g_j é um $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ -morfismo $c_{\mathcal{A}}$ -fechado. Logo, \overline{X}_i pertence a $\underline{\underline{SCL}}(\mathcal{A})$.

Por conseguinte, atendendo ainda ao facto de $c_{\mathcal{A}}$ ser fracamente hereditário relativamente a $PS(\mathbb{M}_{\mathcal{A}})$, a fonte

$$(X \xrightarrow{d_i} \overline{X}_i)_I = (X \xrightarrow{e_i} X_i \xrightarrow{d_{\mathcal{A}}(m_i)} \overline{X}_i)_I$$

é uma fonte de $PS(\mathbb{M}_{\mathcal{A}})$ $c_{\mathcal{A}}$ -densa e com codomínio em $\underline{\underline{SCL}}(\mathcal{A})$. Mostremos que existe uma subfonte de $(d_i)_I$ que pertence a $PS(\mathbb{M}_{\mathcal{A}})$ e é \mathcal{A} -disjunta. Para isso, basta mostrar que se i e i' são tais que existe um diagrama comutativo em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ da forma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{d_i} & \overline{X}_i \\ \downarrow d_{i'} & & \downarrow g \\ \overline{X}_{i'} & \xrightarrow{h} & \bullet \end{array}$$

então $d_i \cong d_{i'}$. Consideremos tal diagrama comutativo. Sem perda de generalidade, podemos supor que (h, g) é uma componente da multi-soma amalgamada em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ de $(d_i, d_{i'})$. Então, como d_i é parte de uma fonte de $PS(\mathbb{M}_{\mathcal{A}})$, é fácil verificar que o morfismo h é também parte de uma fonte de $PS(\mathbb{M}_{\mathcal{A}})$; assim, como $\overline{X}_{i'}$ é fortemente multi- \mathcal{A} -fechada, h é um morfismo $c_{\mathcal{A}}$ -fechado de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$. Por outro lado, como d_i é um $PC(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ -morfismo $c_{\mathcal{A}}$ -denso, o morfismo h é também $c_{\mathcal{A}}$ -denso (por 22.6.2). Por conseguinte, h é um isomorfismo e $d_{i'}$ é factorizável através de d_i . Analogamente, concluímos que d_i é factorizável por meio de $d_{i'}$. Consequentemente, como d_i e $d_{i'}$ são epimorfismos, isto implica a existência de um isomorfismo t tal que $d_{i'} = t \cdot d_i$.

Seja agora $(X \xrightarrow{d_j} \overline{X}_j)_J$ uma subfonte de $(d_i)_I$ pertencente a $PS(\mathbb{M}_{\mathcal{A}})$ e \mathcal{A} -disjunta. Tal fonte $(d_J)_J$ pertence a \mathcal{A}^{\perp} em $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$, por 22.8. Então, como $\underline{\underline{SCL}}(\mathcal{A}) \subseteq \underline{\underline{O}}(\mathcal{A})$, segue-se que, ademais, por 19.3.2, $\underline{\underline{O}}(\mathcal{A}) = \underline{\underline{SCL}}(\mathcal{A})$. Por conseguinte, $\underline{\underline{O}}(\mathcal{A})$ é o invólucro multi-reflectivo de \mathcal{A} em \mathcal{X} . □

Bibliografia

- [1] J. Adámek, H. Herrlich and G. E. Strecker, Least and largest initial completions, *Comment. Math. Univ. Carolinae* 20, 1 (1979), 43-73.
- [2] J. Adámek, H. Herrlich and G. E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley and Sons, New York 1990.
- [3] J. Adámek, H. Herrlich and J. Reiterman, Cocompleteness almost implies completeness, *Proc. Conf. "Categorical Topology, Prague 1988; World Sci. Publ., Singapore* (1989), 246-256.
- [4] J. Adámek and J. Rosický, Intersections of reflective subcategories, *Proc. Amer. Math. Soc.* 103 (1988), 710-712.
- [5] J. Adámek, J. Rosický, On injectivity in locally presentable categories, *Trans. Amer. Math. Soc.* 336 (1993), 785-804.
- [6] J. Adámek and J. Rosický, *Locally Presentable and Accessible Categories*, Cambridge Univ. Press 1994.
- [7] J. Adámek, J. Rosický, V. Trnková, Are all limit-closed subcategories of locally presentable categories reflective?, *Lect. Notes in Math.*, 1348 (1988), 1-18.
- [8] J. Adámek and H. Volger, On locally reflective categories of structures, MIP-9202, Fakultät für Mathematik und Informatik, Universität Passau (1992).
- [9] S. Baron, Note on epi in T_0 , *Canad. Math. Bull.* 11 (1968), 503-504.
- [10] R. Börger, Multireflectivity and coprime objects, *Topol. and its Appl.* 33 (1989), 127-142.

- [11] R.Börger and W. Tholen, Abschwächungen des Adjunktionsbegriffs, *Manuscripta Math.* 19, (1976) 19-45.
- [12] G. Brümmer, E.Giuli, A categorical concept of completion of objects, *Comm. Math. Univ. Carolinae* 33 (1992), 131-147.
- [13] G. Brümmer, E.Giuli and H.Herrlich, Epireflections which are completions, *Cahiers Topol. Géom. Differ. Cat.* 33 (1992), 71-93.
- [14] C. Cassidy, M. Hébert, G. M.Kelly, Reflective subcategories, localizations and factorizations systems, *J.Austral. Math. Soc.* 38 (1985), 287-329
- [15] G. Castellini, Closure operators, monomorphisms and epimorphisms in categories of groups, *Cahiers Topol. Géom. Differ. Cat.* 27 (1986), 151-167.
- [16] B. J. Day and G. M. Kelly, On topological quotient maps preserved by pullbacks and products, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 67 (1970), 553-558.
- [17] Y. Diers, *Catégories localisables*, These de doctorat d'état, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, 1977.
- [18] D. Dikranjan and E. Giuli, Closure operators I, *Topol. and its Appl.* 27 (1987), 129-143.
- [19] D. Dikranjan and E. Giuli, Urysohn-closed spaces, old and new, preprint.
- [20] D. Dikranjan, E. Giuli and W. Tholen, Closure operators II, in: *Categorical Topology and its relations to Analysis, Algebra and Combinatorics*(Conference Proceedings, Prague 1988), pp.297-335.
- [21] D. Dikranjan, W. Tholen, *Categorical Structure of Closure Operators*, Kluwer Academic Publishers 1995.
- [22] P. J. Freyd and G. M. Kelly, Categories of continuous functors I, *J. Pure Appl. Algebra* 2 (1972), 169-191.
- [23] J. R. Harvey, Reflective subcategories, *Illinois J. Math.* 29 (1985), 365-369.
- [24] H. Herrlich, Categorical Topology 1971-1981, in: *General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra V*, Proceedings Fifth Prague Topological Symposium 1981 (Heldermann Verlag, Berlin 1982), 279-383.

- [25] H. Herrlich, Categorical Topology, *Gen. Topol. and its Appl.* 1 (1971), 1-15.
- [26] H. Herrlich, Epireflective subcategories need not be cowellpowered, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 16(4) (1975), 713-715.
- [27] H. Herrlich, Initial completions, *Math. Z.* 150 (1976), 101-110.
- [28] H. Herrlich, Initial and final completions, *Lect. Notes in Math.* 719 (1978), 137-149.
- [29] H. Herrlich and M. Hušek, Some open categorical problems in Top, *Appl. Cat. Structures* 1 (1993), 1-19.
- [30] H. Herrlich, G. E. Strecker, Coreflective subcategories, *Trans. Amer. Math. Soc.* 157 (1971), 205-226.
- [31] R.-E. Hoffmann, Charakterisierung nüchterner Räume, *Manuscripta Math.* 15 (1975), 185-191.
- [32] R.-E. Hoffmann, Reflective hulls of finite topological spaces, *Arch. Math.* 33 (1979), 258-262.
- [33] R.-E. Hoffmann, Co-well-powered reflective subcategories, *Proc. Amer. Math. Soc.* 90 (1984), 45-46.
- [34] R.-E. Hoffmann, Topological functors admitting generalized Cauchy-completions, in: Proc. Conf. "Categorical Topology, Manheim 1975", *Lect. Notes in Math.* 540 (1976) pp. 286-344.
- [35] R.-E. Hoffmann, Semi-identifying lifts and a generalization of the duality theorem for topological functors, *Math. Nachr.* 74 (1976), 295-307.
- [36] R.-E. Hoffmann, Full reflective restrictions of topological functors, *Math. Colloq. Univ. Cape Town* 11 (1977), 65-88.
- [37] R.-E. Hoffmann, Note on semi-topological functors, *Math. Z.* 160 (1978), 69-74.
- [38] R.-E. Hoffmann, Minimal topological completion of $kBan1 \rightarrow kVec$, *Lect. Notes in Math.* 962 (1982), 123-132.
- [39] S. S. Hong, Extensive subcategories of the category of T_0 -spaces, *Canad. J. Math.* 27, 311-318.

- [40] J. R. Isbell, Epimorphisms and dominions, in: Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla 1965), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1966, pp. 232-246.
- [41] G. Janelidze and W. Tholen, How algebraic is the change-of-base functor?, Proc. Conf. Category Theory, Como 1990, *Lect. Notes in Math.* 1488, (1991) pp. 174-186.
- [42] T. Jech, *Set Theory*, Academic Press, New York 1978.
- [43] V. Kannan and M. Rajagopalan, Constructions and applications of rigid spaces I, *Advances Math.* 29 (1978), 89-130.
- [44] J. Kaput, Locally adjuncyable functors, *Illinois J. Math.* 16 (1972) 86-94.
- [45] E. W. Kiss, L. Márki, P. Pröhle and W. Tholen, Categorical algebraic properties. A compendium on amalgamation, congruence extension, epimorphisms, residual smallness, and injectivity, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 18 (1983), 79-141.
- [46] V. Koubek, Each concrete category has a representation by T_2 paracompact topological spaces, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 15 (1974), 655-664.
- [47] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1971.
- [48] S. Mantovani, Epireflective hulls of spaces of ordinals in T_0 , *Quaestiones Math.* 7 (1984), 203-211.
- [49] J. D. Monk, *Introduction to Set Theory*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, New York 1969.
- [50] L. D. Nel and R. G. Wilson, Epireflections in the category of T_0 -spaces, *Fund. Math.* LXXV (1972), 69-74.
- [51] G. Preuß, *Allgemeine Topologie*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1972.
- [52] D. Pumplün, Universelle und spezielle Probleme, *Math. Ann.* 198 (1972), 131-146.
- [53] J. Reiterman and W. Tholen, Effective descent maps of topological spaces, preprint (York University, 1991).

- [54] C. M. Ringel, Monofunctors as reflectors, *Trans. Amer. Math. Soc.* 161 (1971), 293-306.
- [55] J. Rosický, Concrete categories and infinitary language, *J. Pure Appl. Algebra* 22 (1981), 309-339.
- [56] J. Rosický, Semi-initial completions, *J. Pure Appl. Algebra* 40 (1986), 177-183.
- [57] J. Rosický, Correction to "Semi-initial Completions", *J. Pure Appl. Algebra* 46 (1987), 109.
- [58] J. Rosický and W. Tholen, Orthogonal and prereflective subcategories, *Cahiers Topol. Géom. Differ. Cat.* 29 (1988), 203-215.
- [59] J. Rosický, V. Trnková, J. Adámek, Unexpected properties of locally presentable categories, *Alg. Univ.* 27 (1990), 153-170
- [60] S. Salbany, Reflective subcategories and closure operators, in: Proc. Conf. "Categorical Topology, Manheim 1975", *Lect. Notes in Math.* 540 (1976), pp. 548-565.
- [61] G. Salicrup, Multi-epireflective subcategories, *Topology and its Appl.* 13 (1982), 191-200.
- [62] F. Schwarz and S. Weck-Schwarz, Internal description of hulls: a unifying approach, *Category Theory at Work*, H. Herrlich, H.-E. Porst (eds.), Heldermann Verlag Berlin 1991, 21-34.
- [63] L. Skula, On a reflective subcategory of the category of all topological spaces, *TRans Amer. Math. Soc.* 142 (1969), 37-41.
- [64] M. Sobral, Absolutely closed spaces and categories of algebras, *Portugaliae Math.* 47 (1990), 341-351.
- [65] M. Sobral and W. Tholen, Effective descent morphisms and effective equivalence relations, *Canad. Math. Soc., Conf. Proc.*, Vol. 13 (1992), 421-432.
- [66] L. Sousa, Solid hulls of concrete categories, *Appl. Categ. Structures* 3 (1995), 105-118.

- [67] L. Sousa, Orthogonality and closure operators, *Cahiers Topol. Géom. Differ. Cat.* 36 (1995), 323-343.
- [68] L. Sousa, α -sober spaces via the orthogonal closure operator, *Appl. Categ. Structures* 4 (1996), 87-95.
- [69] L. Sousa, Note on multisolid categories (a aparecer em *J. Pure App. Algebra*).
- [70] W. Tholen, M-functors, *Mathematik Arbeitspapiere* Nr. 7, Universität Bremen (1976), 178-185.
- [71] W. Tholen, Semi-topological functors I, *J. Pure App. Algebra* 15 (1979), 53-73.
- [72] W. Tholen, Factorizations, localizations, and the orthogonal subcategory problem, *Math. Nachr.* 114 (1983), 63-85.
- [73] W. Tholen, Reflective subcategories, *Topol. and its Appl.* 27 (1987), 201-212.
- [74] W. Tholen, MacNeille completions of concrete categories with local properties, *Comment. Math., Univ. St. Pauli*, 28 (1979), 179-202.
- [75] V. Trnková, Automata and categories, *Lect. Notes in Computer Science* 32 (1975), 138-152.
- [76] V. Trnková, Non-constant continuous mappings of metric or compact Hausdorff spaces, *Comment. Math. Univ. Carolinae* 13 (1972), 283-295.
- [77] V. Trnková, J. Adámek and J. Rosický, Topological reflections revisited, *Proc. Amer. Math. Soc.* 108 (1990), 605-612.
- [78] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company (1970)
- [79] H. Wolff, Free monads and the orthogonal subcategory problem, *J. Pure Appl. Algebra* 13 (1978), 233-242.

Índice de Categorías

<i>Ban</i>	1.5.6, 9.2
<i>BiComp</i>	2.3
<i>BiTop</i>	2.3
<i>CompGen</i>	1.5.7, 14.10.1
<i>Con</i>	16.2.3, 16.5
<i>Fld</i>	16.2.1, 16.5
<i>0-dimHaus</i>	9.5.1
<i>0-dimTop</i>	9.5.2
<i>FinGen</i>	1.5.7, 14.10.1
<i>Gra</i>	15, 15.1, 16.2.3
<i>HComp</i>	1.5.2
<i>HUnif</i>	1.5.4
<i>Met</i>	1.5.5, 9.2
<i>Met*</i>	5.5, 7.7
<i>Norm</i>	1.5.6, 9.2
<i>Norm*</i>	5.5 7.7
<i>Ord</i>	12.1
<i>QMet</i>	14.10.2
<i>QNorm</i>	14.10.2
<i>RComp</i>	1.5.3
<i>Rel(Σ)</i>	13.1
<i>Rng</i>	16.2.1, 16.2.4 16.5
<i>Set</i>	2.8, 8.7
<i>Sob</i>	1.5.1, 14.10.3
<i>TfAb</i>	1.5.8, 7.7, 8.7, 9.2
<i>Top</i>	1.5.7, 7.7, 8.7, 9.2, 14.10.3, 16.2.3
<i>Top₀</i>	1.5.1, 7.7, 8.7, 8.8, 14.10.3
<i>Top₁</i>	9.5, 9.9
<i>Tych</i>	1.5.2, 1.5.3, 8.7, 3.8, 9.5.3
<i>Vec</i>	14.10.2