limite texto

Instituto Politécnico de Viseu

Escola Superior de Educação de Viseu

Marta Alexandra da Costa Lourenço

REPRESENTAÇÕES NA REALIZAÇÃO DE TAREFAS MATEMÁTICAS: o tipo e o papel que desempenham

Tese de Mestrado

Didática da Matemática

Trabalho efectuado sob a orientação de
Professor Doutor António Ribeiro

Viseu, 2014

INSTITUTO POLITÉCNICO DE VISEU

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE VISEU

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE CIENTÍFICA

Marta Alexandra da Costa Lourenço, n.º 9615 do curso Mestrado em Didática da Matemática declara sob compromisso de honra, que a dissertação/trabalho de projeto/relatório final de estágio é inédito e foi especialmente escrito para este efeito.

Viseu, ……… de Maio de 2014

O aluno, ____

Resumo

O presente estudo tem como questão central "Qual o tipo de representações a que os alunos mais recorrem e que papel estas desempenham na realização de tarefas no âmbito do tema *Números e Operações?"*.

A metodologia de investigação assume uma natureza qualitativa e interpretativa com a forma de estudo de caso. Trata-se de uma investigação onde foram estudados três alunos, de forma mais pormenorizada, de uma turma do 1º ciclo do ensino básico (2º ano de escolaridade) de um agrupamento de escolas do concelho de Viseu. A recolha de dados decorreu durante os 2º e 3º períodos (fevereiro e abril) do ano letivo de 2012/2013 através de observação de aulas, entrevista, documentos (notas de campo, registos áudio e vídeo e resolução das tarefas).

Os resultados evidenciam que as representações a que os alunos mais recorrem são as representações icónicas e as representações simbólicas, embora ambas utilizadas pelos alunos de diferentes maneiras, sendo elaboradas com diferentes estratégias. A variedade de representações utilizadas depende da tarefa proposta, ou seja, varia de acordo com o contexto/tipo da tarefa ou com o próprio uso da representação. Os elementos icónicos utilizados pelos alunos surgem em simultâneo com elementos simbólicos. Estes elementos parecem-nos ser uma forma de ligar o enunciado à realidade, uma forma de interpretar o enunciado e para facilitar a resolução. Os elementos simbólicos foram utilizados, sobretudo, para representar e comunicar a solução das tarefas, para resolver as mesmas e, também, para registar ideias.

Palavras-chaves: ensino e aprendizagem da matemática; tarefas matemáticas; representações matemáticas.

Abstract

The present study has as a central issue "What kind of representations that students rely more and what role they play in carrying out tasks under the topic Numbers and Operations?"

The research methodology assumes a qualitative and interpretative nature in the form of case study. This is an investigation in which three students were studied in more detail, a group of the 1st cycle of basic education (2nd grade) of a group of schools in the municipality of Viseu. Data collection took place during the 2nd and 3rd periods (february-april) of the academic year 2012/2013 through classroom observation, interviews, documents (field notes, audio and video recordings and resolution of tasks).

The results show that the representations that students are the most active use iconic representations and symbolic representations, although both used by students in different ways, with different strategies being developed. A variety of representations used depends on the task at hand, in other words, varies with the context / or type of the task with the actual use of the representation. Iconic elements used by students emerge simultaneously with symbolic elements. These elements appear to us to be a way to connect the statement to reality, a way to interpret the statement and to facilitate resolution. The symbolic elements have been used mainly for representing and communicating the solution of the tasks to resolve the same, and also to record ideas.

Keywords: teaching and learning mathematics; mathematical tasks; mathematical representations

Aos meus filhos,

Sofia e José Miguel.

Agradecimentos

Para que este estudo fosse possível não posso esquecer de agradecer a todos aqueles que direta ou indiretamente participaram e contribuíram para que se concretizasse.

Ao meu orientador, Professor Doutor António Ribeiro, pelo apoio, pelas críticas construtivas e também pela disponibilidade que demonstrou ao longo do trabalho.

À professora Isabel Valente por ter disponibilizado a sua sala de aula, os seus alunos, o seu tempo e também, pelas palavras amigas.

À turma na qual se realizou o estudo, essencialmente, aos alunos que participaram no estudo e com os quais também aprendi.

À minha família pela compreensão e apoio demonstrado.

A todas as pessoas que ao longo destes anos sempre me animaram e nunca me deixaram perder a esperança no trabalho que estava a realizar.

A todos, muito obrigada!

Índice

Índice de tabelas

Índice de esquemas

Índice de quadros

Índice de figuras

Introdução

> “As representações matemáticas desempenham um papel importante em toda a aprendizagem desta disciplina, e o trabalho com os conceitos matemáticos mais importantes deve envolver, sempre que possível, mais do que uma forma de representação (…) Os alunos têm de compreender que existe uma variedade de representações para as ideias matemáticas…” (PMEB, 2007, pp. 9)

1. Identificação do problema e objetivos

Na sala de aula, reparamos que os alunos, na realização de tarefas, muitas das vezes recorrem a esquemas ou desenhos para apoiar o pensamento. Nota-se, também, que nem todos recorrem aos mesmos algoritmos ou ao mesmo tipo de representações, aqui entendidas como meios/ferramentas/apoios ao serviço do pensamento, para conseguirem resolver essas mesmas tarefas ou atingir os seus objetivos. Os alunos usam as representações de forma a resolverem as tarefas e, também, para compreenderem o que estão a fazer.

Muitas das vezes, quando nós, os professores, nos apercebemos das dificuldades dos alunos na realização de tarefas, incentivamo-los a utilizarem desenhos, esquemas ou mesmo palavras para conseguirem compreender e resolver a tarefa.

As representações produzidas pelos alunos na realização de tarefas são ferramentas que devem ser desenvolvidas por constituírem uma componente essencial da aprendizagem, dando a possibilidade de organizarem e comunicarem as suas ideias. Uma vez que a diversidade de estratégias e de representações matemáticas que os alunos usam para abordar uma tarefa é grande, o estudo do papel das representações na aprendizagem dos alunos é, ainda, uma área pouco trabalhada. Assim, o principal objetivo deste trabalho é conhecer as representações que os alunos privilegiam e o papel que lhes atribuem na aprendizagem de conceitos matemáticos, como por exemplo, as operações matemáticas (subtração, adição multiplicação e divisão) na realização de tarefas. Para além do nosso interesse, Ponte e Velez (2011) referem que o campo das representações “precisa de atenção, de forma a percebermos melhor o modo de pensar dos alunos e como os podemos ajudar a compreenderem melhor os conceitos e procedimentos matemáticos” (p. 16).

Desta forma, formulou-se a seguinte questão central para esta investigação: “Qual o tipo de representações a que os alunos mais recorrem e que papel estas desempenham na realização de tarefas no âmbito do tema *Números e Operações?”*.

Para melhor abordar a questão central formulámos as seguintes questões orientadoras:

1. A que tipo de representações matemáticas os alunos mais recorrem para realização de tarefas no âmbito do tema “Números e operações”?
2. Quais as maiores dificuldades evidenciadas pelos alunos na construção de representações quando colocados perante uma tarefa?
3. Que papel desempenham as representações a que os alunos recorrem quando colocados perante tarefas no âmbito do tema “Números e operações”?

2. Importância/relevância do estudo

Muitos alunos apresentam dificuldades de aprendizagem na disciplina de Matemática, uma vez que realizam tarefas desprovidas de significado para si mesmos e, também, por não se apoiarem em representações (Ponte, 2005; Goldin, 2008).

As representações assumem um papel importante no ensino e na aprendizagem da Matemática. A importância das representações no ensino é salientada nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar, onde se refere que “quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente” (NCTM, 2007, p.75).

No ensino da Matemática, nem sempre a atenção dos professores recai sobre as representações produzidas pelos alunos, os quais, por vezes, incutem nestes formas rotineiras de resolverem tarefas, nas quais se dá mais importância à aprendizagem de processos formais e não à evolução do pensamento da criança através dos seus próprios registos.

Como os alunos constroem a maior parte do seu conhecimento ao usarem as suas próprias estratégias/métodos, é importante que estes tenham não só "oportunidade para aprender formas convencionais de representação mas também construir e usar as suas próprias representações como ferramentas de apoio para a aprendizagem e para fazer matemática" (NCTM, 2000, p.160). Desta forma, parte-se do princípio que as estratégias/métodos desenvolvidos pelos alunos com essas representações torna a aprendizagem mais significativa, constituindo, assim, um ponto de partida para a construção e evolução do conhecimento dos alunos, pois ao representarem estão a exteriorizar o que pensam. As representações construídas pelos alunos poderão dar-nos indicação da sua compreensão, podem ser usadas para minimizar dificuldades e, ainda, para tornar a matemática mais atrativa e interessante (Ponte, 2005; Goldin, 2008).

Capítulo 1 – Revisão da literatura

Vários são os autores a escrever sobre a Matemática. Como afirmam Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997):

> Ao pretender fazer-se um cômputo geral da Matemática que revele os seus fatores essenciais e explique como é que os seres humanos são capazes de a fazer, torna-se difícil organizar os diversos aspetos num todo coerente. De facto, a simples pergunta «afinal o que é a Matemática?" tem sido, ao longo dos tempos, objeto de diversas tentativas de resposta (p. 9).

1.1. A natureza da matemática

"O que é a matemática?", "Qual a sua natureza?", "Qual o seu objeto de estudo?", são perguntas que apresentam respostas diferentes, pelo facto de não haver unanimidade.

Ao procurarmos definir *matemática* sob o ponto de vista epistemológico, deparamo-nos com diferentes definições, dependendo estas da forma como o autor/matemático a entende. Uma definição simples mas adequada a um dicionário poderá ser "a ciência do raciocínio lógico e abstrato. A matemática estuda quantidades, medidas, espaços, estruturas e variações" (Wikipedia, matemática) ou no dicionário da língua portuguesa que é a "designação genérica das ciências de método essencialmente dedutivo que têm como objeto de estudo os números, figuras geométricas e outras entidades abstratas". Uma vez que esta definição de matemática é pouco exaustiva e não a distingue do seu objeto de estudo, surgem outras definições. Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997), por exemplo, referem que a matemática tem sido encarada sob diferentes perspetivas como "sistema organizado, linguagem, instrumento, atividade (…) Axiomatização, formalização, dedução, são o essencial para alguns e apenas uma parte, nem sequer a mais importante, para outros" (p.1).

Segundo Machado (2001, referido por Ribeiro, 2005) "a partir da segunda metade do séc. XIX, as principais escolas de pensamento acerca da matemática convergiram para três grandes troncos: o logicismo, o formalismo e o intuicionismo" (p. 41). Segundo aquele autor, no logicismo o "conhecimento matemático, mesmo que não seja obviamente verdadeiro, pode ser demonstrado a partir de leis mais simples" (p. 41). Esta corrente mostra que a matemática poder-se-á resumir à lógica. Segundo Ponte e outros (1997), esta corrente foi um fracasso "embora tendo uma enorme importância da moderna lógica matemática, foi um fracasso do ponto de vista da sua intenção inicial" (p. 14). Por outro lado, a corrente formalista pretendia "demonstrar, de uma vez por todas, que a matemática estava livre de contradições" (Ponte e outros, 1997, p. 15).

Segundo Machado (2001, referido por Ribeiro, 2005) para o intuicionismo a matemática consiste "na construção de entidades abstratas que não têm a sua existência postulada à maneira platónica, nem é necessário que emerjam do empírico e tal construção prescinde de uma redução à linguagem especial ou a uma formalização rigorosa num qualquer sistema dedutivo" (pp. 42-43). Para Ponte e outros (1997), com a mesma corrente, concebe-se o pensamento matemático como um "processo de construção mental que, partindo dos números naturais, prossegue através de um número finito de passos e é independente da experiência" (p. 15). Os mesmos autores referem, também, que na corrente intuicionista "a Matemática é uma ciência que tem a sua origem no espírito e aí se exerce" (p. 15). Estas três grandes correntes epistemológicas (logicismo, formalismo e intuicionismo) constituem "as grandes escolas da Filosofia da Matemática, pretendiam resolver o problema de como é que a Matemática deveria ser para atingir os almejados objetivos de perfeição" sendo, no entanto, "de alcance muito limitado em relação ao nosso problema" (Ponte, 1992, p. 11).

De um ponto de vista histórico, a matemática é definida por Davis e Hersh (1995) como "a ciência da quantidade e do espaço", podendo esta definição ser alargada e acrescentar que se ocupa do "simbolismo relacionado com a quantidade e o espaço" (p. 25).

Ainda do ponto de vista histórico, segundo Reis (2003, referido por Ribeiro, 2005) "a visão da matemática modificou-se muito nos últimos cinquenta anos. A sua unidade, justificada na base de uma construção sólida dos fundamentos e das estruturas deu uma nova visão caraterizada por um movimento de abertura, alicerçada em novos problemas, novos métodos e novos conceitos vindos de outras ciências e práticas" (p. 41).

Uma corrente de pensamento mais recente acerca da matemática é o quasi-empiricismo. Ponte e outros (1997) referem que:

> O quasi-empiricismo, enquanto abordagem filosófica, destaca que a Matemática constitui uma atividade humana, simultaneamente individual e social, que decorre de um diálogo entre pessoas que tentam resolver problemas. Os produtos matemáticos podem necessitar de renegociação à medida que mudam os padrões de rigor ou emergem novos desafios e significados. É pela partilha e discussão crítica de ideias relativas aos objetos matemáticos que se torna possível o reconhecimento de saberes matemáticos novos, o alargamento, correção e rejeição de teorias (p. 20).

Ponte (1992) afirma que "a matemática é uma ciência em permanente evolução, com um processo de desenvolvimento ligado a muitas vicissitudes, dilemas e contradições" (p. 11), características essas que muito a aproximam de uma ciência social pois, como o refere Wilder (1998, citado por Ribeiro, 2005)

> enquanto corpo de conhecimento, a matemática não é algo que eu sei, que tu sabes, ou que algum indivíduo sabe: é parte da nossa cultura, da nossa posse coletiva (…) a matemática é-nos ensinada desde que começamos a falar e, também nós, mesmo que nos possamos esquecer, contribuímos de forma individual para essa corrente cultural (p. 45).

Do mesmo modo, Hersh (1997) refere que "a matemática deve ser vista como uma atividade humana, um fenómeno social, parte da cultura humana, que tem lugar num contexto histórico, inteligível somente num contexto social" (pp. 13) e Ponte, Martins, Nunes, Oliveira, Silva, Almeida, Serrazina e Abrantes (1998) afirmam que "a Matemática tem sido tradicionalmente encarada como um corpo de conhecimento. Mas ela pode igualmente ser vista como uma atividade humana" (p. 45).

No que diz respeito à natureza dos objetos matemáticos, são destacadas, segundo Ponte e outros (1997, p. 3) duas correntes: a corrente idealista e a corrente realista ou platonista. Pela perspetiva idealista "toda a realidade matemática é condicionada pelas construções dos matemáticos que inventam essa realidade" sendo, desta forma, os objetos matemáticos "livres invenções do espírito humano", ou seja, os objetos matemáticos não existem, são inventados pelos matemáticos.

Por outro lado, segundo a perspetiva realista, é suposta a existência de um universo matemático autónomo, onde "os objetos têm propriedades próprias que existem independentemente do sujeito, o homem não inventa esta realidade objetiva limita-se a descobri-la” (p. 5). Para esta corrente, os objetos matemáticos são reais, embora não sejam objetos físicos ou materiais. A corrente realista ou platonista é a mais aceite na comunidade matemática.

Como resumo, sobre a natureza da matemática, salientam-se as correntes logicista, intuicionista e formalista. A corrente logicista refere que a matemática se poderá resumir à lógica. Por sua vez, na corrente intuicionista a matemática não existe fora do espírito humano. Finalmente, a corrente formalista quer provar que a matemática está livre de contradições. Como corrente de pensamento mais recente sobre a matemática apresenta-se o quasi-empiricismo.

No que diz respeito à natureza dos objetos matemáticos destacam-se a corrente idealista e a corrente realista. Na corrente idealista, os objetos matemáticos são inventados, enquanto que na corrente realista os objetos matemáticos existem independentemente da existência humana, sendo esta última a mais favorável na sociedade matemática.

1.2. O ensino e a aprendizagem da matemática

No decorrer do desenvolvimento humano encontramo-nos em constante processo de aprendizagem, aprendemos a partir da interação com os outros em casa, na rua, no trabalho e na escola.

A matemática no contexto escolar tem sido uma disciplina temida e às vezes sem importância para os alunos por esta ser trabalhada de uma forma que não se relaciona com a vida quotidiana. Desta forma, tem de se propiciar um ensino e uma aprendizagem com significado, prática e contextualizada com a realidade do aluno.

Ao procurar definir-se o conceito de “aprendizagem” de uma forma geral temos que aprendizagem é o “processo pelo qual as competências, habilidades, conhecimentos, comportamentos ou valores são adquiridos ou modificados, como resultado do estudo, experiência, formação, raciocínio e observação” (Wikipedia, aprendizagem) ou no dicionário de língua portuguesa que aparece como sendo uma “ação ou efeito de aprender”.

Aprendizagem significa “adquirir o conhecimento de uma arte, ofício ou através do estudo ou da experiência” (Inácio, 2007, p. 1). Para este investigador:

> é um processo cognitivo através do qual vamos construindo vários conhecimentos, conceitos, competências, que resultam de uma alteração de comportamento, no sentido de responder adequadamente às novas situações que enfrentamos, aos desafios que nos deparamos e aos quais temos de dar resposta (p. 2).

O mesmo investigador, apoiando-se em diversos autores (Kurt Fischer, 1969; Piéron Henri, 1971; Clifford Morgan, 1977) afirma que:

> a aprendizagem é a mudança durável, no conhecimento ou no comportamento, resultante do treino, experiência ou estudo, ou o processo que ocasiona tal mudança, […] a modificação adaptativa do comportamento ao longo de repetidas provas [e é] qualquer mudança relativamente permanente no comportamento e que resulta da experiência ou da prática (p. 1).

A aprendizagem é, afinal, uma das funções mentais mais importante em humanos e animais. No que respeita à humana, encontra-se relacionada com a educação e o desenvolvimento pessoal, a qual deve ser devidamente orientada, sendo favorecida quando o aluno está motivado (Santos & Lima, 2010). A aprendizagem é "concebida como um processo de aquisição de esquemas de resposta e de adaptações sucessivas ao meio" (Inácio, 2007, p. 14).

Sendo a matemática "um dos ramos do conhecimento humano que há mais tempo é objeto de ensino e, como tal, uma das disciplinas a que, ao longo dos séculos, tem sido atribuída grande importância nos currículos escolares" (Guimarães, 2003, p. 89) os processos envolvidos no seu ensino e na sua aprendizagem têm sido alvo de muitos estudos, tanto mais que se considera existir uma relação muito forte entre a literacia, em particular a literacia matemática, e a capacidade de um indivíduo enfrentar situações novas e complexas (Ribeiro, 2005)

Segundo este investigador "a educação tem como objetivo a formação integral dos indivíduos e que essa formação deve contribuir para a construção de sociedades democráticas onde os cidadãos sejam críticos, ativos e capazes de se adaptar a novas situações" (Ribeiro, 2005, p. 55). Citando Sousa (2003) refere, ainda, que na escola atual todos necessitam de aprender/estudar matemática porque:

> a possibilidade de participação social responsável de um cidadão crítico e informado passa por um conhecimento cultural dos conceitos matemáticos básicos; as capacidades que podem desenvolver-se por meio da prática de resolução de problemas não rotineiros são muito importantes para as pessoas que têm que enfrentar situações laborais complexas e a incorporação massiva

> na sociedade da informação exige uma formação matemática básica (p. 56).

1.2.1. Perspetivas/correntes psicológicas sobre a aprendizagem

Durante muitos anos, a dificuldade de aprendizagem era vista como problema orgânico mas, com a psicanálise, essa visão foi alterada. O processo de aprendizagem pode ser analisado através de diferentes perspetivas, as quais levam à existência de diferentes teorias de aprendizagem. Estas são entendidas como "toda e qualquer reflexão sobre a educação que inclua uma análise dos problemas e das propostas de mudança" sendo acompanhadas, grande parte das vezes, de "reflexões sobre as finalidades da educação, a noção de aprendizagem, os papéis dos docentes, o lugar do estudante, o alcance dos conteúdos e a pertinência sociocultural da educação" (Bertrand, 2001, p.9).

Uma vez que existe um grande número de teorias sobre a aprendizagem, Bertrand (2001) propõe uma classificação que compreende sete categorias: espiritualista, personalista, psicocognitiva, tecnológica, sociocognitiva, social e académica (p. 11), podendo-se encontrar, como é óbvio, outra categorização. Atendendo às mais variadas teorias, foram vários os teóricos que desenvolveram contributos não havendo uma teoria acabada, mas sim diferentes conceções dentro das teorias. Dentro das várias concepções faz-se um breve apanhado às de Maslow, de Piaget e de Vygotsky.

Segundo Maslow, seguidor de uma corrente espiritualista, "a pessoa deve aprender a libertar-se do conhecido e a ultrapassar-se, dominar o seu desenvolvimento espiritual utilizando as suas energias interiores e canalizando-as em atividades como a meditação e a contemplação. A energia encontra-se no interior da pessoa" (Bertrand, 2001, pp. 15-16).

O trabalho de Piaget deu origem a uma nova e significativa teoria sobre o processo de desenvolvimento cognitivo através de estádios. Os estádios definem-se em função do sistema de pensamento e da idade modal.

Para Piaget o desenvolvimento da criança é caraterizado por determinadas formas de pensar e agir em diferentes idades. Estas formas foram denominadas, pelo autor, por estádios, os quais dizem respeito aos diferentes modos de a criança pensar ao longo da vida.

Segundo Piaget o desenvolvimento das estruturas neurológicas que conferem determinadas capacidades passa por quatro fases ou estádios, sendo eles: o sensório-motor (0 aos 2 anos), o pré-operatório (2 aos 7 anos), o operatório-concreto (7 aos 11 anos) e o operatório formal (11 aos 15 anos) (Sequeira, 1990, p. 23).

No estádio sensório-motor a criança apercebe-se da permanência dos objetos, observa-os e passa a ter controlo motor, adquirindo conhecimentos empíricos que são controlados por informações sensoriais imediatos. No estádio pré-operatório a criança começa a desenvolver a linguagem e não demonstra conservar o raciocínio ao longo do tempo. No estádio concreto as crianças começam a lidar com conceitos abstratos, apresentam habilidade em solucionar problemas concretos, já é capaz de organizar o mundo de forma lógica ou operatória, formam grupos e círculos de amizades, compreendem regras. Por último, no estádio formal já são capazes de refletir de forma abstrata e raciocinar sistematicamente (Sequeira, 1990; Pelaes, 2009). Para Piaget (1983, citado por Ribeiro, 2005) “o desenvolvimento é uma equilibração progressiva, uma passagem perpétua dum estado de menos equilíbrio a um estado de equilíbrio superior” (p. 66). O desenvolvimento da inteligência ocorre através da assimilação e acomodação. Segundo o mesmo autor, “os esquemas de assimilação vão-se modificando, configurando os estádios de desenvolvimento. Este processo de desenvolvimento é influenciado por fatores como maturação, exercitação, aprendizagem social e equilibração” (p. 66).

Para Vygotsky, o desenvolvimento do indivíduo é resultado de uma interação permanente entre os processos internos e as influências do mundo exterior. É por meio da linguagem que se constroem os conceitos, sendo esta a grande responsável na evolução da criança (Cabrita, 1998 e Ribeiro, 2005).

Segundo Cabrita (1998) Vygotsky distingue duas formas de construção de conceitos, os “conceitos espontâneos, que se desenvolvem e adquirem significado nas interações e atividades do dia-a-dia, e conceitos científicos, que se desenvolvem a partir do ensino formal e que se integram no sistema de conhecimentos, o qual lhes confere significado” (p. 214).

Para Vygotsky (1988), a formação de conceitos decorre através das relações entre o pensamento e a linguagem, questões culturais na construção de significados, processo de internalização e ao papel da escola enquanto transmissora de conhecimentos.

Também Bruner refere que o “eu é moldado pelo mundo em que vive, que somos agentes culturais e sociais” (Bertrand, 2001, p. 131). Segundo Bruner, a aprendizagem é um processo que acontece dentro do sujeito que aprende mas não está dependente apenas do resultado da interação direta com o ambiente ou com qualquer outro fator externo ao aluno.

Segundo a teoria de Piaget “o desenvolvimento intelectual possui dois componentes que são o cognitivo e o afetivo (Pelaes, 2009, p.4) enquanto que a teoria de Vygotsky fundamenta o desenvolvimento humano como o resultado de um processo sócio histórico - “o eu nunca é independente da sua existência sociocultural, constrói-se a partir de uma grande caixa de ferramentas, que é a sua cultura” (Vygotsky, 1985 citado por Bertrand, 2001, p. 3) a linguagem e a aprendizagem/aquisição de conhecimentos é feita pela interação da pessoa com o meio. Desta forma, o sujeito não nasce pronto nem é resultado exclusivo da ação do ambiente externo.

Vygotsky insere-se nas teorias sociocognitivas, as quais se relacionam com os “fatores culturais e sociais na construção do conhecimento (…) descrevem as condições sociais e culturais do ensino e da aprendizagem” (Bertrand, 2001, p. 17).

Para Vygotsky existem pelo menos dois níveis de desenvolvimento, um real, que já é adquirido ou formado e determina o que a criança já é capaz de fazer por si própria, e um potencial, ou seja, que é capaz de aprender com outra pessoa.

Desta forma, o conhecimento é produto da interação do homem com o meio físico e social, o conhecimento não é dado mas sim construído através de interações sociais.

1.2.2. Implicações pedagógicas

> Diferentes pedagogias não são apenas veículos para produzir mais ou menos conhecimentos, elas modelam a natureza do conhecimento produzido e definem a identidade dos alunos em relação à matemática através das práticas nas quais se envolvem (Boaler, 2002, citado por Vale, 2012, p.5).

O professor deve ser aberto, ter um olhar positivo para o estudante e, sobretudo, ajudar o aluno a descobrir-se. A melhor maneira de ensinar a matéria é facilitar a perceção intuitiva da relação do aluno com o Universo (Bertrand, 2001).

Por um lado, as teorias psicocognitivas preocupam-se "com o desenvolvimento dos processos cognitivos do aluno, tal como o raciocínio, a análise, a resolução de problemas, as representações, as conceções preliminares, as imagens mentais, a metacognição, etc." (Bertrand, 2001, p. 16).

Na prática pedagógica, o professor ensina o aluno para a aprendizagem analisando as suas necessidades e os seus objetivos de aprendizagem. O conhecimento do aluno depende da sua visão do mundo e da sua experiência. O professor fornece a informação, factos e pistas que ajudem o aluno a compreender, organizar e reter os conhecimentos. Os alunos aprendem fazendo. Ensinar não é transmitir conhecimentos, mas sim orientar o aluno no desenvolvimento das suas capacidades (Forrester & Jantzie, 2004; Papert, 1996).

No construtivismo social, "os aspetos fundamentais do conhecimento não vêm pré formados nos genes nem são diretamente adquiridos do mundo exterior, mas são antes construídos pelo próprio indivíduo" (Ponte, 1992, p. 5). O mesmo autor refere que o construtivismo teve a "virtude de chamar a atenção para a importância da ação do sujeito no processo de criação do saber" (p. 7). Desta forma é o aluno que constrói o seu conhecimento/aprendizagem através da experimentação e da pesquisa.

Segundo esta teoria, a aprendizagem deve ser ativa e internamente construída pelo aluno e não completamente explicada por qualquer outra pessoa (Ribeiro, 2005). Desta forma, a aprendizagem não é adquirida através da apresentação de informação por parte de outra pessoa.

Fazendo referência a Mergel (1998), Ribeiro (2005) refere que no que respeita à prática pedagógica, os construtivistas são a favor que:

- O conhecimento é construído através da experiência;

- A aprendizagem é uma interpretação pessoal do mundo;

- A aprendizagem é um processo ativo em que os significados são desenvolvidos na base da experiência;

- O crescimento conceptual decorre da negociação de significados, partilha de múltiplas perspetivas e da mudança de representações através da aprendizagem colaborativa;

- A aprendizagem deve decorrer em contextos reais; o processo de verificação das aprendizagens deve ser integrado nas tarefas e não uma atividade separada. (p. 61)

Desta forma, "o sujeito deve desempenhar um papel ativo na construção do seu conhecimento na interação com o saber mediado pelo 'artefacto' e/ou pelos 'outros' rejeitando, desta forma, modelos de ensino que sejam baseados na exposição" (Ribeiro, 2005, p. 82).

Para Vygotsky o professor é o mediador entre o sujeito e o objeto de estudo, o aluno aprende com o grupo onde está inserido socialmente seja pela linguagem, pelos valores ou pelos conhecimentos. Vygotsky refere que a criança possui um certo controlo sobre o seu desenvolvimento, podendo este crescer dependendo da sua aprendizagem (Bertand, 2001, p. 133).

No que diz respeito à prática pedagógica, os construtivistas colocam a raiz da aprendizagem na experiência, na construção do conhecimento através da argumentação, do trabalho colaborativo, da discussão e do debate. A aprendizagem depende de atividades de experimentação e exploração. Os alunos constroem representações internas do conhecimento, interpretações pessoais das suas experiências, estando estas representações sujeitas a mudanças.

Na prática pedagógica de orientação construtivista, os alunos assumem a co-responsabilidade da sua própria aprendizagem, selecionando e desenvolvendo as suas próprias estratégias e, também, os próprios objetivos (Inácio, 2007).

Numa perspetiva construtivista, o professor, os alunos e os conteúdos de ensino têm um papel muito diferente. Nesta perspetiva o aluno constrói a sua própria aprendizagem, sendo assim, mais exigente para o professor, pois tem de selecionar e propor tarefas que suscitem o envolvimento e a atividade dos alunos que os levem a sentir o prazer da descoberta, isto para gostarem da Matemática. Nestas aulas o professor deve propor tarefas variadas e que possam ser resolvidas de diferentes modos para o aluno se envolver de forma ativa e reflexiva. Desta forma, a aprendizagem é um processo de experimentação e desenvolvimento de construção do conhecimento e o professor torna-se um facilitador do processo ensino-aprendizagem e não um transmissor de conhecimentos.

Segundo Ponte e Serrazina (2000) “cabe ao professor assumir um papel de planificador e facilitador de aprendizagem e não apenas um papel de mero transmissor de conhecimentos. (…) Aos professores exige-se espírito de iniciativa, recetividade às ideias e sugestões da criança”.

NCTM (1991) refere que o professor deve proporcionar aos alunos um ambiente onde se sintam livres para explorar ideias matemáticas, colocar questões, discutir as suas ideias e cometer erros.

Por outro lado, a aprendizagem matemática que os alunos fizeram com as experiências que tiveram refere-se, muitas vezes, a uma aprendizagem baseada em exercícios rotineiros, os quais privilegiam os cálculos e as memorizações “isoladas”. A aprendizagem matemática não deve ser sustentada na resolução de exercícios e na aplicação de fórmulas. Silva e Santiago (2011) referem que aprender matemática não é apenas compreender a já feita mas, também, ser capaz de fazer investigação de natureza matemática. Segundo Braumann (2002):

> aprender matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. (…) Para verdadeiramente aprender é preciso montar na bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles (Silva e santiago, 2011, p.2).

Desta forma, e segundo Ponte e Serrazina (2000), aprende-se Matemática quando se resolve problemas. Os problemas desenvolvem a compreensão das ideias matemáticas e ajudam na consolidação das capacidades já aprendidas sendo, também, um meio para desenvolver novas ideias matemáticas. Desta forma, o professor é fundamental na aprendizagem dos seus alunos (na construção do seu conhecimento), como orientador. O professor tem que ser capaz de construir um ambiente de aprendizagem estimulante e criar múltiplas oportunidades de discussão e de reflexão entre alunos (Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira e Varandas, 1999, p. 149).

1.3. O papel das tarefas no processo de ensino e aprendizagem da matemática

1.3.1. Definição

A definição ou o entendimento de *tarefa* é variado. Ao procurar definir-se o conceito de "tarefa", de uma forma geral, temos que tarefa é "o trabalho que se deve executar dentro de um prazo" (dicionário de língua portuguesa, 2009).

Stein, Remillard & Smith (2007) entendem *a tarefa* como "a atividade matemática na sala de aula cujo propósito é focar a atenção dos alunos numa ideia matemática particular" (p. 346). Segundo Stein & Smith (2009), as tarefas podem ser assumidas como um segmento da atividade de sala de aula, orientada para o desenvolvimento de uma ideia matemática particular, podendo envolver problemas relacionados entre si ou um trabalho prolongado sobre um único problema complexo.

Para Ponte (2005) "quando se está envolvido numa atividade, realiza-se uma certa tarefa. Uma tarefa é (…) o objetivo da atividade (…) pode ser formulada pelo professor e proposta ao aluno, ser da iniciativa do próprio aluno e resultar até de uma negociação entre o professor e o aluno" (p. 1)

Assim, podem considerar-se as tarefas como potenciais veículos para o desenvolvimento do conhecimento matemático e como formas de interação e colaboração entre alunos e professor.

São muitos os fatores que influenciam o processo de aprendizagem da matemática, mas as tarefas propostas aos alunos são determinantes na medida em que atuam como 'causas proximais' da aprendizagem (Bispo, Ramalho e Henriques, 2008).

1.3.2. Tipologia das tarefas

As tarefas podem distinguir-se em vários aspetos, sendo eles, o contexto, que pode ser matemático ou não matemático e familiar ou não familiar, o modo de apresentação, que pode ser oral, escrito, e com ou sem recurso a materiais e o tempo previsivel para a sua realização (Ponte, 2005). A importância decisiva da escolha das tarefas para a aprendizagem dos alunos é uma ideia central da educação matemática (Stein e outros, 2007).

Desta forma, o professor deverá selecionar tarefas que contribuam para a construção de novos conhecimentos e com um grau de desafio adequado. Assim "os alunos podem ser parte muito mais ativa do processo de construção do conhecimento, desde que lhes sejam propostas tarefas desafiantes, que se situem ao seu alcance" (Ponte e Serrazina, 2009, p. 3). Segundo Fosnot e Dolk (2001, citado por Brocardo e Delgado, 2009) as tarefas devem seguir as seguintes caraterísticas: permitir o uso de modelos, fazer sentido para os alunos e criar surpresa e suscitar questões" (p. 2). Ponte (2005) refere que as tarefas apresentadas aos alunos devem seguir um percurso de aprendizagem coerente, de forma a contribuírem para a construção de conceitos e compreensão de procedimentos matemáticos por parte dos alunos. Ponte (2005) propõe duas dimensões fundamentais para a análise das tarefas, sendo a estrutura e o grau de complexidade/desafio matemático, onde refere que tarefas de diferentes tipos têm um papel próprio a desempenhar no processo de ensino e aprendizagem. Por um lado, o grau de estrutura varia entre os polos "aberto" e "fechado". Por outro lado, o grau de desafio matemático varia entre os polos de desafio "reduzido" e "elevado" e está relacionado com a perceção da dificuldade de uma questão. Segundo o mesmo autor, as tarefas propostas aos alunos podem ser designadas de problemas, exercícios, investigações, atividades de exploração e projetos. Uma exploração é uma tarefa relativamente aberta e fácil. Um exercício é uma tarefa fechada e de desafio reduzido. Um problema é uma tarefa fechada, mas com elevado desafio. Uma investigação é uma tarefa aberta e de desafio elevado.

Estudos sugerem que tarefas baseadas na exploração dos conceitos matemáticos encorajam formas de raciocinar mais produtivas do que tarefas baseadas numa aprendizagem mecânica (Hierbert & Wearne, 1993 referido por Bispo e outros, 2008).

Stein e Lane (1996) citado por Bispo e outros (2008) definem:

> duas dimensões determinantes na influência da tarefa sobre o processo de aprendizagem, uma primeira relacionada com o grau com que a tarefa conduz à utilização de múltiplas estratégias de resolução, encoraja múltiplas representações e exige explicação de raciocínio aos alunos e, uma segunda, relacionada com o nível e o tipo de exigência cognitiva (p. 5).

Stein e outros (2007) categorizam as tarefas em dois grandes grupos, sendo eles, com nível cognitivo elevado e reduzido.

As tarefas passam por três fases, sendo o conhecimento dessas fases importante para a aprendizagem dos alunos. A primeira fase das tarefas é como elas aparecem nos materiais curriculares, a segunda fase diz respeito à forma como são apresentadas pelo professor aos seus alunos e, por fim, a terceira fase tem que ver com o modo como elas são resolvidas pelos alunos (Stein e Smith, 2009). No entanto, o professor deve ter o cuidado de selecionar, analisar e adaptar as tarefas para que os alunos consigam alcançar determinado objetivo de aprendizagem.

As tarefas devem ser diversificadas pois, desta forma, os alunos deparam-se com diferentes oportunidades de pensar possibilitando, assim, uma diversidade de experiências matemáticas pois, como referem Stein & Smith (2009), as:

> tarefas que pedem aos alunos a execução de um procedimento memorizado, de maneira rotineira, representam um certo tipo de oportunidade para os alunos pensarem; tarefas que exigem aos alunos que pensem conceptualmente e que os estimulem a fazer conexões representam um tipo diferente de oportunidade para os alunos pensarem (p. 22).

Isto porque, como já referimos, existem diversos tipos de tarefas matemáticas que se podem organizar consoante o seu grau de abertura, de desafio cognitivo, de relação com a realidade e de duração de realização (Ponte, 2005). Também Stein e Smith (2009) referem que é importante que os alunos tenham oportunidade de explorar tarefas de natureza diversificada: *problemas*, *exercícios* e *tarefas de investigação*.

Para se designar uma tarefa de *problema*, esta tem de apresentar um grau de dificuldade apreciável, ou seja, não pode ser demasiado difícil porque o aluno pode ser levado a desistir e não pode ser muito acessível pois, desta forma, deixa de ser problema e passa a ser considerado exercício. A diferença está no processo de resolver a tarefa. Se o aluno é capaz de resolver a tarefa de imediato, está perante um *exercício*, caso contrário é um *problema*. Segundo Vale e Pimentel (2004), estamos perante um problema “se não se sabe como chegar até à solução” e perante um exercício “se uma questão não tem surpresas e pode ser resolvida confortavelmente utilizando procedimentos rotineiros e familiares” (p. 13). As *investigações* e as tarefas de exploração promovem o envolvimento do aluno desde o início até à sua conclusão. Estes tipos de tarefas diferem no grau de desafio. Se for uma tarefa pouco ‘trabalhada’ trata-se de uma tarefa de *exploração*, caso contrário trata-se de uma *investigação*. Por sua vez, o *projeto* difere da *investigação* no que respeita à sua duração, pois o *projeto* é uma tarefa mais longa que a *investigação* (Ponte, 2005). Para Ponte (2005), os exercícios “servem para o aluno pôr em prática os conhecimentos já anteriormente adquiridos” e “servem essencialmente um propósito de consolidação de conhecimentos” (p. 14). Tanto os exercícios como os problemas têm o seu próprio valor, no entanto, cabe ao professor manter um equilíbrio dos mesmos.

Vários são os autores que têm estudado a relação entre as tarefas propostas pelos professores e os conhecimentos matemáticos adquiridos pelos alunos, os quais constatam que o tipo de tarefa que é a apresentada aos alunos influencia a aprendizagem da matemática (Marx & Walsh,1988, Hibert & Wearne, 1993 referidos por Bispo e outros, 2008).

Além disto, é importante ter em consideração uma forma sistemática e organizada de trabalhar as tarefas na sala de aula, pois como alerta Ponte (2005) “não basta, no entanto, selecionar boas tarefas – é preciso ter em atenção ao modo de as propor e de conduzir a sua realização na sala de aula” (p.12).

Ponte e Serrazina (2009) referem, também, que as tarefas a propor têm de estar inter-relacionadas entre si e devem ser apresentadas aos alunos em sequências coerentes (cadeias de tarefas) de modo a proporcionar um percurso de trabalho favorável à sua aprendizagem (p. 3).

1.3.3. Resolução de problemas

A noção de problema matemático não é consensual na comunidade escolar. Alguns autores consideram que um problema matemático é uma tarefa onde é necessário encontrar uma solução não existindo processos definidos e estilizados para isso (Fernandes, 2007). Para Vale e Pimentel (2004), um problema é uma situação onde um indivíduo ou grupo é chamado a realizar uma tarefa para a qual não tem acesso a um algoritmo que determine completamente o método de resolução. Se a realização da tarefa não for desejada pelo indivíduo ou grupo, a situação não se pode considerar um problema (Vale e Pimentel, 2004). Por outro lado, para Dante (1998) um *problema* é qualquer situação que exija pensar matematicamente e ter conhecimentos específicos para a solucionar.

Vários são os autores que se têm dedicado a estudar os processos de resolução de problemas. Neste sentido, Schoenfeld (1996) enumera as seguintes caraterísticas do que ele considera ser um bom problema: acessível, facilmente compreendido; ter a possibilidade de ser resolvido ou abordado por diferentes estratégias; permitir o trabalho dos vários conceitos matemáticos, que levam a ideias matemáticas relevantes e ter a possibilidade de generalizar. Para Dante (1998), um bom problema deve: ser desafiador para o aluno; ser real; ser interessante; ser o elemento de um problema realmente desconhecido, ou seja o aluno não conhece imediatamente o processo a seguir para o solucionar; não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas e; ter um nível adequado de dificuldade. Um bom problema deve ser capaz de instigar o aluno a resolvê-lo. Deve ser interessante, criativo, desenvolver o pensamento e desafia-lo (o aluno/indivíduo) constantemente, pois se não acontecer ficará desmotivado.

Pólya (1945), como defensor da resolução de problemas enquanto metodologia a privilegiar na educação matemática, referia que “ter um problema significa procurar conscienciosamente alguma ação apropriada para atingir um objetivo claramente definido, mas não imediatamente atingível”.

Segundo Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) diversos autores referem que a “resolução de problemas é o processo de aplicar o conhecimento previamente adquirido a situações novas e que pode envolver exploração de questões, aplicação de estratégias e formulação, teste e prova de conjeturas” e “constituindo uma pare integrante de toda a aprendizagem matemática” (p. 14).

A resolução de problemas deve ser parte integrante de toda a aprendizagem matemática e não deve ser apresentada isoladamente, mas com o contexto no qual se desenvolve o ensino. O Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2007) contemplou, a para do desenvolvimento dos temas matemáticos, o desenvolvimento de capacidades transversais, entre elas a resolução de problemas. A resolução de problemas atravessa todas as áreas e domínios do currículo, para além de se evidenciar no dia-a-dia, sendo por isso importante desenvolver, desde cedo, a capacidade de resolver problemas de natureza diversa e a flexibilidade do raciocínio.

Através da resolução de problemas, os alunos poderão construir novos conhecimentos, incorporar uma diversidade de estratégias e procedimentos e perceber a aplicabilidade da matemática, estabelecendo conexões com outras áreas e com o contexto real (NCTM, 2000). A resolução de problemas de matemática, para além do conhecimento de procedimentos e técnicas exige a capacidade de os mobilizar e colocar em ação, de pensar em estratégias que, à partida, não são diretas nem pré-estabelecidas, e de recorrer a diversas formas de comunicar o raciocínio e o processo de resolução (English, Lesh & Fennewald, 2008).

A resolução de problemas prepara o aluno para a vida, desenvolvendo o raciocínio através de uma linguagem que favorece a aprendizagem de vários conceitos fundamentais e de forma articulada.

Stein e Smith (2009) referem que para se desenvolver a capacidade de raciocinar e resolver problemas dos alunos, é necessário investir em tarefas com elevado nível de complexidade cognitiva. Também Ponte e Serrazina (2000) refere que os alunos devem compreender que a resolução de problemas deve assentar num plano que envolva os alunos num processo de elevado nível de complexidade cognitiva onde estejam presentes os processos de representar, relacionar e comunicar e que não é uma tarefa de aplicação de algoritmos ou fórmulas.

Alguns estudos sugerem que um ensino baseado em tarefas associadas a níveis de exigência cognitiva elevados conduz a melhores desempenhos na matemática (Hierbert & Carpenter, 1992, Steins e Lane, 1996 referidos por Bispo e outros, 2008).

Para Dante (1998) os objetivos da resolução de problemas são: fazer o aluno pensar produtivamente; desenvolver o raciocínio do aluno; ensinar o aluno a enfrentar situações novas; dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática; tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras; equipar o aluno com estratégias para resolver problemas e; dar uma boa base matemática às pessoas.

Por outro lado, para Schoenfeld (1996), o principal objetivo da resolução de problemas é ajudar a aprender e a pensar matematicamente ou seja, ver o mundo de um ponto de vista matemático (modelar, simbolizar, abstrair, e aplicar as ideias matemáticas) e ter as ferramentas do ofício para matematizar com sucesso. Os problemas são ponto de partida para discussões matemáticas. Os problemas e as suas soluções devem servir como introduções a importantes ideias matemáticas e, servir como 'germens' para 'honestas e boas' explorações matemáticas.

Por outro lado, Pólya (1945, 1977) refere que os problemas que permitem aos alunos realizarem novas aprendizagens devem: envolver tanto o trabalho dos conceitos base que pretendemos consolidar, como o trabalho de vários conceitos matemáticos; envolver a comunicação; obrigar a análise retrospetiva evidenciando a veracidade de resposta; promover o desenvolvimento do pensamento matemático; permitir o desenvolvimento de capacidades de visualização e representação e; evidenciar múltiplas conexões entre os conteúdos matemáticos.

Segundo Pólya (1945, 1977) a resolução de um problema deve respeitar as seguintes etapas:

1) Compreensão do problema – o aluno tenta perceber o problema, descobrindo quais os dados, as incógnitas e escolhe uma forma de resolução adequada. Surgindo daqui algumas questões orientadoras: O que se pede no problema? Qual é a incógnita? Quais são os dados? É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama?

2) Estabelecimento de um plano – o aluno tenta descobrir quais as conexões entre os dados e a incógnita procurando encontrar um plano de resolução.

3) Execução do plano – o aluno deve trabalhar o plano traçado na etapa anterior, verificando-o sempre passo a passo.

4) Verificação sobre a resolução – o aluno examina a solução obtida, verificando o resultado e o raciocínio. Deve questionar-se: É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível utilizar o mesmo método para resolver problemas semelhantes?

Qualquer um dos tipos de tarefa mencionado por Ponte (2005), pelas suas características próprias, leva a diferentes aprendizagens dos alunos. Isto depende da forma como o professor as apresenta e como as explora, sendo o papel do professor determinante na sua seleção. É importante o professor reconhecer nas tarefas as caraterísticas essenciais que contribuem para proporcionar aos alunos aprendizagens específicas que pretende. Além disto, o professor também deve ter, na sua preparação letiva, o cuidado de sequenciar as tarefas matemáticas que propõe aos alunos ao longo do tempo, pois esta sequência de tarefas deve procurar desenvolver um conjunto de aspetos interrelacionados. Segundo Brocardo e Delgado (2009) a construção desta sequência de tarefas deve, por um lado, partir do conhecimento dos alunos, tendo como base um momento diagnóstico, permitindo, assim, saber os conhecimentos que os alunos já têm e, por outro lado, ter em conta a progressão na aprendizagem aquando da sua construção, ou seja, "as tarefas são concebidas sequencialmente permitindo a passagem de níveis baixos de estruturação das operações para níveis mais elevados, a que corresponde um processo de matematização vertical" (p. 3).

Desta forma, o professor deve propor problemas aos seus alunos para que estes se possam sentir desafiados nas suas capacidades matemáticas e assim experimentarem o gosto pela descoberta (Ponte, 2005).

1.3.4. Consequências para a sala de aula

As práticas profissionais do professor na sala de aula de Matemática tem como princípios fundamentais: as tarefas propostas aos alunos, com as representações e materiais que lhes estão associados e, o tipo de comunicação que ocorre na sala de aula, associado às normas e papéis assumidas por alunos e professor (Quaresma e Ponte, 2012).

Hoje em dia parece consensual o reconhecimento da importância da tarefa como base das experiências matemáticas a proporcionar aos alunos. Desta forma, o professor desempenha um papel importante no decorrer de uma aula, pois é ele que, regra geral, seleciona as tarefas que os alunos realizam na aula, organiza o trabalho na sala de aula, orienta a comunicação entre alunos e destes com o professor, deve ter como preocupação a criação de oportunidades para que os alunos desenvolvam atividades com significado para eles.

O professor é "o elemento fundamental na condução da aula, é a ele que compete decidir quais as tarefas a desenvolver, como orientar a comunicação na sala de aula, e como organizar o trabalho na sala de aula, de forma que os alunos desenvolvam uma atividade matemática significativa" (Martins e Santos, 2012, p. 456).

O aluno deve procurar uma estratégia para resolver a tarefa apresentada pelo professor, deve ser capaz de questionar e tratar de resolver a tarefa utilizando o pensamento, a criatividade, o raciocínio, deve ser capaz de analisar a tarefa de forma crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação. O aluno deve ser um sujeito ativo na sua aprendizagem.

1.3.5. Resumo

As tarefas matemáticas são fundamentais para a aprendizagem dos alunos, pois são potenciais veículos para o desenvolvimento do conhecimento matemático, são um dos fatores que influenciam o processo de aprendizagem da matemática.

O professor deve selecionar tarefas que contribuam para a construção de novos conhecimentos e com um grau de desafio adequado, pois as tarefas podem ser de diversas naturezas, como: exercícios, problemas, investigações, atividades de exploração e projetos (Ponte, 2005), variando estas pelo grau de desafio e pelo grau de estrutura. Desta forma, as tarefas devem ser diversificadas de forma a possibilitar diferentes oportunidades de pensar.

Para se desenvolver a capacidade de raciocinar, resolver problemas e comunicar são necessárias tarefas com elevado nível de desafio e complexidade cognitiva.

A resolução de problemas evidencia-se no dia-a-dia e também atravessa todas as áreas e domínios do currículo, desta forma é importante ser desenvolvida. A resolução de problemas, na sala de aula, prepara o aluno para a vida, desenvolvendo o seu raciocínio.

1.4. Representações

1.4.1. Definição

Para o termo '*representação'* encontram-se várias definições, dependendo do ramo que as estuda, podendo referir-se a: *representação* na arte, na ciência da computação, no direito, na filosofia e *representação* matemática (wikipedia representação). No Dicionário de Língua Portuguesa (2009) uma *representação* é uma imagem, um desenho ou uma pintura que representa um facto, uma pessoa ou um objeto. "Uma representação matemática pode ser qualquer representação semiótica que represente um objeto matemático. Por exemplo, o objeto matemático número, pode ser representado semioticamente pelos racionais, inteiros, fracionários, etc." (wikipedia, representação (matemática)).

Vários são os autores que tentam definir *representações no âmbito da matemática*. Bruner (1999) refere que a representação está relacionada com "a forma como a criança se liberta dos estímulos presentes e conserva a experiência passada num modelo e as regras que regem o armazenamento e a reobtenção de informação deste modelo" (p. 27).

Para Goldin (2008), uma *representação* é "uma configuração que representa algo, de alguma forma. Por exemplo, uma palavra pode representar um objeto real, um numeral pode representar o número de elementos num conjunto, ou a posição de um número numa reta numérica" (p. 180). O mesmo autor refere, ainda, que uma representação é uma configuração que poderá, de alguma forma, "atuar no lugar de, ser interpretado como, corresponder a, denotar, descrever, encarnar, codificar, invocar, categorizar, ligar com, mediar, produzir, referir a, assemelhar, servir como metáfora para significar, substituir por, sugerir ou simbolizar o que está a ser representado" (p.181).

Woleck (2001) refere que as representações são ferramentas que o sujeito utiliza para articular, clarificar, justificar, e comunicar raciocínios. Estas são um processo dinâmico que apoiam a construção de conceitos e relações matemáticas.

Segundo Amado, N., Carreira, S., Nobre, S., Ponte, J. P. (2010) as representações são carateres, símbolos, configurações pictóricas ou mesmo objetos que representam alguma ideia, objeto ou relação matemática.

Segundo NCTM (2008), "o termo representação refere-se tanto ao processo como ao resultado, por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma e à forma, em si mesma" (p. 75). Para NCTM (2007) "as representações deverão ser tratadas como elementos essenciais no apoio à compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos e das relações matemáticas, na comunicação de abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos, para si mesmos e para os outros" (p. 75).

A *representação* é, pois, o processo matemático que leva os alunos a apresentarem as suas ideias. Ao usarem as *representações* os alunos compreendem o que estão a fazer quando resolvem tarefas, pois as *representações* apoiam o seu pensamento. Para conhecer o raciocínio matemático dos alunos é necessário que estes o comuniquem, sendo possível através de diferentes representações. Kalathil e

Sherin (2000) referem que as *representações* dos alunos dão-nos informação sobre o que estes pensam, sobre o seu conhecimento e como este é construído e partilhado.

Para Stylianou (2011) ‘representar’ é uma ferramenta importante para os alunos comunicarem o seu raciocínio aos que o rodeiam, permitindo compreender o percurso que seguiram na resolução de uma determinada tarefa. Segundo o NCTM (2007), os professores podem compreender o raciocínio dos seus alunos a partir das representações por eles utilizadas. Surgem, assim, as representações como um importante objeto de estudo tendo em vista interpretar o raciocínio matemático dos alunos durante a realização de tarefas.

As representações podem ser usadas pelos alunos ou pelos professores para construir conceitos. As representações construídas pelos alunos poderão dar-nos indicação da sua compreensão e ajudar a delinear a aprendizagem dos mesmos. Podem ser, também, usadas para concretização de um conceito, para minimizar dificuldades e, ainda, para tornar a matemática mais atrativa e interessante. Os alunos devem “criar e usar as representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas” (NCTM, 2007, p. 160).

Se estes diferentes significados para o conceito de representação forem analisados deparamo-nos com duas caraterísticas das representações: *representações* como um processo e *representações* como um produto. Uma vez que tanto se referem ao ato de pensar sobre um conceito, como à sua forma propriamente dita. O que é representado pode variar dependendo do contexto ou do próprio uso da representação.

1.4.2. Tipos de representação

O estudo do papel das *representações* na aprendizagem dos alunos não é uma área muito explorada pelos professores, no entanto o NCTM (2008) recomenda que os alunos devem desenvolver ao longo dos ciclos de estudo a habilidade de:

- criar e usar *representações* para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas;

- selecionar, aplicar e traduzir *representações* matemáticas para resolver problemas e;

- usar as *representações* para modelar e interpretar fenómenos físicos sociais e matemáticos.

Vários são os investigadores que se têm debruçado sobre a aprendizagem das representações matemáticas, analisando a forma como os alunos aprendem os conceitos.

Webb, Boswinkel e Dekker (2008) distinguem três tipos de representações, sendo elas, informais, preformais e formais. Os referidos autores descrevem o percurso que os alunos podem fazer na sua aprendizagem das representações em três distintas fases: a fase informal (os conceitos são abordados de forma concreta num contexto familiar); a fase pré-formal (o grau de complexidade vai aumentando para representações mais abstratas e formais) e; a fase formal (são utilizadas notações matemáticas formais). Os alunos vão formalizando as suas representações começando por recorrer às representações informais.

Estes autores e, ainda, Goldin (2008) referem que quando surge um contexto novo para os alunos e estes se sentem mais inseguros ou têm dúvidas na realização de uma tarefa, voltam a utilizar algumas das representações informais e preformais que tinham deixado de utilizar.

Para Goldin (2008), as *representações* dividem-se em duas categorias: internas e externas. As *representações* internas, como o próprio nome indica, têm lugar no interior de cada aluno, não são diretamente observáveis, estão ligadas a possíveis configurações mentais dos alunos, sendo estas construídas por eles a partir da observação de comportamentos. Para se conhecer as configurações mentais e o raciocínio dos alunos é necessário que estes o comuniquem, sendo isto possível através dos diferentes tipos de *representação* externa. As *representações* externas referem-se a configurações observáveis e físicas que têm como objetivo representar uma certa realidade. Desta forma, as *representações* externas são facilmente acessíveis através de observação. Assim, Goldin (2008) afirma que as *representações* externas são uma inferência das *representações* internas. Este autor refere, ainda, que as *representações* internas encontram-se codificadas, embora possam ser interpretadas a partir das representações externas produzidas, pois a forma como os alunos produzem uma representação externa revela a forma como essa informação é representada no seu interior. Para o mesmo autor, as representações internas estão relacionadas com sistemas de representação psicológicos, os quais não podem ser observados por outras pessoas.

Zhang (1997, citado por Henriques, 2010) também distingue as representações em externas e internas. Para o mesmo autor, as *representações* externas são definidas como o conhecimento e a estrutura no ambiente, como símbolos físicos, objetos ou dimensões e como regras externas ou relações incluídas em configurações físicas. Por sua vez, as representações internas são o conhecimento e a estrutura em memória, como proposições, produções, esquemas, redes neuronais ou outras formas. As representações externas podem ser transformadas em representações internas através da memorização.

Goldin (2008) organiza as representações internas em subsistemas relacionados entre si: (i) verbal/sintático (utilização da linguagem e o significado das palavras); (ii) sensorial (perceção visual, tátil e audível do que nos rodeia); (iii) registos formais (representações internas de símbolos e notações matemáticas); (iv) planeamento e execução cognitivo (raciocínio matemático e estratégico) e; (v) afetivo/emocional (crenças e atitudes, sentimentos). Cada um destes subsistemas permite ao aluno produzir várias representações externas que já podem ser interpretadas por outras pessoas. As representações externas têm existência física, seja em papel, seja num ecrã de computador ou noutro suporte qualquer.

Bishop e Goffree (1986) referem que cada um dos tipos de representações externas "têm o seu próprio vocabulário ou código que precisa ser apreendido de forma a compreender as ideias matemáticas expressas" (p. 34). Estes autores categorizam os tipos de representações externas em quatro grupos principais: símbolos matemáticos, linguagem verbal, figuras e objetos. As figuras e as imagens dão origem às representações pictóricas.

Goldin (2008) não distingue objetos de figuras como se verifica em Bishop e Goffree (1986), mas acrescenta dois sistemas de representação interna correspondendo a sistemas de representação externa, sendo eles: sistema cognitivo de planeamento e execução e o sistema afetivo/emocional.

Goldin e Steingold (2001) referem que é através da interação entre as representações externas que se desenvolvem sistemas de representação interna que ajudam os alunos a produzirem novas representações externas. Esta diversidade de representações suporta a compreensão dos alunos.

A compreensão e construção de conceitos matemáticos dependem da relação entre as representações internas e externas, pois é durante a combinação e manipulação das mesmas que os alunos constroem a compreensão (Bruner 1979, citado por Rodrigues, 2011).

Este mesmo autor refere que todo o domínio de conhecimento ou qualquer problema dentro desse domínio pode ser representado sob três formas ou sistemas. Estes três sistemas de representação operam durante o desenvolvimento da inteligência humana e a interação entre os diferentes sistemas é crucial para o desenvolvimento de cada pessoa. O desenvolvimento não implica uma sequência de etapas, mas sim um domínio progressivo destas três formas de representação. Bruner (1975, citado por Leuca, 2010) refere que "todo o domínio de conhecimento ou qualquer problema dentro desse domínio pode ser representado sob três formas" (p. 10) sendo elas, a representação ativa (conjunto de ações apropriadas para obter um determinado resultado); representação icónica (conjunto de imagens resumidas ou gráficos, que representam conceitos não definidos completamente) e; representações simbólicas (conjunto de proposições lógicas ou simbólicas "derivado de um sistema simbólico regido por normas ou leis para formar ou transformar proposições") (Leuca, 2010, p. 10). O desenvolvimento intelectual processa-se passando da representação ativa do mundo para a representação icónica, finalizando com a representação simbólica. A própria evolução dos conhecimentos matemáticos conduz ao desenvolvimento e à diversidade das representações (Leuca, 2010 referindo Bruner, 1975).

Em consonância com esta ideia, Ponte e Serrazina (2000) refere que as representações podem ser simbólicas (algarismos, sinais das operações e o sinal de igual), icónicas (figuras, gráficos e diagramas) e ativas (objetos usados ou não deliberadamente como material didático), enquanto Orton, Orton e Roper (1999) consideram que as representações podem ser concretas (recorrem a qualquer tipo de material), pictóricas (relativos a figuras) e numéricas (utilizam números).

Vários são os autores a investigar sobre as representações. Um estudo realizado por Pinto (2009) refere que os alunos do 1º ano de escolaridade, ao resolverem problemas matemáticos preferem representações icónicas, assentes na imagem, às representações simbólicas formais, embora utilizem ambas e com funções distintas.

Mason (1987, referido por Amado e outros, 2010) prefere falar, em vez de representações, de diferentes modos de representação de ideias matemáticas. A atividade de construir significado ou dar sentido a uma ideia decorre do circuito que se estabelece entre a manipulação (inclui a utilização de objetos físicos, a criação de figuras e diagramas, no papel ou mentalmente, bem como o uso de símbolos) e a expressão (envolve a procura de articulação de uma experiência mental que pode ser, em dado momento, confusa, vaga ou mal definida) (Amado e outros, 2010, p. 359).

A aprendizagem da matemática e a sua compreensão vão-se desenvolvendo através da utilização de representações próprias e num processo de interação que as formaliza e organiza. Segundo Ponte e Serrazina (2000), os símbolos utilizados no 1º ciclo do ensino básico devem ser limitados aos que são úteis para o trabalho e para a comunicação entre os alunos.

Outros autores que se têm debruçado sobre o papel das representações no processo de aprendizagem são, por exemplo, Preston e Garner (2003). Para estes autores, os modos de representação usados na resolução de problemas podem-se dividir em: (i) linguagem natural e escrita para explicar o raciocínio e as estratégias, como complemento de outros modos de representação; (ii) pictórico, o qual recorre a desenhos ou imagens para apresentar, conjugar e sintetizar a informação; (iii) aritmético, por vezes através de estratégias de tentativa e erro; (iv) gráfico, com utilização de gráficos de variáveis contínuas ou discretas com o objetivo de mostrar o seu comportamento; e (v) algébrico, que corresponde à utilização de linguagem simbólica para generalizar (Preston & Garner, 2003).

É através das representações que os alunos dão sentido a determinadas situações. Deste modo, também Ponte e Serrazina (2000) e Preston & Garner (2003) consideram que as representações podem ser externas ou internas aos alunos e que a compreensão/conhecimento dos alunos depende da interação das duas, pois as representações externas são uma projeção das internas. Ou seja, "só podemos fazer inferências sobre as representações internas dos alunos através da produção de representações externas" (Goldin & Steingold, 2001). Também Duval (2006) afirma que os objetos matemáticos apenas são acessíveis através de representações em registos adequados, "a única forma de aceder e lidar com eles é através do uso de signos e representações semióticas" (p. 107). Um mesmo objeto matemático pode ser denotado através de diferentes representações semióticas. Para este autor existem duas transformações de representações semióticas: *tratamentos* e *conversões*. *Tratamentos* são transformações de representação que ocorrem dentro de um mesmo registo e que revelam o papel intrínseco dos registos semióticos de representação na atividade matemática. *Conversões* são transformações de representação que consistem em transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação de um dado registo semiótico numa outra representação do mesmo objeto, situação ou informação de um outro registo semiótico.

1.4.3. Papel das representações no processo de aprendizagem

Nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007, p. 75) o NCTM refere que "quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente".

As representações são meios que podem ser utilizados para a compreensão e interpretação de ideias matemáticas e também são ferramentas para o desenvolvimento de estratégias na resolução de tarefas, proporcionando múltiplas concretizações de um conceito ou estrutura matemática.

Para Woleck (2001), a propósito da importância das representações para a compreensão matemática dos alunos, refere que estas ajudam os alunos a interpretar enunciados e a organizar o seu pensamento, permitindo identificar a informação relevante e definir estratégias adequadas de resolução de problemas.

Vários investigadores portugueses têm apontado as potencialidades do uso das representações no ensino e na aprendizagem da matemática (Ponte e Velez, 2011; Valério, 2005; Amado e outros, 2010; Canavarro, 2007). Por exemplo, Valério (2005) evidencia a capacidade dos alunos gerarem as suas próprias representações constituindo estas um importante suporte para a sua aprendizagem.

Pelo seu lado, Canavarro (2007) aponta a importância das representações matemáticas convencionais e não convencionais como recurso para o raciocínio algébrico e para a expressão do pensamento por parte dos alunos do 1º ciclo.

As representações permitem aos alunos apresentar as suas ideias, permitem saber como é que o aluno compreende e utiliza as suas ideias matemáticas e ainda permitem compreender os conceitos e as relações matemáticas. As representações dos alunos na área da Matemática funcionam como registos do seu pensamento.

1.4.4. Resumo

Todos nós usamos representações constantes e em vários contextos com que lidamos no nosso dia-a-dia, sendo através delas que conseguimos tanto raciocinar sobre ideias como representar/apresentar o que pensamos.

O uso de *representações* no ensino da Matemática tem ganho algum relevo nos últimos tempos e a sua importância tem sido reconhecida por parte de alguns autores. Num sentido amplo, uma *representação* é uma configuração que pode representar uma outra coisa de alguma forma. Sem existir grandes discrepâncias, vários autores da educação matemática têm tentado definir aquilo que consideram ser *representações*. Como a grande parte dos autores, Woleck (2001) faz referência às *representações* como um processo dinâmico, sendo ferramentas para articular, clarificar, justificar e comunicar raciocínios.

Os autores abordados falam de uma dicotomia entre *representações* internas e externas. Sendo estas observadas externamente, de fácil acesso, são inferência das internas. As *representações* internas estão ligadas a configurações mentais das pessoas. Desta forma, chega-se às ideias internas através de aspetos externos (objetos físicos, comunicação, algo escrito). O uso de *representações* externas permite o desenvolvimento da capacidade de compreensão, servem como apoio ao pensamento e constituem uma ponte entre o concreto e o abstrato.

As *representações* parecem fazer parte de uma possível transição que leva os alunos a aprender. As *representações* devem ser essenciais para ajudar os alunos a compreender conceitos matemáticos e a relacioná-los e, a comunicar conceitos matemáticos, argumentá-los e compreendê-los. Promovem o desenvolvimento do raciocínio dos alunos.

As *representações* podem ser encaradas tanto como um processo como um produto, pois retratam tanto o ato de pensar sobre um conceito ou ideia, como a sua forma propriamente dita. O que é representado pode variar de acordo com o contexto ou com o próprio uso da representação.

Capítulo 2 – Metodologia

Numa investigação, a escolha da metodologia a seguir está relacionada com os seus objetivos e com as questões a que se pretende dar resposta. Com este estudo, pretende-se conhecer a capacidade de representação de alunos do 1º ciclo do ensino básico quando realizam tarefas focando a forma como essa construção contribui para que os alunos aprendam determinado conceito. Neste capítulo, é feita uma abordagem teórica ao paradigma qualitativo da investigação em educação incidindo, particularmente, no estudo de caso. Seguidamente é feita uma breve apresentação dos participantes na investigação. São ainda referidas as estratégias bem como os instrumentos utilizados para a recolha de dados durante a investigação.

2.1. Opções metodológicas

Dado que se pretende a compreensão em profundidade de uma realidade específica, esta investigação assume uma natureza qualitativa e interpretativa. A escolha de uma metodologia qualitativa deve-se, por um lado, à natureza do problema/objetivos definidos e, por outro lado, ao facto do foco do estudo se relacionar com aspetos qualitativos da construção de representações matemáticas dos alunos e, ainda, porque as questões orientadoras do estudo requerem uma fonte natural de dados recorrendo-se, por essa razão, a observações ‘no terreno’ permitindo, desta forma, uma interpretação fundamentalmente descritiva. Segundo Tuckman (1994) e Bogdan e Biklen (1994,) neste tipo de investigação não se podem identificar, com exatidão, as variáveis em estudo e, muito menos, quantificá-las e traduzi-las em números e relacioná-las. Para Bogdan e Biklen (1994) a investigação qualitativa possui cinco importantes caraterísticas: (i) a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; (ii) os dados recolhidos são essencialmente descritivos, nomeadamente, transcrições, gravações e documentos produzidos pelos alunos; (iii) o principal interesse do investigador é o processo e não os resultados; (iv) a análise dos dados será feita de uma forma indutiva, não tendo o investigador como objetivo a confirmação de hipóteses colocadas previamente e; (v) a principal preocupação do investigador são as perspetivas/ideias dos participantes (p. 47). Ainda segundo os mesmos autores, na investigação qualitativa em educação, o investigador comporta-se mais de acordo com o viajante que não planeia do que com aquele que o faz meticulosamente. Enquanto a investigação quantitativa utiliza dados de natureza numérica que lhe permitem provar relações entre variáveis, a investigação qualitativa utiliza principalmente metodologias que possam criar dados descritivos que lhe permitirá observar o modo de pensar dos participantes numa investigação.

Martins (2006 referindo Merriam 1988) refere que "para se conhecer melhor os seres humanos, a nível do seu pensamento, deverá utilizar-se para esse fim dados descritivos, derivados dos registos e anotações pessoais de comportamentos observados. Os dados de natureza qualitativa são obtidos num contexto natural ao contrário dos dados de cariz quantitativo" (p. 69).

Para Bogdan e Biklen (1994), na investigação qualitativa a preocupação central não é a de saber se os resultados são suscetíveis de generalização, mas sim a de que outros contextos e sujeitos a eles podem ser generalizados.

O presente estudo insere-se, pois, numa matriz de investigação de cariz qualitativo uma vez que decorre no ambiente natural da escola, os dados recolhidos são essencialmente descritivos (observações, entrevistas, documentos produzidos pelos alunos) e a preocupação do investigador são as ideias/representações dos alunos.

Opta-se por um paradigma interpretativo de investigação por oposição ao paradigma positivista, pois centra-se na interpretação, compreensão e explicação dos comportamentos e atitudes dos alunos. Segundo esta perspetiva "a atividade humana é fundamentalmente uma experiência social em que cada um vai constantemente elaborando significados" (Ponte, 1994, p. 14). O mesmo autor, fazendo referência a Merriam (1988) e a Denzin (1989), refere que a investigação do tipo interpretativo:

- preocupa-se essencialmente com os processos e as dinâmicas;
- mais do que qualquer outra, depende de forma decisiva do investigador ou da equipa de investigação;
- procede por indução, reformulando os seus objetivos, problemáticas e instrumentos no curso do seu desenvolvimento;
- baseia-se em descrição grossa, que vai além dos factos e das aparências, apresentando com grande riqueza de pormenor e contexto, as emoções e as interações sociais que ligam os diversos participantes entre si (p. 9).

Ludke e André (1986) referem que a pesquisa qualitativa pode assumir várias formas destacando-se principalmente, a pesquisa etnográfica e o estudo de caso.

Em educação e em particular no ramo da matemática, os estudos de caso têm-se tornado cada vez mais comuns. Este estudo tem por base um *estudo de caso* pois, como refere Ponte (1994), o *estudo de caso* é um design de investigação que apresenta um forte cunho descritivo, pois procura realizar uma descrição "factual, literal, sistemática e, tanto quanto possível completa, do seu objeto de estudo" (pp. 7-8) e baseia-se, especialmente, em trabalho de campo ou em análise documental. Para Bisquera (2000, citado por Ribeiro, 2005) o *estudo de caso* é "uma análise em profundidade de um sujeito considerado individualmente" (p. 327). Segundo Yin (1984, citado por Ponte, 1994) o *estudo de caso* dedica-se ao estudo de uma entidade no seu contexto real, tirando partido de várias fontes, como entrevistas, observações e documentos. Segundo o mesmo autor, um *estudo de caso* baseia-se no trabalho de campo, estudando uma pessoa, um programa ou uma instituição na sua realidade, utilizando para isso, entrevistas, observações, documentos, questionários e artefactos.

Segundo Patton (1987, citado por Ribeiro, 2005) "os estudos de caso tornam-se particularmente úteis quando se necessita compreender algum problema ou situação particular em grande profundidade e onde se podem identificar os casos ricos em informação" (p. 327).

O *estudo de caso* constitui "uma forma de se fazer trabalho empírico ao investigar um fenómeno atual dentro do seu contexto real, onde as fronteiras entre o fenómeno e o contexto não estão claramente definidas e na situação em que múltiplas fontes de evidência são utilizadas" (Reis, 2010, p. 111).

Para Ponte (1994) um *estudo de caso* pode ser caraterizado por um estudo

> de uma entidade bem definida como um programa, uma instituição, um sistema educativo, uma pessoa ou uma unidade social. Visa conhecer em profundidade o seu "como" e os seus "porquês" evidenciando a sua unidade e identidade próprias (…) debruça-se sobre uma situação específica que se supõe ser única em muitos aspetos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e caraterístico (p. 2).

O mesmo autor acrescenta ainda que:

> os estudos de caso não se usam quando se quer conhecer propriedades gerais de toda uma população. Pelo contrário, usam-se para compreender a especificidade de uma dada situação ou

> fenómeno, para estudar os processos e as dinâmicas da prática, com vista à sua melhoria, ou para ajudar um dado organismo (p. 17).

Para Yin (1994), o estudo de caso permite ao investigador a recolha de informações sobre acontecimentos atuais sem sair do seu contexto, em que os mesmos não podem ser controlados ou, sobre os quais, o investigador exerce pouco controlo. Trata-se, pois, de acordo com este investigador, de uma estratégia adequada quando em causa estão questões do tipo ‘como?’, ‘porquê?’ e ‘em que medida?’. Bogdan e Biklen (1994) fazem uma analogia entre o *estudo de caso* e um funil considerando a sua parte mais larga como o início da investigação.

Ponte, Matos, Guimarães, Leal e Canavarro (1991) referem que os estudos de caso se usam para compreender melhor a particularidade de uma dada situação ou um fenómeno em estudo. Para Reis (2010) os estudos de caso são realizados em diversas fases, sendo elas: (i) definir o problema a ser pesquisado e explicitar que a utilização do estudo de caso é a estratégia adequada para resolver esse problema; (ii) desenhar a estrutura da recolha de dados e apresentação das perguntas principais decidindo-se por um único caso ou por múltiplos; (iii) determinar os instrumentos para a recolha de dados; (iv) fazer as análises por analogias e; (v) elaborar as conclusões que deverão ser específicas, com possíveis inferências e explicações (p. 82).

Ludke e André (1986) aconselham o estudo de caso em situações que: (i) visem a descoberta; (ii) onde o contexto seja um elemento a valorizar; (iii) onde se procura retratar a realidade de uma forma completa e profunda; (iv) onde se use uma variedade grande de fontes de informação e, finalmente; (v) onde o investigador procure relatar as suas experiências durante o estudo de modo a que o leitor possa fazer as suas próprias generalizações.

Este estudo constitui, portanto, um estudo de caso múltiplo uma vez que estuda três alunos.

As investigações desta natureza devem, contudo, ter em atenção as questões de ordem ética relacionadas, por exemplo, com o consentimento informado dos participantes no estudo, bem como com a proteção do anonimato dos mesmos. Desta forma, informou-se e solicitou-se, por escrito e gradualmente, autorização à Comissão Nacional de Proteção de Dados (CNPD), à Direção Geral da Educação (DGIDC), ao Diretor do Agrupamento da escola onde decorreu a investigação, informando-o sobre a finalidade, os objetivos e o tipo de dados a recolher no estudo, isto depois da professora titular da turma ter aceitado participar. Da mesma forma, solicitou-se a autorização aos pais e encarregados de educação de todos os alunos da turma para a realização da investigação e para a recolha de imagem e som.

Manteve-se o anonimato da escola e dos alunos envolvidos na investigação durante todo o processo.

2.2. Técnicas de recolha e análise de dados

Segundo Vale (2000) "o investigador tem vários métodos para recolher dados, mas são as observações, as entrevistas e os documentos (ou artefactos) as três formas privilegiadas de investigação qualitativa" (p. 190).

Ao encontro à mesma ideia, Tuckman (2000) refere que "as fontes de obtenção de dados que se podem utilizar num estudo de caso são normalmente de três tipos: (1) entrevistas; (2) documentos vários e (3) através da observação" (p. 516).

A recolha de dados neste estudo irá ser exclusivamente feita pelo investigador no contexto escolar baseando-se, fundamentalmente, nas observações na sala de aula (durante a realização das tarefas) registadas em notas de campo; na entrevista e nos documentos (tarefas realizadas, gravação vídeo e áudio).

Observação. Bogdan e Biklen (1994) referem que a observação é uma das a melhores técnicas de recolha de dados. Em consonância com esta ideia Vale (2000) refere que "a observação é a melhor técnica de recolha de dados do indivíduo em atividade, em primeira mão, pois permite comparar aquilo que diz, ou que não diz, com aquilo que faz" (p. 233). Para Ludke e André (1986) a observação constitui a principal técnica de investigação porque permite ao investigador um contacto pessoal e estreito com o fenómeno a ser investigado. Esta técnica permite que o investigador chegue mais perto da perspetiva dos sujeitos (p. 26).

Para Yin (1994) existem duas formas distintas de observação: observação direta e observação participante. "A observação participante é um modo especial de observação segundo o qual o investigador não é meramente, um observador passivo. Em vez disso, assume uma variedade de papéis dentro da situação de estudo de caso e pode participar ativamente nos acontecimentos que está a estudar" (p. 87).

No caso particular desta investigação a observação ajudou a investigadora a obter dados sobre as atitudes e reações dos alunos, assim como algumas das suas caraterísticas pessoais, como a autonomia e o interesse pelas atividades. Foi também observado o espírito crítico dos alunos, o seu empenho e a persistência aquando da resolução das tarefas.

Entrevistas. Para Cervo (1983) uma entrevista é "uma conversa orientada para um objetivo definido: recolher, através do interrogatório do informante, dados para a pesquisa" (p. 152). Por outro lado, segundo Haguette (2000) a entrevista pode ser definida como um

> processo de interação social entre duas pessoas na qual uma delas, o entrevistador, tem por objetivo a obtenção de informações por parte do outro, o entrevistado. As informações são obtidas através de um roteiro de entrevista constando de uma lista de pontos ou tópicos previamente estabelecidos de acordo com uma problemática central e que deve ser seguida (p.86).

Bogdan e Biklen (1994) referem que as entrevistas "podem ser utilizadas de duas formas. Podem constituir a estratégia dominante para a recolha de dados ou podem ser utilizadas em conjunto com a observação participante, análise de documentos ou outras técnicas" (p. 134), acrescentando que em todas as situações "é utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito" (p. 134). Os mesmos autores referem que as entrevistas qualitativas variam quanto ao grau de estruturação, desde as entrevistas estruturadas até às entrevistas não estruturadas. No entanto, refere que com as entrevistas semiestruturadas se fica com a "certeza de obter dados comparáveis entre os vários sujeitos" (pp. 135). Ribeiro (2005, referindo Patton, 1987) refere que a entrevista não estruturada "assenta inteiramente na formulação espontânea de questões que surgem naturalmente durante a interação entre o entrevistador e o sujeito entrevistado" (p. 343), a entrevista estruturada é mais "sistemática e normalizada" e, a entrevista semiestruturada é "a mais adequada nas investigações que se fazem em educação" (p. 343).

Neste estudo a entrevista é do tipo semiestruturada pois é conduzida por um guião previamente elaborado (anexo 1) onde se encontram algumas questões gerais sendo exploradas mediante as respostas dadas pelos alunos. Esta entrevista "embora seguindo determinados objetivos segundo um esquema básico, goza de algum estatuto de liberdade de percurso permitindo que o entrevistador faça as necessárias adaptações durante o seu decurso" (Ribeiro, 2005, p. 343). A entrevista é realizada a três alunos de forma individual com o objetivo de os caraterizar no que respeita à relação com a escola e com a matemática e, ainda, obter informações acerca do seu nível de conhecimentos matemáticos. Esta entrevista é aplicada a seguir a um conjunto de três tarefas propostas, as quais os alunos resolvem individualmente. O investigador deve registar as expressões faciais dos alunos, os gestos, as hesitações, entre outros aspetos, sob a forma de notas. A entrevista é registada com auxílio de um gravador áudio. Após esta caraterização inicial serão apresentadas, ao longo de cinco aulas, um conjunto de tarefas que serão trabalhadas a pares, registando-se, sob a forma de diário (notas de campo/filmes/audiogravações), o comportamento, as atitudes e o desempenho dos alunos, de forma a verificar o tipo de representações que utilizam, quais as maiores dificuldades na construção das mesmas e qual o papel que desempenham na aprendizagem.

A entrevista é realizada num ambiente informal, sem pressão procurando deixar os alunos responderem à vontade. Bogdan e Biklen (1994, referindo Biggs, 1986) referem que "as boas entrevistas caraterizam-se pelo facto de os sujeitos estarem à vontade e falarem livremente sobre os seus pontos de vista" (p. 136).

Documentos. Finalmente, em relação aos documentos, Ludke e André (1986) referem que os documentos escritos constituem uma fonte poderosa de onde podem ser retiradas evidências que fundamentem afirmações e declarações do investigador e, finalmente, representam uma fonte natural de informação. Acrescentam ainda que os documentos constituem uma fonte de informações estável e rica.

Tuckman (2000) refere que os documentos que os participantes e os observadores preparam assumem, normalmente, a forma de atas de encontros ou relatórios.

Neste estudo, os documentos a analisar serão todos aqueles a que a investigadora tenha acesso mas de modo particular os documentos elaborados pelos alunos durante o seu envolvimento na resolução das tarefas que lhes forem propostas.

2.3. Seleção dos participantes

Como se referiu anteriormente, nesta investigação vão ser estudados três alunos, de forma mais pormenorizada, de uma turma do 1º ciclo do ensino básico (2º ano de escolaridade) de um agrupamento de escolas do concelho de Viseu e a sua escolha prende-se com o facto de haver facilidades de acesso por parte da investigadora. Trata-se, portanto, de uma escolha por conveniência.

Os três alunos, que serão designados pelos nomes fictícios de Ana, Mafalda e Miguel, foram selecionados com base em critérios como a facilidade para comunicar, a disponibilidade e a assiduidade, uma vez que se pretende compreender o porquê da utilização de uma ou outra representação matemática na realização de tarefas.

2.4. Contexto da intervenção

Nesta investigação, a investigadora teve a preocupação de preparar e propor tarefas que pudessem ser resolvidas por processos semelhantes, para possibilitar a análise da evolução dos alunos nos seus processos de representação muito embora se tivesse selecionado tarefas/problemas que levassem a raciocínios matemáticos diferentes por parte destes.

O Programa de Matemática de 2007 assume que o ensino e a aprendizagem se desenvolvem em torno de quatro eixos fundamentais, sendo um deles, o trabalho com *números e operações*. Segundo Rocha e Menino (2009), é importante compreender os números e as operações e ser capaz de analisar criticamente informação numérica (p. 113) o que justifica a nossa opção por propor tarefas enquadradas no tema *números e operações* no tópico *operações com números naturais*. O tema *números e operações* surge em todos os ciclos, ocupa uma posição central no currículo de matemática nos primeiros anos de escolaridade e tem por base "três ideias fundamentais: promover a compreensão dos números e operações, desenvolver o sentido de número e desenvolver a fluência no cálculo (ME, 2007, p. 7). Os *números naturais* surgem neste Programa logo a partir do primeiro ano de escolaridade. O propósito principal do ensino, no tema *números e operações*, é "desenvolver nos alunos o sentido de número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos" (PMEB, 2007, p. 13).

Boavida e outros (2008) consideram que a resolução de problemas tem múltiplas potencialidades, associadas a outros aspetos das capacidades transversais, pois "proporciona o recurso a diferentes representações e incentiva a comunicação (…)" (p. 14). Desta forma, optou-se por tarefas de natureza problemática uma vez que “a resolução de problemas é uma atividade privilegiada para os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático” (ME, 2007, p. 6), permitem o uso de estratégias diversificadas, bem como diferentes representações por parte dos alunos, pois este estudo pretende analisar o contributo das representações na aprendizagem dos alunos.

A intervenção pedagógica incluiu as tarefas que estão organizadas numa cadeia que foi pensada e realizada durante o 2º período (fevereiro) e centra-se na subtração, adição e multiplicação. A cadeia é constituída por 8 tarefas: *copos de sumo*, *apertos de mão*, *pastilhas gargantox*, *arrumando ovos*, *a bicharada*, *coelhos e galinhas*, *a festa da Carolina* e *comprimidos*. Para cada uma das tarefas elaborou-se um roteiro (anexo 2), onde se enuncia a tarefa, o nível de ensino a que se destina, o tópico e subtópico matemático envolvido, as capacidades transversais para as quais é suposto contribuir, os conhecimentos considerados prévios dos alunos e aprendizagens visadas com cada uma das tarefas, a natureza da tarefa, classificação feita segundo a proposta de Ponte (2005), o modo como o trabalho dos alunos será organizado e, ainda, os materiais necessários para o desenvolvimento da tarefa.

Em todas as aulas, foi distribuído, a cada aluno, uma folha (anexo 3) onde constava um cabeçalho para identificação do aluno, seguido do enunciado da tarefa (Tarefa 1, 2…8) e o respetivo espaço em branco para a resolução da mesma. Na referida folha era solicitado “Resolve o problema e explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números”. Os alunos resolveram as primeiras três tarefas a pares, com colegas que não pertenciam ao estudo e as restantes individualmente nos seus lugares. Podiam recorrer a qualquer tipo de material para resolução das tarefas, podendo para isso levantar-se do seu lugar com autorização e de forma organizada (não gerando confusão na sala) e usar materiais diferentes. A professora e a investigadora não disponibilizaram nem informaram os alunos que poderiam usar materiais, isto para não influenciar as representações ativas. Todos os problemas foram lidos, pela investigadora, para os alunos e estes seguiam a leitura na folha previamente distribuída, seguindo-se uma leitura silenciosa. Os alunos que ainda não tinham as competências da leitura bem desenvolvidas eram ajudados pela professora da turma e pela investigadora. Após a compreensão do enunciado, os alunos resolviam a tarefa individualmente ou a pares, sendo orientados pela professora e pela investigadora.

Após a resolução da tarefa, eram selecionados alunos para irem ao quadro apresentar/explicar a sua forma de resolução, a representação, a estratégia e o raciocínio, isto para os alunos conhecerem diferentes tipos de representações. Em simultâneo, a professora titular colocava questões para melhor esclarecimento do raciocínio seguido e da representação usada. Os alunos a ir ao quadro eram selecionados atendendo às dificuldades sentidas durante a resolução ou por terem utilizado representações na resolução diferentes dos colegas. A professora titular intervinha sempre que podia para explorar mais as tarefas no que respeitava a assuntos já lecionados. Os alunos comunicavam entre eles para esclarecimento de alguma dúvida ou para discutirem sobre as representações e estratégias utilizadas.

A tabela 1 apresenta as ideias principais que estiveram na base da construção desta cadeia.

Tarefas	**Operações**	**Sentido**	**Contextos**	**Procedimento de cálculo**
1- Copos de sumo	Subtração	Subtrativo	- Saber quantos copos de sumo bebe cada irmão	Subtrair
2- Apertos de mão	Adição	Aditivo	- Dar apertos de mão	Adicionar
3- Pastilhas gargantox			- Saber o número de pastilhas que tem cada caixa com três placas cada	
4- Arrumando ovos			- Arrumar ovos	
5- A bicharada			- Combinar animais	
6- Coelhos e galinhas	Multiplicação	Aditivo	- Saber o número de coelhos e o número de galinhas	Adição repetida
7- A festa da Carolina			- Preparar aperitivos com diferentes ingredientes	
8- Comprimidos			- Comparar o tempo gasto na toma de comprimidos	Multiplicação (ideia de produto)

Tabela 1 – Elaboração da cadeia (primeiro conjunto de tarefas)

A conceção da cadeia teve por base uma trajetória de aprendizagem. Partindo-se da subtração como consolidação do já aprendido em anos anteriores, seguindo-se para a adição de forma a introduzir a multiplicação. Procurou-se, nesta investigação, que os alunos evoluíssem da adição repetida para a ideia da multiplicação, esta no sentido aditivo.

Este trabalho de sala de aula realizou-se por uma equipa colaborativa integrando professora titular da turma e investigadora. A investigadora apresentou as tarefas a todos os alunos, nas quais os alunos trabalharam em pequenos grupos e, no final, realizou-se uma discussão sendo os alunos convidados a apresentar os seus resultados a toda a turma. Nas diversas aulas onde se aplicaram as tarefas estiveram presentes a professora e a investigadora, onde ambas tiveram a cargo o trabalho de orientação dos alunos. A investigadora foi, também, a responsável pela conceção, seleção e adaptação das tarefas.

Ao longo da aplicação do conjunto das 8 tarefas, verificou-se que os alunos da turma não estavam habituados a resolver tarefas como aquelas que lhes foram apresentadas não estando, por isso, muito à vontade e revelando grande dificuldade quer na abordagem quer no uso de representações. Porque tais dificuldades levaram a que a investigadora assumisse um papel de maior proximidade com os alunos e a uma alteração no seu modo de trabalho, a recolha de informação ficou comprometida, uma vez que teve influência da investigadora. Desta forma, optou-se por aplicar um outro conjunto de 6 tarefas da mesma natureza (tabela 2). Este segundo conjunto de tarefas foi resolvido individualmente para evitar alguns dos constrangimentos, uma vez que, no trabalho a pares, um aluno influencia o outro. As tarefas estão organizadas numa cadeia que foi pensada e realizada no início do 3º período, no mês de abril, e centra-se na adição e multiplicação de números naturais. A forma de desenvolver a aula foi idêntica ao das tarefas aplicadas anteriormente, ou seja, apresentação da tarefa, o trabalho dos alunos com o devido acompanhamento da investigadora e da professora titular, o momento de discussão e a sistematização das ideias/aprendizagens (Ponte, 2005). A aplicação deste novo conjunto de tarefas, além de ter complementado o trabalho realizado anteriormente com os alunos, foi aproveitada, também, para relacionar a adição com a multiplicação, trabalhando as tábuas (do 2 à do 6). Todas as tarefas (1º e 2º conjunto de tarefas) foram analisadas, das quais se apresentam os resultados mais à frente.

Tarefas	Operações	Sentido	Contextos	Procedimento de cálculo
1- Colares			- Determinar o número de bolas de cada cor para fazer os colares	
2- As meias da joaninha	Adição	Aditivo	- Determinar o número de meias que precisa para as joaninhas	Adicionar
3- A higiene do elefante			- Determinar o número de sabonetes	
4- Problema da rã			- Saber o número de saltos que a rã necessita dar para sair do poço	Adição repetida
5- Os chocolates	Multiplicação	Multiplicativo	- Saber quantos chocolates dá a cada amigo	Multiplicar
6- O número de rodas			- Determinar o número de rodas	

Tabela 2 – Elaboração da cadeia (segundo conjunto de tarefas)

Uma vez que as folhas onde os alunos resolveram as tarefas e os registos realizados pela investigadora ao longo das aulas não nos pareceram suficientes, houve a necessidade do suporte de vídeo e áudio de modo a melhor se compreender a forma como os alunos chegaram às respetivas representações. Estes registos ajudaram-nos a compreender o pensamento dos alunos. Além disto, desenvolveu-se uma análise cruzada dos três casos em conjunto de maneira a encontrar semelhanças e diferenças entre eles.

2.4.1. Calendarização das atividades

O estudo decorreu no segundo período durante o mês de fevereiro e início do terceiro período, no mês de abril de acordo com o seguinte calendário:

	Atividades	**Mês**
1ª FASE DE TAREFAS	Tarefa 1 – Copos de sumo	Dia 5 fevereiro
	Tarefa 2 – Apertos de mão	Dia 6 fevereiro
	Tarefa 3 – Pastilhas Gargantox	Dia 7 fevereiro
	Entrevistas	Dia 14 fevereiro – Ana Dia 14 fevereiro – Mafalda Dia 14 fevereiro – Miguel
	Tarefa 4 – Arrumando ovos	Dia 15 fevereiro
	Tarefa 5 – A bicharada	Dia 19 fevereiro
	Tarefa 6 – Galinhas e coelhos	Dia 21 fevereiro
	Tarefa 7 – A festa da Carolina	Dia 26 fevereiro
	Tarefa 8 – Comprimidos	Dia 28 fevereiro
2ª FASE DE TAREFAS	Tarefa 9 – Colares	Dia 4 abril
	Tarefa 10 – As meias das joaninhas	Dia 9 abril
	Tarefa 11 – A higiene do elefante	Dia 11 abril
	Tarefa 12 – O problema da rã	Dia 16 abril
	Tarefa 13 – Os chocolates	Dia 18 abril
	Tarefa 14 – O número de rodas	Dia 23 abril

Quadro 1 – Calendário das atividades

Capítulo 3 – Apresentação e discussão dos resultados

No presente capítulo, apresentam-se os casos dos três alunos. Para cada aluno, começa-se por fazer uma breve caraterização e, de seguida, descrevem-se e analisam-se as representações utilizadas na resolução das tarefas propostas, assim como o papel que estas desempenham na resolução das mesmas. Faz-se, também, a sistematização e categorização dos tipos de representações utilizadas e do papel que as mesmas desempenham. A análise das representações construídas teve como suporte de apoio as explicações dos alunos, ou seja, centra-se no produto obtido da resolução das tarefas levando também ao processo seguido pelos alunos para resolverem as mesmas. Desta forma:

> A análise de dados é o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou. A análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspetos importantes" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 205).

Cabrita (1998, citando Pardal e Correia, 1995) refere que "a análise de conteúdo consiste genericamente numa técnica de investigação através da qual se viabiliza, de modo sistemático e quantitativo, a descrição do conteúdo da comunicação. Esta pode apresentar-se sob a forma escrita (um discurso, uma dissertação, um livro) ou sob formas não escrita (filmes, fotografias, emissões radiofónicas, programas televisivos). Em qualquer caso, a análise de conteúdo incide sobre a captação de ideias e de significações da comunicação" (p. 403). Neste estudo, os dados foram submetidos a uma análise de conteúdo.

Como foi referido anteriormente, para se analisar o tipo de representação a que os alunos recorrem, existem várias categorizações como, por exemplo, a de Orton, Orton e Roper (1999), a de Goldin (2008), a de Bruner (1975, 1999), a de Bishop e Gofree (1986), Webb, Boswinkel e Dekker (2008). Neste estudo, foram adotados os sistemas de representação de Bruner (1975, 1999) e taxonomia proposta por Pinto (2009): *representações ativas*, *representações icónicas* e *representações simbólicas*, uma vez que este autor se tem dedicado a estudar educação para jovens e se tem debruçado nas representações externas, tal como se baseia o presente estudo. Cada uma destas categorias subdivide-se em subcategorias. As *representações ativas* "têm como subcategoria a *Manipulação de objetos*". As *representações icónicas* subdividem-se em "*Representações pictóricas* (desenhos); *Diagramas* (em rede, de hierarquias, matriz ou parte todo) e *Símbolos não convencionais*". As *representações simbólicas* subdividem-se em "*Algarismos e números*; *Sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas* e *Letras/palavra escrita*" (Pinto, 2009, p. 79). Esquematicamente:

Tipo de representações utilizadas	1.Representações ativas	a) Manipulação de objetos	
	2.Representações icónicas	a) Representações pictóricas (desenhos)	
		b) Diagramas	b1) Diagrama em rede
			b2) Diagrama de hierarquias
			b3) Matriz
			b4) Diagramas parte-todo
		c) Símbolos não convencionais	
	3.Representações simbólicas	a) Algarismos e números	
		b) Sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas	
		c) Letras/palavra escrita	

Esquema 1: Categorização para analisar o tipo de representações (proposta Pinto, 2009)

No que respeita ao papel das representações na resolução das tarefas, optou-se por seguir, também, as categorias propostas por Pinto (2009) nomeadamente: "i) *Organização do raciocínio matemático*; ii) *Apoio à comunicação matemática*; iii) *Apoio da compreensão de conceitos e relações matemáticas*; iv) *Desenvolvimento de conhecimentos matemáticos*; v) *Registo de ideias*; vi) *Expressão da solução* e; vii) *Expressão do processo utilizado*" (p. 79). Esquematicamente:

Papel das representações na resolução das tarefas	i) organização do raciocínio matemático
	ii) apoio à comunicação matemática
	iii) apoio da compreensão de conceitos e relações matemáticas
	iv) desenvolvimento de conhecimentos matemáticos
	v) registo de ideias
	vi) expressão da solução
	vii) expressão do processo utilizado

Esquema 2: Categorização para analisar o papel das representações na resolução das tarefas (proposta Pinto, 2009)

Tendo como pano de fundo, por um lado, as questões orientadoras e a questão central desta investigação, sendo ela "Qual o tipo de representações a que os alunos mais recorrem e que papel estas desempenham na realização de tarefas no âmbito do tema Números e Operações?" e, por outro lado, os sistemas de representação apresentados por Bruner (1975, 1999), as categorias apresentadas por Pinto (2009) para análise do papel das representações na resolução das tarefas, procedeu-se a uma análise cuidada de todos os dados recolhidos o que nos permitiu uma melhor compreensão sobre o tipo de representações utilizadas pelos alunos e o papel das mesmas na resolução de tarefas matemáticas. A estrutura seguida para analisar os dados referentes ao tipo de representações utilizadas na resolução das tarefas é baseada em Pinto (2009).

3.1. A Ana

3.1.1. Caraterização

A Ana era uma aluna que tinha oito anos no início da realização do estudo. Tinha muito bom aproveitamento e bom comportamento. Era uma aluna muito interessada, dinâmica, lutadora, com grande sentido de responsabilidade e empenho. Revelava grande capacidade de trabalho e era muito solidária com os alunos que apresentam mais dificuldades.

A sua área curricular preferida era Estudo do Meio e a que menos gostava era Matemática porque, segundo ela, "tem problemas difíceis". Considerava-se uma aluna média a Matemática porque, como ela diz, "às vezes não conseguia fazer alguns problemas". O que mais gostava de fazer nesta área curricular era trabalhar em grupo porque, usando as suas palavras, "assim ajudavam-se uns aos outros".

3.1.2. Tipo de representações utilizadas e o seu papel na resolução das tarefas

Enunciado tarefa 1: "Copos de sumo"

O Arménio está zangado com o irmão Américo, porque este bebeu três copos de sumo da garrafa que a mãe comprou, que dava para encher cinco copos iguais.

1.Terá o Arménio motivo para ficar zangado? Explica como pensaste.

2.Para acabar com as zangas entre os irmãos, a mãe decidiu comprar mais uma garrafa. Agora temos sumo para quantos copos? Como os podem repartir entre eles, de modo a nenhum dos irmãos ficar zangado?

Na tarefa 1 "Copos de sumo", na resolução da questão 1, a Ana começou por desenhar a garrafa de sumo e três copos, cada um dos copos com uma palhinha. Seguidamente respondeu por escrito, como representa a figura 1.

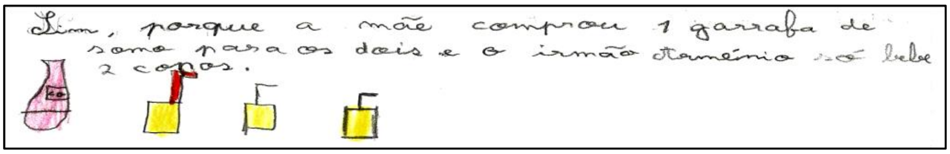


Fig. 1 – Resolução da tarefa 1 “Copos de sumo” (questão 1) – Ana

Já na resposta à questão 2 da mesma tarefa começou por desenhar as duas garrafas de sumo colocando, depois, por cima de cada garrafa, o número de copos que dá para encher cada uma, escrevendo a seguinte expressão: *5+5=10.* Seguidamente respondeu, novamente, por escrito como representa a figura 2.

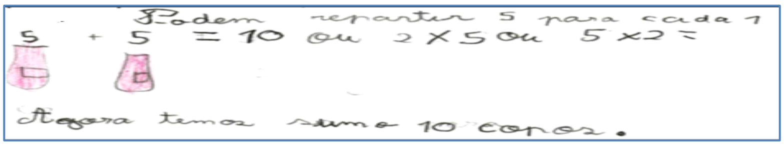


Fig. 2 – Resolução da tarefa 1 “Copos de sumo” (questão 2) – Ana

As representações utilizadas pela Ana na resolução desta tarefa enquadram-se, nas duas questões, na categoria das *representações icónicas* e das *representações simbólicas*.

Na questão 1, nas *representações icónicas* parecem enquadrar-se o desenho da garrafa de sumo e dos três copos. Na categoria das *representações simbólicas* estão presentes a subcategoria *algarismos e números*, mais concretamente a representação dos copos de sumo (*2 copos)* e das garrafas (*1 garrafa)* e, para responder à questão, utiliza frases (subcategoria: *letras/palavra escrita*).

Na questão 2, verifica-se que representou as duas garrafas de sumo por desenho (subcategoria: *representações pictóricas – desenho*). Nesta questão, as *representações simbólicas* enquadram-se em três subcategorias: *algarismos e números*, *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas* e, *letras/palavra escrita*. Na subcategoria *algarismos e números* representou o número total de copos usando o número *10* e a forma como os podem repartir através do número *5*. Na subcategoria *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas* recorreu à expressão *5+5=10* para representar o total de copos de sumo que enchem duas garrafas de sumo. Para responder à questão, usou uma frase (subcategoria: *letras/palavra escrita*).

Nesta tarefa, a Ana não revelou dificuldades, tendo resolvido a mesma de uma forma rápida e organizada.

As representações na resolução desta tarefa tiveram como papel fundamental, em ambas as questões, a *expressão da solução*, uma vez que a aluna apenas respondeu às questões.

Tarefa 2: “Apertos de mão”

Dez amigos combinaram dar um passeio de patins. Encontraram-se à entrada do Parque da cidade e cumprimentaram-se. Cada amigo deu um aperto de mão a cada um dos seus amigos uma só vez.

Quantos apertos de mão deram?

Na tarefa 2 “Apertos de mão” começou por desenhar pares de mãos e colocou por cima um arco para fazer a correspondência do aperto de mão. Fez dois conjuntos de cinco pares cada e representou utilizando a expressão *5+5=10*, como se pode verificar na figura 3.

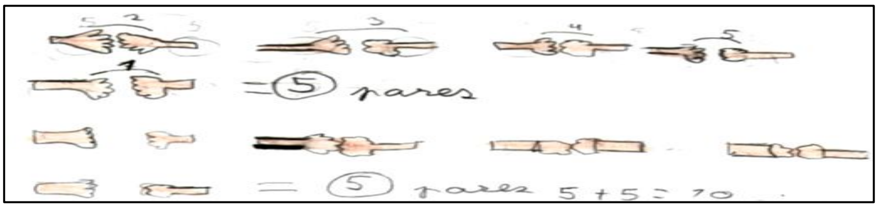


Fig. 3 – Primeira resolução da tarefa 2 “Apertos de mão” – Ana

A investigadora, ao observar esta resolução, questionou a Ana dizendo “Serão só esses apertos de mão?” e seguidamente referiu “Cada amigo cumprimenta os outros todos dando apenas um aperto de mão a cada um”. A Ana ficou a pensar e começou a resolver da forma apresentada na figura 4.

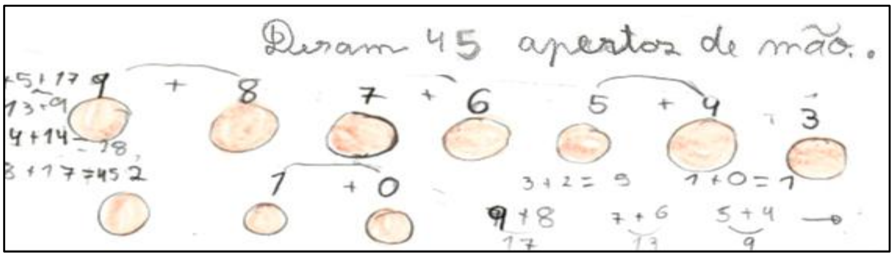


Fig. 4 – Segunda resolução da tarefa 2 “Apertos de mão” – Ana

Desenhou círculos para representar os amigos e por cima de cada círculo colocou o número que representava os apertos de mão que esse amigo daria aos outros, onde determinou a sequência *9, 8, 7…1, 0*, ou seja, cada amigo iria, apenas, cumprimentar os amigos que tinha à sua direita. De seguida, adicionou os números dessa sequência para determinar o número total de apertos de mão.

As representações utilizadas pela Ana na resolução desta tarefa, considerando a resolução correta (figura 4), enquadram-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Nas *representações icónicas* enquadra-se o desenho (subcategoria: *representações pictórica – desenho*) para representar os dez amigos e, para conseguir efetuar a operação *9+8+7+…1+0* utilizou linhas, que ligam os números da expressão dois a dois, que podem considerar-se como *símbolos não convencionais* (subcategoria das *representações icónicas*), pois foi a forma que a Ana usou para efetuar com mais facilidade os cálculos.

Nas *representações simbólicas* enquadram-se os números (subcategoria: *algarismos e números*) utilizados para a Ana representar os apertos de mão dados por cada amigo, os números *9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0* e também para representar o total de apertos de mão na solução da tarefa, número *45*. Também utilizou a subcategoria *letras/palavra escrita* para dar a resposta à tarefa.

Na resolução desta tarefa a Ana apresentou dificuldade na organização dos amigos, embora tenha conseguido chegar à solução correta após uma segunda tentativa.

Nesta tarefa, considerando a segunda resolução, as representações construídas serviram de suporte ao raciocínio. Desta forma, parece que o papel que as mesmas desempenharam foi a *organização do raciocínio matemático*, *expressão do processo utilizado* e *expressão da solução*.

Tarefa 3: "Pastilhas Gargantox"

O Rúben constipou-se e está com uma forte dor de garganta. A mãe foi à farmácia comprar uma caixa de pastilhas Gargantox.

Quantas pastilhas tem a caixa sabendo que cada uma tem três placas como aquela que está ilustrada na figura ao lado?

Na tarefa 3 "Pastilhas gargantox" a Ana começou por desenhar um retângulo para representar a caixa de pastilhas. Seguidamente colocou a expressão *8+8+8* para representar a soma do número de pastilhas de cada placa. Por fim, efetuou os cálculos para chegar ao total de pastilhas das três placas, como representa a figura 5.

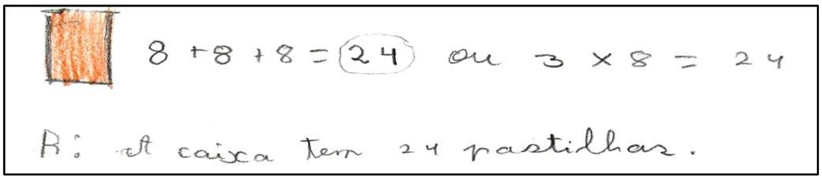


Fig. 5 – Resolução da tarefa 3 "Pastilhas gargantox" – Ana

As representações utilizadas pela aluna na resolução desta tarefa enquadram-se apenas na categoria das *representações simbólicas*, uma vez que o desenho é meramente ilustrativo, pois não interfere na resolução da tarefa.

Na categoria das *representações simbólicas* estão presentes os números (subcategoria: *algarismos e números*) para representar o número de pastilhas de cada placa e o número total de pastilhas das três placas, as palavras (subcategoria: *letras/palavra escrita*) para responder à questão da tarefa e, também, as expressões *8+8+8=24* e *3x8=24* (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*) para representar o número de pastilhas das placas.

A Ana nesta tarefa não revelou qualquer dificuldade na sua resolução e mostrou-se empenhada e organizada.

Na resolução desta tarefa, parece-nos que as representações construídas pela aluna serviram como meio de *organização do raciocínio matemático* e *expressão da solução*.

Tarefa 4: "Arrumando ovos"

Na mercearia da D. Maria, os ovos caseiros são vendidos em caixas como a da figura. 1. Com 49 ovos quantas caixas se enchem? E com 77 ovos?

2. A D. Maria vai comprar caixas retangulares de 8 ovos. Será que ela consegue colocar todos os 56 ovos em caixas, de tal forma que fiquem todas cheias?

Na tarefa 4 "Arrumando ovos", a Ana pensou em resolver com a tabuada, mas como ainda não tinha aprendido a tábua do sete, pareceu desorientar-se um pouco. Depois, decidiu utilizar outra estratégia (que utilizou na resolução de todas as questões desta tarefa). Desta forma, a aluna começou por representar os ovos dentro das caixas. Os ovos eram círculos pequenos que estavam contidos num círculo maior (caixa). À medida que ia representando os ovos dentro das respetivas caixas ia adicionando o número de ovos até chegar ao total de ovos que tinha para arrumar, como se verifica na figura 6 e figura 7.

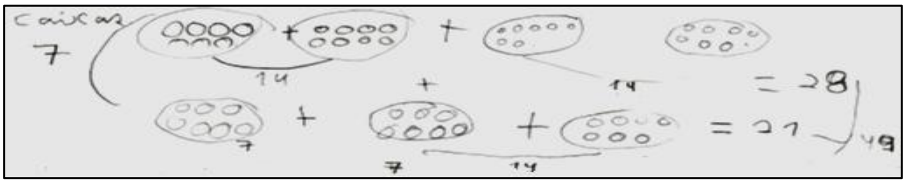


Fig. 6 – Resolução da tarefa 4 “Arrumando ovos” (questão 1) – Ana

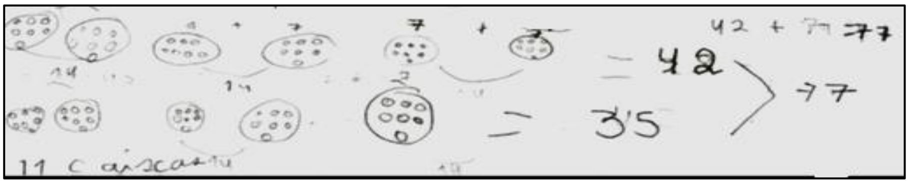


Fig. 7 – Resolução da tarefa 4 “Arrumando ovos” (questão 2) – Ana

Nesta tarefa, a Ana utilizou *representações icónicas* e *representações simbólicas*. Na categoria das *representações icónicas* está presente o desenho (subcategoria: *representação pictórica – desenho*) na representação dos ovos e das caixas e, também, os *símbolos não convencionais* (subcategoria: *representações pictóricas*), nas linhas que utiliza para ligar os números que vai somar até chegar ao número total de ovos. Na categoria das *representações simbólicas* estão presentes a subcategoria *algarismos e números* na representação do número de caixas *7 caixas* e na soma do número total de ovos, a subcategoria *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas* na apresentação do resultado da soma *= 28*, *= 21* e a subcategoria *letras/palavra escrita* na resposta *7 caixas*.

Nesta tarefa a Ana revelou algumas dificuldades a efetuar os cálculos.

As representações construídas pela aluna na resolução desta tarefa, em ambas as questões, parecem que serviram para *organização do raciocínio matemático* e permitiram a *expressão do processo utilizado* e a *expressão da solução*.

Tarefa 5: “A bicharada”

A Rafaela tem três gatinhos e dois coelhinhos de estimação. Sempre que vai passear, gosta de levar consigo um dos seus gatinhos e um dos seus coelhinhos.

Com quantos pares diferentes pode a Rafaela ir passear?

Na tarefa 5 “A bicharada”, a aluna inicialmente não compreendeu o que lhe era pedido. Depois de uma explicação individual, começou e recorreu ao desenho, como se pode verificar nas representações da figura 8. A aluna começou por desenhar um gato e um coelho e, por cima dos dois, escreveu *um par*, continuou desenhando outro gato e outro coelho e por cima escreveu *2 pares* e assim sucessivamente até chegar ao número total de pares (*6 pares*) com que a Rafaela pode passear. No desenho, optou por pintar os gatos de amarelo e os coelhos de castanho e também desenhou pormenores nos animais desenhados, como os olhos, boca e os bigodes no gato. A Ana conseguiu chegar ao número correto de pares com orientação da professora, pois a estratégia que utilizou levou a alguma confusão, uma vez que chegou a um ponto que disse *"um gato fica sem par"*.

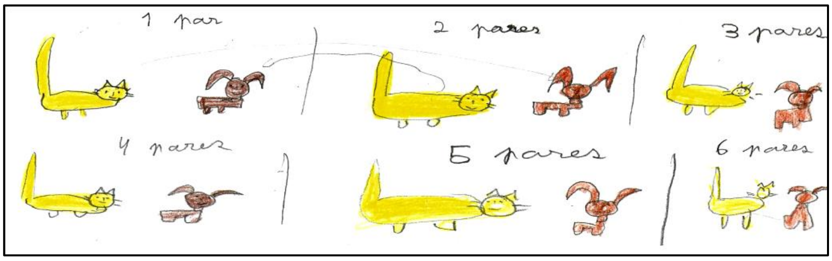


Fig. 8 – Resolução da tarefa 5 "A bicharada" – Ana

As representações utilizadas, nesta tarefa, pela Ana dizem respeito a duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* enquadram-se os animais desenhados pela Ana que se relacionam com desenho (subcategoria: *representações pictóricas*).

Na categoria das *representações simbólicas* insere-se a designação que corresponde ao par de animais desenhado que a aluna apresentou sob a forma de número *1 par, 2 pares,… 6 pares* (subcategoria: *algarismos e números*) e também a palavra *pares* (subcategoria: *letras/palavra escrita*).

Os elementos icónicos que a aluna construiu apoiaram a *organização do raciocínio matemático*, permitindo a *expressão da solução*.

Tarefa 6: "Galinhas e coelhos"

Na quinta da avó do Zacarias há galinhas e coelhos. Contando as patas de todos os animais (galinhas e coelhos) verificou-se que no total eram 48 patas. Sabendo que são 17 animais, quantos coelhos e galinhas existem?

Na tarefa 6 "Galinhas e coelhos" a Ana começou por colocar os animais em sequência (galinha, coelho, galinha,…), ficando-lhe a faltar um no final. Depois de uma breve explicação dada pela investigadora conseguiu chegar à solução transformando um coelho em duas galinhas. Como se pode verificar na figura 9, acabou por conseguir resolver através da utilização dos números. Uma vez que com o desenho lhe faltava um animal desistiu da primeira estratégia.

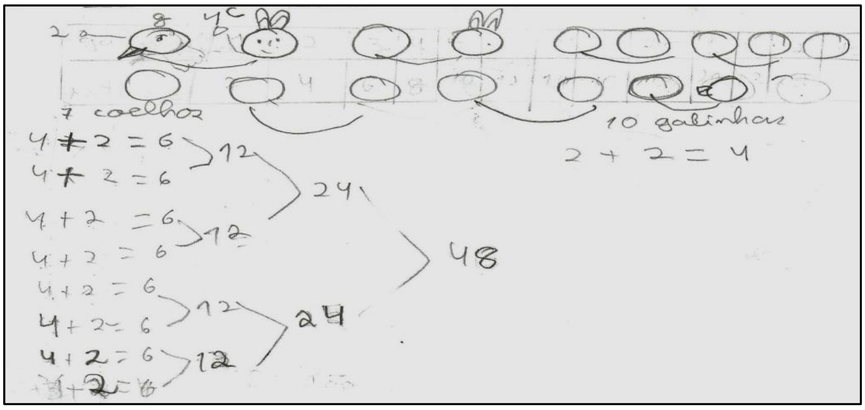


Fig. 9 – Resolução da tarefa 6 “Galinhas e coelhos” – Ana

As representações utilizadas pela Ana, considerando a estratégia correta na resolução desta tarefa, enquadram-se na categoria das *representações icónicas* e na categoria das *representações simbólicas*.

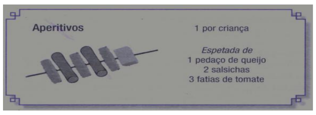
As *representações icónicas* estão presentes quando a Ana coloca, para auxiliar o cálculo, uma espécie de seta, como é algo pessoal, enquadram-se na subcategoria *símbolos não convencionais*.

Na categoria das *representações simbólicas* enquadram-se as sucessivas expressões *4+2=6* que a Ana utilizou para determinar o número de patas (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*), os números dos diversos resultados dos seus cálculos *6, 12, 24, 48* e, os utilizados na resposta *7 coelhos* e *10 galinhas* (subcategoria: *algarismos e números*). Nesta categoria enquadram-se, também, as palavras usadas na resposta *coelhos e galinhas* (subcategoria: *letras/palavra escrita*).

Os elementos icónicos que a aluna construiu serviram de apoio à *organização do raciocínio matemático* e, as expressões matemáticas utilizadas parecem-nos ter servido como forma de *expressão do processo utilizado* e, também, como *expressão da solução*.

Tarefa 7: "A festa da Carolina"

A Carolina festeja o seu aniversário na próxima semana. Como a Carolina pretende dar 4 balões a cada um dos seus amigos, e não ficar com nenhum, a mãe comprou 96 balões. Quantos amigos virão à festa?



Agora que já sabes quantos amigos a Carolina convidou para a sua festa, ajuda-a na preparação dos aperitivos e na organização das mesas. *1.* Quantos pedaços de queijo vão precisar para preparar os aperitivos para a festa? 2. E de quantas salsichas?

Na resolução da tarefa 7 "A festa da Carolina" a Ana utilizou o desenho para representar os balões. Como se verifica na figura 10 a aluna representou os balões por círculos (96 balões – círculos) e depois como cada amigo recebia quatro balões a Ana foi fazendo conjuntos de quatro. Depois de agrupar todos os balões contou os conjuntos formados chegando desta forma ao número de amigos. Isto na primeira questão desta tarefa. Na segunda questão, assim que o enunciado foi lido aos alunos, a Ana respondeu de imediato, por escrito (figura 11).

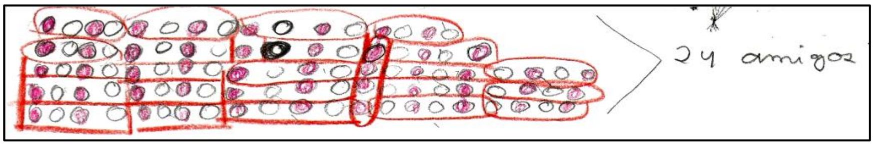


Fig. 10 – Resolução da tarefa 7 "A festa da Carolina" (questão 1) – Ana

Fig. 11– Resolução da tarefa 7 "A festa da Carolina" (questão 2) – Ana

As representações utilizadas pela Ana, na questão 1, parecem enquadrar-se na categoria das *representações icónicas* e na categoria das *representações simbólicas*. Na categoria das *representações icónicas* enquadra-se o desenho dos balões (subcategoria: *representações pictóricas – desenho*). Na categoria *representações simbólicas* enquadra-se o número *24* (subcategoria: *algarismos e números*) e a palavra *amigos* (subcategoria: *letras/palavra escrita*).

Na segunda questão da mesma tarefa ("A festa da Carolina"), a Ana utiliza apenas *representações simbólicas*. Na categoria das *representações simbólicas*, para responder à questão, utiliza os números *24* e *1* (subcategoria: *algarismos e números*) e palavras (subcategoria: *letras/palavra escrita*).

A Ana resolveu toda esta tarefa sem necessitar de ajuda/orientação, não demonstrou dificuldades.

As representações construídas na resolução da questão 1 parecem-nos que serviram como expressão do processo utilizado e, também como forma de chegar à expressão da solução. Enquanto que na resolução da questão 2 serviram apenas para expressão da solução, uma vez que a aluna apenas respondeu à questão.

Tarefa 8: "Comprimidos" O Manuel foi ao médico que lhe receitou duas caixas de Melhorex com 24 comprimidos cada uma. Devia tomar um comprimido de 6 em 6 horas até acabar as duas caixas. A Ana Carolina começou a tomar os comprimidos, de embalagens iguais, há duas semanas, só que os toma de 8 em 8 horas. 1. Quem toma mais comprimidos por dia? 2. Quem acaba primeiro o tratamento?

Na tarefa 8 "Comprimidos", durante a sua resolução, verificou-se que o enunciado induzia os alunos em erro com a expressão *"há duas semanas"*. Ao retirar esta expressão, no geral, os alunos resolveram-na sem dificuldades, isto após se ter feito uma breve explicação sobre as horas que um dia tem.

Esta tarefa tinha duas questões. Na primeira questão, a Ana começou por relacionar o número de comprimidos com o número de caixas *24 – 1 caixa* e *48 – 2 caixas*. Seguidamente, trabalhou com o tempo de intervalo entre as tomas dos dois meninos, para isto adicionou para um *6+6+6+6=24* e para outro *8+8+8=24* de forma a chegar à resposta, como se ilustra na figura 12.

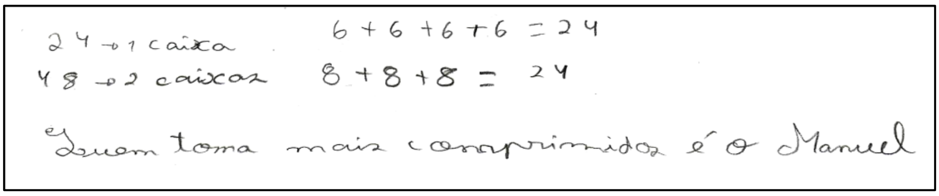

24 → 1 caixa
48 → 2 caixas
6 + 6 + 6 + 6 = 24
8 + 8 + 8 = 24
Quem toma mais comprimidos é o Manuel

Fig. 12– Resolução da tarefa 8 "Comprimidos" (questão 1) – Ana

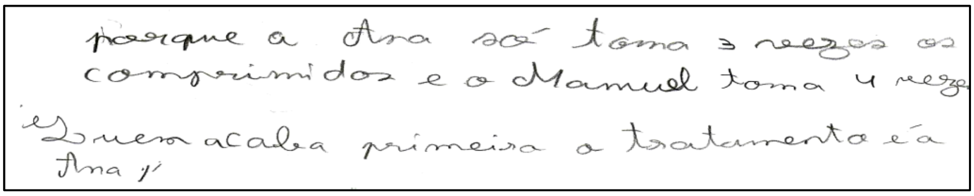

porque a Ana só toma 3 vezes os comprimidos e o Manuel toma 4 vezes
Quem acaba primeira o tratamento é a Ana.

Fig. 13– Resolução da tarefa 8 "Comprimidos" (questão 2) – Ana

Na segunda questão, figura 13, a Ana não necessitou de fazer cálculos, respondeu logo, por escrito, depois de ler a questão.

As representações utilizadas na resolução desta tarefa, na questão 1, enquadram-se na categoria das *representações simbólicas*. As expressões *6+6+6+6=24* e *8+8+8=24* que a Ana utilizou para determinar o número de tomas que cada menino faria por dia enquadram-se na subcategoria *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*. Para além desta subcategoria existe ainda a subcategoria *algarismos e números*, existente na relação do número de comprimidos e o número de caixas e, também, a subcategoria *letras/palavras escritas*, verifica-se na resposta à questão.

As representações utilizadas na segunda questão enquadram-se, também, na categoria das *representações simbólicas*, uma vez que apenas respondeu à questão por escrito, inserindo-se, a mesma, na subcategoria *letras/palavra escrita* e na subcategoria *algarismos e números* para referir o número de vezes que tomam os comprimidos *3 vezes* e *4 vezes*.

Nesta tarefa a Ana não revelou dificuldades.

Na resolução da questão 1 desta tarefa, as representações construídas parece-nos que serviram como meio de *organização do raciocínio matemático* e também como *expressão da solução*. Na resolução da questão 2 desta mesma tarefa, uma vez que a aluna apenas respondeu à questão, parece-nos ter servido como *expressão da solução*.

Tarefa 9: “Colares”

Para o dia da mãe combinámos fazer um colar com bolas. Cada colar tinha 2 bolas pretas, 3 bolas vermelhas e 4 bolas brancas.

Quantas bolas de cada cor se terão de comprar para fazer 6 colares iguais?

Na resolução da tarefa 9 “Colares” a Ana começou por escrever a quantidade de bolas das diferentes cores que cada colar precisava. Depois, para representar o número total de bolas que necessitava, utilizou as expressões *2x6=12* para a cor preta, *3x6=18* para a cor vermelha e *4x6=24* para a cor branca, como se verifica na figura 14. Terminou desenhando um colar com o número de bolas das diferentes cores.

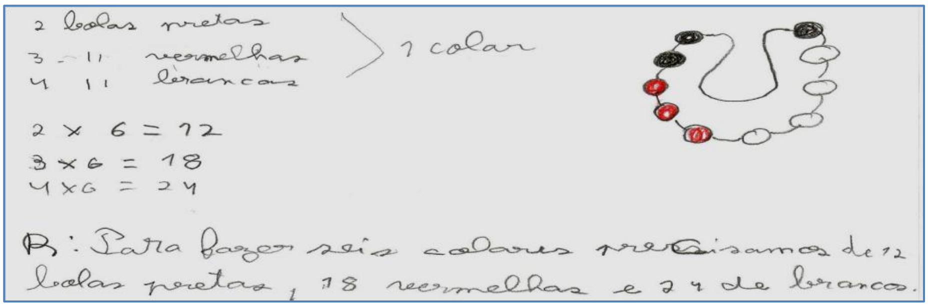


Fig. 14– Resolução da tarefa 9 "Colares" – Ana

Uma vez que o desenho do colar é meramente ilustrativo, as representações utilizadas na resolução desta tarefa enquadram-se apenas na categoria das *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações simbólicas* enquadram-se o esquema que a aluna elaborou da interpretação do enunciado *2 bolas pretas*, *3 bolas vermelhas* e *4 bolas brancas* fazendo corresponder *1 colar* e a resposta à questão formulada na subcategoria *letras/palavra escrita*. Os números *2*, *3* e *4* presentes no referido esquema e os números *12*, *18* e *24* presentes na resposta inserem-se na subcategoria *algarismos e números*. Ainda na categoria das *representações simbólicas* inserem-se as expressões *2x6=12*, *3x6=18* e *4x6=24* (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*) que a aluna utilizou para determinar o número total de bolas que necessitava para fazer os colares.

A aluna resolveu esta tarefa rapidamente sem apresentar qualquer tipo de dificuldade.

As representações construídas por Ana na resolução desta tarefa serviram como *organização do raciocínio matemático*, *registo de ideias* (quando a aluna representa o número de bolas presentes em cada colar) e, também, como *expressão da solução*.

Tarefa 10: "As meias das joaninhas"

O João é um colecionador. Ele tem uma caixa com 5 joaninhas. Cada joaninha tem 6 patas. Se o João tivesse de comprar meias no Inverno para as suas joaninhas, quantas meias compraria?

Na resolução da tarefa 10 "As meias das joaninhas" a aluna assim que foi lido o enunciado apresentou, de uma forma rápida, a solução da tarefa através de uma expressão numérica, seguidamente desenhou uma joaninha e respondeu à questão formulada como se pode verificar na figura 15.

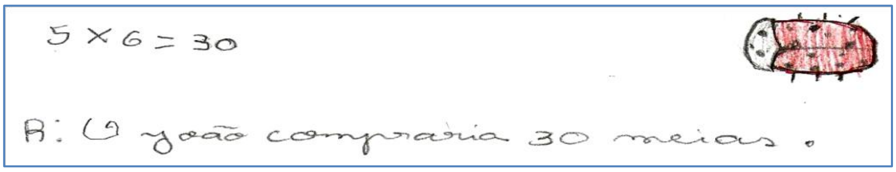


Fig. 15– Resolução da tarefa 10 “As meias das joaninhas” – Ana

As representações utilizadas por Ana na resolução desta tarefa enquadram-se, mais uma vez, apenas na categoria das *representações simbólicas*, uma vez que o desenho é meramente ilustrativo, pois não interfere na resolução da tarefa.

Na categoria das *representações simbólicas* inclui-se a expressão *5x6=30* (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*) que a aluna utilizou para determinar o número total de meias necessárias para todas as joaninhas e o número *30* (subcategoria: *algarismos e números*) presente na resposta, representativo do número total de meias. Ainda na categoria das *representações simbólicas* insere-se a resposta (subcategoria: *letras/palavra escrita*).

As representações utilizadas por Ana na resolução desta tarefa, parece-nos ter servido para *expressão do processo utilizado* e para *expressão da solução*.

Tarefa 11: “A higiene do elefante”

Um elefante gasta dois sabonetes por dia na sua higiene. Quantos sabonetes gastará em 6 dias?

Na resolução da tarefa 11 “A higiene do elefante” a Ana recorreu, mais uma vez, às expressões, tendo sido rápida a chegar à solução e não apresentou qualquer tipo de dificuldade. Assim que foi lido o enunciado representou a informação dada sob a expressão *6x2=12*, seguidamente respondeu à questão por escrito, como se verifica na figura 16.

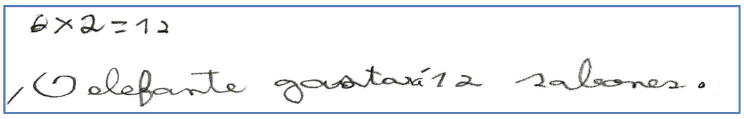


Fig. 16– Resolução da tarefa 11 “A higiene do elefante” – Ana

As representações utilizadas por Ana na resolução desta tarefa parecem enquadrar-se apenas na categoria das *representações simbólicas*, assim como as duas tarefas anteriores.

Na categoria das *representações simbólicas* incluem-se a expressão *6x2=12* (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*) que a aluna utilizou para determinar o número total de sabonetes e, o número *12* (subcategoria: *algarismos e números*) presente na resposta, que representa o número total de sabonetes que o elefante gastará nos referidos dias. A resposta à questão da tarefa, uma vez que é escrita, insere-se na subcategoria: *letras/palavra escrita*.

As representações utilizadas por Ana na resolução desta tarefa parecem-nos ter servido para *expressão do processo utilizado* e para *expressão da solução*.

Tarefa 12: "Problema da rã"

Uma rã tentava saltar para fora de um poço. Cada vez que a rã saltava, subia quatro filas de tijolos, mas como estes estavam escorregadios, descia uma fila. Quantos saltos tem a rã de dar se o poço tiver 12 filas de altura?

Na resolução da tarefa 12 "Problema da rã" a Ana sentiu algumas dificuldades sobretudo no escorregar da rã, necessitou de orientação para conseguir chegar à solução. Depois a professora explicou-lhe o enunciado, individualmente, a aluna começou por representar as doze filas de tijolos. De seguida, através de setas no sentido ascendente representou os saltos da rã e utilizou setas no sentido descendente para representar a fila que escorregava. À medida que que a rã dava um salto, a aluna escrevia *1 salto*, *2 saltos*, …, *4 saltos*. Como se verifica na figura 17. Depois, para dar a resposta, contou os saltos que a rã deu.

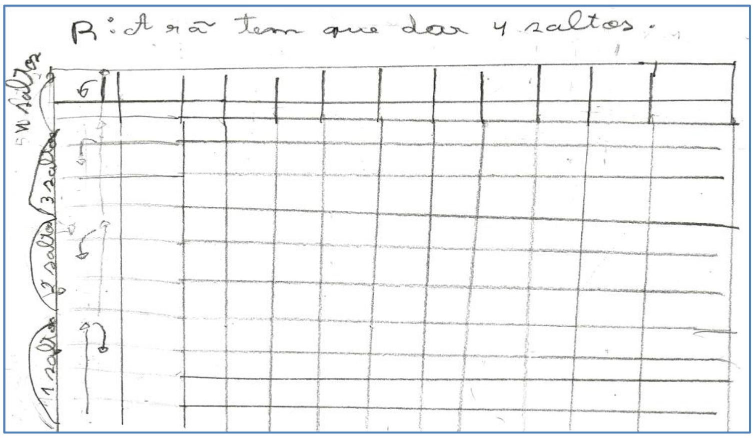


Fig. 17– Resolução da tarefa 12 "Problema da rã" – Ana

As representações utilizadas por Ana na resolução desta tarefa parecem enquadrar-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* incluem-se o desenho das filas de tijolos (subcategoria: *representações pictóricas*) representadas sob a forma de tabela e, o esquema das setas (subcategoria: *diagramas – diagrama em rede*) que a aluna utilizou para representar os movimentos ascendentes e descendentes da rã.

Na categoria das *representações simbólicas* incluem-se os números *1*, *2*, *3* e *4* (subcategoria: *algarismos e números*) representativos do número de saltos. Ainda nesta categoria incluem-se a resposta escrita e a palavra *salto* (subcategoria: *letras/palavra escrita*).

Na resolução desta tarefa as representações construídas pela aluna parecem que serviram para organização do raciocínio matemático, *expressão do processo utilizado* e *expressão da solução*.

Tarefa 13: "Os chocolates" O João tem 42 chocolates que quer distribuir pelos seus 6 amigos, de modo a que cada amigo receba o mesmo número de chocolates. Quantos chocolates recebe cada amigo?

Na resolução da tarefa 13 "Os chocolates" a Ana começou por dividir o número de chocolates por o número de amigos. De seguida, para conseguir obter o resultado da operação desenhou *42 chocolates* em forma de círculo e dividiu-os por os respetivos amigos. Terminou respondendo por escrito como se pode observar na figura 18.

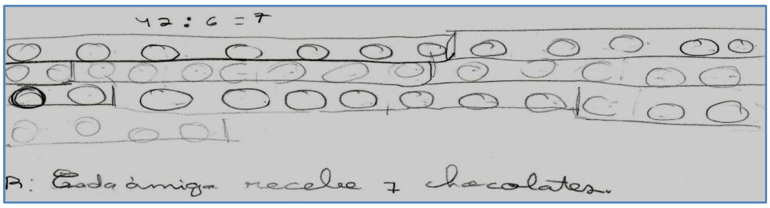


Fig. 18– Resolução da tarefa 13 "Os chocolates" – Ana

As representações utilizadas por Ana na resolução desta tarefa parecem enquadrar-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* incluem-se os círculos (subcategoria: *representações pictóricas – desenho*) representativos dos chocolates e as linhas (subcategoria: *símbolos não convencionais*) que a aluna usou para dividir os chocolates.

Na categoria das *representações simbólicas* inclui-se a expressão *42:6=7* (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*), a resposta escrita (subcategoria: *letras/palavra escrita*) e o número *7* (subcategoria: *algarismos e números*) representativo do número de chocolates que cabe a cada amigo que consta na resposta.

A aluna na resolução desta tarefa não revelou dificuldades, mas sim organização e método de trabalho.

As representações construídas por Ana na resolução desta tarefa parecem que serviram para *expressão do processo utilizado* e *expressão da solução*.

Tarefa 14: "O número de rodas"

Quantas rodas existem em 5 bicicletas, 3 triciclos e 2 carros?

Na resolução da tarefa 14 "O número de rodas" a Ana optou por resolver recorrendo a tabelas. Construiu uma tabela para cada um dos meios de transporte, *carro*, *bicicleta* e *triciclo*, nas quais relacionou o número de meios de transporte com o número de rodas de cada um deles, como se pode observar na figura 19.

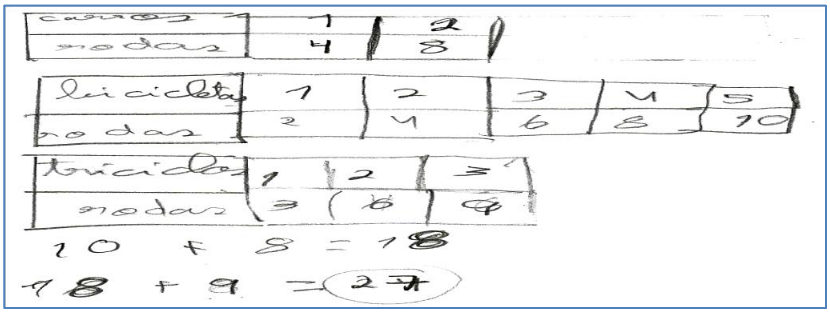


Fig. 19– Resolução da tarefa 14 "O número de rodas" – Ana

As representações utilizadas por Ana na resolução desta tarefa parecem enquadrar-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* incluem-se as tabelas (subcategoria: *diagramas – matriz*) que a aluna construiu para representar a relação existente entre dois conjuntos de informação – número de meios de transporte e número de rodas.

Na categoria das *representações simbólicas* incluem-se as expressões *10+8=18* e *18+9=27* (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*) que a aluna usou para determinar o número total de rodas de todos os meios de transporte e as palavras (subcategoria: *letras/palavra escrita*) usadas pela aluna para preencher a tabela.

A aluna na resolução desta tarefa não revelou qualquer tipo de dificuldade, demonstrando autonomia e método de trabalho.

As representações construídas na resolução desta tarefa parecem que serviram para *organização do raciocínio matemático*, *expressão do processo utilizado* e *expressão da solução*.

Síntese

Na apresentação das tarefas, demonstrou muito entusiasmo e interesse, tendo-se empenhado bastante na resolução das mesmas. A Ana demonstrou sentido de responsabilidade e autonomia na resolução de todas as tarefas, quando sentia alguma dificuldade pedia ajuda à professora ou à investigadora, sendo estas dificuldades ultrapassadas após um pequeno esclarecimento, grande parte das vezes, na interpretação do enunciado. Foi uma aluna que participou ativamente nas tarefas e demonstrou, também, organização e métodos de trabalho.

		Tarefas																	
		1ª Fase												2ª Fase					
		1.1	1.2	2	3	4.1	4.2	5	6	7.1	7.2	8.1	8.2	9	10	11	12	13	14
Representações ativas	Manipulação de objetos																		
Representações icónicas	Representações pictóricas (desenho)	X		X		X	X	X		X							X	X	
	Diagramas																X		X
	Símbolos não convencionais			X		X	X		X									X	
Representações simbólicas	Algarismos e números	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	Sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas		X		X	X	X		X			X		X	X	X		X	X
	Letras/palavra escrita	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Quadro 2 - Resumo do tipo de representações utilizadas na resolução das tarefas por Ana

Como se pode observar no quadro, a Ana não recorreu a materiais manipuláveis (*representações ativas*) para resolver as tarefas propostas. Desta forma, parece não necessitar de concretizar o raciocínio matemático com objetos reais.

Constata-se que a aluna utilizou o desenho para representar elementos na resolução de oito das tarefas propostas, sendo um dos desenhos rico em pormenores, pois procurou representar a realidade. Ainda nas representações icónicas, a aluna recorreu ao diagrama para resolver duas tarefas. Os símbolos não convencionais aparecem nas representações utilizadas em cinco tarefas, embora em simultâneo com outro tipo de representações, uma vez que os símbolos não convencionais surgem como auxiliares de cálculos.

Relativamente às representações simbólicas, os algarismos e números e as letras/palavra escrita são as representações mais presentes nas resoluções. Os algarismos e números, além de utilizados na solução do problema, também foram utilizados para representar a informação dada no enunciado, assim como, para representar passos intermédios da resolução e, também estão presentes em diversas expressões numéricas, pois a aluna recorreu, em mais de metade das tarefas propostas às expressões numéricas.

As letras ou palavra escrita surgem na resolução de todas as tarefas, sobretudo para representar a solução do problema ou em pequenas anotações intermédias.

Numa análise geral, pode-se observar que a aluna recorreu apenas a representações icónicas e representações simbólicas, embora nas resoluções das tarefas sobressaiam mais as representações simbólicas pois, na sua maioria, as representações icónicas serviram de apoio às representações simbólicas. Desta forma, talvez a aluna tenha chegado a um nível de desenvolvimento em que se consegue abstrair dos objetos, não tendo necessidade de concretizar.

3.2. A Mafalda

3.2.1. Caraterização

A Mafalda era uma aluna que tinha sete anos quando se iniciou o estudo. Era uma criança calma, interessada, bem comportada e com um aproveitamento bastante satisfatório. Revelava empenho no trabalho dentro e fora da escola e sentido de responsabilidade. Era uma aluna que sentia alguma dificuldade em se expressar ou a explicar alguma coisa, a responder às questões que lhe eram colocadas. A área curricular que mais gostava era o Estudo do Meio e a que menos gostava era Matemática, porque dizia "é muito difícil". Considerava-se uma aluna média a Matemática, porque segundo ela "as contas normalmente são difíceis e os problemas". Nas aulas de Matemática gostava de trabalhar em grupo e justificaou dizendo "temos ajuda uns dos outros".

3.2.2. Tipo de representações utilizadas e o seu papel na resolução das tarefas

Enunciado tarefa 1: "Copos de sumo"

O Arménio está zangado com o irmão Américo, porque este bebeu três copos de sumo da garrafa que a mãe comprou, que dava para encher cinco copos iguais.
1.Terá o Arménio motivo para ficar zangado? Explica como pensaste.

2.Para acabar com as zangas entre os irmãos, a mãe decidiu comprar mais uma garrafa. Agora temos sumo para quantos copos? Como os podem repartir entre eles, de modo a nenhum dos irmãos ficar zangado?

Na resolução da tarefa 1 "Copos de sumo" a Mafalda revelou dificuldades na interpretação do enunciado. Depois da investigadora explicar individualmente, várias vezes, conseguiu chegar à solução.

Nas representações construídas para resolver a primeira questão desta tarefa, a aluna representou a garrafa e cinco copos, cada um com uma palha, seguidamente respondeu à questão. Quando questionada sobre o que representava o desenho (figura 20) respondeu *"uma garrafa enche estes cinco copos, um bebe três copos, só ficam dois para o outro"*.

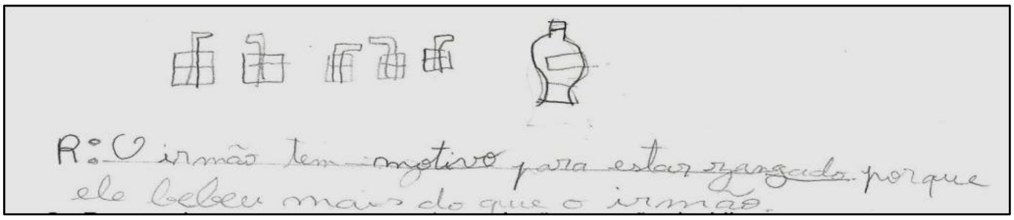


Fig. 20– Resolução da tarefa 1 “Copos de sumo” (questão 1) – Mafalda

Nesta questão, as representações utilizadas pela Mafalda enquadram-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* incluem-se os copos e a garrafa que a aluna desenhou (subcategoria: *representações pictóricas – desenho*) para chegar à solução. Na categoria das *representações simbólicas* inclui-se a resposta à questão (subcategoria*: letras/palavra escrita*).

Na questão 2 da mesma tarefa, a aluna começou por desenhar duas garrafas e colocar por cima de cada uma o número *5*, que representa os copos que enche uma garrafa, de onde surgiu a expressão *5+5=10*, como se verifica na figura 21.

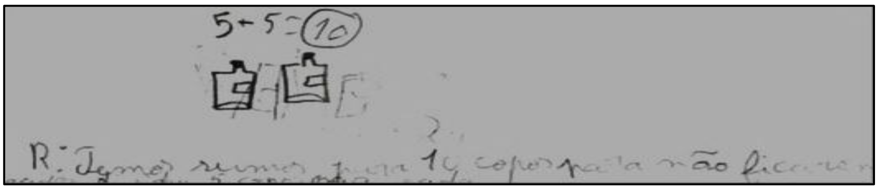


Fig. 21– Resolução da tarefa 1 “Copos de sumo” (questão 2) – Mafalda

As representações utilizadas enquadram-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* inclui-se o desenho das garrafas (subcategoria: *representações pictóricas – desenho*), que serviram de apoio à resolução.

Na categoria das *representações simbólicas* está a expressão *5+5=10* (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*) que o aluno utilizou para representar o número total de copos que enchem as duas garrafas e, o número *10* (subcategoria: *algarismos e números*) presente na resposta. Ainda nesta categoria, enquadra-se a resposta à questão (subcategoria: *letras/palavra escrita*).

Na resolução desta tarefa os elementos icónicos construídos por Mafalda tiveram como papel fundamental a *expressão do processo utilizado* e os elementos simbólicos serviram como *expressão da solução*.

Tarefa 2: “Apertos de mão”

Dez amigos combinaram dar um passeio de patins. Encontraram-se à entrada do Parque da cidade e cumprimentaram-se. Cada amigo deu um aperto de mão a cada um dos seus amigos uma só vez.

Quantos apertos de mão deram?

Na resolução da tarefa 2 “Apertos de mão” a Mafalda revelou as mesmas dificuldades da tarefa anterior, ou seja, interpretação do enunciado e além desta, teve dificuldade em representar o que pensava. Mais uma vez, depois de se explicar o enunciado começou, neste caso, por desenhar os dez amigos referidos no enunciado. Na representação dos amigos a aluna desenhou tendo em atenção os pormenores, como se verifica na figura 22.

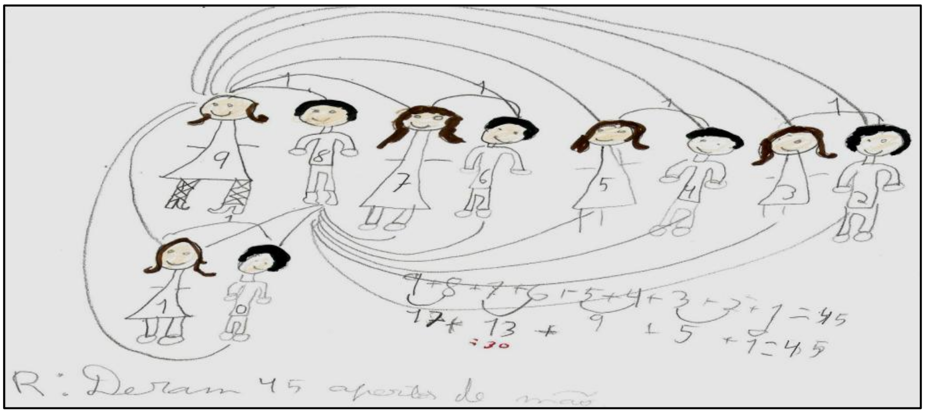


Fig. 22– Resolução da tarefa 2 “Apertos de mão” – Mafalda

Desenhou o corpo completo e distinguiu rapazes de raparigas, embora não fosse mencionado nenhum desses aspetos no enunciado. Seguidamente ligou os amigos com linhas, as quais representam os apertos de mão. Depois contou os apertos de mão que cada amigo dava e colocou o número em cima de cada amigo. Por fim adicionou todos os números para obter o número total de apertos de mão dados.

As representações utilizadas pela Mafalda nesta tarefa enquadram-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* enquadram-se os desenhos dos dez amigos (subcategoria: *representações pictóricas – desenho*), as linhas que representam os apertos de mão (subcategoria: *símbolos não convencionais*) uma vez que foi a forma pessoal de representar os apertos de mão.

Na categoria das *representações simbólicas* incluem-se os números colocados em cima dos amigos e o número *45* presente na resposta (subcategoria: *algarismos e números*). A expressão que a aluna utilizou para calcular o número de apertos de mão *9+8+7+…1=45* (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*) e, também, a resposta à questão (subcategoria: *letras/palavra escrita*).

Há que referir que a aluna chegou à solução com bastante orientação, uma vez que tem muita dificuldade em se expressar.

Os elementos icónicos construídos por Mafalda na resolução desta tarefa serviram para *organização do raciocínio matemático* e os elementos simbólicos para *expressão do processo utilizado* e para *expressão da solução*.

Tarefa 3: "Pastilhas Gargantox"

O Rúben constipou-se e está com uma forte dor de garganta. A mãe foi à farmácia comprar uma caixa de pastilhas Gargantox.

Quantas pastilhas tem a caixa sabendo que cada uma tem três placas como aquela que está ilustrada na figura ao lado?

Na resolução da tarefa 3 "Pastilhas gargantox", a Mafalda após ter lido várias vezes o enunciado, começou por desenhar um retângulo, para representar a caixa de pastilhas. Seguidamente adicionou o número de pastilhas das três placas dando origem à expressão *8+8+8=24*, como se verifica na figura 23.

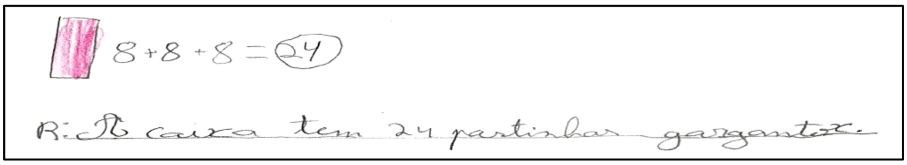


Fig. 23– Resolução da tarefa 3 "Pastilhas gargantox" – Mafalda

Uma vez que o retângulo desenhado é meramente ilustrativo, não interfere com a resolução da tarefa. As representações utilizadas pela Mafalda na resolução desta tarefa enquadram-se apenas na categoria das *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações simbólicas* enquadram-se claramente as expressões matemáticas (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual (expressões matemáticas*) quando a aluna representa o número total de pastilhas com a expressão *8+8+8=24*. Ainda nesta categoria insere-se o número *24* (subcategoria: *algarismos e números*) que consta na resposta e a própria resposta (subcategoria: *letras/palavra escrita*).

Na resolução desta tarefa, parece que as representações construídas pela aluna serviram para *organização do raciocínio matemático* e *expressão da solução*.

Tarefa 4: "Arrumando ovos"

Na mercearia da D. Maria, os ovos caseiros são vendidos em caixas como a da figura. 1. Com 49 ovos quantas caixas se enchem? E com 77 ovos?

2. A D. Maria vai comprar caixas retangulares de 8 ovos. Será que ela consegue colocar todos os 56 ovos em caixas, de tal forma que fiquem todas cheias?

Na resolução da tarefa 4 "Arrumando ovos" a Mafalda utiliza, nas duas questões a mesma estratégia. A aluna começou por representar a caixa de ovos por um círculo grande e dentro destes colocou sete círculos pequenos numerados de um a sete, os quais representam os ovos que cada caixa leva. Seguiu este processo até chegar ao número total de ovos que tinha para arrumar, na questão um até ao número *49* (figura 24) e na questão dois (figura 25) não concluiu.

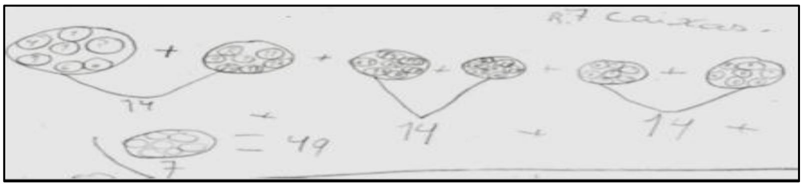


Fig. 24– Resolução da tarefa 4 "Arrumando ovos" (questão 1) – Mafalda

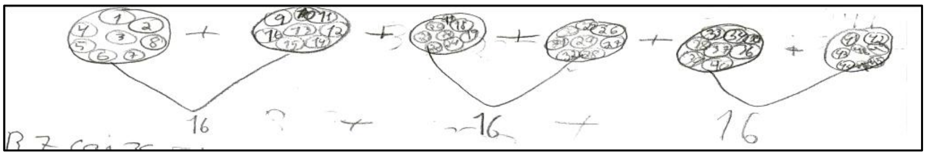


Fig. 25– Resolução da tarefa 4 "Arrumando ovos" (questão 2) – Mafalda

As representações utilizadas em ambas as questões incidiram em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* incluem-se os círculos representativos da caixa de ovos e os ovos (subcategoria: *representações pictóricas – desenho*) e as linhas que ligam as caixas duas a duas, as quais se podem considerar *símbolos não convencionais* (subcategoria das *representações icónicas*), uma vez que foi uma forma pessoal que a aluna utilizou para facilitar a adição do total de ovos.

Na categoria das *representações simbólicas* enquadram-se os números que a Mafalda colocou dos ovos que tinha (subcategoria: *algarismos e números*) e o sinal da operação adição que colocou entre as caixas de ovos e o sinal de igual (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*). Na questão um enquadra-se ainda, na categoria das *representações simbólicas* a palavra *caixas* (subcategoria: *letras/palavra escrita*) que a aluna usou para responder à questão.

Nesta tarefa notou-se, mais uma vez, dificuldade na interpretação do enunciado.

As representações construídas pela aluna na resolução desta tarefa serviram para *organização do raciocínio matemático* e permitiram, também, a *expressão do processo utilizado* e a *expressão da solução*.

Tarefa 5: "A bicharada" A Rafaela tem três gatinhos e dois coelhinhos de estimação. Sempre que vai passear, gosta de levar consigo um dos seus gatinhos e um dos seus coelhinhos. Com quantos pares diferentes pode a Rafaela ir passear?

Na resolução da tarefa 5 "A bicharada" a investigadora apercebeu-se que a Mafalda estava muito parada, sem começar a resolver a tarefa e dirigiu-se-lhe para saber o que se passava. Ela disse *"Não estou a perceber nada"*. A investigadora leu-lhe duas vezes o enunciado e depois perguntou à aluna de que animais falava o enunciado, onde ela respondeu *"três gatos e dois coelhos"*. Com esta resposta a investigadora disse-lhe *"Então agora pensa, com quantos pares diferentes pode ir passear a menina"*. Seguidamente a aluna desenhou os animais, como se pode observar na figura 26.

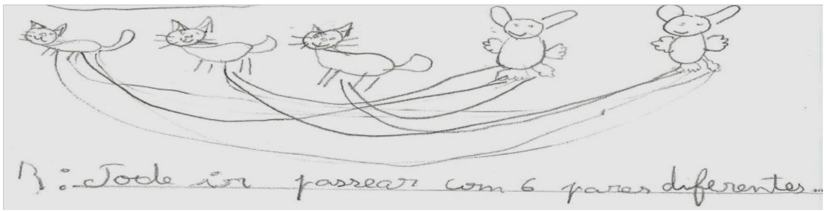


Fig. 26– Resolução da tarefa 5 "A bicharada" – Mafalda

Desenhou os animais completos, ricos em pormenores. Depois parou novamente, pois não sabia o que fazer a seguir. Nesta altura, a professora perguntou-lhe *"Quantos pares diferentes pode fazer a menina sabendo que, quando vai passear, leva apenas um gato e um coelho?"*. A aluna prosseguiu ligando um gato a um coelho através de linhas, as quais representam os pares formados.

As representações utilizadas por Mafalda na resolução desta tarefa enquadram-se na categoria das *representações icónicas* e na categoria das *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* enquadra-se o desenho dos animais presentes no enunciado da tarefa (subcategoria: *representações pictóricas – desenho*) e as linhas que ligam os animais (subcategoria: *símbolos não convencionais*), uma vez que é a forma pessoal da aluna representar o par de animais formado.

Na categoria das *representações simbólicas* enquadra-se a resposta à tarefa (subcategoria: *letras/palavra escrita*) e o número *6* (subcategoria: *algarismos e números*) presente na resposta, o qual representa o número total de pares diferentes.

Os elementos icónicos construídos por Mafalda na resolução desta tarefa serviram para *organização do raciocínio matemático*, *expressão do processo utilizado* e *expressão da solução*.

Tarefa 6: "Galinhas e coelhos"

Na quinta da avó do Zacarias há galinhas e coelhos. Contando as patas de todos os animais (galinhas e coelhos) verificou-se que no total eram 48 patas. Sabendo que são 17 animais, quantos coelhos e galinhas existem?

Na tarefa 6 "Galinhas e coelhos", a Mafalda não revelou dificuldades, mas sim método de trabalho, organização e autonomia.

A aluna começou por representar todos os animais em forma de círculo, como se verifica na figura 27. Seguidamente colocou as patas dos animais por tentativas, até obter o número total de patas referido no enunciado. Ao contrário do que se verificou na tarefa anterior, a aluna não desenhou os animais de forma pormenorizada.

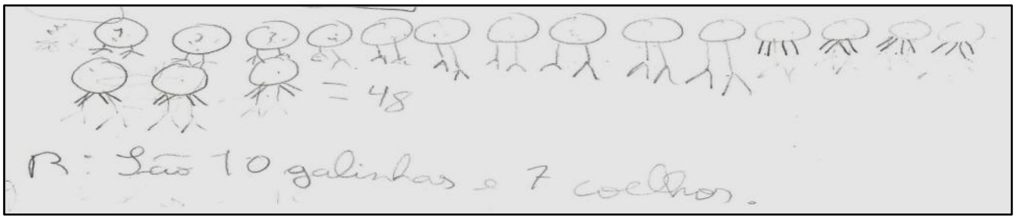


Fig. 27– Resolução da tarefa 6 "Galinhas e coelhos" – Mafalda

As representações utilizadas na resolução desta tarefa enquadram-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

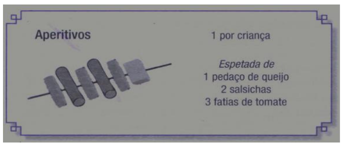
Na categoria das *representações icónicas* inclui-se o desenho dos animais (subcategoria: *representações pictóricas – desenho*).

Na categoria das *representações simbólicas* enquadra-se o número *48*, representativo do número total de patas existentes na quinta e os números *10* e *7* (subcategoria: *algarismos e números*) presentes na resposta. Ainda na categoria das *representações simbólicas* insere-se a resposta escrita (subcategoria: *letras/palavra escrita*).

As representações utilizadas pela aluna na resolução desta tarefa tiveram como papel fundamental a *organização do raciocínio matemático* e a *expressão da solução*.

Tarefa 7: "A festa da Carolina"

A Carolina festeja o seu aniversário na próxima semana. Como a Carolina pretende dar 4 balões a cada um dos seus amigos, e não ficar com nenhum, a mãe comprou 96 balões. Quantos amigos virão à festa?



Agora que já sabes quantos amigos a Carolina convidou para a sua festa, ajuda-a na preparação dos aperitivos e na organização das mesas. *1.* Quantos pedaços de queijo vão precisar para preparar os aperitivos para a festa? 2. E de quantas salsichas?

A Mafalda, na resolução da tarefa 7 "A festa da Carolina", na questão um, desenhou balões agrupados em conjuntos de quatro balões, como se verifica na figura 28. À medida que ia desenhando um balão colocava dentro dele o número ao qual correspondia. Fez isto até chegar ao número total de balões, que eram 96. Seguidamente para chegar à resposta contou o número de conjuntos formados.

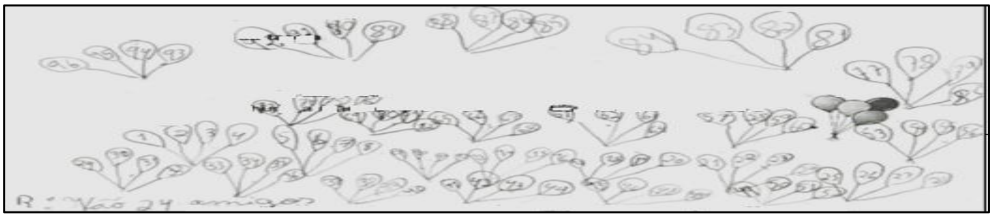


Fig. 28– Resolução da tarefa 7 "A festa da Carolina" (questão 1) – Mafalda

As representações utilizadas por Mafalda na primeira questão enquadram-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* enquadram-se os balões que a aluna desenhou (subcategoria: *representações pictóricas – desenho*).

Na categoria das *representações simbólicas* enquadram-se os números de *1* a *96* representados dentro dos balões, que representam o número total de balões e o número *24* (subcategoria: *algarismos e números*) presente na resposta, que representa o número de amigos. Insere-se ainda, nesta categoria, a resposta escrita (subcategoria: *letras/palavra escrita*).

Na resolução da questão dois da mesma tarefa a Mafalda apenas desenhou pequenos pedaços de queijo, representados por quadrados (figura 29). Neste sentido a resposta seriam vinte e quatro quadrados e a aluna representou vinte e cinco.

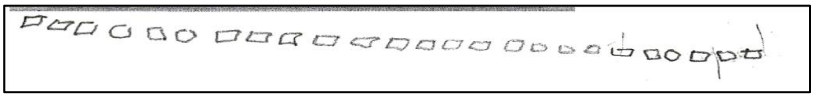


Fig. 29– Resolução da tarefa 7 “A festa da Carolina” (questão 2) – Mafalda

As representações utilizadas na resolução desta questão enquadram-se na categoria das *representações icónicas*, uma vez que recorreu ao desenho dos pedações de queijo (subcategoria: *representações pictóricas – desenho*).

As representações construídas por Mafalda na resolução da questão 1 serviram para *organização do raciocínio matemático*, *expressão do processo utilizado* e para *expressão da solução*. Na resolução da questão 2 desta tarefa, as representações serviram para *organização do raciocínio matemático*.

Tarefa 8: “Comprimidos”

O Manuel foi ao médico que lhe receitou duas caixas de Melhorex com 24 comprimidos cada uma. Devia tomar um comprimido de 6 em 6 horas até acabar as duas caixas.

A Ana Carolina começou a tomar os comprimidos, de embalagens iguais, há duas semanas, só que os toma de 8 em 8 horas. 1. Quem toma mais comprimidos por dia? 2. Quem acaba primeiro o tratamento?

Na resolução da tarefa 8 “Comprimidos” a Mafalda, depois da investigadora explicar, individualmente, o enunciado, optou por colocar os números das horas representativas de um dia. Depois rodeou as horas das tomas dos respetivos meninos presentes no enunciado. Seguidamente usou linhas a unir as tomas de cada um, como se pode verificar na figura 30.

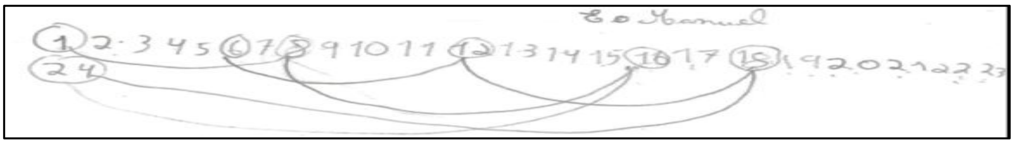


Fig. 30– Resolução da tarefa 8 “Comprimidos” (questão 1) – Mafalda

As representações utilizadas por Mafalda na questão dois enquadram-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* incluem-se as linhas e os círculos a rodear os números (subcategoria: *símbolos não convencionais*).

Na categoria das *representações simbólicas* enquadram-se os números de *1* a *24* utilizados pela aluna para representar as horas do dia (subcategoria: *algarismos e números*) e a resposta (subcategoria: *letras/palavra escrita*).

Na resolução da questão dois da mesma tarefa, a aluna usou as expressões numéricas *4+4+4+4+4+4=24* e *6+6+6=24* para conseguir chegar à solução (figura 31).

Fig. 31– Resolução da tarefa 8 "Comprimidos" (questão 2) – Mafalda

As representações utilizadas pela Mafalda na resolução desta questão enquadram-se, simplesmente, na categoria das *representações simbólicas* uma vez que recorreu a expressões numéricas (subcategorias: *sinais de operações e sinal de igual/expressões numéricas*) e usou palavras na resposta (subcategoria: *letras/palavra escrita*).

As representações construídas pela aluna na resolução da questão 1 desta tarefa tiveram como papel a *organização do raciocínio matemático*, a *expressão do processo utilizado* e para *expressão da solução*. Na resolução da questão 2, as representações serviram para *organização do raciocínio matemático* e para *expressão da solução*.

Tarefa 9: "Colares"

Para o dia da mãe combinámos fazer um colar com bolas. Cada colar tinha 2 bolas pretas, 3 bolas vermelhas e 4 bolas brancas. Quantas bolas de cada cor se terão de comprar para fazer 6 colares iguais?

Na resolução da tarefa 9 "Colares" a Mafalda começou por representar a informação dada no enunciado, sendo ela o número de bolas de cada cor que cada colar tinha, da seguinte forma: *2P*, *3V* e *4B*. Cada letra representa, respetivamente, a cor preta, vermelha e branca. Seguidamente, desenhou os colares na forma horizontal, começando com as bolas pretas, depois vermelhas terminando com as brancas, além de as desenhar colocava, também, o número de bolas de cada cor e separava-as com um traço vertical. Ao fim de desenhar os seis colares, nos quais ia colocando o seu número *1*, *2*, *3*, *4*, *5* e *6*, contou separadamente as bolas por cor, onde, no fim da contagem colocava o sinal de igual e o número de bolas contadas. Para terminar escreveu as letras representativas de cada cor, por baixo o número total de bolas e respondeu à questão formulada, como se verifica na figura 32.

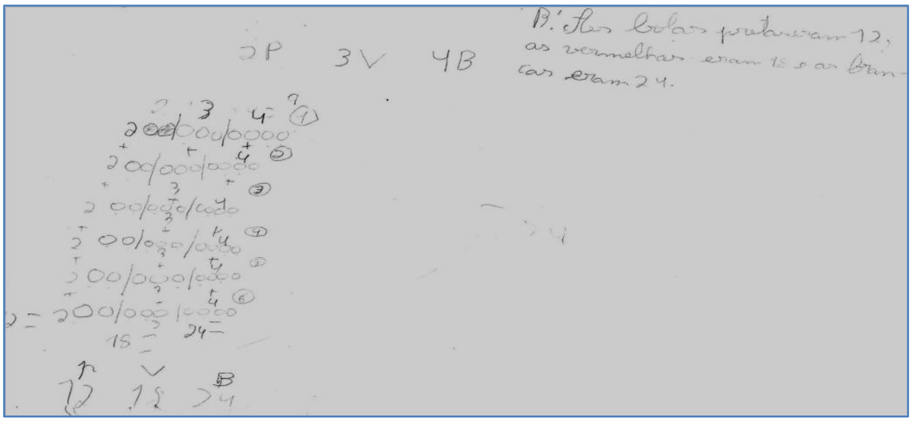


Fig. 32– Resolução da tarefa 9 “Colares” – Mafalda

As representações utilizadas na resolução desta tarefa enquadram-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* incluem-se as bolas desenhadas (subcategoria: *representações pictóricas – desenho*) pela aluna para representar os colares e os traços verticais (subcategoria: *símbolos não convencionais*) utilizados pela aluna para separar as bolas por cores. Estes traços foram a forma pessoal que a aluna usou para lhe facilitar a contagem.

Na categoria das *representações simbólicas* incluem-se os números *1*, *2*, *3*, *4*, *5* e *6* (subcategoria: *algarismos e números*) presentes ao longo da resolução para representar o número de bolas de cada cor e o número de colares e, os números *12*, *18* e *24* presentes na resposta e no final dos colares, que representam o número total de bolas de cada cor, pretas, vermelhas e brancas, respetivamente, necessárias para fazer todos os colares. Ainda na categoria das *representações simbólicas* insere-se a resposta e as letras *P*, *V* e *B* (subcategoria: *letras/palavra escrita*) que representam, respetivamente, as cores preta, vermelha e branca. Os sinais que representam a adição utilizados pela aluna ao longo da resolução e o sinal de igual inserem-se na categoria das *representações simbólicas* (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*).

Na resolução desta tarefa a Mafalda utilizou as representações para *registo de ideias* (quando regista 2P, 3V e 4B – número de bolas que cada colar leva) *organização do raciocínio matemático*, *expressão do processo utilizado* e para *expressão da solução*.

Tarefa 10: "As meias das joaninhas" O João é um colecionador. Ele tem uma caixa com 5 joaninhas. Cada joaninha tem 6 patas. Se o João tivesse de comprar meias no Inverno para as suas joaninhas, quantas meias compraria?

Na resolução da tarefa 10 "As meias das joaninhas" a Mafalda sentiu dificuldade na interpretação do enunciado, depois da investigadora explicar o enunciado individualmente conseguiu chegar à solução correta. A aluna começou por desenhar cinco joaninhas e por baixo de cada uma escreveu o número de patas (6P) com o sinal da adição entre elas. Para conseguir determinar o resultado da expressão *6+6+6+6+6* com mais facilidade utilizou setas, como se verifica na figura 33.

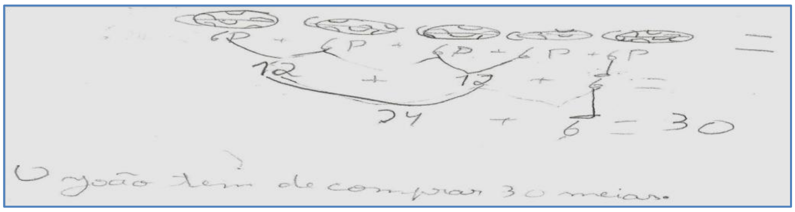


Fig. 33– Resolução da tarefa 10 "As meias das joaninhas" – Mafalda

As representações utilizadas na resolução desta tarefa parecem enquadrar-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* inclui-se o desenho das joaninhas (subcategoria: *representações pictóricas – desenho*) e as setas (subcategoria: *símbolos não convencionais*), uma vez que foi a forma pessoal que a aluna utilizou para facilitar os cálculos.

Na categoria das *representações simbólicas* incluem-se as expressões *6+6+6+6+6*, *12+12+6* e *24+6=30* (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*) que a aluna representou para chegar ao número de meias necessárias. Ainda na mesma categoria inclui-se o número *30* (subcategoria: *algarismos e números*) presente na resposta e, a resposta e a letra *P* (subcategoria: *letras/palavra escrita*) que designa a palavra patas.

As representações construídas por Mafalda na resolução desta tarefa serviram para *organização do raciocínio matemático*, *expressão do processo utilizado* e *expressão da solução*.

Tarefa 11: “A higiene do elefante” Um elefante gasta dois sabonetes por dia na sua higiene. Quantos sabonetes gastará em 6 dias?

Na resolução da tarefa 11 “A higiene do elefante” a Mafalda começou por desenhar os sabonetes, mas apenas fez para três dias. Depois de algum apoio/orientação e leitura individual do enunciado continuou e desenhou os sabonetes para os seis dias. Entre os sabonetes colocou o sinal da adição e depois de os contar colocou o sinal de igual e o número *12*, como se verifica na figura 34.

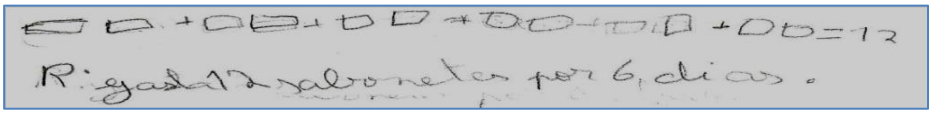


Fig. 34– Resolução da tarefa 11 “A higiene do elefante” – Mafalda

As representações utilizadas na resolução desta tarefa parecem enquadrar-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* inclui-se o desenho dos sabonetes (subcategoria: *representações pictóricas – desenho*).

Na categoria das *representações simbólicas* inserem-se o sinal da adição e o sinal de igual (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões numéricas*), os números *6* e *12* (subcategoria: *algarismos e números*) que representam, respetivamente, o número de dias e o número de sabonetes necessários. Ainda na categoria das *representações simbólicas* insere-se, também, a resposta escrita (subcategoria: *letras/palavra escrita*).

As representações utilizadas pela aluna na resolução desta tarefa serviram para *organização do raciocínio matemático* e para *expressão da solução*.

Tarefa 12: “Problema da rã” Uma rã tentava saltar para fora de um poço. Cada vez que a rã saltava, subia quatro filas de tijolos, mas como estes estavam escorregadios, descia uma fila. Quantos saltos tem a rã de dar se o poço tiver 12 filas de altura?

Na resolução da tarefa 12 “Problema da rã” a Mafalda demonstrou dificuldades na compreensão do enunciado, necessitando, desta forma, de orientação/explicação individual para resolver a tarefa. Depois da investigadora ter lido e explicado, individualmente, o enunciado, a aluna começou por desenhar as filas de tijolos. Enquanto a Ana representou as filas na vertical, a Mafalda representou-as na horizontal. De seguida indicou, através de setas, os saltos e as escorregadelas dadas pela rã, como se verifica na figura 35. Depois contou as setas que correspondiam aos saltos e respondeu à questão por escrito.

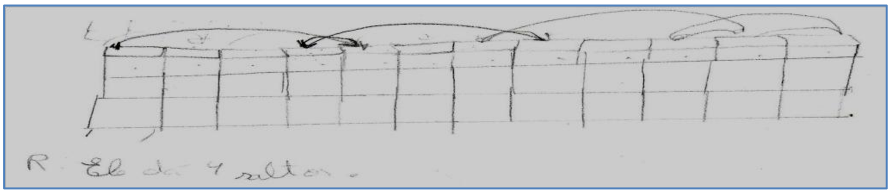


Fig. 35 – Resolução da tarefa 12 “Problema da rã” – Mafalda

As representações utilizadas por Mafalda na resolução desta tarefa parecem enquadrar-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* incluem-se o desenho das filas dos tijolos (subcategoria: *representações pictóricas*) e as setas (subcategoria: *diagramas – diagrama em rede*) que a aluna utilizou para representar os movimentos da rã.

Na categoria das *representações simbólicas* inclui-se a resposta escrita (subcategoria: *letras/palavra escrita*) e o número 4 (subcategoria: *algarismos e números*) presente na resposta.

Na resolução desta tarefa as representações construídas pela Mafalda parece que serviram para *organização do raciocínio matemático*, *expressão do processo utilizado* e *expressão da solução*.

Tarefa 13: “Os chocolates”

O João tem 42 chocolates que quer distribuir pelos seus 6 amigos, de modo a que cada amigo receba o mesmo número de chocolates.

Quantos chocolates recebe cada amigo?

Na resolução da tarefa 13 “Os chocolates” a Mafalda começou por desenhar seis círculos pequenos com dois olhos e uma boca representativos dos seis amigos e, de seguida foi colocando círculos, representativos dos chocolates, por baixo das caras, em linha até chegar ao número total de chocolates. Terminou contando o número de chocolates que cada cabeça tinha por baixo e respondeu, por escrito, à questão, como se pode observar na figura 36.

Fig. 36 – Resolução da tarefa 13 “Os chocolates” – Mafalda

As representações utilizadas pela Mafalda na resolução desta tarefa parecem enquadrar-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* incluem-se os desenhos das cabeças dos amigos e dos chocolates (subcategoria: *representações pictóricas*).

Na categoria das *representações simbólicas* enquadra-se a resposta escrita (subcategoria: *letras/palavra escrita*) e o número *7* (subcategoria: *algarismos e números*) presente na resposta.

A aluna na resolução desta tarefa não revelou qualquer tipo de dificuldade, tendo demonstrado organização e método de trabalho.

As representações construídas pela Mafalda na resolução desta tarefa tiveram como papel a *organização do raciocínio matemático* e a *expressão da solução*.

Tarefa 14: “O número de rodas” Quantas rodas existem em 5 bicicletas, 3 triciclos e 2 carros?

Na resolução da tarefa 14 “O número de rodas” a Mafalda começou por adicionar o número de rodas das cinco bicicletas através da expressão *2+2+2+2+2*. De seguida utilizou a mesma estratégia para determinar o número de rodas dos três triciclos e dos dois carros, através das expressões *3+3+3* e 4+4, respetivamente. Para terminar adicionou o número total de rodas de cada meio de transporte para chegar ao número total de rodas e respondeu à questão por escrito, como se pode observar na figura 37.

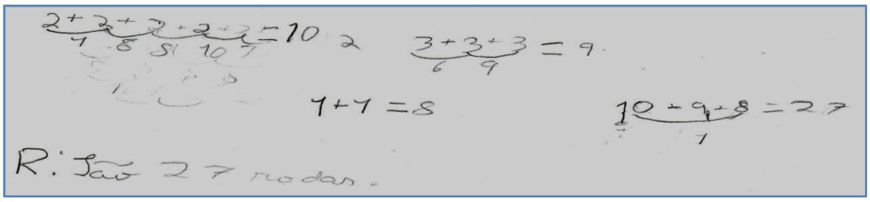


Fig. 37 – Resolução da tarefa 14 “As rodas” – Mafalda

As representações utilizadas pela Mafalda na resolução desta tarefa parecem enquadrar-se apenas na categoria das *representações simbólicas*.

Na categoria das representações simbólicas incluem-se as expressões *2+2+2+2+2=10*, *3+3+3=9*, *4+4=8* e *10+9+8=27* (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*) que a aluna usou para determinar, respetivamente, o número de rodas das bicicletas, dos triciclos, dos carros e do número total de rodas de todos os meios de transporte presentes no enunciado. Ainda nesta categoria inclui-se a resposta (subcategoria: *letras/palavra escrita*) e o número *27* (subcategoria: *algarismos e números*) presente na resposta.

A aluna na resolução desta tarefa não revelou dificuldades, demonstrou autonomia, organização e empenho na realização da mesma.

As representações utilizadas por Mafalda na resolução desta tarefa serviram como *organização do raciocínio matemático* e *expressão da solução*.

Síntese

Na apresentação das tarefas, a Mafalda mostrou-se entusiasmada e interessada, embora fosse necessário algum acompanhamento/orientação mais frequente, um incentivo apenas dizendo "anda, continua", pois parecia que se esquecia do que estava a fazer. Por vezes, não solicitava ajuda quando sentia dificuldades e, quando solicitava, demonstrava algum receio por o estar a fazer. Em todo o caso, no geral, manteve-se empenhada na realização das tarefas. Foi uma aluna que demonstrou organização e algum método de trabalho. Revelou, também, dificuldade na interpretação dos enunciados dos problemas propostos e em expressar as suas ideias. No que respeita à sua autonomia, é um aspeto que necessita de ser desenvolvido.

		Tarefas																	
		1ª Fase												2ª Fase					
		1.1	1.2	2	3	4.1	4.2	5	6	7.1	7.2	8.1	8.2	9	10	11	12	13	14
Representações ativas	Manipulação de objetos																		
Representações icónicas	Representações pictóricas (desenho)	X	X	X		X	X	X	X	X	X			X	X	X	X	X	
	Diagramas																X		
	Símbolos não convencionais			X		X	X	X				X		X	X				
Representações simbólicas	Algarismos e números		X	X	X	X	X	X	X	X		X		X	X	X	X	X	X
	Sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas		X	X	X	X	X						X	X	X	X			X
	Letras/palavra escrita	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X

Quadro 3 - Resumo do tipo de representações utilizadas na resolução das tarefas por Mafalda

Ao analisar o quadro, pode-se observar que a Mafalda não necessitou de recorrer a materiais manipuláveis (*representações ativas*) para resolver as tarefas propostas. Desta forma, parece não necessitar de concretizar o raciocínio matemático com objetos reais.

Verifica-se que a aluna utilizou o desenho (*representações pictóricas*) na maioria das tarefas propostas. Pode-se observar que, na resolução de duas tarefas, o desenho é rico em pormenores, representando, o melhor possível, a realidade. Ainda nas representações icónicas a aluna recorreu, na resolução de uma tarefa, ao diagrama.

Os símbolos não convencionais aparecem nas representações utilizadas na resolução de sete tarefas, em simultâneo com outro tipo de representações, surgindo apenas como facilitadores de cálculos ou para ligar elementos.

Quanto às representações simbólicas, os algarismos e números, assim como as letras e a palavra escrita estiveram presentes na resolução da grande maioria das tarefas. Os algarismos e números foram utilizados não só na solução da tarefa como também representam outras quantidades ao longo das resoluções, enquanto que a letra ou palavra escrita está presente sobretudo na solução.

A aluna também recorreu às expressões numéricas em mais de metade das tarefas propostas. As expressões numéricas surgem, em três tarefas, na respetiva resolução e as restantes surgem em simultâneo com outro tipo de representações, sobretudo representações pictóricas.

Numa análise geral, pode verificar-se que a aluna recorreu apenas a representações icónicas e representações simbólicas. Apesar da Mafalda recorrer às representações simbólicas, as representações icónicas parecem desempenhar um papel importante nas representações utilizadas na resolução das tarefas, pois parece que a aluna ainda sente necessidade de concretizar a realidade através do desenho.

3.3. O Miguel

3.3.1. Caraterização

O Miguel era um aluno que tinha sete anos quando se iniciou o estudo. Revelava um bom nível de compreensão e escrita e de comunicação. Era um aluno com capacidades e com um bom aproveitamento escolar. Era um aluno que tinha melhorado a sua autonomia, a organização e espírito de tolerância. Sabia manifestar a sua opinião. Relacionava-se bem com os colegas, embora, de vez em quando, fosse conflituoso.

A sua área curricular preferida era Matemática, porque "gostava de resolver problemas" e a que menos gostava era Língua Portuguesa isto, segundo suas palavras, porque "de vez em quando não tinha tempo para acabar as coisas". Na Matemática o que mais gostava de fazer eram as "estratégias" – resolução de problemas e o que menos gostava de fazer eram "as contas mais difíceis". Gostava muito de resolver problemas porque "podia aplicar as estratégias".

O Miguel afirmou que gostava de andar na escola e que é importante frequentá-la, porque "aprendia muita coisa". No geral, considerava-se um aluno médio, porque "de vez em quando tinha satisfaz ou bom", dizia ele.

3.3.2. Tipo de representações utilizadas e o seu papel na resolução das tarefas

Enunciado tarefa 1: "Copos de sumo"

O Arménio está zangado com o irmão Américo, porque este bebeu três copos de sumo da garrafa que a mãe comprou, que dava para encher cinco copos iguais. 1.Terá o Arménio motivo para ficar zangado? Explica como pensaste. 2.Para acabar com as zangas entre os irmãos, a mãe decidiu comprar mais uma garrafa. Agora temos sumo para quantos copos? Como os podem repartir entre eles, de modo a nenhum dos irmãos ficar zangado?

Na resolução da tarefa 1 "Copos de sumo" o Miguel necessitou que a professora lê-se individualmente a tarefa, pois não conseguiu interpretar o enunciado. Depois de lido chegou rapidamente à solução. Começou por desenhar uma garrafa que não interferiu na resolução da tarefa, como se verifica nas figuras 38 e 39, o desenho é meramente ilustrativo.

O aluno resolveu a tarefa, em ambas as questões, usando apenas texto.

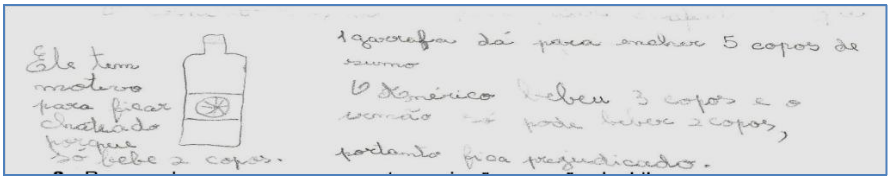


Fig. 38– Resolução da tarefa 1 “Copos de sumo” (questão 1) – Miguel

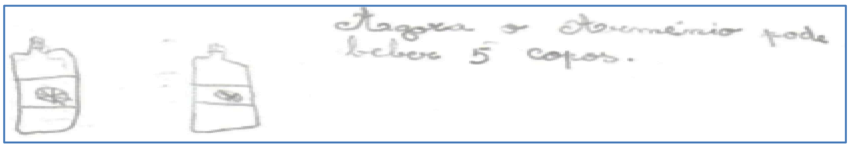


Fig. 39– Resolução da tarefa 1 “Copos de sumo” (questão 2) – Miguel

As representações utilizadas por Miguel na resolução desta tarefa, em ambas as questões, enquadram-se na categoria das *representações simbólicas*. Nesta categoria inclui-se a resposta à questão 1 e 2 desta tarefa, onde o aluno usou palavras (subcategoria: *letras/palavra escrita*) e enquadram-se, também, os números *1, 2, 3* e *5* (subcategoria: *algarismos e números*) que representam, o número de garrafas e de copos de sumo.

As representações utilizadas pelo aluno na resolução das duas questões desta tarefa parecem ter servido para *expressão da solução*.

Tarefa 2: “Apertos de mão”

Dez amigos combinaram dar um passeio de patins. Encontraram-se à entrada do Parque da cidade e cumprimentaram-se. Cada amigo deu um aperto de mão a cada um dos seus amigos uma só vez.

Quantos apertos de mão deram?

Na resolução da tarefa 2 “Apertos de mão” o aluno teve dificuldade, mas chegou à solução depois de uma breve explicação do enunciado.

O Miguel, para representar os amigos referidos no enunciado, utilizou o desenho das cabeças dos mesmos, como se pode verificar na figura 40. De seguida, de cada cabeça desenhada, traçou uma linha que no extremo tinha um número que representa os apertos de mão que davam. Para obter o número total de apertos de mão juntou os números dois a dois até chegar ao resultado final.

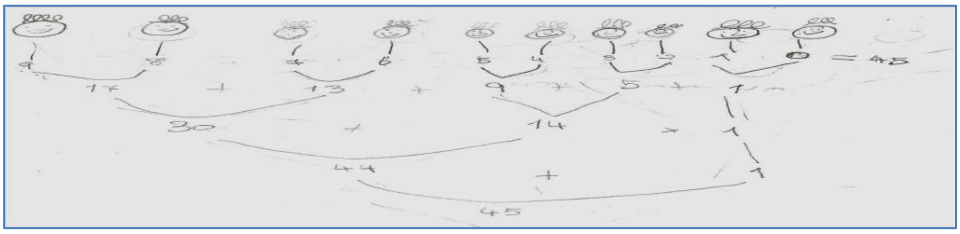


Fig. 40– Resolução da tarefa 2 “Apertos de mão” – Miguel

As representações usadas pelo Miguel na resolução desta tarefa enquadram-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* enquadra-se o desenho das cabeças dos amigos referidos no enunciado (subcategoria: *representações pictóricas – desenho*). As linhas que ligam as cabeças aos números e as setas que o aluno usou para facilitar os cálculos consideram-se símbolos pessoais que o aluno usou para, respetivamente, representar o número de apertos de mão dados por cada amigo e para facilitar os cálculos (subcategoria: *símbolos não convencionais*).

Na categoria das *representações simbólicas* incluem-se os vários números representados (subcategoria: *algarismos e números*).

As representações construídas pelo Miguel na resolução desta tarefa parecem ter servido para *organização do raciocínio matemático*, para *expressão do processo utilizado* e para *expressão da solução*.

Tarefa 3: “Pastilhas Gargantox”

O Rúben constipou-se e está com uma forte dor de garganta. A mãe foi à farmácia comprar uma caixa de pastilhas Gargantox.

Quantas pastilhas tem a caixa sabendo que cada uma tem três placas como aquela que está ilustrada na figura ao lado?

Na resolução da tarefa 3 “Pastilhas gargantox” o Miguel utilizou duas estratégias, como se pode verificar na figura 41.

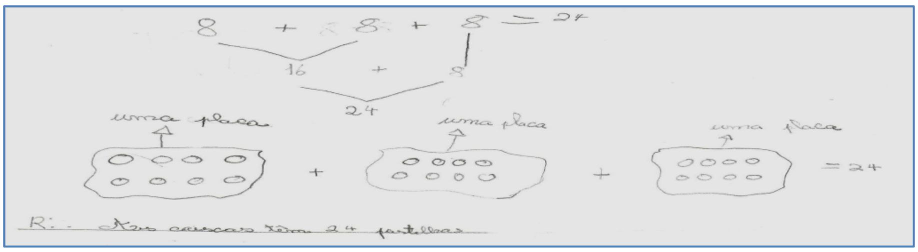


Fig. 41– Resolução da tarefa 3 “Pastilhas gargantox” – Miguel

Na primeira recorreu a expressão numérica *8+8+8=24*, ou seja, adicionou o número de pastilhas das três placas. Na segunda estratégia desenhou as três placas, das quais saía uma seta que na sua extremidade tinha escrito a palavra *placa*, depois colocou entre elas o sinal da adição e o total de pastilhas dessas mesmas placas. Quando questionado sobre o porquê da utilização das duas estratégias, respondeu *"a segunda foi para ver se dava o mesmo"*.

As representações utilizadas na resolução desta tarefa por Miguel enquadram-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* enquadram-se as placas desenhadas (subcategoria: *representações pictóricas – desenho*). As linhas que usou na primeira estratégia para se orientar nos cálculos e as setas usadas na segunda estratégia são símbolos muito pessoais que o aluno encontrou para se organizar na resolução da tarefa, desta forma pode-se considerar uma outra subcategoria das *representações icónicas* (subcategoria: *símbolos não convencionais*).

Na categoria das *representações simbólicas* enquadra-se a expressão *8+8+8=24* e *16+8* (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*) que o aluno utilizou na primeira estratégia para determinar o número total de pastilhas e o sinal + e = utilizados na segunda estratégia que se enquadram na mesma subcategoria. O número *24* (subcategoria: *algarismos e números*) que usou na primeira e na segunda estratégias e na resposta, sendo este número o total de pastilhas. Ainda na categoria das *representações simbólicas* enquadram-se as palavras *uma placa* (subcategoria: *letras/palavra escrita*) que o aluno escreveu na segunda estratégia e a resposta à questão do enunciado.

As representações utilizadas pelo aluno serviram para *organização do raciocínio matemático* e *expressão da solução*.

Tarefa 4: "Arrumando ovos"

Na mercearia da D. Maria, os ovos caseiros são vendidos em caixas como a da figura. 1. Com 49 ovos quantas caixas se enchem? E com 77 ovos?

2. A D. Maria vai comprar caixas retangulares de 8 ovos. Será que ela consegue colocar todos os 56 ovos em caixas, de tal forma que fiquem todas cheias?

Na resolução da tarefa 4 "Arrumando ovos" o Miguel usou a mesma estratégia nas duas questões para conseguir chegar à solução, como se verifica na figura 42 e 43. O método que seguiu foi muito idêntico ao usado pela Ana e pela Mafalda.

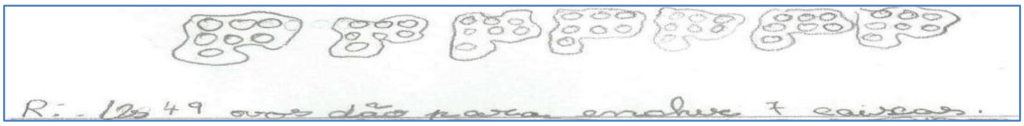


Fig. 42– Resolução da tarefa 4 “Arrumando ovos” (questão 1) – Miguel

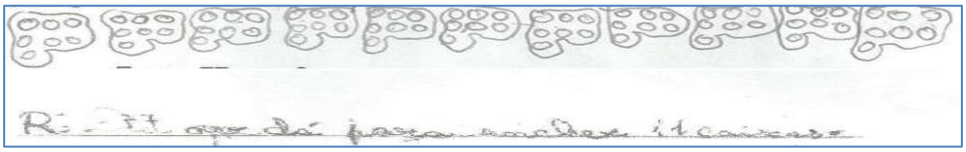


Fig. 43– Resolução da tarefa 4 “Arrumando ovos” (questão 2) – Miguel

Começou por representar os ovos através de círculos pequenos dentro de uma linha fechada, a qual representa a caixa. Agrupou os ovos até chegar ao número total de ovos que tinha para arrumar. Depois contou o número de conjuntos formados para chegar à solução. Seguiu este processo nas duas questões para chegar à solução.

As representações utilizadas pelo Miguel na resolução desta tarefa enquadram-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* incluem-se a representação dos círculos dentro das linhas (subcategoria: *representações pictóricas – desenho*) que o aluno utilizou para representar os ovos dentro da caixa.

Na categoria das *representações simbólicas* enquadram-se os números *49, 7* e *77* (subcategoria: *algarismos e números*) presentes nas respostas às questões. As palavras (subcategoria: *letras/palavra escrita*) que constituem as respostas também se enquadram na mesma categoria.

As representações construídas pelo Miguel na resolução das duas questões desta tarefa serviram para a *organização do raciocínio matemático*, *expressão do processo utilizado* e *expressão da solução*.

Tarefa 5: “A bicharada”

A Rafaela tem três gatinhos e dois coelhinhos de estimação. Sempre que vai passear, gosta de levar consigo um dos seus gatinhos e um dos seus coelhinhos. Com quantos pares diferentes pode a Rafaela ir passear?

Na resolução da tarefa 5 “A bicharada” o Miguel para representar os coelhos e os gatos utilizou o desenho onde estavam presentes alguns pormenores, como se verifica na figura 44.

Fig. 44– Resolução da tarefa 5 “A bicharada” – Miguel

Desenhou o corpo completo dos animais e rodeou-os com um círculo de onde sai uma linha em cujo extremo está a designação do coelho e do gato, por exemplo *coelho A1* e *gato C3*. Depois ligou os coelhos aos gatos através de linhas as quais representam um par formado, por cima dessa mesma linha escreveu *1 par*. Do lado direito organizou a formação dos pares em igualdades como *A1=C3*. Com a aplicação deste método não conseguiu chegar à solução correta, uma vez que lhe faltou desenhar mais pares.

As representações utilizadas pelo Miguel na resolução desta tarefa enquadram-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* enquadra-se o desenho dos animais (subcategoria: *representações pictóricas – desenho*). As linhas que ligam os animais entre si, uma vez que foi a forma pessoal que o aluno usou para representar os pares encontrados, podem-se enquadrar na subcategoria *símbolos não convencionais*.

Na subcategoria das *representações simbólicas* enquadram-se as palavras que constituem a resposta, a designação dos animais com as palavras *coelho* e *gato* e ainda as palavras *par* e *pares* (subcategoria: *letras/palavra escrita*) que usou para chegar à solução do número de pares diferentes. Os números *1, 2, 3, 4* e *5* (subcategoria: *algarismos e números*) que o aluno utilizou na designação dos animais, como por exemplo *A1, B2* e os pares encontrados também se inserem na categoria das *representações simbólicas*. Ainda nesta categoria pode enquadrar-se o sinal de igual (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*) que o aluno usou para relacionar o coelho com o gato *A1=C3*, por exemplo.

Embora o aluno não chegasse à solução correta na resolução desta tarefa, as representações utilizadas parece ter servido para *organização do raciocínio matemático*, *expressão do processo utilizado* e *expressão da solução*.

Tarefa 6: “Galinhas e coelhos”

Na quinta da avó do Zacarias há galinhas e coelhos. Contando as patas de todos os animais (galinhas e coelhos) verificou-se que no total eram 48 patas. Sabendo que são 17 animais, quantos coelhos e galinhas existem?

Na resolução da tarefa 6 “Galinhas e coelhos” o Miguel representou os animais através de círculos, dos quais saíam umas linhas que representavam as patas dos animais. A diferença que se verifica entre as galinhas e os coelhos são o número de linhas, pois nos coelhos colocou quatro linhas e nas galinhas duas linhas, como se verifica na figura 45. A representação dos animais utilizados pelo Miguel é idêntica à da Mafalda.

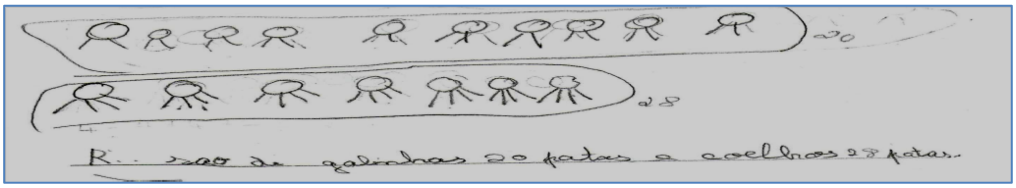


Fig. 45– Resolução da tarefa 6 “Galinhas e coelhos” – Miguel

O aluno resolveu esta tarefa por tentativas. Quando chegou à solução, rodeou os diferentes animais e colocou o número *20* e *28* que representam o número de patas correspondentes a cada tipo de animal. A resposta foi dada tendo em atenção o número de patas e não o número de animais.

As representações utilizadas pelo Miguel na resolução desta tarefa enquadram-se em duas categorias*: representações icónicas* e *representações simbólicas*.

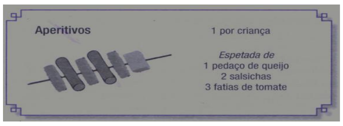
Na categoria das *representações icónicas* enquadra-se o desenho (subcategoria: *representações pictóricas*) dos coelhos e das galinhas e, ainda se incluem nesta categoria, as linhas que o aluno usou para agrupar os animais no grupo das galinhas e no grupo dos coelhos (subcategoria: *símbolos não convencionais*).

Na categoria das *representações simbólicas* enquadram-se os números *20* e *28* (subcategoria: *algarismos e números*) que o aluno usou para representar o número de patas que existiam nas galinhas e nos coelhos, respetivamente. A resposta enquadra-se na categoria das *representações simbólicas* e subcategoria: *letras/palavra escrita*, uma vez que usou palavras.

As representações utilizadas pelo Miguel na resolução desta tarefa serviram para *organização do raciocínio matemático* e para *expressão da solução*.

Tarefa 7: "A festa da Carolina"

A Carolina festeja o seu aniversário na próxima semana. Como a Carolina pretende dar 4 balões a cada um dos seus amigos, e não ficar com nenhum, a mãe comprou 96 balões. Quantos amigos virão à festa?



Agora que já sabes quantos amigos a Carolina convidou para a sua festa, ajuda-a na preparação dos aperitivos e na organização das mesas. *1.* Quantos pedaços de queijo vão precisar para preparar os aperitivos para a festa? 2. E de quantas salsichas?

Na resolução da tarefa 7 "A festa da Carolina" a estratégia que o Miguel utilizou, na resolução das duas questões foi, mais uma vez, idêntica à utilizada pela Mafalda.

Na questão 1, o aluno desenhou círculos com uma linha para representar os balões. Desenhou os balões em conjuntos de quatro até chegar ao número total de balões que tinha para dividir pelos amigos, como se pode observar na figura 46.

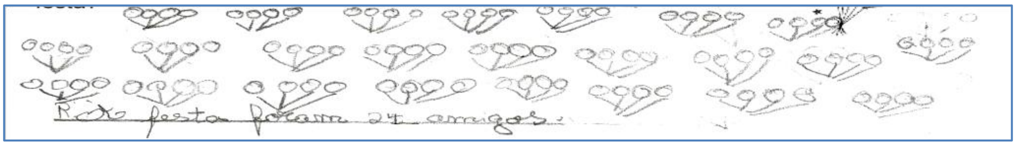


Fig. 46– Resolução da tarefa 7 "A festa da Carolina" (questão 1) – Miguel

Para saber o número de amigos que iam à festa, contou o número de conjuntos formados.

Na resolução da questão 1 desta tarefa, as representações utilizadas enquadram-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* enquadram-se os balões desenhados pelo aluno (subcategoria: *representações pictóricas*).

Na categoria das *representações simbólicas* enquadra-se o número *24* (subcategoria: *algarismos e números*) presente na resposta e representa o número de amigos. Ainda nesta categoria, enquadra-se a resposta à questão que, como utilizou uma frase se inclui, por sua vez, na subcategoria: *letras/palavra escrita*.

Na resolução da questão 2 desta tarefa, o Miguel representou os pedaços de queijo através de quadrados. Na representação dos pedaços faltou-lhe desenhar um para que a solução estivesse correta, mas na resposta colocou o número de pedaços corretos, como se verifica na figura 47.

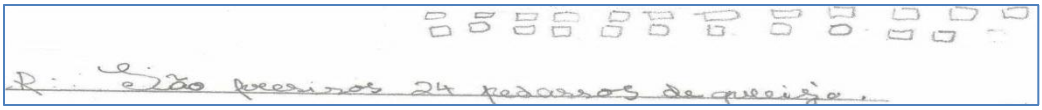


Fig. 47– Resolução da tarefa 7 “A festa da Carolina” (questão 2) – Miguel

As representações utilizadas nesta questão enquadram-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* inclui-se a representação dos pedaços de queijo por quadrado (subcategoria: *representações pictóricas – desenho*).

Na categoria das *representações simbólicas* enquadra-se o número *24* (subcategoria: *algarismos e números*) presente na resposta, que representa o número de pedações de queijo que são necessários. Ainda na mesma categoria enquadra-se a resposta (subcategoria: *letras/palavra escrita*), uma vez que está apresentada em forma escrita.

As representações utilizadas na resolução da questão 1 desta tarefa parecem ter servido para *organização do raciocínio matemático*, *expressão do processo utilizado* e *expressão da solução*. Na resolução da questão 2, as representações serviram para *organização do raciocínio matemático* e para *expressão da solução*.

Tarefa 8: “Comprimidos” O Manuel foi ao médico que lhe receitou duas caixas de Melhorex com 24 comprimidos cada uma. Devia tomar um comprimido de 6 em 6 horas até acabar as duas caixas. A Ana Carolina começou a tomar os comprimidos, de embalagens iguais, há duas semanas, só que os toma de 8 em 8 horas. 1. Quem toma mais comprimidos por dia? 2. Quem acaba primeiro o tratamento?

Na resolução da questão 1 da tarefa 8 “Comprimidos” o Miguel começou por representar as tomas de comprimidos feitas pelos dois intervenientes do enunciado através das expressões *6+6+6+6* e *8+8+8* para chegar ao resultado das expressões usou traços para se organizar nos cálculos. De seguida colocou o resultado das expressões, que por sua vez é o mesmo, e respondeu à questão por escrito, como se observa na figura 48.

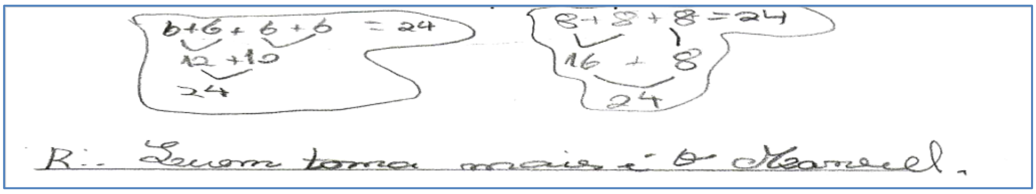


Fig. 48– Resolução da tarefa 8 “Comprimidos” (questão 1) – Miguel

As representações utilizadas na resolução da primeira questão desta tarefa enquadram-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* enquadram-se os traços usados (subcategoria: *símbolos não convencionais*) que se consideram símbolos pessoais que o aluno arranjou para conseguir chegar ao resultado da expressão mais facilmente.

Na categoria das *representações simbólicas* enquadram-se as expressões (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*) utilizadas pelo aluno para chegar à solução. O aluno respondeu por escrito à questão apresentada no enunciado, logo enquadra-se na subcategoria *letras/palavra escrita*.

Na resolução da questão 2 da mesma tarefa o aluno apenas apresentou a resposta, sendo esta por escrito (figura 49).

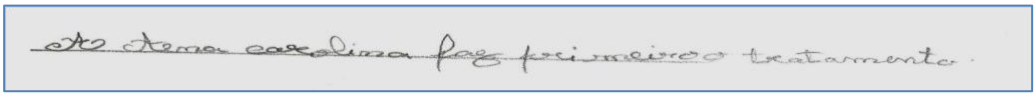


Fig. 49– Resolução da tarefa 8 “Comprimidos” (questão 2) – Miguel

Uma vez que o aluno apenas respondeu à questão e esta resposta está apresentada por escrito, as representações utilizadas enquadram-se apenas na categoria das *representações simbólicas* (subcategoria: *letras/palavra escrita*).

As representações utilizadas na resolução da questão 1 parece que serviram como *organização do raciocínio matemático* e como *expressão da solução*. Na resolução da questão 2 serviram como *expressão da solução*.

Tarefa 9: “Colares” Para o dia da mãe combinámos fazer um colar com bolas. Cada colar tinha 2 bolas pretas, 3 bolas vermelhas e 4 bolas brancas. Quantas bolas de cada cor se terão de comprar para fazer 6 colares iguais?

Na resolução da tarefa 9 “Colares” o Miguel não revelou qualquer tipo de dificuldade, assim que o enunciado foi lido começou a resolver a tarefa. Começou por determinar o número de bolas pretas através da expressão *2+2+2+2+2+2*, para determinar o seu resultado utilizou setas para facilitar os cálculos. Seguiu o mesmo processo para determinar o número de bolas vermelhas e brancas. De seguida colocou por cima das expressões resolvidas *Aº1*, *Bº2* e *Cº3* que representa a ordem seguida na resolução da tarefa. As letras *P*, *V* e *B* representam as diferentes cores das bolas, pretas, vermelhas e brancas, respetivamente. No final respondeu à questão do enunciado por esquema *12Aº1P→12*, *18Bº2V→18* e *24Cº3B→24*, como se pode verificar na figura 50.

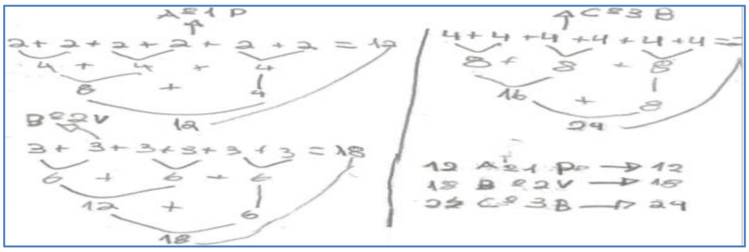


Fig. 50– Resolução da tarefa 9 “Colares” – Miguel

As representações utilizadas pelo Miguel na resolução desta tarefa parecem-nos enquadrar-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* incluem-se as setas e as linhas (subcategoria: *símbolos não convencionais*) que o aluno utilizou para se auxiliar nos cálculos.

Na categoria das *representações simbólicas* incluem-se as várias expressões (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*) como, por exemplo, *2+2+2+2+2+2=12*, *3+3+3+3+3+3=18* e *4+4+4+4+4+4=24*. Nesta categoria também se incluem os números *1*, *2* e *3* e os números *12*, *18* e *24* (subcategoria: *algarismos e números*) que o aluno utilizou para representar, respetivamente, a ordem das expressões seguida na resolução da tarefa e o número total de bolas necessárias de cada cor. Ainda se incluem as letras *A*, *B*, *C*, *P*, *V* e *B* (subcategoria: *letras/palavra escrita*) utilizadas para representar as cores e a ordem das expressões.

As representações construídas por Miguel na resolução desta tarefa parecem ter servido para *organização do raciocínio matemático* e para *expressão da solução*.

Tarefa 10: “As meias das joaninhas”

O João é um colecionador. Ele tem uma caixa com 5 joaninhas. Cada joaninha tem 6 patas. Se o João tivesse de comprar meias no Inverno para as suas joaninhas, quantas meias compraria?

Na resolução da tarefa 10 “As meias das joaninhas” o Miguel não demonstrou, mais uma vez, qualquer tipo de dificuldade, sendo desta forma, muito autónomo. O aluno assim que foi lido o enunciado resolveu a tarefa, de seguida, através de uma expressão, como se verifica na figura 51.

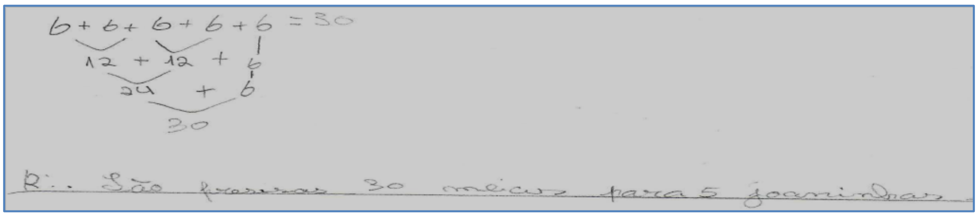


Fig. 51– Resolução da tarefa 10 “As meias das joaninhas” – Miguel

As representações utilizadas por Miguel na resolução desta tarefa parecem enquadrar-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* incluem-se os traços ou setas (subcategoria: *símbolos não convencionas*) que utilizou para facilitar os cálculos.

Na categoria das *representações simbólicas* inserem-se as expressões *6+6+6+6+6=30*, *12+12+6* e *24+6* (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*) utilizadas para chegar ao número total de meias necessárias. Ainda se inclui nesta categoria a resposta (subcategoria: *letras/palavra escrita*) e os números 30 e 5 (subcategoria: *algarismos e números*) presentes na resposta.

As representações utilizadas na resolução desta tarefa serviram para *organização do raciocínio matemático* e para *expressão da solução*.

Tarefa 11: “A higiene do elefante”

Um elefante gasta dois sabonetes por dia na sua higiene. Quantos sabonetes gastará em 6 dias?

Na resolução da tarefa 11 “A higiene do elefante” o Miguel resolveu da mesma forma que a tarefa anterior, ou seja, através da expressão numérica, como se verifica na figura 52. Mais uma vez resolveu a tarefa sem apresentar dificuldades e logo após ter sido lido e enunciado.

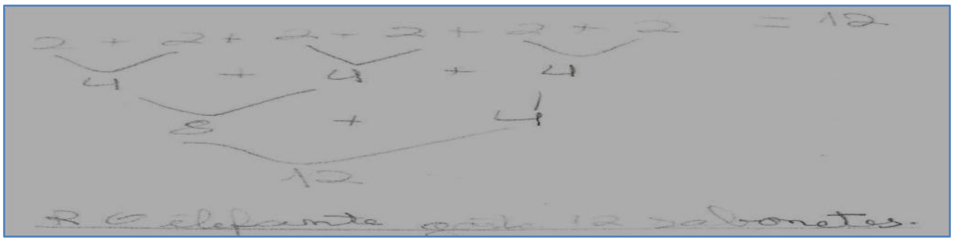


Fig. 52– Resolução da tarefa 11 “A higiene do elefante” – Miguel

As representações utilizadas pelo Miguel na resolução desta tarefa parecem-nos enquadrar-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* incluem-se os traços/setas (subcategoria: *símbolos não convencionais*) que utilizou para facilitar os cálculos.

Na categoria das *representações simbólicas* inserem-se as expressões *2+2+2+2+2+2=12*, *4+4+4* e *8+4* (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*) utilizadas para chegar ao número total de sabonetes. Ainda nesta categoria inclui-se a resposta (subcategoria: *letras/palavra escrita*) e o número *12* (subcategoria: *algarismos e números*) presente na resposta.

Na resolução desta tarefa as representações construídas por Miguel serviram para *organização do raciocínio matemático* e *expressão da solução*.

Tarefa 12: “Problema da rã”

Uma rã tentava saltar para fora de um poço. Cada vez que a rã saltava, subia quatro filas de tijolos, mas como estes estavam escorregadios, descia uma fila. Quantos saltos tem a rã de dar se o poço tiver 12 filas de altura?

Na resolução da tarefa 12 “Problema da rã” o Miguel foi um dos poucos alunos que conseguiu chegar à solução sem qualquer tipo de ajuda. Assim que foi lido o enunciado, o aluno começou por desenhar as filas de tijolos e depois usou setas no sentido ascendente para representar os saltos e setas no sentido descendente para representar as escorregadelas, como se pode verificar na figura 53. No fundo do poço desenhou uma rã, sendo esta meramente ilustrativa, pois não interfere na resolução da tarefa.

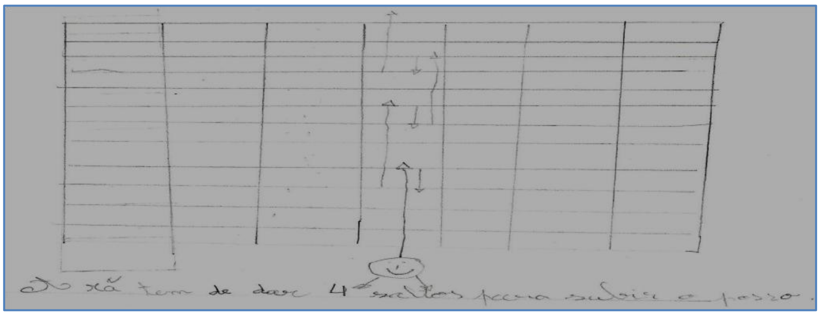


Fig. 53– Resolução da tarefa 12 “Problema da rã” – Miguel

As representações utilizadas pelo Miguel na resolução desta tarefa parecem enquadrar-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* incluem-se o desenho das filas de tijolos (subcategoria: *representações pictóricas*) e as setas (subcategoria: *diagramas – diagrama em rede*) que o aluno utilizou para representar os movimentos ascendentes e descendentes da rã.

Na categoria das *representações simbólicas* incluem-se a resposta (subcategoria: *letras/palavra escrita*) e o número 4 (subcategoria: *algarismos e números*) presente na resposta.

Na resolução desta tarefa as representações construídas pelo aluno parecem ter servido para *organização do raciocínio matemático*, para *expressão do processo utilizado* e para *expressão da solução*.

Tarefa 13: “Os chocolates”

O João tem 42 chocolates que quer distribuir pelos seus 6 amigos, de modo a que cada amigo receba o mesmo número de chocolates.

Quantos chocolates recebe cada amigo?

Na resolução da tarefa 13 “Os chocolates” o Miguel utilizou a estratégia de resolver por tentativas. Começou por desenhar a cabeça dos seis amigos. Por baixo experimentou dar quatro chocolates a cada amigo adicionando *4+4+4+4+4+4+4+4*, mas sobravam chocolates, fez o mesmo com o número cinco e seis mas continuavam a sobrar chocolates. Quando a investigadora se aproximou dele disse: “*por esta estratégia não consigo, porque sobram sempre chocolates, vou experimentar de outra maneira*” e a investigadora disse-lhe “*continua a experimentar, qual é o número que podes experimentar a seguir?*”. De seguida, começou adicionar o número sete através da expressão *7+7+7+7+7+7* e disse “*já dá*”. A investigadora perguntou “*já dá o quê?*”. O Miguel disse: “*já tenho 6 amigos e 42 chocolates*”. De seguida, por baixo de cada cabeça que tinha desenhado colocou o número *7* e efetuou os cálculos com o auxílio de linhas, como se pode verificar na figura 54.

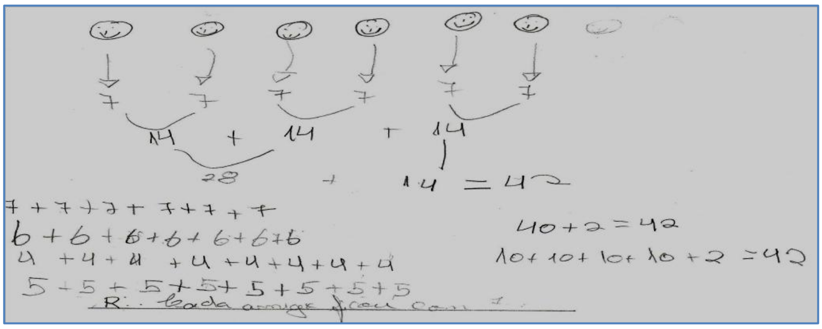


Fig. 54– Resolução da tarefa 13 “Os chocolates” – Miguel

As representações utilizadas por Miguel na resolução desta tarefa parecem enquadrar-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* inclui-se o desenho das caras dos amigos (subcategoria: *representações pictóricas*), as setas e as linhas (subcategoria: *símbolos não convencionais*) que o aluno utilizou para relacionar o amigo com o número de chocolates e auxiliar os cálculos, respetivamente.

Na categoria das *representações simbólicas* incluem-se a resposta (subcategoria: *letras/palavra escrita*), as expressões *7+7+7+7+7+7*, *6+6+6+6+6+6+6*, *4+4+4+4+4+4+4+4*, *5+5+5+5+5+5+5+5*, *40+2=42*, *10+10+10+10+2=42*, *14+14+14* e *28+14=42* (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*) que o aluno usou para conseguir chegar ao número de chocolates que receberia cada amigo. Ainda na categoria das *representações simbólicas* inclui-se o número *7* (subcategoria: *algarismos e números*) presente na resposta e na extremidade da seta que sai de cada amigo.

O aluno, na resolução desta tarefa, revelou alguma dificuldade, no sentido de ter de realizar várias tentativas para chegar ao número de chocolates, embora tenha demonstrado autonomia, interesse e empenho na realização da mesma.

As representações construídas pelo Miguel na resolução desta tarefa parece que serviram para *organização do raciocínio matemático*, para *expressão do processo utilizado* e para *expressão da solução*.

Tarefa 14: "O número de rodas"

Quantas rodas existem em 5 bicicletas, 3 triciclos e 2 carros?

Na resolução da tarefa 14 "O número de rodas" o Miguel começou por colocar o número de rodas presentes em *5 bicicletas*, *3 triciclos* e *2 carros* numa única expressão, tendo resolvido a mesma através de linhas, como se pode verificar na figura 55.

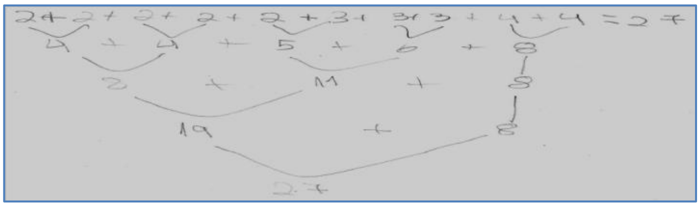


Fig. 55– Resolução da tarefa 14 "As rodas" – Miguel

As representações utilizadas pelo Miguel na resolução desta tarefa parecem enquadrar-se em duas categorias: *representações icónicas* e *representações simbólicas*.

Na categoria das *representações icónicas* incluem-se as linhas (subcategoria: *símbolos não convencionais*) que o aluno utilizou para auxiliar os cálculos.

Na categoria das *representações simbólicas* incluem-se as expressões *2+2+2+2+2+3+3+3+4+4=27*, *4+4+5+6+8*, *8+11+8* e *19+8* (subcategoria: *sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas*) que o aluno usou para determinar o número total de rodas e o número *27* (subcategoria: *algarismos e números*) representativo do número total de rodas.

Na resolução desta tarefa o Miguel não revelou qualquer tipo de dificuldade, tendo resolvido a mesma logo após o enunciado ter sido lido pela investigadora. O aluno demonstrou autonomia, interesse e empenho na resolução da tarefa.

As representações construídas pelo Miguel na resolução desta tarefa parece que serviram para *organização do raciocínio matemático* e *expressão da solução*.

Síntese

Na apresentação das tarefas, o Miguel mostrou-se entusiasmado, interessado e empenhado na resolução das mesmas. Demonstrou sentido de responsabilidade e autonomia na resolução da maioria das tarefas. Quando sentia dificuldade solicitava ajuda conseguindo ultrapassá-las de imediato com uma breve explicação. Mostrou, também, organização e método de trabalho, tendo participado de forma ativa.

		Tarefas																	
		1ª Fase												2ª Fase					
		1.1	1.2	2	3	4.1	4.2	5	6	7.1	7.2	8.1	8.2	9	10	11	12	13	14
Representações ativas	Manipulação de objetos																		
Representações icónicas	Representações pictóricas (desenho)			X	X	X	X	X	X	X	X						X	X	
	Diagramas																X		
	Símbolos não convencionais			X	X			X	X			X		X	X	X		X	x
Representações simbólicas	Algarismos e números	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			X	X	X	X	X	X
	Sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas				X			X				X		X	X	X		X	X
	Letras/palavra escrita	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	

Quadro 4 - Resumo do tipo de representações utilizadas na resolução das tarefas por Miguel

Ao analisar o quadro, pode-se observar que o Miguel não necessitou de recorrer a materiais manipuláveis (*representações ativas*) para resolver os problemas propostos. Desta forma, parece não necessitar de concretizar o raciocínio matemático com objetos reais.

Nas representações icónicas, observa-se que o aluno recorreu ao desenho (*representações pictóricas*) na resolução de mais de metade das tarefas, embora o desenho apareça sempre ligado a outro tipo de representação. Verifica-se, também, que representou a resolução de uma tarefa sob a forma de diagrama.

O Miguel criou símbolos não convencionais (setas e linhas) sobretudo para facilitar os cálculos, os quais foram utilizados na maioria das tarefas.

Relativamente às representações simbólicas, os algarismos e números, bem como as letras e a palavra escrita, estiveram bem presentes na maioria das representações utilizadas na resolução das tarefas. Os algarismos e números foram utilizados, na sua maioria, para representar a solução da tarefa e, também, para representar passos intermédios na resolução. A palavra escrita surge na resolução de quase todas as tarefas propostas, em duas delas sob a forma de inicial maiúscula representativa de uma determinada palavra ou ordem e nas restantes apenas para representar a solução.

Ainda nas representações simbólicas, o Miguel utilizou, em oito tarefas, as expressões numéricas como resolução da tarefa.

Numa análise geral, observa-se que, além do aluno utilizar as representações icónicas e simbólicas, sobressaem as representações simbólicas, uma vez que as icónicas – desenho – parecem ser um auxílio para chegar às representações simbólicas. Uma vez que, na sua maioria, as representações construídas pelo aluno na resolução das tarefas são essencialmente de cariz simbólico, talvez possa revelar que o aluno esteja num nível de desenvolvimento que já consegue trabalhar de forma abstrata, não necessitando de concretizar a realidade.

Capítulo 4 – Conclusão

Neste capítulo pretende-se sintetizar as principais ideias que se destacam do trabalho desenvolvido pela Ana, a Mafalda e o Miguel relacionado com as representações utilizadas pelos alunos e o papel que as mesmas desempenham na resolução das tarefas propostas.

Como já foi referido anteriormente, com o presente estudo pretende-se investigar o tipo de representações que os alunos mais recorrem e o papel que estas desempenham na realização de tarefas.

Para melhor abordar este estudo formulou-se as seguintes questões, as quais se tentou responder:

1. A que tipo de representações matemáticas os alunos mais recorrem para realização de tarefas no âmbito do tema “Números e operações”?
2. Quais as maiores dificuldades evidenciadas pelos alunos na construção de representações quando colocados perante uma tarefa?
3. Que papel desempenham as representações a que os alunos recorrem quando colocados perante tarefas no âmbito do tema “Números e operações”?

4.1. Análise cruzada do tipo de representações utilizadas

A partir das representações construídas pelos três alunos em estudo, nas resoluções das tarefas propostas procurou fazer-se uma sistematização/organização das informações que obtivemos, as quais se apresentam no seguinte quadro (quadro 5).

			Tipo de representações						
			Representações ativas	Representações icónicas			Representações simbólicas		
			Manipulação de objetos	Representações pictóricas (desenho)	Diagramas	Símbolos não convencionais	Algarismos e números	Sinais de operações e sinal de igual/ expressões matemáticas	Letras/ palavra escrita
Tarefas	1ª Fase	1.1		Ana Mafalda			Ana Miguel		Ana Mafalda Miguel
		1.2		Mafalda			Ana Mafalda Miguel	Ana Mafalda	Ana Mafalda Miguel
		2		Ana Mafalda Miguel		Ana Mafalda Miguel	Ana Mafalda Miguel	Mafalda	Ana Mafalda
		3		Miguel		Miguel	Ana Mafalda Miguel	Ana Mafalda Miguel	Ana Mafalda Miguel
		4.1		Ana Mafalda Miguel		Ana Mafalda	Ana Mafalda Miguel	Ana Mafalda	Ana Mafalda Miguel
		4.2		Ana Mafalda Miguel		Ana Mafalda	Ana Mafalda Miguel	Ana Mafalda	Ana Mafalda Miguel
		5		Ana Mafalda Miguel		Mafalda Miguel	Ana Mafalda Miguel	Miguel	Ana Mafalda Miguel
		6		Mafalda Miguel		Ana Miguel	Ana Mafalda Miguel	Ana	Ana Mafalda Miguel
		7.1		Ana Mafalda Miguel			Ana Mafalda Miguel		Ana Mafalda Miguel
		7.2		Mafalda Miguel			Ana Miguel		Ana Miguel
		8.1				Mafalda Miguel	Ana Mafalda	Ana Miguel	Ana Mafalda Miguel
		8.2					Ana	Mafalda	Ana Mafalda Miguel
	2ª Fase	9		Mafalda		Mafalda Miguel	Ana Mafalda Miguel	Ana Mafalda Miguel	Ana Mafalda Miguel
		10		Mafalda		Mafalda Miguel	Ana Mafalda Miguel	Ana Mafalda Miguel	Ana Mafalda Miguel
		11		Mafalda		Miguel	Ana Mafalda Miguel	Ana Mafalda Miguel	Ana Mafalda Miguel
		12		Ana Mafalda Miguel	Ana Mafalda Miguel		Ana Mafalda Miguel		Ana Mafalda Miguel
		13		Ana Mafalda Miguel	Ana	Ana Miguel	Ana Mafalda Miguel	Ana Miguel	Ana Mafalda Miguel
		14				Miguel	Mafalda Miguel	Ana Mafalda Miguel	Ana Mafalda

Quadro 5 - Resumo do tipo de representações utilizadas na resolução das tarefas pelos três alunos em estudo (Ana, Mafalda e Miguel)

No quadro (quadro 5) faz-se o cruzamento de informação entre o tipo de representação, as tarefas propostas, bem como os alunos que recorreram a esse tipo de representação.

Da análise do referido quadro, constata-se que nenhum dos alunos recorreu às representações ativas o que nos leva a concluir, com alguma segurança, que não necessitaram de concretizar o raciocínio com objetos reais. De facto, são alunos cujo nível etário está compreendido entre os sete e oito anos, apresentam uma boa capacidade de elaboração mental, raciocínio rápido e organizado. Os elementos constituintes são sobretudo de cariz simbólico, o que pode revelar que os alunos tenham chegado já a um nível de desenvolvimento em que conseguem trabalhar com objetos mais abstratos e menos concretos. Isto verifica-se mais na Ana e no Miguel. No que respeita à Mafalda, parece-nos que não necessita de concretizar o raciocínio com objetos reais, mas ainda necessita de concretizar o raciocínio através do desenho.

Ao observar as representações icónicas, verifica-se que em sete tarefas propostas (2, 4.1, 4.2, 5, 7.1, 12 e 13) os três alunos utilizaram elementos icónicos – desenho – para resolverem as referidas tarefas e na tarefa 12, também os três alunos utilizaram o mesmo tipo de elementos, mais concretamente o diagrama. Na tarefa 2 recorreram, os três alunos, às representações icónicas – símbolos não convencionais – embora estes sejam utilizados sobretudo para facilitar os cálculos. Nas restantes tarefas, a escolha do tipo de representação variou de aluno para aluno, levando-nos a crer que tal se possa dever ao facto de apresentarem níveis de desenvolvimento diferentes e capacidade de raciocínio, também, ser diferente.

Quanto às representações simbólicas, observou-se que em treze tarefas propostas (1.2, 2, 3, 4.1, 4.2, 5, 6, 7.1, 9, 10, 11, 12 e 13) estes alunos utilizaram elementos simbólicos – algarismos e números – para as resolver e na resolução de cinco tarefas (3, 9, 10, 11 e 14) recorreram, também, os três alunos, ao mesmo tipo de elementos simbólicos – sinais de operações e sinal de igual/expressões matemáticas – para resolver as mesmas.

Ainda nas representações simbólicas, verificou-se que, na maioria das tarefas propostas (1.1, 1.2, 3, 4.1, 4.2, 5, 6, 7.1, 8.1, 8.2, 9, 10, 11, 12 e 13), os três alunos recorrem aos elementos simbólicos – letras/palavra escrita – sobretudo na resposta. Na resolução das restantes tarefas, a escolha do tipo de representação variou de aluno para aluno, levando-nos, mais uma vez, a crer que tal se possa dever ao facto de apresentarem níveis de desenvolvimento diferentes e a capacidade de raciocínio, também, diferente.

O estudo realizado por Pinto (2009) refere que os alunos do 1º ano de escolaridade, ao resolverem problemas matemáticos, preferem representações icónicas, assentes na imagem, às representações simbólicas formais, embora utilizem ambas e com funções distintas. A partir da leitura do quadro 5, verifica-se que, no presente estudo, os alunos também recorrem às representações icónicas e às representações simbólicas, com funções distintas, embora sejam as representações simbólicas que predominam no que respeita à escolha dos alunos. Isto parece-nos que a escolha das tarefas influência o tipo de representações usadas pelos alunos e, também se deve ao facto dos alunos deste estudo se encontrarem num nível de desenvolvimento superior aos alunos do estudo de Pinto (2009).

Ao analisar as representações construídas por qualquer um dos alunos em estudo verifica-se, também, que as representações icónicas precedem as representações simbólicas, o que vai ao encontro ao afirmado por Bruner (1975, referido por Leuca, 2010). Isto verifica-se nas resoluções destes alunos, uma vez que embora predominem as representações simbólicas, os alunos recorreram com mais frequência às representações icónicas do que às simbólicas para clarificar a informação apresentada no enunciado. O desenvolvimento do conhecimento não implica uma sequência de etapas, mas sim um domínio progressivo destas três formas de representação (ativas, icónicas e simbólicas) como afirma Bruner (1979, citado por Rodrigues, 2011).

Os elementos do tipo icónico estiveram presentes nas representações de todos os alunos sobretudo com a finalidade de retirar a informação importante fornecida no enunciado da tarefa e dar significado à interpretação do mesmo.

As representações do tipo simbólico também estiveram presentes na resolução das tarefas de todos os alunos, embora a finalidade com que estas representações foram construídas variasse de aluno para aluno. Os elementos simbólicos foram construídos sobretudo ao longo da resolução da tarefa ou para apresentar a solução.

Verificou-se que as representações do tipo simbólico se apoiaram nas representações do tipo icónico construídas. As representações utilizadas, além de terem possibilitado aos alunos em estudo a resolução das tarefas propostas, também permitiram ao professor compreender o raciocínio que o aluno seguiu na resolução apresentada o que vai ao encontro ao referido por Kalathil e Sherin (2000), Stylianou (2011) e Woleck (2001).

4.2. Análise cruzada do papel das representações na resolução das tarefas

Como já foi referido anteriormente, com este estudo pretende-se saber qual o papel que as representações construídas pelos alunos desempenham na resolução de tarefas matemáticas. Desta forma, a partir das representações construídas pelos três alunos em estudo e das resoluções das tarefas propostas, procurou fazer-se uma análise cruzada do papel das mesmas, a qual se apresenta no quadro 6.

			Papel das representações						
			Organização do raciocínio matemático	**Apoio à comunicação**	**Apoio da compreensão de conceitos e relações matemáticas**	**Desenvolvimento do conhecimento matemático**	**Registo de ideias**	**Expressão da solução**	**Expressão do processo utilizado**
Tarefas	**1ª Fase**	1.1						Ana Mafalda Miguel	Mafalda
		1.2						Ana Mafalda Miguel	Mafalda
		2	Ana Mafalda Miguel					Ana Mafalda Miguel	Ana Mafalda Miguel
		3	Ana Mafalda Miguel					Ana Mafalda Miguel	
		4.1	Ana Mafalda Miguel					Ana Mafalda Miguel	Ana Mafalda Miguel
		4.2	Ana Mafalda Miguel					Ana Mafalda Miguel	Ana Mafalda Miguel
		5	Ana Mafalda Miguel					Ana Mafalda Miguel	Mafalda Miguel
		6	Ana Mafalda Miguel					Ana Mafalda Miguel	Ana
		7.1	Mafalda Miguel					Ana Mafalda Miguel	Ana Mafalda Miguel
		7.2	Mafalda Miguel					Ana Miguel	
		8.1	Ana Mafalda Miguel					Ana Mafalda Miguel	Mafalda
		8.2	Mafalda					Ana Mafalda Miguel	
	2ª Fase	9	Ana Mafalda Miguel				Ana Mafalda	Ana Mafalda Miguel	Mafalda
		10	Mafalda Miguel					Ana Mafalda Miguel	Ana Mafalda
		11	Mafalda Miguel					Ana Mafalda Miguel	Ana
		12	Ana Mafalda Miguel					Ana Mafalda Miguel	Ana Mafalda Miguel
		13	Mafalda Miguel					Ana Mafalda Miguel	Ana Miguel
		14	Ana Mafalda Miguel					Ana Mafalda Miguel	Ana

Quadro 6 - Resumo do papel das representações utilizadas na resolução das tarefas por os três alunos em estudo (Ana, Mafalda e Miguel)

Da análise do quadro 6, constata-se que os três alunos recorreram, sobretudo, às representações para organização do raciocínio matemático e expressão da solução. A Ana e a Mafalda recorreram a representações, na maioria das resoluções das tarefas, para expressão do processo utilizado e o Miguel recorreu na resolução de sete tarefas, também, para expressão do processo utilizado. Verifica-se, também, que a Ana e a Mafalda recorreram, na resolução de uma tarefa, às representações para registo de ideias.

Embora não se apresente no quadro 6 o registo das categorias de *apoio à* comunicação, *apoio da compreensão de conceitos* e *desenvolvimento do conhecimento matemático* feito pelos alunos, estes recorreram, sempre a estas três categorias. Recorreram às representações para apoio à comunicação matemática quando lhes era solicitado para explicarem a forma como chegaram à solução e, também, quando apresentavam à turma as suas resoluções. Com efeito, os três alunos apoiavam-se, com muita frequência, nas representações construídas para comunicarem com os seus colegas e professora sobre o procedimento seguido. Os alunos recorreram às representações como apoio à compreensão de conceitos, pois estas facilitam a clarificação de conceitos matemáticos e, por sua vez, desenvolvem o conhecimento matemático.

Verifica-se que as representações são, essencialmente, um apoio ao raciocínio matemático e à explicação do modo como chegam à solução das tarefas que lhes foram propostas. As representações funcionaram como um registo do seu pensamento. Pode afirmar-se, com alguma segurança, que as representações ajudaram os alunos na interpretação dos enunciados das tarefas propostas, assim como na organização do raciocínio, o que vai ao encontro ao referido por Woleck (2001). Desta forma, as representações construídas pelos alunos surgiram como um suporte para a aprendizagem, como refere Valério (2005).

Ao longo da resolução das tarefas propostas, verificou-se que os alunos, no geral, ficaram mais confiantes e mais seguros no que faziam, o que influenciou o tipo de representações, pois, no final, os alunos conseguiam abstrair-se um pouco mais passando a usar mais as representações simbólicas em vez das representações icónicas. Esta mudança verificou-se mais na Mafalda, talvez por ser a aluna que inicialmente sentiu mais dificuldade a resolver este tipo de tarefas (problemas), pois não as conseguia resolver. Isto vai ao encontro ao referido por Goldin & Steingold (2001), uma vez que referem que é através da interação entre as representações externas que se desenvolvem sistemas de representação interna que ajudam os alunos a produzirem novas representações externas. A compreensão e construção de conceitos matemáticos são construídas pela combinação e manipulação das representações como, aliás, afirma (Bruner 1979).

No que respeita às dificuldades sentidas (interpretação, exposição do pensamento e comunicação das ideias), também se verificou que, ao longo da apresentação das tarefas por parte dos alunos, à turma, as mesmas foram sendo ultrapassadas, isto com a utilização das representações, o que vai ao encontro ao referido por Woleck (2001), quando afirma que as representações "ajudam os alunos a interpretar enunciados e a organizar o seu pensamento, permitindo identificar a informação relevante e definir estratégias adequadas de resolução de problemas"(pp. 28). A discussão e a sistematização de ideias ajudou os alunos a organizarem o seu pensamento e a conseguirem determinar a melhor estratégia de resolução.

Foi através das representações que os alunos deram sentido a determinadas situações, pois estas apoiaram na construção de conceitos e foram ferramentas utilizadas para "articular, clarificar, justificar e comunicar raciocínios" (Woleck, 2001).

Desta forma, pode afirmar-se que as representações serviram para a compreensão e interpretação de ideias matemáticas e como ferramenta para o desenvolvimento de estratégias na resolução de tarefas.

4.3. Conclusões do estudo

As conclusões apresentadas obtiveram-se a partir das evidências encontradas na análise efetuada das observações, das entrevistas, das conversas informais e das resoluções das tarefas, as quais foram resumidas nos quadros apresentados anteriormente.

4.3.1. A que tipo de representações matemáticas os alunos mais recorrem para a resolução de tarefas?

Os alunos utilizam, em diferentes situações, múltiplas representações. Durante a resolução das tarefas, verificou-se que os alunos passam por várias fases até chegar às representações simbólicas como, aliás, o refere, por exemplo, Bruner (1975, referido por Leuca, 2010).

As tarefas propostas aos alunos, uma vez que eram de natureza problemática, contribuíram para que estes apresentassem diferentes representações e, também, promoveram a comunicação do seu raciocínio. Contribuíram, também, para os alunos estimularem o seu pensamento e para o representar.

De um modo geral, o tipo de representações matemáticas às quais os alunos em estudo mais recorreram para resolver as tarefas propostas foram as *icónicas* e as *simbólicas*, embora ambas fossem utilizadas pelos três alunos de diferentes maneiras, sendo elaboradas com diferentes propósitos. A variedade de representações utilizadas depende da tarefa proposta, ou seja, varia de acordo com o contexto da tarefa.

Nas resoluções de algumas tarefas, dos três alunos surgem dois tipos de representação. Os alunos tentam usar o mesmo tipo de representações utilizadas em resoluções anteriores, mas noutras resoluções de tarefas utilizam parte dessa representação (por exemplo, os desenhos), complementando a resolução com cálculos, levando-nos a crer que tal se possa dever ao facto dos alunos estarem na transição do nível de desenvolvimento e, também, a capacidade de raciocínio estar mais desenvolvida.

As resoluções através de símbolos verificam-se mais em dois dos alunos (Ana e Miguel). Numa aluna, verificou-se que sente, ainda, necessidade de concretizar, embora apresente alguma evolução ao longo das resoluções das tarefas.

Os diferentes tipos de representação (*ativas*, *icónicas* e *simbólicas*) foram divididos em subcategorias, nas quais se verificou, por parte dos alunos envolvidos no estudo, diferentes opções, pois, dentro de uma mesma categoria, a escolha da subcategoria variou de aluno para aluno, levando-nos a crer que tal se possa dever ao facto de apresentarem níveis de desenvolvimento e capacidade de raciocínio diferentes.

Os elementos icónicos utilizados por parte destes alunos surgem em simultâneo com elementos simbólicos. Os elementos simbólicos parecem-nos ser uma forma de ligar o enunciado à realidade, uma forma de ajudar a compreensão da tarefa, interpretar o enunciado e para facilitar a resolução. Os elementos simbólicos foram utilizados, sobretudo, para representar e comunicar a solução das tarefas, para resolver as mesmas e, também, para registar ideias. Desta forma, pode concluir-se que, para estes alunos, as representações são ferramentas para auxiliar a resolução de tarefas o que está de acordo com o afirmado por exemplo, por Woleck (2001).

No caso da Ana, embora as *representações icónicas* estejam presentes na resolução de quase metade das tarefas propostas e tenham funcionado, nessas mesmas tarefas, como forma de as resolver, são as *representações simbólicas* que sobressaem pela sua frequência nas representações utilizadas pela aluna na resolução de todas as tarefas propostas. Parece-nos que a aluna já consegue abstrair-se não necessitando de concretizar o raciocínio.

No que diz respeito à Mafalda, esta aluna utiliza sobretudo *representações icónicas* para resolver as tarefas propostas embora tenha, também, utilizado *representações simbólicas* sobretudo para apresentar a solução à tarefa ou em passos intermédios. Embora a aluna tenha recorrido com frequência às *representações simbólicas*, são as *representações icónicas* que desempenham um papel importante na resolução das tarefas. Parece-nos que a aluna ainda se encontra num nível de desenvolvimento que a leva à necessidade de concretizar. Talvez, por enquanto, se sinta mais segura ao utilizar elementos icónicos - desenho do que elementos simbólicos, ou seja, através de elementos não concretos sente mais dificuldade em chegar à solução. Parece-nos que o raciocínio da Mafalda ainda está ligado ao concreto.

No caso do Miguel, embora as *representações icónicas* estejam presentes na resolução das tarefas são as *representações simbólicas* que sobressaem nas representações utilizadas na resolução de todas as tarefas propostas. O Miguel foi o aluno que mais recorreu a *símbolos não convencionais* (linhas, traços e setas) na resolução das tarefas propostas, isto, na maioria das vezes, para facilitar os cálculos. No entanto, estes símbolos foram utilizados pela Ana e pela Mafalda com a mesma finalidade e, também, para expressar ideias e comunicar o processo de resolução que seguiram para chegar à solução. Parece-nos que o Miguel tenha chegado a um nível de desenvolvimento em que já se consegue abstrair, não tendo necessidade de utilizar objetos concretos.

Desta forma, pode afirmar-se, com bastante segurança, que para os alunos poderem construir os diferentes tipos de representação é necessário que a natureza das tarefas propostas seja desafiante para os alunos, o que está de acordo com o referido, por exemplo, por Ponte (2005).

É importante que os alunos utilizem diferentes tipos de representação numa mesma tarefa. Para isso, o professor deve incentivá-los para representarem todos os passos que seguiram para chegar à solução. Neste estudo, o professor incentivou os alunos a explicarem o processo seguido para resolverem as tarefas e sistematizou fazendo o registo dos vários processos possíveis de resolução, isto para os alunos interiorizarem que uma tarefa pode ser resolvida usando diferentes estratégias.

4.3.2. Quais as maiores dificuldades evidenciadas pelos alunos na construção de representações quando colocados perante uma tarefa?

O trabalho desenvolvido no âmbito do presente estudo leva-nos a afirmar, como aliás já foi referido por exemplo por Woleck (2001), que as representações construídas pelos alunos na resolução das tarefas propostas desempenham um papel importante na interpretação e resolução correta das mesmas. Pode afirmar-se que os alunos até chegarem à solução correta passam, algumas vezes, por soluções erradas tendo sido alertados, pela professora e pela investigadora, para a revisão das respostas, usando as representações. Isto verifica-se pela má interpretação que fazem da tarefa proposta e, também, pela falta de compreensão em relacionar os conceitos. Estas dificuldades foram sendo ultrapassadas, pois a professora e a investigadora foram acompanhando os alunos incentivando-os a construir representações e a refletirem sobre o processo seguido para resolverem as tarefas. Além disto, também se solicitava aos alunos para explicarem a forma como utilizaram e construíram as representações. A professora e a investigadora foram orientando os alunos de forma a utilizarem as representações, esclarecendo todas as suas dúvidas de forma a se sentirem seguros e confiantes no que faziam.

Notou-se, também, alguma dificuldade a nível de leitura que, por sua vez, leva mais uma vez à interpretação incorreta do enunciado, tendo sido ultrapassadas com a utilização das representações. No geral, estas dificuldades verificaram-se em todos os alunos em estudo, mas a Mafalda demonstrou um pouco mais, uma vez que era uma aluna que sentia dificuldade a representar o raciocínio e a exprimir o seu pensamento. Também se notou alguma dificuldade ao comunicarem o seu pensamento e o processo seguido para chegarem à solução, verificando-se mais na Mafalda, uma vez que era a aluna com mais dificuldade em se expressar. Os alunos não conseguem justificar corretamente, nem explicar os seus raciocínios. Estes aspetos foram superados com a utilização das representações.

Além disto, também se notou, principalmente na Ana, que alguns erros surgem da falta de atenção e da pressa em resolver a tarefa, pois esta aluna gostava de ser sempre a primeira a terminar a resolução das tarefas, o que a levava a não se concentrar no que fazia.

4.3.3. Qual o papel dos diferentes tipos de representação a que os alunos recorrem quando colocados perante a resolução de tarefas?

As representações construídas pelos alunos do estudo, incluídas nas diferentes categorias já apresentadas (*representações ativas*, *representações icónicas* e *representações simbólicas*), revelaram desempenhar papéis e funções idênticas. Desta forma, a apresentação do papel das representações construídas pelos alunos serão apresentadas de uma forma que englobe as representações dos alunos em estudo.

As representações utilizadas pelos alunos nas resoluções das tarefas desempenharam um papel fundamental na interpretação e resolução das mesmas, ou seja, no registo das ideias principais presentes nos enunciados das tarefas, facilitando a compreensão e a resolução das mesmas.

As *representações icónicas* desempenharam um papel importante na resolução das tarefas quer quando utilizadas isoladamente quer quando utilizadas em conjunto com *representações simbólicas*. O desenho teve um papel fundamental nas representações de alguns alunos, como nas resoluções da Mafalda, uma vez que representou dados do enunciado e apresentou a própria resolução, talvez por se sentir mais segura através de elementos mais concretos. A Mafalda utilizou o desenho quer para registar dados do enunciado quer para resolver a tarefa, enquanto que a Ana e o

Miguel utilizaram-no, essencialmente, para iniciarem a resolução, uma vez que terminavam a mesma e apresentavam a solução com elementos simbólicos.

A finalidade do desenho parece ter sido, essencialmente, para apoiarem o raciocínio, ou seja, organizarem os dados retirados do enunciado (interpretação da tarefa). Ainda na categoria das *representações icónicas*, também os *símbolos não convencionais* foram utilizados mais por uns alunos, no caso do Miguel, do que por outros, isto para encontrarem a solução à tarefa de forma mais rápida, ou seja, com a finalidade de *organizar o raciocínio* e *expressar o processo utilizado* para determinar o resultado.

No que respeita às *representações simbólicas* as subcategorias *algarismos e números* e *letras/palavra escrita* estiveram bem presentes na maioria das resoluções. Os alunos utilizaram os *algarismos e números* sobretudo para representar passos intermédios da resolução e para representar a solução da tarefa. As *letras e palavra escrita* foram utilizadas, essencialmente, para representar a solução da tarefa. No que se refere às *expressões matemáticas*, também foram utilizadas mais por alguns alunos, o caso do Miguel, do que por outros, isto para organizar o pensamento e determinar a solução.

Desta forma, no geral, as *representações simbólicas* foram utilizadas, sobretudo, com a finalidade de *organizar o raciocínio matemático*, assim como exprimir *o processo utilizado* e a *solução*.

A estas finalidades acresce, ainda, o *apoio à comunicação,* uma vez que quando os alunos eram questionados sobre a forma como chegaram à solução recorriam, também, às representações.

Na resolução das últimas tarefas, quando os alunos eram questionados sobre a dificuldade das mesmas, estes diziam que depois de terem resolvido as tarefas que lhes tinham sido propostas já não sentiam que eram tão difíceis. Verificou-se que a aplicação das tarefas na turma fez com que os alunos alterassem o seu gosto pela matemática, e a forma como pensavam/raciocinavam para resolver qualquer tarefa apresentada, pois alguns diziam que não gostavam de resolver problemas e com o incentivo da professora e da investigadora para o uso de representações passaram a dizer que "afinal não são tão complicados", como foi o caso da Mafalda. Verificou-se que os alunos demonstraram maior interesse e empenho na resolução das tarefas, solicitando o apoio constante da investigadora e da professora titular, verificando-se que os alunos representavam cada vez mais com menos dificuldade, desenvolvendo, por sua vez, o seu conhecimento e raciocínio.

Considerações finais

As considerações finais surgem da análise de todo o processo percorrido e referem-se às representações na resolução de tarefas.

Como se pode verificar, as representações utilizadas pelos alunos desempenharam um papel importante na resolução das tarefas para os três alunos em estudo, pois funcionaram, entre outros aspetos, como facilitadores da resolução das tarefas.

Neste estudo, também se verificou que o tipo de representações depende do tipo de tarefas, por isso é importante que o professor proponha tarefas que desafiem os alunos para que estes construam as suas próprias representações. Além disto, as representações construídas variam, também, de aluno para aluno, dependendo isto do seu nível de desenvolvimento e do seu raciocínio matemático.

Este estudo passou por alguns constrangimentos. O principal constrangimento refere-se ao facto dos alunos da turma não estarem habituados a resolver tarefas como as propostas não estando, por isso, muito à vontade e revelando grande dificuldade quer na abordagem quer no uso de representações. Para ultrapassar este constrangimento, optou-se por aplicar um outro conjunto de tarefas da mesma natureza.

Um outro constrangimento, também importante, foi o facto de os alunos resolverem as tarefas a pares o que não permitia que fosse observado o que os alunos construíam individualmente, pois um aluno influencia o outro. Este constrangimento foi ultrapassado, pois os alunos passaram a resolver as tarefas individualmente.

Com base nos resultados, conclusões e constrangimentos deste estudo parece-nos pertinente realizar o mesmo estudo com grupos etários diferentes ou com alunos com raciocínio matemático diferente, de forma a permitir a comparação de dados.

Também seria interessante realizar um estudo onde fosse possível comparar os dados referentes ao tipo de representações utilizadas pelos alunos quando o professor refere que os alunos podem usar materiais manipulativos e quando não refere que o podem fazer, isto para verificar se esse facto influencia os resultados.

Seria também pertinente realizar um estudo semelhante ao que foi feito, mas com tarefas de natureza diferente. Também seria interessante realizar um estudo semelhante ao realizado, mas num período de tempo mais alargado, isto para verificar se existe evolução no uso de representações.

Referências bibliográficas

Amado, N., Carreira, S., Nobre, S., Ponte, J. P. (2010) “Representações na resolução de um problema de palavras numérico/algébrico: uma análise sobre o desenvolvimento informal de métodos formais”, *Atas XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática*: Universidade de Aveiro.

Bertrand, Yves (2001). *Teorias contemporâneas da educação*. Instituto Piaget: Horizontes Pedagógicos.

Bishop, A. E Goffree, F. (1986) “Classroom organization and dynamics”. In. B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.). *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel. 22-47.

Bispo, R., Ramalho, G., Henriques, N. (2008) *Tarefas matemáticas e desenvolvimento do* conhecimento *matemático no 5º ano de escolaridade*. Acedido em abril de http://repositorio.ispa.pt/bitstream/10400.12/50/1/ap_2008_%2026_003.pdf

Boavida, A. M.; Paiva, A. L.; Cebola, G. & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no ensino Básico*. Lisboa: ME – DGIDC.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994) Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora. Brocardo, J. & Delgado, C. (2009) *Desafios e complexidades na conceção e exploração de tarefas para o desenvolvimento do sentido do número*, atas do XIX de EIEM, Vila Real.

Brocardo, J. & Delgado, C. (2009). Desafios e complexidades na conceção e exploração de tarefas para o desenvolvimento do sentido do número, in atas do XIX EIEM. Vila Real.

Bruner, J. (1999) Para *uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio D’Água.

Cabrita, I. (1998). *Resolução de problemas: Aquisição do Modelo de* Proporcionalidade *Direta num Documento Hipermédia* (Tese de Doutoramento). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Canavarro, A. P. (2007) *O pensamento algébrico na aprendizagem da matemática nos primeiros anos*. Quadrante, XVI(2), 81-118.

Cervo, A. L. & Bervian, P. A. (1983). *Metodologia Cientifica*. São Paulo: McGraw-Hill.

Dante, L. R. (1998). *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. 2ª Ed. SãoPaulo: Ática.

Davis & Hersh (1995). *A experiência* matemática. Lisboa: Gradiva.

(2009) *Dicionário da Língua Portuguesa*. Porto: Porto Editora. Especialistas em dicionários.

Duval, R. (2006). *A cognitive analyses of problems of comprehensions* in a learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61, 103 – 131.

English, L., Lesh, R. & Fennewald, T. (2008). *Future* directions *and perspectives for problem solving research and curriculum development.* acedido em novembro de http://tsg.icmell.org/document/get/458

Fernandes, Sónia (2007). *Atividades de Investigação Matemática no 1º ciclo do Ensino* Básico*: O contributo dos ambientes de aprendizagem.* Acedido em abril de http://repositorioaberto.uab.pt/bitstream/10400.2/568/1/LC269.pdf

Forrester, D. & Jantzie, N. (2004). *Learning Theories*. Acedido em 2013, Outubro 9, de http://www.ucalgary.ca/~gnjantzi/learning_theories.htm.

Goldin,G. e Steingold, N (2001) .Systems of representations and development on mathematical concepts, in Cuoco A. e Curcio F. (Eds), *The Roles of Representation in School Mathematics* (pp. 1-23)

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving in *English, L, Handbook of International Research in Mathematics Education* (2ª ed.) (pp.176-201) Routledge, Ny: Taylor e Francis

Guimarães, H. M. (2003). *Concepções sobre a Matemática e a atividade matemática: Um* estudo *com matemáticos e professores do Ensino Básico e Secundário*. (Tese de doutoramento). Lisboa: APM

Haguette, T. M. F. (2000). *Metodologias Qualitativas na Sociologia*. Petrópolis: Editora Vozes

Henriques, Ana (2010). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise* numérica *num contexto de atividades de investigação.* Universidade de Lisboa. Acedido em Abril de http://repositorio.ul.pt/(...)Ana_Henriques.pdf

Hersh, R. (1997). *What is mathematics really?* NewYork: Oxford University Press Inácio, M. (2007). *O processo de aprendizagem*. Lisboa: Delta Consultores e Perfil

Kalathil, R. R. & Sherin, M. G. (2000). *Role of Students' Representations in the Mathematics Classroom* Acedido em maio de http://www.umich.edu/~icls/proceedings/pdf/Kalathil.pdf

Leuca, T. (2010). Conexões *no ensino e aprendizagem das sucessões.* Universidade de Lisboa acedido em abril de http://repositorio.ul.pt/handle/10451/3926

Ludke, M. & André, M. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens Qualitativas. São* Paulo: Editora Pedagógica e Universitária

Martins, Valdemar (2006). *Avaliação do valor educativo de um software de elaboração de* partituras*: um estudo de caso com o programa Final no 1º ciclo. Universidade do Minho*. Instituto de Educação e Psicologia acedido em novembro de http://repositorium.sdum.uminho.pt/(...)Cap%c3%adtulo%203.pdf

Martins, C. & Santos, I. (2012). *As tarefas como suporte à condução de aulas.* Investigação *em Educação Matemática – Práticas de ensino da Matemática.* Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (455 – 466)

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática Escolar.* (tradução portuguesa dos Standards National Council of Teachers of Mathematics) Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2000). Principles *and Standards for School Mathematics*. Cambridge, MA: Harvard University Press

NCTM (2007). Princípios *e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM

NCTM (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar* (2ª edição). (M. Melo, Trad.). Lisboa: APM

Orton, J., Orton, A. e Roper, T. (1999). Pictorial and pratical contexts and the perception of patern. In Anthony Orton (Ed.) *Pattern in the teaching and learning of mathematics*, London: Cassel

Papert, S. (1996). *A família em rede*. Lisboa: Relógio D'Água.

Pelaes, A. (2009). *A importância da afetividade para o processo Ensino-Aprendizagem*. Universidade Luterana do Brasil acedido em julho de http://alfabetizarvirtualtextos.files.wordpress.com/2011/08/aimportc3a2ncia-da-afetividade-para-o-processo-ensino_aprendizagem.pdf

Pinto, M. E. (2009). *O papel das representações na resolução de problemas de matemática: um estudo* no *1º ano de escolaridade*. Universidade de Évora (Tese de Mestrado)

Polya, G. (1945, 1977). *A arte de resolver problemas (How to solve it)*. Rio de Janeiro: Interciência

Ponte, J. P.; Matos, J. F.; Guimarães, H. M.; Leal, L. C. & Canavarro, A. P. (1991). *O processo de* experimentação *dos novos programas de matemática: Um estudo de caso*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional

Ponte, J. P. (1992). *Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação*. Educação Matemática: Temas de investigação (pp. 185-239). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional

Ponte, J. P. (1994). *O estudo de caso na investigação em educação matemática*. Quadrante, 3 (1), 3-18

Ponte, J. P.; Boavida A., Graça, M. & Abrantes, P. (1997). *Didática da matemática* (cap. 2). Lisboa: Departamento do Ensino Secundário do Ministério da Educação

Ponte, J. P.; Martins, A.; Nunes, F.; Oliveira, I.; Silva, J. C.; Almeida, J.; Serrazina, L. & Abrantes, P. (1998). Matemática *escolar: Diagnóstico e propostas*. Lisboa: Ministério da Educação (também disponível a 2/12/2002 em: www.educ.fc.ul.pt/ docentes/jponte/artigos-por-temas.htm#Novas%20tecnologias).

Ponte, J. P.; Ferreira, C.; Brunheira, L.; oliveira, H. & Varandas, J. (1999). Investigando as aulas de investigações matemáticas. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 133-152). Lisboa: APM e Projecto MPT

Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didática da Matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In. GTI (Ed.), *O professor e o* desenvolvimento *curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM

Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2009). *O Novo Programa de Matemática: Uma oportunidade de mudança*. Educação e Matemática (nº 105)

Ponte, J. P. & Velez, I. (2011) *Representações em tarefas algébricas no 1º ciclo*. Educação Matemática (nº 13)

Preston, R. & Garner, A. (2003). *Representation as a vehicle for solving and communication*. Mathematics Teaching in the Middle School, 9, 38 - 43

Quaresma, M. & Ponte, J. P. (2012). *As tarefas e a comunicação numa abordagem exploratória no ensino dos números racionais. Investigação em Educação Matemática – Práticas de ensino da Matemática*. Sociedade Portuguesa de investigação em Educação Matemática (215 – 228)

Reis, Felipa (2010). *Como elaborar uma dissertação de Mestrado*. Edições de Ciências Sociais e Política Contemporânea

Ribeiro, A. (2005). *O Cabri-Géomètre e a construção de uma nova cultura matemática*. Departamento de didática e tecnologia educativa. Universidade de Aveiro

Rocha, M. I. & Menino, H. A. (2009). *Desenvolvimento do Sentido do Número na* Multiplicação*: Um estudo de caso com crianças de 7/8 anos*. Relime, 12 (1), pp. 103-134

Rodrigues, M. (2011). *Histórias com matemática: sentido espacial e ideias geométricas*. Escola Superior de educação de Lisboa acedido em maio de http://repositorio.ipl.pt/(...)Hist%C3%B3rias%20com%20matem%C3%A1tica.pdf

Santos, O. & Lima, M. (2010). *O processo de ensino-aprendizagem da disciplina matemática: possibilidades e limitações no contexto escolar* acedido em outubro de http://www.uespi.br/prop/XSIMPOSIO/TRABALHOS/(...)ESCOLAR.pdf

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? in. P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projeto MPT

Sequeira, M. (1990). Contributos *e limitações da teoria de Piaget para a Educação em Ciências*. Revista Portuguesa de Educação, 3(2), 21-35, Universidade do Minho

Silva, J. & Santiago, M. (2011). *Aula de investigação: aprendendo e conhecendo opiniões dos alunos sobre matemática*, III Encontro Regional em educação

Matemática – Diálogos de educação Matemática e Outros saberes Acedido em agosto de http://www.sbemrn.com.br/site/doc/RE_Santiago_eSilva.pdf

Stein, Remillard & Smith (2007). How curriculum influences student learning In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 319 – 369). Greenwich, CT: Information Age

Stein, M. K. & Smith, M. S. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática In *Educação e Matemática* nº 105

Stylianou, D.A. (2011). *The processo f abstracting in students representations. Mathematics Teaching* in the Middle School, 17 (1), 8-12

Tuckman, B. W. (1994). *Manual de Investigação em Educação*. Lisboa: Fundação Caloust Gulbenkian

Tuckman, B. W. (2000). *Manual de Investigação em Educação: como conceber e realizar o processo de investigação em educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian

Vale, I. (2000). *Didática da Matemática e Formação Inicial de Professores num Contexto de Resolução de problemas e de Materiais Manipuláveis*. (Tese de doutoramento). Universidade de Aveiro: Departamento de Didática e Tecnologia Educativa

Vale, I. & Pimentel, T. (2004). Resolução de problemas In P. Palhares (Ed.), *Elementos de matemática para professores do Ensino Básico* (pp. 7-51). Lisboa: Lidel

Vale, Isabel (2012). *Das tarefas com padrões visuais à generalização* acedido em janeiro de http://www.ese.ipvc.pt/padroes/artigos/2009_15.pdf

Valério, N. (2005). *Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1º ano*. Quadrante, 14(1), 37-66

Webb, D. C., Boswinkel, N. & Dekker, T. (2008). *Beneath the tip of the iceberg*. Mathematics Teaching in the Middle School, 14 (2), 110-113

Wikipedia aprendizagem. Acedido em julho de http://pt.wikipedia.Aprendizagem

Wikipedia matemática. Acedido em outubro de http://pt.wikipedia/Matem%A1tica

Wikipedia representação. Acedido em maio de http://pt.Wikipedia/RepresentaA3o

Wikipedia representação (matemática). Acedido em maio de http://pt.Wikipedia.org/wiki/Representa%C3%A3o_(matem%C3%A1tica)

Woleck, K. R. (2001). Listen to Their Pictures An Investigation of Children's Mathematical Drawings. In *Roles of Representation in School Mathematics*. 2001 yearbook (pp. 215 – 227). Virginia: National Council of Teachers of Mathematics

Yin, R. K. (1994). *Case Study Research: Design and Methods*. London: Sage Publications

ANEXOS

ANEXO 1

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO

Mestrado em Didática da Matemática

Guião da entrevista semi-estruturada realizada a três alunos do 2º ano de escolaridade

(As informações são confidenciais e serão utilizadas apenas no âmbito deste estudo, garantindo o anonimato dos entrevistados)

Temas	Objetivos	Guião das Questões
Caraterização	**1)** Conhecer dados dos alunos	**1** – Como te chamas? **2** – Quantos anos tens? **3 –** Tens irmãos? Quantos? **4 –** Qual é a profissão do teu pai? E da tua mãe?
Relação com a escola	**1)** Saber se os alunos gostam de frequentar a escola. **2)** Compreender o grau de importância que os alunos atribuem à escola. **3)** Conhecer alguns gostos e preferências dos alunos.	**5** – Gostas de andar na escola? **6** – Achas que é importante frequentar a escola? Porquê? **7** – Na escola aprendes Matemática, Língua Portuguesa e Estudo do Meio. Qual é a que tu mais gostas? Porquê? E a que menos gostas? Porquê? **8 –** Onde fazes os trabalhos de casa? **9 –** Alguém te ajuda a fazer os trabalhos de casa? Quem? **10 –** O que é que tu gostas mais de fazer na escola? Porquê?

Relação com a matemática	**1)** Saber a importância que os alunos dão à Matemática. **2)** Saber se os alunos estudam Matemática **3)** Compreender o que os alunos fazem quando sentem dificuldades a Matemática**.** **4)** Compreender o que os alunos mais gostam na Matemática e o que menos gostam. 5) Saber se os alunos gostam das tarefas apresentadas nas aulas. **6)** Compreender onde os alunos sentem dificuldades na resolução das tarefas e como as ultrapassam **7)** Saber como os alunos pensam para resolver as tarefas	**11 –** Achas importante estudar Matemática? Porquê? **12 –** Para que achas que serve a Matemática? **13 –** Consideras-te um aluno bom, médio ou fraco a Matemática? Porquê? **14 –** Costumas estudar Matemática fora das aulas? Se sim, como o costumas fazer? Sozinho ou com ajuda de alguém? **15 –** Quando tens dificuldade a Matemática o que costumas fazer? **16 –** O que gostas mais de fazer a Matemática? Porquê? O que menos gostas de fazer a Matemática? Porquê? **17 –** Que tipo de tarefa gostas mais de realizar nas aulas de Matemática (exercícios, problemas, jogos, trabalhos de grupo)? Porquê? **18 –** Tens gostado de resolver as tarefas apresentadas pela professora nas aulas que vou assistir? Porquê? **19 –** Tenta descrever, de uma forma geral, como pensaste para conseguires resolver a tarefa "Apertos de mão". **20 –** Na resolução da tarefa "Apertos de mão" sentiste dificuldade para chegar ao resultado? Se sim, que dificuldades e como conseguiste ultrapassá-las? **21 –** Na tua opinião, a tarefa "apertos de mão" pode ser resolvida de outra maneira? Se sim, como a resolverias? **22 –** Agora, tenta descrever como pensaste para conseguires resolver a tarefa "Pastilhas Gargantox". **23 –** Na resolução da tarefa "Pastilhas Gargantox" sentiste dificuldade para chegar ao resultado? Se sim, que dificuldades e como conseguiste ultrapassá-las? **24 –** Na tua opinião, a tarefa "Pastilhas Gargantox" pode ser resolvida de outra maneira? Se sim como a resolverias?

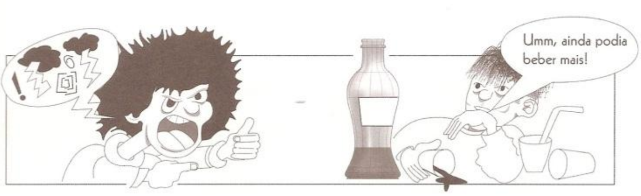
ANEXO 2

Roteiros das tarefas propostas aos alunos no âmbito do estudo

ROTEIRO DA TAREFA nº 1

Enunciado da tarefa

"Copos de sumo"



O Arménio está zangado com o irmão Américo, porque este bebeu três copos de sumo da garrafa que a mãe comprou, que dava para encher cinco copos.

1. Terá o Arménio motivo para ficar zangado? Explica como pensaste.
2. Para acabar com as zangas entre os irmãos, a mãe decidiu comprar mais uma garrafa. Agora temos sumo para quantos copos? Como os podem repartir entre eles, de modo a nenhum dos irmãos ficar zangado?

Nível de ensino

2º ano de escolaridade

Tópico matemático

Operações com números naturais

Subtópico matemático

Subtração

Capacidades transversais

<u>Resolução de problemas</u>

- Resolver problemas em contextos matemáticos

<u>Raciocínio matemático</u>

- Raciocinar matematicamente, desenvolvendo e avaliando argumentos matemáticos relativos a resultados, processos e ideias matemáticas

<u>Comunicação matemática</u>

- Discutir as soluções encontradas e os processos utilizados

- Comunicar oralmente e por escrito
- Recorrer à linguagem natural e à linguagem matemática

Conhecimentos prévios dos alunos

Realizar contagens

Ler e representar números

Reconhecer situações que envolvem a subtração

Aprendizagens visadas

Resolver problemas envolvendo subtrações

Reconhecer e utilizar diferentes formas de representação

Compreender a subtração nos sentidos retirar e comparar

Resolver problemas envolvendo relações numéricas

Orientações para apresentação e exploração da tarefa (Duração total: 90 minutos)

<u>Natureza da tarefa</u>: Problema

<u>Apresentação da tarefa pelo professor</u> (15 minutos):

O professor distribuirá o enunciado da tarefa e faz a sua apresentação.

<u>Trabalho dos alunos</u> (40 minutos):

Os alunos devem trabalhar na resolução da tarefa de forma autónoma, individualmente, com a orientação do professor.

Os alunos deverão fazer o registo das suas estratégias de forma a facilitar a apresentação das suas conclusões. Posteriormente, apresentarão os resultados ao grande grupo (turma), para uma reflexão sobre as formas de resolução.

<u>Discussão coletiva na turma dos resultados obtidos pelos grupos</u> (20 minutos):

O professor deve percorrer o trabalho feito, promovendo uma participação equilibrada.

Estimular situações de argumentação.

Os alunos apresentam as suas ideias de resolução.

Sistematização das principais ideias/aprendizagens (15 minutos):

Salientar os conceitos/ideias/procedimentos aprendidos, solicitando a participação dos alunos.

Os alunos deverão registar as conclusões, utilizando uma linguagem matemática.

Acompanhamento do professor na aula

Ao longo da resolução da tarefa o professor assumirá o papel de orientador e deve incentivar os alunos à participação, com o objetivo de ajudar na superação de dificuldades.

Que dificuldades poderão surgir?

- Relacionar o número de copos e de garrafas

Perante as dificuldades que surgirem como atuar?

- Orientar os alunos de forma a eles representarem as garrafas e os copos

Possíveis explorações dos alunos

Os alunos poderão, para a resolução da tarefa, utilizar desenhos/figuras, números ou ainda ser necessário representar as garrafas e os copos de sumo por objetos/material didático.

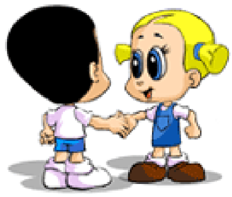
Materiais

- Papel com tarefa
- Lápis
- Borracha
- Quadro
- Giz

ROTEIRO DA TAREFA nº 2

Enunciado da tarefa

“Apertos de mão”



Dez amigos combinaram dar um passeio de patins. Encontraram-se à entrada do Parque da Cidade e cumprimentaram-se. Cada amigo deu um aperto de mão a cada um dos seus amigos uma só vez.

Quantos apertos de mão deram?

Nível de ensino

2º ano de escolaridade

Tópico matemático

Operações com números naturais

Subtópico matemático

Adição

Capacidades transversais

<u>Resolução de problemas</u>

- Desenvolver a capacidade de resolver problemas

- Analisar e discutir diferentes estratégias de resolução

<u>Raciocínio matemático</u>

- Reconhecer diferentes métodos de demonstração

- Raciocinar matematicamente

<u>Comunicação matemática</u>

- Desenvolver a capacidade de comunicação oral e escrita

- Desenvolver a capacidade de expressar ideias

Conhecimentos prévios dos alunos

Realizar contagens

Ler e representar números

Estabelecer relações entre elementos de um conjunto

Reconhecer situações que envolvem a adição

Compreender a adição no sentido de juntar

Aprendizagens visadas

Compreender a adição nos sentidos combinar e acrescentar

Adicionar recorrendo a diferentes estratégias (representação pictórica, numérica ou concreta)

Resolver problemas envolvendo adições

Reconhecer e utilizar diferentes formas de representação

Orientações para apresentação e exploração da tarefa (Duração total: 90 minutos)

Natureza da tarefa: Problema

Apresentação da tarefa pelo professor (15 minutos):

O professor distribui a tarefa, em papel, e lê o enunciado, para que os alunos a resolvam.

Trabalho dos alunos (40 minutos):

Os alunos devem trabalhar na tarefa de forma autónoma, individualmente, e apresentarão, posteriormente, os resultados ao grande grupo (turma), para comparar as diferentes formas de resolução para superarem possíveis dificuldades e para uma reflexão sobre a resolução.

Discussão coletiva na turma dos resultados obtidos pelos grupos (20 minutos):

- O professor deve reler a tarefa.

- Os alunos apresentam as suas ideias/resultados incentivar a comunicação justificando as respostas).

- O professor para incentivar e fomentar a comunicação matemática pode ir colocando questões.

Sistematização das principais ideias/aprendizagens (15 minutos):

Salientar os conceitos/ideias/procedimentos aprendidos, solicitando a participação dos alunos.

Os alunos terão de registar as diferentes formas, corretas, de resolução obtidas na sala, isto para terem conhecimento de outras formas de resolver a mesma tarefa além da sua.

Acompanhamento do professor na aula

Ao longo da resolução da tarefa o professor assumirá o papel de mediador e orientador e deverá supervisionar e incentivar os alunos à participação, com o objetivo de ajudar na superação de dificuldades.

Que dificuldades poderão surgir?

- Em imaginar/abstrair os amigos.

- Colocar cada amigo a cumprimentar os outros todos.

Perante as dificuldades que surgirem como atuar?

- O professor deve dizer ao aluno para este pensar no que faz quando se encontra com os amigos.

- O professor deve frisar que cada amigo só cumprimenta uma só vez cada um dos outros.

- O professor deve orientar os alunos de forma a utilizarem representações.

Possíveis explorações dos alunos

Os alunos poderão, para a resolução da tarefa, utilizar desenhos/figuras, números ou ainda ser necessário representar cada "amigo" por um objeto/material didático.

Materiais

- Papel com tarefa

- Lápis

- Borracha

- Quadro

- Giz

ROTEIRO DA TAREFA nº 3

Enunciado da tarefa

"Pastilhas Gargantox"

O Rúben constipou-se e está com uma forte dor de garganta. A mãe foi à farmácia comprar uma caixa de pastilhas Gargantox.

Quantas pastilhas tem a caixa sabendo que cada uma tem três placas como aquela que está ilustrada na figura ao lado?

Nível de ensino

2º ano de escolaridade

Tópico matemático

Operações com números naturais

Subtópico matemático

Adição

Capacidades transversais

<u>Resolução de problemas</u>

- Desenvolver a capacidade de resolver problemas

- Analisar e discutir diferentes estratégias de resolução

<u>Raciocínio matemático</u>

- Reconhecer diferentes métodos de demonstração

- Raciocinar matematicamente

<u>Comunicação matemática</u>

- Desenvolver a capacidade de comunicação oral e escrita

- Desenvolver a capacidade de expressar ideias

Conhecimentos prévios dos alunos

Realizar contagens

Compreender a adição

Ler e representar números

Aprendizagens visadas

Compreender a adição no sentido de acrescentar

Adicionar recorrendo a estratégias de cálculo mental e escrito

Resolver problemas envolvendo adições

Reconhecer e utilizar diferentes formas de representação

Orientações para apresentação e exploração da tarefa (Duração total: 90 minutos)

Natureza da tarefa: Problema

Apresentação da tarefa pelo professor (15 minutos):

O professor distribui o enunciado da tarefa e faz a sua apresentação

Trabalho dos alunos (40 minutos):

Os alunos devem trabalhar na tarefa de forma autónoma, individualmente, com orientação do professor.

Os alunos deverão fazer o registo das suas estratégias de resolução para facilitar a apresentação dos resultados à turma, para que possam refletir em conjunto sobre as diferentes formas de resolução

Discussão coletiva na turma dos resultados obtidos pelos grupos (20 minutos):

Os alunos apresentam as suas ideias de resolução.

O professor deve estimular situações de argumentação. Para isto poderá colocar questões.

O professor deve promover uma participação equilibrada

Sistematização das principais ideias/aprendizagens (15 minutos):

Salientar os conceitos/ideias/procedimentos aprendidos.

Os alunos terão de registar as conclusões e as diferentes formas de resolução obtidas, para conhecerem outras formas de resolver a mesma tarefa.

Acompanhamento do professor na aula

Ao longo da resolução da tarefa o professor assumirá o papel de orientador e deve incentivar os alunos à participação, com o objetivo de ajudar na superação de dificuldades.

Que dificuldades poderão surgir?

Confundir o número de pastilhas com o número de placas.

Perante as dificuldades que surgirem como atuar?

O professor deve incentivar os alunos a lerem bem o enunciado.

Elucidar os alunos que têm “pastilhas” e “placas”.

Incentivar os alunos para representarem o que leem no enunciado

Possíveis explorações dos alunos

Os alunos poderão, para a resolução da tarefa, utilizar desenhos/figuras, números ou ainda ser necessário representar as pastilhas por um objeto/material didático.

Materiais

- Papel com tarefa
- Lápis
- Borracha
- Quadro
- Giz

ROTEIRO DA TAREFA nº 4

Enunciado da tarefa

"Arrumando ovos"

1. Na mercearia da D. Maria, os ovos caseiros são vendidos em caixas como a da figura.

Com 49 ovos quantas caixas se enchem?

E com 77 ovos?

2. A D. Maria vai comprar caixas retangulares de 8 ovos. Será que ela consegue colocar todos os 56 ovos em caixas, de tal forma que fiquem todas cheias?

Nível de ensino

2º ano de escolaridade

Tópico matemático

Operações com números naturais

Subtópico matemático

Adição

Capacidades transversais

<u>Resolução de problemas</u>

- Desenvolver a capacidade de resolver problemas

- Analisar e discutir diferentes estratégias de resolução

<u>Raciocínio matemático</u>

- Reconhecer diferentes métodos de demonstração

- Raciocinar matematicamente

<u>Comunicação matemática</u>

- Desenvolver a capacidade de comunicação oral e escrita

- Desenvolver a capacidade de expressar ideias

Conhecimentos prévios dos alunos

Realizar contagens

Ler e representar números

Reconhecer situações que envolvem a adição

Compreender a adição no sentido de juntar

Aprendizagens visadas

Adicionar recorrendo a diferentes estratégias (representação pictórica, numérica ou concreta)

Resolver problemas envolvendo adições

Reconhecer e utilizar diferentes formas de representação

Orientações para apresentação e exploração da tarefa (Duração total: 90 minutos)

Natureza da tarefa: Problema

Apresentação da tarefa pelo professor (15 minutos):

A tarefa será distribuída aos alunos, em papel, para que estes a resolvam após ter sido lida pelo professor.

Trabalho dos alunos (40 minutos):

Os alunos devem trabalhar na tarefa de forma autónoma, a pares, e apresentarão, posteriormente, os resultados ao grande grupo (turma), para comparar as diferentes formas de resolução para superarem possíveis dificuldades e para uma reflexão sobre a resolução.

Discussão coletiva na turma dos resultados obtidos pelos grupos (20 minutos):

- O professor deve reler a tarefa.

- Os alunos apresentam as suas ideias/resultados

- O professor para incentivar e fomentar a comunicação matemática pode ir colocando questões.

Sistematização das principais ideias/aprendizagens (15 minutos):

Salientar os conceitos/ideias/procedimentos aprendidos, solicitando a participação dos alunos.

Os alunos terão de registar as diferentes formas, corretas, de resolução obtidas na sala, isto para terem conhecimento de outras formas de resolver a mesma tarefa além da sua.

Acompanhamento do professor na aula

Ao longo da resolução da tarefa o professor assumirá o papel de mediador e orientador e deverá supervisionar e incentivar os alunos à participação, com o objetivo de ajudar na superação de dificuldades.

Que dificuldades poderão surgir?

- Em reconhecer o número de ovos que terá de colocar em cada caixa.

Perante as dificuldades que surgirem como atuar?

- O professor deverá incentivá-lo a representar o que lhe é dito no enunciado.

Possíveis explorações dos alunos

Os alunos poderão, para a resolução da tarefa, utilizar desenhos/figuras, números ou ainda ser necessário representar por meio de objetos/material didático.

Materiais

- Papel com tarefa
- Lápis
- Borracha
- Quadro
- Giz

ROTEIRO DA TAREFA nº 5

Enunciado da tarefa

"A bicharada"

A Rafaela tem três gatinhos e dois coelhinhos de estimação. Sempre que vai passear, gosta de levar consigo um dos seus gatinhos e um dos seus coelhinhos.

Com quantos pares diferentes pode a Rafaela ir passear?

Nível de ensino

2º ano de escolaridade

Tópico matemático

Operações com números naturais

Subtópico matemático

Adição

Capacidades transversais

Resolução de problemas

- Desenvolver a capacidade de resolver problemas em contextos matemáticos

- Analisar e discutir diferentes estratégias de resolução

Raciocínio matemático

- Raciocinar matematicamente, desenvolvendo e avaliando argumentos matemáticos relativos a resultados, processos e ideias matemáticas

Comunicação matemática

- Discutir as soluções encontradas e os processos utilizados

- Comunicar oralmente e por escrito

- Desenvolver a capacidade de expressar ideias

Conhecimentos prévios dos alunos

Realizar contagens

Ler e representar números

Estabelecer relações entre elementos de um conjunto

Compreender a adição no sentido de juntar

Aprendizagens visadas

Compreender a adição nos sentidos combinar e acrescentar

Adicionar recorrendo a diferentes estratégias

Resolver problemas envolvendo adições

Reconhecer e utilizar diferentes formas de representação

Orientações para apresentação e exploração da tarefa (Duração total: 90 minutos)

<u>Natureza da tarefa</u>: Problema

<u>Apresentação da tarefa pelo professor</u> (15 minutos):

O professor distribuirá a tarefa "a bicharada", em papel, para que os alunos a resolvam.

<u>Trabalho dos alunos</u> (40 minutos):

Os alunos devem trabalhar na tarefa de forma autónoma, a pares, e apresentarão, posteriormente, os resultados ao grande grupo (turma), para comparar as diferentes formas de resolução para superarem possíveis dificuldades e para uma reflexão sobre a resolução.

<u>Discussão coletiva na turma dos resultados obtidos pelos grupos</u> (20 minutos):

- O professor deve reler a tarefa.

- Os alunos apresentam as suas ideias/resultados (incentivar a comunicação justificando as respostas).

- O professor para incentivar e fomentar a comunicação matemática pode ir colocando questões.

Sistematização das principais ideias/aprendizagens (15 minutos):

Salientar os conceitos/ideias/procedimentos aprendidos, solicitando a participação dos alunos.

Os alunos terão de registar as diferentes formas, corretas, de resolução obtidas na sala, isto para terem conhecimento de outras formas de resolver a mesma tarefa além da sua.

Acompanhamento do professor na aula

Ao longo da resolução da tarefa o professor assumirá o papel de orientador e deverá supervisionar e incentivar os alunos à participação, com o objetivo de ajudar na superação de dificuldades.

Que dificuldades poderão surgir?

- Poderão ter dificuldade em organizar os pares de animais.

Perante as dificuldades que surgirem como atuar?

- O professor deve orientar o aluno de forma a representar o que leu no enunciado.

Possíveis explorações dos alunos

Os alunos poderão, para a resolução da tarefa, utilizar desenhos/figuras, números ou ainda ser necessário representar por um objeto/material didático.

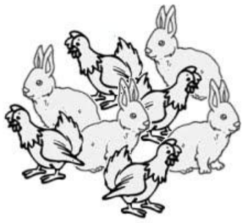
Materiais

- Papel com tarefa
- Lápis
- Borracha
- Quadro
- Giz

ROTEIRO DA TAREFA nº 6

Enunciado da tarefa

"Galinhas e coelhos"



Na quinta da avó do Zacarias há galinhas e coelhos. Contando as patas de todos os animais (galinhas e coelhos) verificou-se que no total eram 48 patas. Sabendo que são 17 animais, quantos coelhos e galinhas existem?

Nível de ensino

2º ano de escolaridade

Tópico matemático

Operações com números naturais

Subtópico matemático

Adição e multiplicação

Capacidades transversais

<u>Resolução de problemas</u>

- Desenvolver a capacidade de resolver problemas
- Analisar e discutir diferentes estratégias de resolução

<u>Raciocínio matemático</u>

- Reconhecer diferentes métodos de demonstração
- Raciocinar matematicamente

<u>Comunicação matemática</u>

- Desenvolver a capacidade de comunicação oral e escrita
- Desenvolver a capacidade de expressar ideias

Conhecimentos prévios dos alunos

Realizar contagens

Ler e representar números

Estabelecer relações entre elementos de um conjunto

Reconhecer situações que envolvem a adição

Compreender a adição no sentido de juntar

Aprendizagens visadas

Compreender a multiplicação no sentido aditivo

Multiplicar recorrendo à adição repetida

Resolver problemas envolvendo a multiplicação

Reconhecer e utilizar diferentes formas de representação

Orientações para apresentação e exploração da tarefa (Duração total: 90 minutos)

Natureza da tarefa: Problema

Apresentação da tarefa pelo professor (15 minutos):

A tarefa será distribuída pelo professor, em papel, para os alunos resolverem.

Trabalho dos alunos (40 minutos):

Os alunos devem trabalhar na tarefa de forma autónoma, a pares, e apresentarão, posteriormente, os resultados ao grande grupo (turma), para comparar as diferentes formas de resolução para superarem possíveis dificuldades e para uma reflexão sobre a resolução.

Discussão coletiva na turma dos resultados obtidos pelos grupos (20 minutos):

- O professor deve reler a tarefa.

- Os alunos apresentam as suas ideias/

- O professor para incentivar e fomentar a comunicação matemática poderá colocar questões.

Sistematização das principais ideias/aprendizagens (15 minutos):

Salientar os conceitos/ideias/procedimentos aprendidos, solicitando a participação dos alunos.

Os alunos terão de registar as diferentes formas, corretas, de resolução obtidas na sala, isto para terem conhecimento de outras formas de resolver a mesma tarefa além da sua.

Acompanhamento do professor na aula

Ao longo da resolução da tarefa o professor assumirá o papel de mediador e orientador e deverá supervisionar e incentivar os alunos à participação, com o objetivo de ajudar na superação de dificuldades.

Que dificuldades poderão surgir?

- Os alunos poderão ter dificuldade na contagem das patas, relacionar as patas dos coelhos (4 patas) e das galinhas (2 patas).

Perante as dificuldades que surgirem como atuar?

- O professor deve orientar os alunos, de forma a eles usarem representações.

Possíveis explorações dos alunos

Os alunos poderão, para a resolução da tarefa, utilizar desenhos/figuras, números ou ainda ser necessário representar por meio de objetos/material didático.

Materiais

- Papel com tarefa
- Lápis
- Borracha
- Quadro
- Giz

ROTEIRO DA TAREFA nº 7

Enunciado da tarefa

"A festa da Carolina"

A Carolina festeja o seu aniversário na próxima semana.

Como a Carolina pretende dar 4 balões a cada um dos seus amigos, e não ficar com nenhum, a mãe comprou 96 balões. Quantos amigos virão à festa?

Agora que já sabes quantos amigos a Carolina convidou para a sua festa, ajuda-a na preparação dos aperitivos e na organização das mesas.

1. Quantos pedaços de queijo vão precisar para preparar os aperitivos para a festa?
2. E de quantas salsichas?

Nível de ensino

2º ano de escolaridade

Tópico matemático

Operações com números naturais

Subtópico matemático

Multiplicação

Capacidades transversais

<u>Resolução de problemas</u>

- Desenvolver a capacidade de resolver problemas

<u>Raciocínio matemático</u>

- Reconhecer diferentes métodos de demonstração

- Raciocinar matematicamente

Comunicação matemática

- Desenvolver a capacidade de comunicação oral e escrita

- Desenvolver a capacidade de expressar ideias

Conhecimentos prévios dos alunos

Realizar contagens

Ler e representar números

Estabelecer relações entre elementos de um conjunto

Reconhecer situações que envolvem a adição

Compreender a adição no sentido de juntar

Aprendizagens visadas

Compreender a multiplicação no sentido aditivo

Resolver problemas envolvendo a multiplicação

Reconhecer e utilizar diferentes formas de representação

Orientações para apresentação e exploração da tarefa (Duração total: 90 minutos)

Natureza da tarefa: Problema

Apresentação da tarefa pelo professor (15 minutos):

A tarefa será distribuída pelo professor, em papel, para os alunos resolverem.

Trabalho dos alunos (40 minutos):

Os alunos devem trabalhar na tarefa de forma autónoma, a pares, e apresentarão, posteriormente, os resultados ao grande grupo (turma), para comparar as diferentes formas de resolução para superarem possíveis dificuldades e para uma reflexão sobre a resolução.

Discussão coletiva na turma dos resultados obtidos pelos grupos (20 minutos):

- O professor deve reler a tarefa.

- Os alunos apresentam as suas ideias/resultados (incentivar a comunicação justificando as respostas).

- O professor para incentivar e fomentar a comunicação matemática pode ir colocando questões.

Sistematização das principais ideias/aprendizagens (15 minutos):

Salientar os conceitos/ideias/procedimentos aprendidos, solicitando a participação dos alunos.

Os alunos terão de registar as diferentes formas, corretas, de resolução obtidas na sala, isto para terem conhecimento de outras formas de resolver a mesma tarefa além da sua.

Acompanhamento do professor na aula

Ao longo da resolução da tarefa o professor assumirá o papel de mediador e orientador e deverá supervisionar e incentivar os alunos à participação, com o objetivo de ajudar na superação de dificuldades.

Que dificuldades poderão surgir?

- Os alunos poderão ter dificuldades em formar conjuntos de 4 balões para descobrirem o número de amigos e em organizar os aperitivos com os pedaços de alimentos pretendidos.

Perante as dificuldades que surgirem como atuar?

- O professor deve incentivar/orientar os alunos à utilização de representações.

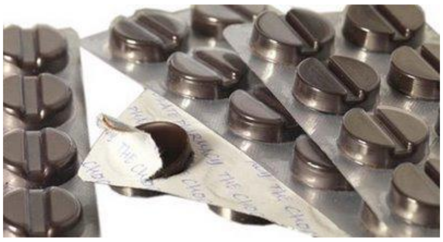
Possíveis explorações dos alunos

Os alunos poderão, para a resolução da tarefa, utilizar desenhos/figuras, números ou ainda ser necessário representar por um objeto/material didático.

Materiais

- Papel com tarefa
- Lápis
- Borracha
- Quadro
- Giz

ROTEIRO DA TAREFA nº 8



Enunciado da tarefa

“Comprimidos”

O Manuel foi ao médico que lhe receitou duas caixas de Melhorex com 24 comprimidos cada uma. Devia tomar um comprimido de 6 em 6 horas até acabar as duas caixas.

A Ana Carolina começou a tomar os comprimidos de embalagens iguais, há duas semanas, só que os toma de 8 em 8 horas.

1. Quem toma mais comprimidos por dia?

2. Quem acaba primeiro o tratamento?

Nível de ensino

2º ano de escolaridade

Tópico matemático

Operações com números naturais

Subtópico matemático

Multiplicação

Capacidades transversais

Resolução de problemas

- Desenvolver a capacidade de resolver problemas
- Analisar e discutir diferentes estratégias de resolução

Raciocínio matemático

- Raciocinar matematicamente

Comunicação matemática

- Desenvolver a capacidade de comunicação oral e escrita

- Desenvolver a capacidade de expressar ideias

Conhecimentos prévios dos alunos

Realizar contagens

Ler e representar números

Reconhecer situações que envolvem a adição

Compreender a adição no sentido de juntar

Aprendizagens visadas

Compreender a multiplicação no sentido aditivo

Resolver problemas envolvendo a multiplicação

Reconhecer e utilizar diferentes formas de representação

Orientações para apresentação e exploração da tarefa (Duração total: 90 minutos)

Natureza da tarefa: Problema

Apresentação da tarefa pelo professor (15 minutos):

O professor distribuirá a tarefa "Comprimidos", em papel, para que os alunos a resolvam.

Trabalho dos alunos (40 minutos):

Os alunos devem trabalhar na tarefa de forma autónoma, a pares, e apresentarão, posteriormente, os resultados ao grande grupo (turma), para comparar as diferentes formas de resolução para superarem possíveis dificuldades e para uma reflexão sobre a resolução.

Discussão coletiva na turma dos resultados obtidos pelos grupos (20 minutos):

- O professor deve reler a tarefa.

- Os alunos apresentam as suas ideias/resultados

Sistematização das principais ideias/aprendizagens (15 minutos):

Salientar os conceitos/ideias/procedimentos aprendidos, solicitando a participação dos alunos.

Os alunos terão de registar as diferentes formas, corretas, de resolução obtidas na sala, isto para terem conhecimento de outras formas de resolver a mesma tarefa além da sua.

Acompanhamento do professor na aula

Ao longo da resolução da tarefa o professor assumirá o papel de mediador e orientador e deverá supervisionar e incentivar os alunos à participação, com o objetivo de ajudar na superação de dificuldades.

Que dificuldades poderão surgir?

- Os alunos poderão apresentar dificuldades em saber quantas horas tem o dia.

Perante as dificuldades que surgirem como atuar?

- O professor poderá explicar quantas horas tem o dia através do relógio.

Possíveis explorações dos alunos

Os alunos poderão, para a resolução da tarefa, utilizar desenhos/figuras, números ou ainda ser necessário representar por um objeto/material didático.

Materiais

- Papel com tarefa
- Lápis
- Borracha
- Quadro
- Giz

ROTEIRO DA TAREFA nº 9

Enunciado da tarefa

"Colares"

Para o dia da mãe combinámos fazer um colar com bolas. Cada colar tinha 2 bolas pretas, 3 bolas vermelhas e 4 bolas brancas.

Quantas bolas de cada cor se terão de comprar para fazer 6 colares

Nível de ensino

2º ano de escolaridade

Tópico matemático

Operações com números naturais

Subtópico matemático

Adição e multiplicação

Capacidades transversais

<u>Resolução de problemas</u>

- Desenvolver a capacidade de resolver problemas

- Analisar e discutir diferentes estratégias de resolução

<u>Raciocínio matemático</u>

- Reconhecer diferentes métodos de demonstração

- Raciocinar matematicamente, desenvolvendo e avaliando argumentos matemáticos relativos a resultados, processos e ideias matemáticas

<u>Comunicação matemática</u>

- Desenvolver a capacidade de comunicação oral e escrita

- Desenvolver a capacidade de expressar ideias

Conhecimentos prévios dos alunos

Realizar contagens

Ler e representar números

Estabelecer relações entre elementos de um conjunto

Reconhecer situações que envolvem a adição

Compreender a adição no sentido de juntar

Aprendizagens visadas

Compreender a adição nos sentidos combinar e acrescentar

Resolver problemas envolvendo adições e multiplicações

Reconhecer e utilizar diferentes formas de representação

Orientações para apresentação e exploração da tarefa (Duração total: 90 minutos)

Natureza da tarefa: Problema

Apresentação da tarefa pelo professor (15 minutos):

O professor distribuirá o enunciado da tarefa e faz a sua apresentação.

Trabalho dos alunos (40 minutos):

Os alunos devem trabalhar na resolução da tarefa de forma autónoma, individualmente, com a orientação do professor.

Os alunos deverão fazer o registo das suas estratégias de forma a facilitar a apresentação das suas conclusões. Posteriormente, apresentarão os resultados ao grande grupo (turma), para uma reflexão sobre as formas de resolução.

Discussão coletiva na turma dos resultados obtidos pelos grupos (20 minutos):

O professor deve percorrer o trabalho feito, promovendo uma participação equilibrada.

Estimular situações de argumentação.

Os alunos apresentam as suas ideias de resolução.

Sistematização das principais ideias/aprendizagens (15 minutos):

Salientar os conceitos/ideias/procedimentos aprendidos, solicitando a participação dos alunos.

Os alunos deverão registar as conclusões, utilizando uma linguagem matemática.

Acompanhamento do professor na aula

Ao longo da resolução da tarefa o professor assumirá o papel de orientador e deve incentivar os alunos à participação, com o objetivo de ajudar na superação de dificuldades.

Que dificuldades poderão surgir?

- Relacionar o número de bolas de todos os colares

Perante as dificuldades que surgirem como atuar?

- Orientar os alunos de forma a eles representarem os colares com as respetivas bolas

Possíveis explorações dos alunos

Os alunos poderão, para a resolução da tarefa, utilizar desenhos/figuras, números ou ainda ser necessário representar os colares com as respetivas bolas por objetos/material didático.

Materiais

- Papel com tarefa
- Lápis
- Borracha
- Quadro
- Giz

ROTEIRO DA TAREFA nº 10

Enunciado da tarefa

"As meias das joaninhas"

O João é um colecionador. Ele tem uma caixa com 5 joaninhas. Cada joaninha tem 6 patas. Se o João tivesse de comprar meias no Inverno para as suas joaninhas, quantas meias compraria?

Nível de ensino

2º ano de escolaridade

Tópico matemático

Operações com números naturais

Subtópico matemático

Adição e multiplicação

Capacidades transversais

<u>Resolução de problemas</u>

- Desenvolver a capacidade de resolver problemas
- Analisar e discutir diferentes estratégias de resolução

<u>Raciocínio matemático</u>

- Reconhecer diferentes métodos de demonstração
- Raciocinar matematicamente

<u>Comunicação matemática</u>

- Desenvolver a capacidade de comunicação oral e escrita
- Desenvolver a capacidade de expressar ideias

Conhecimentos prévios dos alunos

Realizar contagens

Ler e representar números

Estabelecer relações entre elementos de um conjunto

Reconhecer situações que envolvem a adição

Compreender a adição no sentido de juntar

Aprendizagens visadas

Compreender a adição nos sentidos combinar e acrescentar

Adicionar recorrendo a diferentes estratégias

Resolver problemas envolvendo adições e multiplicações

Reconhecer e utilizar diferentes formas de representação

Orientações para apresentação e exploração da tarefa (Duração total: 90 minutos)

Natureza da tarefa: Problema

Apresentação da tarefa pelo professor (15 minutos):

O professor distribui a tarefa, em papel, e lê o enunciado, para que os alunos a resolvam.

Trabalho dos alunos (40 minutos):

Os alunos devem trabalhar na tarefa de forma autónoma, individualmente, e apresentarão, posteriormente, os resultados ao grande grupo (turma), para comparar as diferentes formas de resolução para superarem possíveis dificuldades e para uma reflexão sobre a resolução.

Discussão coletiva na turma dos resultados obtidos pelos grupos (20 minutos):

- O professor deve reler a tarefa.

- Os alunos apresentam as suas ideias/resultados incentivar a comunicação justificando as respostas).

- O professor para incentivar e fomentar a comunicação matemática pode ir colocando questões.

Sistematização das principais ideias/aprendizagens (15 minutos):

Salientar os conceitos/ideias/procedimentos aprendidos, solicitando a participação dos alunos.

Os alunos terão de registar as diferentes formas, corretas, de resolução obtidas na sala, isto para terem conhecimento de outras formas de resolver a mesma tarefa além da sua.

Acompanhamento do professor na aula

Ao longo da resolução da tarefa o professor assumirá o papel de mediador e orientador e deverá supervisionar e incentivar os alunos à participação, com o objetivo de ajudar na superação de dificuldades.

Que dificuldades poderão surgir?

- Relacionar as joaninhas com o número de patas

Perante as dificuldades que surgirem como atuar?

- O professor deve orientar os alunos de forma a representarem a utilizarem as representações

Possíveis explorações dos alunos

Os alunos poderão, para a resolução da tarefa, utilizar desenhos/figuras, números ou ainda ser necessário representar cada "amigo" por um objeto/material didático.

Materiais

- Papel com tarefa

- Lápis

- Borracha

- Quadro

- Giz

ROTEIRO DA TAREFA nº 11

Enunciado da tarefa

"A higiene do elefante"

Um elefante gasta dois sabonetes por dia na sua higiene. Quantos sabonetes gastará em 6 dias?

Nível de ensino

2º ano de escolaridade

Tópico matemático

Operações com números naturais

Subtópico matemático

Adição e multiplicação

Capacidades transversais

<u>Resolução de problemas</u>

- Desenvolver a capacidade de resolver problemas
- Analisar e discutir diferentes estratégias de resolução

<u>Raciocínio matemático</u>

- Reconhecer diferentes métodos de demonstração
- Raciocinar matematicamente

<u>Comunicação matemática</u>

- Desenvolver a capacidade de comunicação oral e escrita
- Desenvolver a capacidade de expressar ideias

Conhecimentos prévios dos alunos

Realizar contagens

Compreender a adição

Ler e representar números

Aprendizagens visadas

Compreender a adição no sentido de acrescentar

Compreender a multiplicação no sentido aditivo

Adicionar recorrendo a estratégias de cálculo mental e escrito

Resolver problemas envolvendo adições e multiplicações

Orientações para apresentação e exploração da tarefa (Duração total: 90 minutos)

Natureza da tarefa: Problema

Apresentação da tarefa pelo professor (15 minutos):

O professor distribui o enunciado da tarefa e faz a sua apresentação

Trabalho dos alunos (40 minutos):

Os alunos devem trabalhar na tarefa de forma autónoma, individualmente, com orientação do professor.

Os alunos deverão fazer o registo das suas estratégias de resolução para facilitar a apresentação dos resultados à turma, para que possam refletir em conjunto sobre as diferentes formas de resolução

Discussão coletiva na turma dos resultados obtidos pelos grupos (20 minutos):

Os alunos apresentam as suas ideias de resolução.

O professor deve estimular situações de argumentação. Para isto poderá colocar questões.

O professor deve promover uma participação equilibrada

Sistematização das principais ideias/aprendizagens (15 minutos):

Salientar os conceitos/ideias/procedimentos aprendidos.

Os alunos terão de registar as conclusões e as diferentes formas de resolução obtidas, para conhecerem outras formas de resolver a mesma tarefa.

Acompanhamento do professor na aula

Ao longo da resolução da tarefa o professor assumirá o papel de orientador e deve incentivar os alunos à participação, com o objetivo de ajudar na superação de dificuldades.

<u>Que dificuldades poderão surgir</u>?

Fazer a correspondência dos sabonetes gastos por dia aos sabonetes gastos nos seis dias

<u>Perante as dificuldades que surgirem como atuar</u>?

Incentivar os alunos para representarem o que leem no enunciado

Possíveis explorações dos alunos

Os alunos poderão, para a resolução da tarefa, utilizar desenhos/figuras, números ou ainda ser necessário representar as pastilhas por um objeto/material didático.

Materiais

- Papel com tarefa
- Lápis
- Borracha
- Quadro
- Giz

ROTEIRO DA TAREFA nº 12

Enunciado da tarefa

"Problema da rã"

Uma rã tentava saltar para fora de um poço. Cada vez que a rã saltava, subia quatro filas de tijolos, mas como estes estavam escorregadios, descia uma fila.

Quantos saltos tem a rã de dar se o poço tiver 12 filas de altura?

Nível de ensino

2º ano de escolaridade

Tópico matemático

Operações com números naturais

Subtópico matemático

Adição e multiplicação

Capacidades transversais

<u>Resolução de problemas</u>

- Desenvolver a capacidade de resolver problemas
- Analisar e discutir diferentes estratégias de resolução

<u>Raciocínio matemático</u>

- Reconhecer diferentes métodos de demonstração
- Raciocinar matematicamente

<u>Comunicação matemática</u>

- Desenvolver a capacidade de comunicação oral e escrita
- Desenvolver a capacidade de expressar ideias

Conhecimentos prévios dos alunos

Realizar contagens

Ler e representar números

Reconhecer situações que envolvem a adição

Compreender a adição no sentido de juntar

Aprendizagens visadas

Adicionar recorrendo a diferentes estratégias

Resolver problemas envolvendo adições e multiplicações

Reconhecer e utilizar diferentes formas de representação

Orientações para apresentação e exploração da tarefa (Duração total: 90 minutos)

Natureza da tarefa: Problema

Apresentação da tarefa pelo professor (15 minutos):

A tarefa será distribuída aos alunos, em papel, para que estes a resolvam após ter sido lida pelo professor.

Trabalho dos alunos (40 minutos):

Os alunos devem trabalhar na tarefa de forma autónoma, individualmente, e apresentarão, posteriormente, os resultados ao grande grupo (turma), para comparar as diferentes formas de resolução para superarem possíveis dificuldades e para uma reflexão sobre a resolução.

Discussão coletiva na turma dos resultados obtidos pelos grupos (20 minutos):

- O professor deve reler a tarefa.

- Os alunos apresentam as suas ideias/resultados

- O professor para incentivar e fomentar a comunicação matemática pode ir colocando questões.

Sistematização das principais ideias/aprendizagens (15 minutos):

Salientar os conceitos/ideias/procedimentos aprendidos, solicitando a participação dos alunos.

Os alunos terão de registar as diferentes formas, corretas, de resolução obtidas na sala, isto para terem conhecimento de outras formas de resolver a mesma tarefa além da sua.

Acompanhamento do professor na aula

Ao longo da resolução da tarefa o professor assumirá o papel de mediador e orientador e deverá supervisionar e incentivar os alunos à participação, com o objetivo de ajudar na superação de dificuldades.

Que dificuldades poderão surgir?

- Em reconhecer que os saltos fazem a rã subir e o escorregar a fazem descer.

Perante as dificuldades que surgirem como atuar?

- O professor deve incentivar os alunos a relerem o enunciado.

- O professor deverá incentivá-lo a representar o que lhe é dito no enunciado.

Possíveis explorações dos alunos

Os alunos poderão, para a resolução da tarefa, utilizar desenhos/figuras, números ou ainda ser necessário representar por meio de objetos/material didático.

Materiais

- Papel com tarefa

- Lápis

- Borracha

- Quadro

- Giz

ROTEIRO DA TAREFA nº 13

Enunciado da tarefa

"Os chocolates"

O João tem 42 chocolates que quer distribuir pelos seus 6 amigos, de modo a que cada amigo receba o mesmo número de chocolates.

Quantos chocolates recebe cada amigo?

Nível de ensino

2º ano de escolaridade

Tópico matemático

Operações com números naturais

Subtópico matemático

Adição e multiplicação

Capacidades transversais

<u>Resolução de problemas</u>

- Desenvolver a capacidade de resolver problemas em contextos matemáticos

<u>Raciocínio matemático</u>

- Raciocinar matematicamente, desenvolvendo e avaliando argumentos matemáticos relativos a resultados, processos e ideias matemáticas

<u>Comunicação matemática</u>

- Discutir as soluções encontradas e os processos utilizados
- Comunicar oralmente e por escrito
- Desenvolver a capacidade de expressar ideias

Conhecimentos prévios dos alunos

Realizar contagens

Ler e representar números

Compreender a adição no sentido de juntar

Aprendizagens visadas

Compreender a adição nos sentidos combinar e acrescentar

Resolver problemas envolvendo adições e multiplicações

Reconhecer e utilizar diferentes formas de representação

Orientações para apresentação e exploração da tarefa (Duração total: 90 minutos)

Natureza da tarefa: Problema

Apresentação da tarefa pelo professor (15 minutos):

O professor distribuirá a tarefa "a bicharada", em papel, para que os alunos a resolvam.

Trabalho dos alunos (40 minutos):

Os alunos devem trabalhar na tarefa de forma autónoma, individualmente, e apresentarão, posteriormente, os resultados ao grande grupo (turma), para comparar as diferentes formas de resolução para superarem possíveis dificuldades e para uma reflexão sobre a resolução.

Discussão coletiva na turma dos resultados obtidos pelos grupos (20 minutos):

- O professor deve reler a tarefa.

- Os alunos apresentam as suas ideias/resultados (incentivar a comunicação justificando as respostas).

- O professor para incentivar e fomentar a comunicação matemática pode ir colocando questões.

Sistematização das principais ideias/aprendizagens (15 minutos):

Salientar os conceitos/ideias/procedimentos aprendidos, solicitando a participação dos alunos.

Os alunos terão de registar as diferentes formas, corretas, de resolução obtidas na sala, isto para terem conhecimento de outras formas de resolver a mesma tarefa além da sua.

Acompanhamento do professor na aula

Ao longo da resolução da tarefa o professor assumirá o papel de orientador e deverá supervisionar e incentivar os alunos à participação, com o objetivo de ajudar na superação de dificuldades.

Que dificuldades poderão surgir?

- Poderão ter dificuldade em organizar os chocolates que cabem a cada amigo.

Perante as dificuldades que surgirem como atuar?

- O professor deve incentivar o aluno a reler o enunciado

- O professor deve orientar o aluno de forma a representar o que leu no enunciado.

Possíveis explorações dos alunos

Os alunos poderão, para a resolução da tarefa, utilizar desenhos/figuras, números ou ainda ser necessário representar por um objeto/material didático.

Materiais

- Papel com tarefa

- Lápis

- Borracha

- Quadro

- Giz

ROTEIRO DA TAREFA nº 14

Enunciado da tarefa

“O número de rodas”



Quantas rodas existem em 5 bicicletas, 3 triciclos e 2 carros?

Nível de ensino

2º ano de escolaridade

Tópico matemático

Operações com números naturais

Subtópico matemático

Adição e multiplicação

Capacidades transversais

<u>Resolução de problemas</u>

- Desenvolver a capacidade de resolver problemas
- Analisar e discutir diferentes estratégias de resolução

<u>Raciocínio matemático</u>

- Reconhecer diferentes métodos de demonstração
- Raciocinar matematicamente

<u>Comunicação matemática</u>

- Desenvolver a capacidade de comunicação oral e escrita
- Desenvolver a capacidade de expressar ideias

Conhecimentos prévios dos alunos

Realizar contagens

Ler e representar números

Estabelecer relações entre elementos de um conjunto

Reconhecer situações que envolvem a adição

Compreender a adição no sentido de juntar

Aprendizagens visadas

Compreender a multiplicação no sentido aditivo

Multiplicar recorrendo à adição repetida

Resolver problemas envolvendo a multiplicação

Reconhecer e utilizar diferentes formas de representação

Orientações para apresentação e exploração da tarefa (Duração total: 90 minutos)

Natureza da tarefa: Problema

Apresentação da tarefa pelo professor (15 minutos):

A tarefa será distribuída pelo professor, em papel, para os alunos resolverem.

Trabalho dos alunos (40 minutos):

Os alunos devem trabalhar na tarefa de forma autónoma, individualmente, e apresentarão, posteriormente, os resultados ao grande grupo (turma), para comparar as diferentes formas de resolução para superarem possíveis dificuldades e para uma reflexão sobre a resolução.

Discussão coletiva na turma dos resultados obtidos pelos grupos (20 minutos):

- O professor deve reler a tarefa.

- Os alunos apresentam as suas ideias

- O professor para incentivar e fomentar a comunicação matemática poderá colocar questões.

Sistematização das principais ideias/aprendizagens (15 minutos):

Salientar os conceitos/ideias/procedimentos aprendidos, solicitando a participação dos alunos.

Os alunos terão de registar as diferentes formas, corretas, de resolução obtidas na sala, isto para terem conhecimento de outras formas de resolver a mesma tarefa além da sua.

Acompanhamento do professor na aula

Ao longo da resolução da tarefa o professor assumirá o papel de mediador e orientador e deverá supervisionar e incentivar os alunos à participação, com o objetivo de ajudar na superação de dificuldades.

Que dificuldades poderão surgir?

- Os alunos poderão ter dificuldade na contagem das rodas, relacionar as rodas dos carros (4 rodas), as dos triciclos (3 rodas) e das bicicletas (2 rodas).

Perante as dificuldades que surgirem como atuar?

- O professor deve incentivar os alunos a relerem o enunciado

- O professor deve orientar os alunos, de forma a eles usarem representações.

Possíveis explorações dos alunos

Os alunos poderão, para a resolução da tarefa, utilizar desenhos/figuras, números ou ainda ser necessário representar por meio de objetos/material didático.

Materiais

- Papel com tarefa
- Lápis
- Borracha
- Quadro
- Giz

ANEXO 3

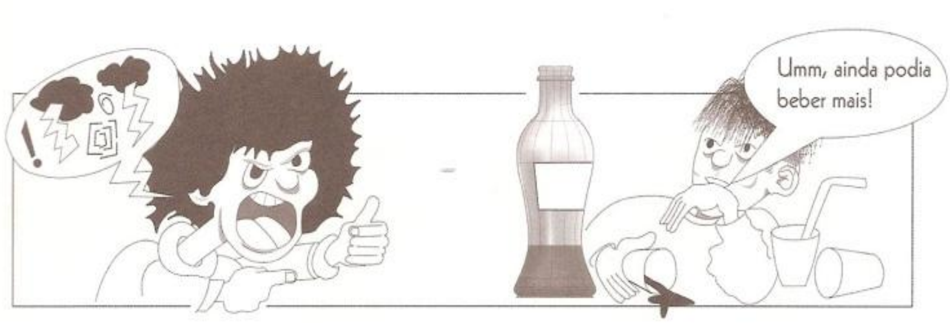
Folhas de resolução das tarefas propostas aos alunos

Escola Básica Stª Eugénia
2º Ano
Nome:____ Nº ____ Data: ___/___/___

TAREFA nº 1

Importante: Resolve o problema e explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

Enunciado da tarefa



"Copos de sumo"

O Arménio está zangado com o irmão Américo, porque este bebeu três copos de sumo da garrafa que a mãe comprou, que dava para encher cinco copos iguais.

3. Terá o Arménio motivo para ficar zangado? Explica como pensaste.

4. Para acabar com as zangas entre os irmãos, a mãe decidiu comprar mais uma garrafa. Agora temos sumo para quantos copos? Como os podem repartir entre eles, de modo a nenhum dos irmãos ficar zangado?

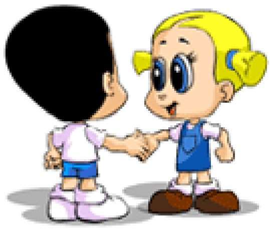
Escola Básica Stª Eugénia

2º Ano

Nome:____ Nº ____ Data: ___/___/___

TAREFA nº 2

Importante: Resolve o problema e explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.



Enunciado da tarefa

"Apertos de mão"

Dez amigos combinaram dar um passeio de patins. Encontraram-se à entrada do Parque da cidade e cumprimentaram-se. Cada amigo deu um aperto de mão a cada um dos seus amigos uma só vez.

Quantos apertos de mão deram?

Escola Básica Stª Eugénia

2º Ano

Nome:____ Nº ____ Data: ___/___/___

TAREFA nº 3

Importante: Resolve o problema e explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

Enunciado da tarefa

"Pastilhas Gargantox"

O Rúben constipou-se e está com uma forte dor de garganta. A mãe foi à farmácia comprar uma caixa de pastilhas Gargantox.

Quantas pastilhas tem a caixa sabendo que cada uma tem três placas como aquela que está ilustrada na figura ao lado?

Escola Básica Stª Eugénia

2º Ano

Nome:____ Nº ____ Data: ___/___/___

TAREFA nº 4

Importante: Resolve o problema e explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

Enunciado da tarefa

"Arrumando ovos"

3. Na mercearia da D. Maria, os ovos caseiros são vendidos em caixas como a da figura. Com 49 ovos quantas caixas se enchem?

E com 77 ovos?

4. A D. Maria vai comprar caixas retangulares de 8 ovos. Será que ela consegue colocar todos os 56 ovos em caixas, de tal forma que fiquem todas cheias?

Escola Básica Stª Eugénia

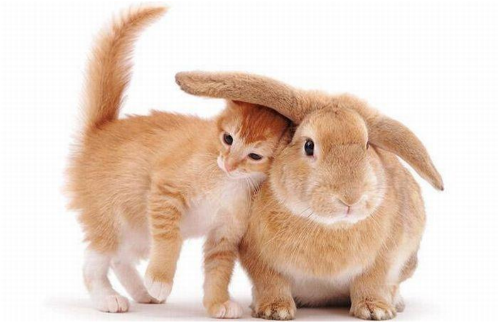
2º Ano

Nome:____ Nº ____ Data: ___/___/___

TAREFA nº 5

Importante: Resolve o problema e explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

Enunciado da tarefa



"A bicharada"

A Rafaela tem três gatinhos e dois coelhinhos de estimação. Sempre que vai passear, gosta de levar consigo um dos seus gatinhos e um dos seus coelhinhos.

Com quantos pares diferentes pode a Rafaela ir passear?

Escola Básica Stª Eugénia

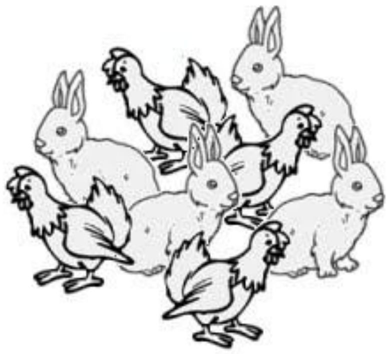
2º Ano

Nome:____ Nº ____ Data: ___/___/___

TAREFA nº 6

Importante: Resolve o problema e explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

Enunciado da tarefa



"Galinhas e coelhos"

Na quinta da avó do Zacarias há galinhas e coelhos. Contando as patas de todos os animais (galinhas e coelhos) verificou-se que no total eram 48 patas. Sabendo que são 17 animais, quantos coelhos e galinhas existem?

Escola Básica Stª Eugénia

2º Ano

Nome:____ Nº ____ Data: ___/___/___

TAREFA nº 7

Importante: Resolve o problema e explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

Enunciado da tarefa

"A festa da Carolina"

A Carolina festeja o seu aniversário na próxima semana. Como a Carolina pretende dar 4 balões a cada um dos seus amigos, e não ficar com nenhum, a mãe comprou 96 balões. Quantos amigos virão à festa?

Agora que já sabes quantos amigos a Carolina convidou para a sua festa, ajuda-a na preparação dos aperitivos e na organização das mesas.

1. Quantos pedaços de queijo vão precisar para preparar os aperitivos para a festa?

2. E de quantas salsichas?

Escola Básica Stª Eugénia

2º Ano

Nome:____ Nº ____ Data: ___/___/___

TAREFA nº 8

Importante: Resolve o problema e explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

Enunciado da tarefa

"Comprimidos"

O Manuel foi ao médico que lhe receitou duas caixas de Melhorex com 24 comprimidos cada uma. Devia tomar um comprimido de 6 em 6 horas até acabar as duas caixas.

A Ana Carolina começou a tomar os comprimidos, de embalagens iguais, há duas semanas, só que os toma de 8 em 8 horas.

1. Quem toma mais comprimidos por dia?

2. Quem acaba primeiro o tratamento?

Escola Básica Stª Eugénia

2º Ano

Nome:____ Nº ____ Data: ___/___/___

TAREFA nº 9

Importante: Resolve o problema e explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

Enunciado da tarefa

"Colares"

Para o dia da mãe combinámos fazer um colar com bolas. Cada colar tinha 2 bolas pretas, 3 bolas vermelhas e 4 bolas brancas.

Quantas bolas de cada cor se terão de comprar para fazer 6 colares iguais?

Escola Básica Stª Eugénia

2º Ano

Nome:____ Nº ____ Data: ___/___/___

TAREFA nº 10

Importante: Resolve o problema e explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

Enunciado da tarefa

"As meias das joaninhas"

O João é um colecionador. Ele tem uma caixa com 5 joaninhas. Cada joaninha tem 6 patas. Se o João tivesse de comprar meias no Inverno para as suas joaninhas, quantas meias compraria?

Escola Básica Stª Eugénia

2º Ano

Nome:____ Nº ____ Data: ___/___/___

TAREFA nº 11

Importante: Resolve o problema e explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

Enunciado da tarefa

"A higiene do elefante"

Um elefante gasta dois sabonetes por dia na sua higiene. Quantos sabonetes gastará em 6 dias?

Escola Básica Stª Eugénia

2º Ano

Nome:____ Nº ____ Data: ___/___/___

TAREFA nº 12

Importante: Resolve o problema e explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

Enunciado da tarefa

“Problema da rã”

Uma rã tentava saltar para fora de um poço. Cada vez que a rã saltava, subia quatro filas de tijolos, mas como estes estavam escorregadios, descia uma fila.

Quantos saltos tem a rã de dar se o poço tiver 12 filas de altura?

Escola Básica Stª Eugénia 2º Ano Nome:____ Nº ____ Data: ___/___/___

TAREFA nº 13

Importante: Resolve o problema e explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

Enunciado da tarefa

“Os chocolates”

O João tem 42 chocolates que quer distribuir pelos seus 6 amigos, de modo a que cada amigo receba o mesmo número de chocolates.

Quantos chocolates recebe cada amigo?

Escola Básica Stª Eugénia

2º Ano

Nome:____ Nº ____ Data: ___/___/___

TAREFA nº 14

Importante: Resolve o problema e explica como pensaste. Podes utilizar desenhos, palavras, esquemas ou números.

Enunciado da tarefa

“O número de rodas”

Quantas rodas existem em 5 bicicletas, 3 triciclos e 2 carros?