

Um Modelo Matemático de Gestão de Recursos Humanos

JORGE SANTOS

Departamento de Matemática,
Escola Superior de Tecnologia de Viseu

1. Introdução

O material que aqui publicamos foi resultado de várias sessões que fizemos no âmbito do Ano Mundial da Matemática em algumas Escolas do Ensino Secundário. Estas sessões tiveram por objectivo mostrar aos alunos uma aplicação da Matemática, tendo em atenção os conhecimentos que os alunos tinham nesse grau de ensino. Deste modo, tentámos arranjar um problema simples que contemplasse algumas situações reais e de dimensão reduzida. O modelo matemático que foi tratado usava apenas equações e inequações e tinha por objectivo a minimização de custos com a contratação de pessoal para serem afectados a um conjunto de horários num hipermercado. Na formulação matemática teve-se em conta algumas normas laborais, assim como o número mínimo de pessoal que devia estar ao serviço em cada período de tempo. Muitos problemas deste tipo que envolvem a formação de horários tem sido tratados quer a nível nacional quer a nível mundial. A nível nacional é de referir alguns trabalhos na recolha de resíduos sólidos municipais [3,4], elaboração de horários escolares [1] e escalonamento de serviços de pessoal tripulante em empresas de transportes de passageiros [2,3,5].

2. Definição do Problema

Uma empresa da área da distribuição vai abrir um novo hipermercado numa grande cidade e neste momento pretende fazer um estudo do número de funcionários necessários para as caixas. Uma análise preliminar do comportamento dos

consumidores, relativo ao horário em que efectuam as compras, prevê que o número mínimo de caixas em funcionamento para um bom atendimento ao público é dado pela seguinte tabela:

Horário	Número mínimo de caixas em funcionamento
9h - 10h	10
10h - 11h	14
11h - 12h	14
12h - 13h	20
13h - 14h	24
14h - 15h	20
15h - 16h	18
16h - 17h	26
17h - 18h	32
18h - 19h	36
19h - 20h	30
20h - 21h	20
21h - 22h	10

A empresa pode contratar funcionários em regime de tempo integral ou em regime de tempo parcial. Um funcionário em regime de tempo integral trabalha oito horas por dia distribuídas em duas partes com um intervalo de uma ou duas horas. Uma dessas horas de intervalo servirá para o funcionário tomar uma refeição e tem de pertencer a um dos períodos das 11 horas às 15 horas ou das 19 às 22. Além disso cada funcionário não pode trabalhar mais de cinco horas consecutivas.

Devido às necessidades da empresa, só são admitidos funcionários neste regime de tempo parcial para trabalharem depois das 16 horas com um horário de três horas consecutivas. A empresa tem por objectivo a minimização dos custos com a mão-de-obra, sabendo que um funcionário em regime de tempo integral custa para a empresa o dobro de um funcionário em regime de tempo parcial.

3. Formulação

O objectivo do problema consiste em determinar a afectação dos horários aos funcionários com um custo mínimo. No sentido de formular o problema começamos por analisar os horários que um funcionário em tempo integral pode fazer. Como este faz oito horas por dia e não pode fazer mais de cinco horas seguidas, então o seu horário é dividido em dois turnos com as seguintes combinações possíveis

- 3 horas na primeira parte + 5 horas na segunda
- 4 horas na primeira parte + 4 horas na segunda
- 5 horas na primeira parte + 3 horas na segunda

Deste modo os horários possíveis para os funcionários que têm apenas uma hora de intervalo entre os dois turnos são dados pela seguinte tabela:

Horário	1ª Parte	2ª Parte	Tipo
1	09h - 12h	13h - 18h	
2	10h - 13h	14h - 19h	3h
3	11h - 14h	15h - 20h	+
4	12h - 15h	16h - 21h	5h
##	13h - 16h	17h - 22h	
5	09h - 13h	14h - 18h	
6	10h - 14h	15h - 19h	4h
##	11h - 15h	16h - 20h	+
7	12h - 16h	17h - 21h	4h
##	13h - 17h	18h - 22h	
8	09h - 14h	15h - 18h	
##	10h - 15h	16h - 19h	5h
##	11h - 16h	17h - 20h	+
9	12h - 17h	18h - 21h	3h
##	13h - 18h	19h - 22h	

É de notar que os horários riscados não são considerados porque não contemplam uma hora de intervalo para uma refeição, no período das 11 horas às 15 horas ou no período das 19 às 22. Os horários possíveis para os funcionários que têm duas horas de intervalo entre os dois turnos são dados pela seguinte tabela:

Horário	1ª Parte	2ª Parte	Tipo
10	09h - 12h	14h - 19h	3h
11	10h - 13h	15h - 20h	+
12	11h - 14h	16h - 21h	5h
##	12h - 15h	17h - 22h	
13	09h - 13h	15h - 19h	4h
14	10h - 14h	16h - 20h	+
##	11h - 15h	17h - 21h	4h
##	12h - 16h	18h - 22h	
15	09h - 14h	16h - 19h	5h
##	10h - 15h	17h - 20h	+
##	11h - 16h	18h - 21h	3h
##	12h - 17h	19h - 22h	

Por fim, os horários possíveis para os funcionários que trabalham em regime de tempo parcial são dados pela tabela seguinte

Horário	1ª Parte
16	16h - 19h
17	17h - 20h
18	18h - 21h
19	19h - 22h

Como conclusão deste estudo, existem 19 horários possíveis. Na formulação do problema representemos por x_j ($j=1,2,\dots,19$) o número de funcionários a contratar para

efectuar o horário j . As limitações ao número mínimo de caixas em funcionamento em cada hora conduz às seguintes restrições:

$$09h - 10h \rightarrow x_1 + x_5 + x_8 + x_{10} + x_{13} + x_{15} \geq 10$$

$$10h - 11h \rightarrow x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_8 + x_{10} + x_{11} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \geq 14$$

$$11h - 12h \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_8 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \geq 14$$

$$12h - 13h \rightarrow x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \geq 20$$

$$13h - 14h \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{12} + x_{14} + x_{15} \geq 24$$

$$14h - 15h \rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{10} \geq 20$$

$$15h - 16h \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{13} \geq 18$$

$$16h - 17h \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} \geq 26$$

$$17h - 18h \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} \geq 32$$

$$18h - 19h \rightarrow x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} \geq 36$$

$$19h - 20h \rightarrow x_3 + x_4 + x_7 + x_9 + x_{11} + x_{12} + x_{14} + x_{17} + x_{18} + x_{19} \geq 30$$

$$20h - 21h \rightarrow x_4 + x_7 + x_9 + x_{12} + x_{18} + x_{19} \geq 20$$

$$21h - 22h \rightarrow x_{19} \geq 10$$

Além disso tem-se

$$x_j \geq 0, x_j \text{ inteiros} \quad (j=1,2,\dots,19)$$

Em relação à função objectivo, pretende-se minimizar o custo total com a contratação de mão-de-obra, isto é

$$\text{minimize } z = 2 \sum_{j=1}^{15} x_j + \sum_{j=16}^{19} x_j$$

Deste modo obtém-se o seguinte programa inteiro

$$\text{minimize } z = 2 \sum_{j=1}^{15} x_j + \sum_{j=16}^{19} x_j$$

sujeito a

$$x_1 + x_5 + x_8 + x_{10} + x_{13} + x_{15} \geq 10$$

$$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_8 + x_{10} + x_{11} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \geq 14$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_8 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \geq 14$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \geq 20$$

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{12} + x_{14} + x_{15} \geq 24$$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{10} \geq 20$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{13} \geq 18$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} +$$

$$+ x_{16} \geq 26$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} +$$

$$+ x_{16} + x_{17} \geq 32$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} +$$

$$+ x_{17} + x_{18} \geq 36$$

$$x_3 + x_4 + x_7 + x_9 + x_{11} + x_{12} + x_{14} + x_{17} + x_{18} + x_{19} \geq 30$$

$$x_4 + x_7 + x_9 + x_{12} + x_{18} + x_{19} \geq 20$$

$$x_{19} \geq 10$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{e } x_j \text{ inteiros } (j=1,2,\dots,19)$$

4. Resolução do problema

Para resolvermos programa inteiro da secção anterior, escrevemo-lo no formato lp no ficheiro “ex1_8.lp”

Minimize z: $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 2x_9 + 2x_{10} + 2x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + 2x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19}$

Subject to

Das09_10: $x_1 + x_5 + x_8 + x_{10} + x_{13} + x_{15} \geq 10$

Das10_11: $x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_8 + x_{10} + x_{11} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \geq 14$

Das11_12: $x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_8 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \geq 14$

Das12_13: $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \geq 20$

Das13_14: $x_1 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{12} + x_{14} + x_{15} \geq 24$

Das14_15: $x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{10} \geq 20$

Das15_16: $x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{13} \geq 18$

Das16_17: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} \geq 26$

Das17_18: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} \geq 32$

Das18_19: $x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} \geq 36$

Das19_20: $x_3 + x_4 + x_7 + x_9 + x_{11} + x_{12} + x_{14} + x_{17} + x_{18} + x_{19} \geq 30$

Das20_21: $x_4 + x_7 + x_9 + x_{12} + x_{18} + x_{19} \geq 20$

Das21_22: $x_{19} \geq 10$

Bounds

$0 \leq x_1$

$0 \leq x_2$

$0 \leq x_3$

$0 \leq x_4$

$0 \leq x_5$

$0 \leq x_6$

$0 \leq x_7$

$0 \leq x_8$

$0 \leq x_9$

$0 \leq x_{10}$

$0 \leq x_{11}$

$0 \leq x_{12}$

$0 \leq x_{13}$

$0 \leq x_{14}$

```
0 <= x15  
0 <= x16  
0 <= x17  
0 <= x18  
0 <= x19
```

Integers

```
x1  
x2  
x3  
x4  
x5  
x6  
x7  
x8  
x9  
x10  
x11  
x12  
x13  
x14  
x15  
x16  
x17  
x18  
x19
```

End

De seguida o programa inteiro foi resolvido usando o software CPLEX no sistema operativo UNIX

C:\ CPLEX

Welcome to CPLEX Linear Optimizer 4.0.9
with Mixed Integer & Barrier Solvers
Copyright (c) CPLEX Optimization, Inc., 1989-1995
CPLEX is a registered trademark of CPLEX Optimization, Inc.

Type 'help' for a list of available commands.
Type 'help' followed by a command name for more
information on commands.

CPLEX> read ex1_8.lp

Problem 'ex1_8.lp' read.
Read time = 0.00 sec.

CPLEX> optimize

MIP Presolve eliminated 1 rows and 0 columns.
Reduced MIP has 12 rows, 19 columns, and 131 nonzeros.
Presolve time = 0.00 sec.

Integer optimal solution: Objective = 7.5000000000e+01
Solution time = 0.00 sec. Iterations = 13 Nodes = 0

CPLEX> display solution -

Variable Name	Solution Value
x4	2.000000
x7	9.000000
x9	4.000000
x10	5.000000
x14	4.000000
x15	5.000000
x16	6.000000
x17	1.000000
x19	10.000000

All other variables in the range 1-19 are zero.

CPLEX> quit

A solução obtida pelo CPLEX pode ser representada do seguinte modo

9h – 10h				■		■					10	10
10h – 11h				■		■					14	14
11h – 12h				■		■					14	14
12h – 13h	■	■	■		■	■					<u>24</u>	20
13h – 14h	■	■	■		■	■					24	24
14h – 15h	■	■	■		■						20	20
15h – 16h		■			■						18	18
16h – 17h	■	■			■	■	■	■	■		26	26
17h – 18h	■	■			■	■	■	■	■	■	32	32
18h – 19h	■	■	■	■	■	■	■	■	■		36	36
19h – 20h	■	■	■		■				■	■	30	30
20h – 21h	■	■	■						■	■	<u>25</u>	20
21h – 22h									■	■	10	10
Nº de horários	2	9	4	5	4	5	6	1	10	Nº de caixas a funcionar	Nº mínimo de caixas	

5. Bibliografia

- [1] P. Carrasco, M. Vaz Pato, *Uma heurística neuronal para a elaboração de horários escolares*, Investigação Operacional, volume 18 nº2 (Dezembro de 1998), 101-119
- [2] J. Romão Eusébio, Lélío Amado, *Modelos de planeamento / gestão para optimização das necessidades de viaturas e tripulações numa rede de transportes*, Investigação Operacional, volume 7 nº 1 (Junho de 1987), 81-90
- [3] C. Hengeller Antunes, L. Valadares Tavares, *Casos de Aplicação da Investigação Operacional*, Editora McGraw Hill de Portugal, Lda (2000)
- [4] A. C. Matos, R. C. Oliveira, *Optimização de um sistema de recolha de resíduos sólidos municipais*, Investigação Operacional, volume 19 nº2 (Dezembro de 1999), 139-158
- [5] L. C. Santos, I. Themido, *Sequenciamento de serviços de pessoal tripulante – uma abordagem baseada num conjunto de heurísticas*, Investigação Operacional, volume 15 nº2 (Dezembro de 1995), 123-142