

TAREFAS MATEMÁTICAS NO ENSINO DA ÁLGEBRA

Cátia Rodrigues

Agrupamento de Escolas de São João da Pesqueira

catiamat@gmail.com

Luís Menezes

Escola Superior de Educação de Viseu e CI&DETS

menezes@esev.ipv.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo. As tarefas matemáticas desempenham um papel importante na aprendizagem dos alunos, ao contribuírem para o desenvolvimento do seu pensamento matemático. Nesta comunicação procuramos compreender de que forma o conhecimento mobilizado por uma professora na seleção e exploração de tarefas contribui para essa aprendizagem dos alunos, nomeadamente ao nível da justificação e generalização de raciocínios algébricos. A metodologia envolve a observação de aulas e de sessões de trabalho colaborativo com a professora, que são complementadas pela elaboração de notas de campo. Os resultados mostram que a professora mobiliza diversos aspetos do seu conhecimento didático na seleção das tarefas e na forma de as explorar em sala de aula, tanto no momento de planificação como na ação em aula. Em particular, na aula, acompanha os alunos e favorece os momentos de apresentação e discussão de ideias matemáticas, desafiando-os a justificarem e generalizarem ideias, aspetos importante do conhecimento da prática letiva.

Palavras-chave: Tarefas matemáticas; Conhecimento didático; Aprendizagem; Álgebra.

Introdução

As tarefas são centrais na aprendizagem da Matemática, na medida em que podem oferecer oportunidade aos alunos de pensarem sobre determinados conceitos e procedimentos, explorarem diversas estratégias de resolução, relacionarem ideias e justificarem raciocínios (NCTM, 1991; Chapman, 2013). Os ambientes de aprendizagem em que os alunos trabalham com tarefas matemáticas, de modo autónomo, apresentam e discutem as suas estratégias de resolução, em grande grupo, são cada vez mais comuns no nosso país, em consequência da introdução do Programa de Matemática de 2007.

O professor, quando propõe uma tarefa aos seus alunos, tem como objetivo levá-los a envolverem-se na sua resolução e a partir dela promover aprendizagens no âmbito dos tópicos matemáticos e das capacidades transversais. Assim, é fundamental uma escolha criteriosa das tarefas a apresentar aos alunos e uma exploração eficaz em sala de aula, que inclui a definição do modo de trabalho dos alunos, os materiais a disponibilizar e a criação

de oportunidades de apresentação, discussão e sistematização de ideias (Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2013). As tarefas são, assim, ferramentas mediadoras do ensino e aprendizagem da Matemática (Watson et al., 2013). O conhecimento do professor é determinante na escolha e forma de acompanhamento da tarefa em sala de aula, já que pode propor uma tarefa muito interessante aos seus alunos, mas se esta não for bem explorada em sala de aula, as suas potencialidades podem ser diminuídas e traduzir-se em experiências matemáticas pouco ricas para os alunos.

Nesta comunicação apresentamos três tarefas matemáticas, relacionadas com o tema da Álgebra, realizadas numa turma de 7.º ano, procurando compreender de que forma o conhecimento mobilizado pela professora na forma como seleciona e explora as tarefas contribui para aprendizagem dos seus alunos, nomeadamente ao nível da justificação e generalização de raciocínios algébricos. Este estudo faz parte de um trabalho de investigação mais amplo que procura compreender como é que um conjunto de três professores de Matemática do 3.º ciclo mobiliza e desenvolve o seu conhecimento didático na preparação, condução e reflexão de discussões matemáticas no ensino da Álgebra.

Tarefas matemáticas e conhecimento didático do professor

Na aprendizagem da Matemática, em que os alunos têm um papel fundamental na construção do seu conhecimento, as tarefas matemáticas são um elemento central, já que podem favorecer a atividade do aluno e servir de base à promoção de momentos de apresentação e discussão de ideias matemáticas. O ensino que promove esta forma de aprendizagem rompe com a visão tradicional caracterizada pela apresentação da matéria pelo professor seguida da resolução de exercícios pelos alunos, habitualmente de um modo individual, e, posteriormente, por correção no quadro. Atualmente, no nosso país, são cada vez mais os professores que propõem tarefas aos seus alunos para resolverem em pares ou em pequenos grupos. Durante o trabalho autónomo dos alunos, o professor vai observando os diversos grupos, apoiando, esclarecendo dúvidas e lançando questões que levem os alunos a estabelecerem conexões entre diversas ideias. De seguida, o professor incentiva os alunos a apresentarem os seus trabalhos, a justificarem as suas ideias e a argumentarem sobre as dos colegas bem como a sistematizarem as ideias em jogo (Oliveira, et al., 2013; Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008).

Em linha com Watson et al. (2013), que entendem as tarefas matemáticas como um conjunto de “coisas a fazer” pelos alunos, neste artigo referimos tarefas matemáticas como tudo que é proposto pelo professor e que tem como objetivo desencadear uma certa atividade por parte do aluno. A atividade do aluno diz respeito ao que ele faz num certo contexto, incluindo, portanto, a realização de diversas ações. Assim, a tarefa é precisamente o objetivo da atividade (Ponte & Serrazina, 2000).

As tarefas matemáticas podem ser analisadas tendo em conta diversos aspetos, nomeadamente o grau de dificuldade (elevado ou reduzido), a natureza (aberta ou fechada) (Ponte, 2005) e o nível cognitivo (baixo ou alto) (Stein & Smith, 1998). Conjugando o grau de dificuldade e a natureza obtêm-se quatro tipos principais de tarefas: exercícios (tarefas fechadas de dificuldade reduzida); problemas (tarefas fechadas de dificuldade elevada); explorações (tarefas abertas de dificuldade reduzida) e investigações (tarefas abertas de

dificuldade elevada) (Ponte, 2005). Quanto ao nível cognitivo, as tarefas de baixo nível podem ser de memorização e de procedimentos sem conexão, e as tarefas de alto nível podem ser procedimentos com conexão e fazer matemática. Qualquer tipo de tarefa tem o seu lugar nas aulas de Matemática, já que representam oportunidades diferentes para os alunos pensarem. As tarefas devem ser doseadas pelo professor em função dos objetivos que procura cumprir. Naturalmente, um exercício oferece um tipo de oportunidade diferente de uma investigação, por exemplo.

O professor desempenha um papel importante na escolha das tarefas que vai apresentar aos seus alunos, na medida em que estas devem ser suficientemente interessantes, de forma a envolver os alunos na sua resolução, e devem ser matematicamente válidas, de modo a apelarem à inteligência do aluno, ao desenvolvimento do raciocínio, da comunicação matemática e da resolução de problemas (NCTM, 1991). O professor deve também ter em atenção que tarefas de natureza aberta podem levar os alunos a perderem-se no momento de trabalho autónomo, tarefas muito estruturadas não permitem explorar diversas estratégias de resolução, tarefas de grau de dificuldade reduzido podem levar os alunos a não investirem muito no seu trabalho e tarefas de grau de dificuldade muito elevado podem causar desmotivação. Nesse trabalho de seleção das tarefas a apresentar aos alunos, o professor deve ainda procurar conjugar contextos puramente matemáticos com contextos não matemáticos.

Durante a fase de seleção, Stein e Smith (1998) referem que as tarefas podem passar por três fases: como surgem nos materiais curriculares, como o professor as apresenta aos seus alunos e como são trabalhadas pelos alunos. Todas essas fases influenciam a aprendizagem do aluno, em particular a última. As autoras alertam para uma eventual alteração da natureza da tarefa na passagem de uma fase para as outras.

A forma como o professor planifica e explora as tarefas em sala de aula é, também, decisivo para a aprendizagem do aluno. Assim, é importante que o professor escolha a forma de trabalho dos alunos adequada à tarefa proposta e aos objetivos que pretende atingir; estipule o tempo necessário à resolução da tarefa; esteja atento à fase de trabalho autónomo; e promova uma discussão produtiva em torno da tarefa proposta. Se o professor verificar que os alunos têm dificuldade em iniciar o seu trabalho autónomo, devido à fraca compreensão do enunciado da tarefa ou mesmo à sua complexidade, pode começar por analisar com eles o contexto da situação fazendo, por exemplo, perguntas de interpretação, discutir as ideias matemáticas mais relevantes, desenvolver uma linguagem partilhada para descrever as principais características da situação apresentada, levando os alunos a explicarem determinados termos mas mantendo sempre o nível cognitivo da tarefa (Jackson, Shahan, Gibbons, & Cobb, 2012; Oliveira, et al., 2013). Para manter as tarefas num nível cognitivo elevado, o professor deve, segundo Stein e Smith (1998), dar tempo suficiente aos alunos para as resolverem; apoiar o seu pensamento pedindo justificações, incentivando-os a fazerem conexões; e ter em conta os conhecimentos prévios dos alunos.

Todo o trabalho do professor de seleção e exploração de uma tarefa matemática é apoiado pelo seu conhecimento didático (Ponte, 2011), onde o conhecimento da prática letiva é central, mas que influencia e é influenciado pelo conhecimento do currículo, da Matemática e dos alunos e da aprendizagem. O conhecimento da prática letiva inclui aspetos da gestão

curricular como a planificação, as tarefas, o modo de trabalho dos alunos, a regulação da comunicação e a avaliação das aprendizagens. O conhecimento da Matemática é entendido como o conhecimento que o professor tem da Matemática enquanto disciplina escolar, incluindo o conhecimento de representações, de conexões, de conceitos e procedimentos. O conhecimento do currículo e dos alunos e da aprendizagem são também importantes na seleção e exploração das tarefas matemáticas, já que é fundamental conhecer bem os documentos curriculares, assim como os seus alunos e as suas formas de pensar para promover uma aprendizagem significativa.

O conhecimento didático do professor influencia todo o processo de seleção e exploração de uma tarefa, na medida em que o professor quando seleciona uma tarefa procura conjugar diversos aspetos, como os objetivos matemáticos que pretende atingir com a mesma, com as experiências que procura propor aos seus alunos e com a natureza da tarefa que melhor se ajusta a esses fins. Depois de selecionada a tarefa, o professor resolve a tarefa e antecipa possíveis respostas dos alunos, pensa na forma de trabalho dos alunos mais adequada à tarefa e no modo como vai organizar a aula, isto é, no tempo que vai dar aos alunos para trabalho autónomo, e no momento de apresentação, discussão e sistematização das ideias dos alunos. Nesse trabalho prévio de resolução e antecipação de estratégias é fundamental o conhecimento que o professor tem da Matemática. Na forma como estrutura a aula, o conhecimento dos alunos e da sua forma de aprendizagem é também importante, articulado com as outras vertentes do conhecimento.

Metodologia

O estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), na medida em que procuramos compreender de que forma as tarefas selecionadas pela professora e a forma com as explorou com os seus alunos contribuíram para a aprendizagem de ideias algébricas, nomeadamente ao nível da justificação e generalização. A modalidade é o estudo de caso de uma professora, sendo o instrumento de recolha de dados privilegiado a observação participante de aulas e sessões de trabalho colaborativo, apoiada em notas de campo (Bogdan & Biklen, 1994). A análise de dados é baseada na análise de conteúdo, sustentada no quadro teórico de Ponte (2005, 2011) e Stein e Smith (1998).

O estudo apresentado nesta comunicação faz parte de um trabalho de investigação mais amplo em que o dispositivo do estudo envolveu um trabalho colaborativo entre a primeira autora e três professores, que lecionavam os 7.º e 8.º anos de escolaridade e manifestaram disponibilidade para participar no estudo. Essa forma de trabalho revelou-se adequada, na medida em que favoreceu a compreensão das realidades dos professores (Boavida & Ponte, 2002), nesse caso a preparação e condução de discussões matemáticas coletivas para promover a aprendizagem dos alunos. Para a constituição do grupo colaborativo, foi contactado o coordenador do departamento de Matemática do agrupamento de escolas onde decorreu o estudo. Depois de ter sido informado da intenção de realizar um trabalho colaborativo com 3 professores, relacionado com a temática das discussões matemáticas, o coordenador considerou que seria pertinente apresentar a proposta aos professores enquadrada num modelo de ação de formação que envolvesse todos os professores do departamento. Respondendo afirmativamente ao desafio lançado, a investigadora propôs

uma ação de formação relacionada com a temática das discussões matemáticas, organizada em 10 sessões de trabalho presencial (com a duração aproximada de 3 horas), com o objetivo de criar dinâmicas de trabalho colaborativo e desenvolver práticas de discussão matemática. A ação de formação decorreu com a participação de 15 professores (Rodrigues, Menezes & Ponte, 2014). O trabalho realizado nas diversas sessões de formação envolveu, a partir das experiências dos professores, a reflexão sobre textos e episódios de sala de aula relacionados com as discussões matemáticas e com o tema da Álgebra. Contemplou, ainda, a preparação de tarefas matemáticas nesse tema para exploração em sala de aula.

As tarefas selecionadas para esta comunicação emergem do trabalho realizado nas sessões de trabalho colaborativo a partir de propostas da investigadora e tiveram em atenção os seguintes aspetos: adequação ao currículo, promoção do envolvimento dos alunos, possibilidade de recurso a diversas representações para o conceito e distintas estratégias de resolução.

Nesta comunicação analisamos três aulas de uma professora, com ênfase no momento da discussão. Os dados são apoiados nas notas de campo tiradas nas diversas sessões de trabalho colaborativo, ao nível da preparação das tarefas, e a nas aulas da professora, depois de feitas as respetivas transcrições. A professora tem 22 anos de serviço, 21 dos quais na escola onde leciona atualmente. Apesar de a sua escola fazer parte de um grande agrupamento, tem por hábito trabalhar em conjunto com os seus colegas de departamento, sobretudo os que lecionam os mesmos anos de escolaridade, para elaborar planificações (geral e pormenorizada) e preparar materiais como fichas de trabalho, tarefas e testes de avaliação. A professora procura refletir com os seus colegas sobre experiências de sala de aula, nomeadamente, ao nível da exploração de tarefas com os seus alunos.

Resultados

Nesta secção apresentamos três tarefas matemáticas relacionadas com o tema da Álgebra e refletimos sobre o conhecimento didático mobilizado pela professora na escolha das tarefas e na forma como as explora com os seus alunos, de forma a contribuir para a sua aprendizagem. As tarefas são resolvidas pela professora nas sessões de trabalho colaborativo, em conjunto com os seus colegas. Nesse trabalho de preparação, a professora enquadra curricularmente as tarefas, antecipa estratégias de resolução e dificuldades que os alunos podem sentir, pensa em possíveis formas de os ajudar a ultrapassar essas dificuldades e define o modo de trabalho mais adequado a cada uma das tarefas.

Tarefa 1: “Palitos”

A tarefa “*Palitos*” (Figura 1), adaptada de Rivera e Becker (2008), é usada pela professora como apresentada pela investigadora, primeira autora deste texto, na sessão de trabalho colaborativo. Depois de analisar e resolver a tarefa, a professora considera que ela se ajusta bem às características dos seus alunos, já que surge numa linguagem compreensível, é de um grau de dificuldade não muito elevado e se enquadra bem no trabalho que faz em sala de aula com os alunos, e é suficientemente interessante para os envolver na sua resolução, sendo relacionada com o tópico das Sequências e Sucessões. Esta tarefa surge num momento em que os alunos já tinham explorado outras tarefas relacionados com esse tópico. Assim, a

professora recorre ao conhecimento que tem dos seus alunos e da aprendizagem, da Matemática e do currículo para selecionar a tarefa a apresentar aos seus alunos, de um conjunto de tarefas propostas pela investigadora para o tópico das Sequências e Sucessões.

Tarefa: Palitos

Considera a seguinte sequência de figuras construídas com palitos que continua da forma que a imagem sugere:



1. Quantos palitos terá a 5.^a figura? E a 15.^a?
2. Será possível construir uma figura desta sequência com 76 palitos? Explica como pensaste.
3. Escreve uma regra que te permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explica como a obtiveste.
4. A Aurora, que também resolveu esta tarefa, diz que o número de palitos de qualquer figura, T , desta sequência pode ser obtido a partir da seguinte regra:

$$T = 4 \times n - (n - 1)$$

Explica como poderá ter pensado.

Como se relaciona esta regra com a que escreveste na questão número 3?

Figura 15: Tarefa Palitos.

Esta investigação, apresentada num contexto não puramente matemático, tem a particularidade de proporcionar aos alunos oportunidades diferentes de resolução, já que favorece a escrita de diversas expressões para a mesma situação, facto potenciado pelo apoio visual que oferece, muito importante no trabalho com sequências. A primeira e a segunda questão, com um grau de dificuldade menor que as restantes, permitem aos alunos determinar termos (próximo e distante) da sequência de figuras dada e verificar se determinado elemento é ou não termo da sequência. A terceira questão desafia os alunos a escreverem o termo geral e a justificarem a sua escrita, podendo surgir diferentes expressões, dependendo da forma como cada aluno “olha” para a figura. A última questão incentiva os alunos a interpretarem uma possível expressão para o termo geral da sequência dada, relacionando com a expressão que encontraram para a definição do termo geral da sequência. Esta tarefa favorece, também, o uso de diversas estratégias de resolução, nomeadamente a estratégia de tentativa e erro e outras estratégias que recorrem a procedimentos algébricos. Os alunos trabalham nesta tarefa em grupos de quatro elementos.

Apresentamos um pequeno segmento do momento de discussão em grande grupo, onde os alunos tentam atribuir significado à expressão que surge na questão 4, explicando o seu raciocínio, e onde a professora desenvolve um conjunto de ações que têm como objetivo levar os alunos a desenvolverem uma compreensão mais aprofundada das ideias partilhadas.

- Vera:** Podia ser. O 4 vezes n é como se fosse o 3 vezes n e depois tiramos 1. É como se fosse 3.
- P:** Ela está a tentar um paralelo disto. Isto é parecido com isto. Mas nós ali não tiramos 1.
- Aluna:** Somamos. Exato, porque aquilo é 4.
- P:** Mas ali tiramos mais coisas.
- Aluna:** Tiramos o número da figura menos 1.
- P:** Tiramos o número da figura menos 1. Sim. É o que tenta dizer a Vera, que tira o número da figura menos 1 aos múltiplos de 4, não é? (...) Ó pessoal, eu queria que vocês ajudassem e tentássemos pensar nisto olhando para as figuras ao mesmo tempo. É que vocês estão a tentar explicar uma expressão matemática sem olhar para a figura. Será que não conseguimos pensar na figura e ver o que é que aquelas coisas têm a ver com os palitos, com os palitos que lá estão, com as figuras que lá estão? (...) Eu queria ouvir a Clara.
- Clara:** Nós quando juntamos os quadrados temos que tirar 1 do meio se não ficam lá dois. (...) o n menos 1 é o número de palitos que se tira do meio.
- Sara:** Ela multiplicou os 4 lados de um quadrado.
- P:** Os lados do quadrado? (...)
- João:** Ela multiplicou a quantidade de palitos que existe num quadrado vezes o número.
- Sara:** Exato. O 4 é o número de lados de um quadrado.
- P:** Multiplica por quê? Por estes dois. (...) O que é que vamos escrever? Como é que ela pensou?
- Sara:** Ela multiplicou o número de lados de um quadrado.
- P:** Pelo número da figura. E depois?
- Sara:** Tirou os palitos que servem para unir os dois. (...) Multiplicou o número de lados de um quadrado pelo número da figura e tirou-se os palitos que estão sobrepostos.

As primeiras intervenções da professora, embora apoiando o pensamento da aluna, vão no sentido de alertar os alunos para a importância de recorrerem ao apoio visual da sequência apresentada, de modo a interpretarem uma informação apresentada em linguagem simbólica. Simultaneamente, a professora sintetiza as ideias apresentadas, usando os conceitos específicos subjacentes ao raciocínio da aluna. Num segundo momento, a professora procura integrar outras ideias na discussão, incentivando os alunos a ouvir as ideias dos colegas. Deixa que os alunos troquem livremente ideias entre si intervindo, pontualmente, para pedir justificações, sublinhar ideias não corretas do ponto de vista matemático na situação apresentada e incentivar os alunos a sistematizarem ideias. O trabalho nesta tarefa permite aos alunos negociarem ideias e procurarem uma explicação para um raciocínio apresentado por outro, usando linguagem matemática válida. Os alunos compreendem, ainda, a importância de relacionar representações, nomeadamente a simbólica com a gráfica.

A atuação da professora é apoiada no seu conhecimento didático, em particular da prática letiva, já que esta define o modo de trabalho adequado à resolução da tarefa e acompanha as

ideias dos alunos, pedindo justificações e levando-os a estabelecerem conexões entre a informação apresentada visualmente e em linguagem matemática. Nesse trabalho, os alunos são incentivados a usarem linguagem correta e clara.

Tarefa 2: “Inscrição no ginásio”

A tarefa de exploração “*Inscrição no ginásio*” (Figura 2), que parte de um contexto familiar a alguns alunos, tem como objetivo explorar situações que envolvem relações de proporcionalidade direta, incentivando-os à escrita de uma expressão que traduza essa relação. É apresentada aos alunos, depois de feitas algumas adaptações à proposta inicial da investigadora. Nessa adequação à turma, a professora procura que as questões fossem apresentadas de um modo mais estruturado e sequencial (do que a proposta inicial) em termos de nível de exigência, para que os alunos estabelecessem mais facilmente as conclusões pretendidas, já que a proposta inicial era mais desafiante e começava com uma questão mais aberta (Explica que ginásio deve escolher o Santiago), seguida de questões mais fechadas. A professora procura que esta tarefa não se afaste muito do tipo de tarefas com que os alunos trabalham habitualmente, procurando assim que os pedidos feitos aos alunos sejam direcionados para as conclusões que se pretendem tirar. No momento em que esta tarefa é apresentada aos alunos eles já tinham explorado outras relacionadas com o mesmo objetivo.

O Santiago pretende inscrever-se num dos dois ginásios **100 calorias** ou **Em forma** que existem na sua cidade. Os preços praticados são os seguintes:



Inscrição: 50 €
Mensalidade: 40 €



Inscrição: Gratuita
Mensalidade: 45 €

1. Completa a tabela, tendo em conta o número de meses e os dois tipos de preços referentes a cada ginásio.

	meses	1	3		8		11	12
Total (em euros)	100 calorias			210				
	Em forma					450		

2. Representa, no mesmo referencial, os gráficos correspondentes à evolução do preço a pagar em cada um dos ginásios, nos primeiros 6 meses.

3. Durante quanto tempo será vantajosa a inscrição no ginásio *Em forma*? Justifica.

4. Escreve uma expressão analítica que te dê o preço a pagar em cada um dos ginásios, de acordo com o tempo de frequência.

Figura 16: Tarefa Inscrição no ginásio.

O nível cognitivo da tarefa muda da fase como é apresentada pela investigadora para a fase como a tarefa é apresentada aos alunos. Essa mudança é motivada pelo conhecimento didático da professora, em particular do conhecimento que tem dos seus alunos e da aprendizagem, na medida em que propõe uma tarefa aos alunos com um grau de dificuldade crescente, favorável ao envolvimento dos alunos na tarefa e ao estabelecimento das conclusões a tirar. A tarefa apresentada aos alunos apela ao trabalho com diversas representações, nomeadamente, tabela, gráfico e expressão algébrica. Tem, também, a particularidade de levar os alunos a analisar propostas de dois ginásios, escolhendo a mais vantajosa.

Apresentamos, de seguida, um episódio do momento de discussão em grande grupo (relativo às questões 1 e 2), depois da tarefa ter sido resolvida pelos alunos em grupos de quatro elementos.

- P:** Alguém do grupo do Diego quer explicar como é que pensou para fazer o preenchimento da tabela?
- Íris:** Ali é. No *100 Calorias* no primeiro mês foi a inscrição mais a mensalidade e no *Em Forma* foi só a mensalidade, porque a inscrição é gratuita.
- P:** Hã, hã.
- Íris:** Nos 3 meses foi acrescentar 80 euros aos 90, porque são as duas mensalidades e no *Em Forma* foi acrescentar 2 mensalidades. Depois para descobrirmos que eram 4 meses tínhamos que ver de 170 para 210 quanto é que ia e ia uma mensalidade, então é porque era o mês a seguir.
- P:** Hã, hã.
- Íris:** E fizemos o mesmo em baixo. E depois nos 8 fomos acrescentando até chegar lá.
- P:** (...) Alguém dos outros grupos pensou de maneira diferente?(...)
- Tomás:** Nós até aos 4 meses fizemos tal e qual como a Íris disse, nos *100 Calorias* aos 8 meses também. No *Em Forma*, dos 4 meses para os 8, como a mensalidade era gratuita fizemos vezes 2. Pronto.
- P:** Duplicaram apenas?
- Tomás:** Foi mais rápido assim.
- P:** (...) O Tomás está aqui a dizer que para passar dos 4 meses para os 8 pode duplicar no ginásio *Em Forma*, mas não pode fazer o dobro no *100 Calorias*, mas tenho ideia que o grupo ali da frente duplicou.
- Vicente:** Duplicámos. (...) Mas depois subtraímos os 50.
- P:** Será que pensou bem? (...)
- I:** Vocês disseram que no décimo mês as bolinhas e as cruzinhas, ou quem usou cores diferentes, iam ficar sobrepostas e a partir do décimo mês o que iria acontecer?
- Íris:** O do *Em Forma* passava o preço do *100 Calorias*.
- I:** Porquê? Até lá o que é que aconteceu?
- Íris:** Era sempre mais barato, porque não tínhamos pago a inscrição.
- I:** (...) E a partir do décimo mês?

- Íris:** Porque como as mensalidades, o *Em Forma* tem uma mensalidade maior do que o *100 Calorias*, aos 10 meses ficavam iguais, então contávamos só as mensalidades e como o *Em Forma* tem uma mensalidade mais cara, ficava mais caro. (...) Porque a diferença entre as duas mensalidades são 5 euros e com 10 meses a diferença passa a 50 que é a inscrição. (...)
- I:** Se eu tivesse que me inscrever num ginásio, por qual dos ginásio devia optar?
- Vários:** Depende.
- Íris:** Depende do tempo que lá ia estar.
- Íris:** Se fosse muito tempo era o *100 Calorias*, se for até 10 meses é o *Em Forma*.

Esta tarefa de exploração proporciona um momento rico de partilha e justificação de ideias entre os alunos. As intervenções da professora evidenciam que estava a acompanhar as ideias dos alunos, com manifestações de concordância, a pedir a introdução de novas ideias na discussão e a solicitar justificações. Os alunos acompanham as ideias dos colegas e introduzem ideias novas na discussão.

Na questão 1 é notório o envolvimento dos alunos na apresentação e justificação dos seus processos de resolução para preenchimento da tabela. Os alunos justificam as suas ideias de uma forma clara e coerente, sem necessidade da professora solicitar essas justificações. Ao convite da professora para apresentação de outro processo de resolução, os alunos mostram estar a acompanhar a partilha de ideias, mostrando ideias novas e comparando com as anteriormente apresentadas. O raciocínio do Tomás traduz o uso intuitivo de uma relação de proporcionalidade direta, enquanto o raciocínio da Íris se apoia num processo recursivo de ir adicionando uma certa quantidade (valor da mensalidade). Em consequência da apresentação do raciocínio do Tomás, e por provocação da professora, o Vicente consegue apresentar a alteração que tinha que ser feita a essa ideia para aplicação em situações que não traduzem relações de proporcionalidade direta (caso do ginásio *100 Calorias*).

A apresentação e discussão da questão 2 permite aos alunos evoluir nas suas ideias iniciais, comparando as duas situações e procurando uma justificação válida para a diferença dos valores pagos nos dois ginásios, relacionando o valor pago a mais na mensalidade mais cara com o valor da inscrição do ginásio que apresenta a mensalidade mais barata. Essa discussão favorece a tomada de decisões argumentadas e a conclusão que a escolha do ginásio depende do tempo de permanência, quando os alunos são desafiados a decidir pelo melhor ginásio em termos de gastos.

A natureza da tarefa e a forma como é explorada parece ter contribuído para o envolvimento dos alunos e para o estabelecimento de diversas conclusões, através da análise de diversas representações matemáticas.

Tarefa 3: “A cantina da escola”


O problema “*A cantina da escola*” (Figura 3) é apresentado aos alunos, com o objetivo de trabalhar a resolução de equações. A situação proposta aos alunos envolve um contexto não

puramente matemático e desafia os alunos a traduzirem a informação apresentada de linguagem natural para linguagem matemática.

A tarefa apresentada aos alunos é adaptada de uma proposta da investigadora numa sessão de formação. Essa opção da professora tem em conta, mais uma vez, as características dos seus alunos e da sua aprendizagem, já que a turma tem alunos com ritmos de aprendizagem diferentes e estavam a iniciar o estudo deste conteúdo. Ao procurar tornar a informação mais acessível aos alunos, pretende que eles se envolvam na sua resolução, fazendo surgir diversas estratégias de resolução, em particular a estratégia de tentativa e erro e a tradução por meio de uma equação. Ao nível da resolução algébrica, a tarefa proposta potencia o aparecimento de diversas designações para a incógnita. Nesse processo de adaptação da tarefa, a professora apoia-se no seu conhecimento didático, nomeadamente da Matemática, dos alunos e da aprendizagem, já que procura que seja uma tarefa que possa ser resolvida por todos os alunos, mesmo os que têm mais dificuldade já que admite a possibilidade de recurso a diversas estratégias de resolução, em particular a estratégia de tentativa e erro ou de recurso a uma tabela para alunos com mais dificuldades, e de tradução por meio de uma equação para alunos que se sentem mais confiantes no trabalho em Matemática.

No final de cada semana, e de forma a preparar a próxima, a responsável pela cantina dá indicação aos serviços da *Escola Azul* do número de alunos que almoçaram na cantina, durante essa semana. Na informação enviada aos serviços pode ler-se:

Na terça-feira a cantina serviu mais 100 almoços do que na segunda, na quarta-feira metade dos almoços servidos na terça, na quinta-feira o dobro dos almoços servidos na segunda e na sexta serviu 156 almoços.



Quantos almoços serviu a cantina da escola em cada um dos dias, durante essa semana?
Explica como pensaste.

Figura 17: A cantina da escola.

Apresentamos, de seguida, uma parte da discussão em grande grupo, depois dos alunos terem resolvido o problema em grupos de quatro alunos. Durante a monitorização do trabalho autónomo dos alunos a professora não dá demasiadas pistas, de forma a manter o nível cognitivo da tarefa.

Íris: Nós ao contrário daquele grupo, nós pensámos em vez de pôr a segunda como o x , nós pusemos a terça. Porque nós primeiro vimos que na quarta-feira íamos precisar dos da terça (...). Então ficou: x menos 100, porque a terça-feira vai ter mais 100, logo a segunda tem menos 100 do que a terça; mais x .

- P:** Ela já está a escrever a equação. Não queres organizar como eles? Para quem está a ver era mais fácil. (...) Olha a Maria.
- Maria:** Eu não percebo por que é que na segunda é x menos 100.
- P:** Então explica lá outra vez Íris.
- Íris:** Isto é uma questão de tu leres: tanto pode ter a terça-feira mais 100 almoços que a segunda, do que a segunda ter menos 100 almoços do que a terça. Não é? É a mesma coisa.
- P:** Vocês há bocado puseram x na segunda, portanto a terça é x mais 100.
- Íris:** Olha vou-te só explicar isto: tanto isto tem mais 100 do que isto, como isto tem menos 100 do que isto.
- P:** Sim? Está? Portanto, ela aqui tirou. Se esta aqui é a base dela, aquele tem que ter menos 100. Está bem? Agora fez tudo a partir deste. Metade da terça, o dobro da segunda e o 156. Pronto e agora constrói a equação e depois resolve uma equação idêntica à outra, está bem? É parecido.
- Guilherme:** Idêntica, mas diferente.
- P:** Hã? Idêntica, mas diferente. Reparem, o que é que está diferente? Tem um denominador e tem parêntesis, que a outra não tinha.
- I:** Achas que o x vai dar o mesmo resultado? Sem resolvermos.
- Guilherme:** Não.
- I:** Porquê?
- Guilherme:** Porque ali o x é da terça-feira e ali é da segunda.
- I:** E a resposta ao problema vai ser a mesma?
- Guilherme:** Vai.
- P:** É? Então o que é que tu achas, de acordo com o resultado que ali está, o que é que vai ter que dar o nosso x ?
- Guilherme:** 180.
- P:** Pronto. Foi isso que aconteceu. Foi isso que aconteceu. Muito bem. Pronto, vêm que a Íris está a fazer exatamente o que foi feito no outro grupo. Está agora a juntar a segunda, com a terça, com a quarta, com a quinta e com a sexta. Pronto, e depois de tudo feito.
- Tiago:** Vai dar 180.

De forma a manter os alunos envolvidos na discussão, na sua primeira intervenção, a professora sugere à aluna que organize a informação que está a partilhar com os colegas, de modo a que todos acompanhem o seu raciocínio. A professora favorece a troca de ideias entre a aluna que está a apresentar a sua estratégia de resolução e a turma, dando-lhe oportunidade para esclarecer a dúvida de uma colega. Por fim, sintetiza a informação, para que fique claro para todos e para acompanharem as ideias seguintes, sem se alhearem do trabalho.

Com esta tarefa, os alunos apercebem-se que a mesma situação pode ser traduzida de formas diferentes, dependendo do que designa a incógnita. Nesses casos, a solução da equação também é diferente, mas a solução do problema é a mesma. Os alunos, sem resolverem a equação, conseguem antecipar o conjunto-solução para a equação escrita, atendendo à

conclusão que já tinham tirado. A tarefa apresentada permite aos alunos ampliar o seu pensamento, relacionando ideias e concluindo que o mesmo problema pode ser traduzido por diferentes equações, que originam, conseqüentemente, soluções diferentes, mas a mesma resposta ao problema.

Durante a exploração da tarefa, os alunos são incentivados a justificarem os seus raciocínios e a desenvolverem uma melhor compreensão das ideias que estão em jogo. A forma como a professora acompanha as ideias dos alunos é apoiada pelo seu conhecimento da prática letiva e dos alunos e da aprendizagem, já que vai procurando incentivar os alunos a avançarem nas suas ideias iniciais, a justificá-las e a generalizarem.

Considerações finais

As tarefas apresentadas aos alunos contribuíram para o desenvolvimento do seu pensamento matemático, ao favorecerem a partilha e a justificação de ideias, depois de uma fase de envolvimento na resolução, em grupos de quatro elementos, à semelhança do estudo de Ponte, Mata-Pereira, Henriques e Quaresma (2013). Com o trabalho nas tarefas, os alunos tiveram oportunidade de relacionar diversas representações matemáticas, tomar decisões (*Tarefa 2*), compreender que uma mesma situação pode ser traduzida por equações diferentes e antecipar respostas (*Tarefa 3*). A tarefa “*Palitos*”, ao proporcionar aos alunos o trabalho com sequências pictóricas, potencia a escrita, com compreensão, de diversas expressões algébricas para a sequência dada.

Estas tarefas, que envolvem contextos não puramente matemáticos, contemplam questões de diversos tipos proporcionando diferentes oportunidades de aprendizagem aos alunos, como a análise e escrita de expressões, a interpretação e tradução de informação de diversas formas, e a possibilidade de admitir diferentes estratégias de resolução e de lidar com várias representações. Desta forma, as tarefas contribuíram para ajudar os alunos a atingir diversos objetivos de aprendizagem relativos a ideias algébricas, em particular no tópico das Sequências e Sucessões, Funções e Equações e a interagirem entre si, com a professora a desempenhar o papel de mediadora das interações, promovendo o pensamento dos alunos. A natureza das tarefas também foi diversificada, oferecendo oportunidades diferentes aos alunos. De facto, com a tarefa 1 (investigação) os alunos tiveram oportunidade de escrever expressões para o termo geral de uma dada sequência e analisar expressões dadas, envolvendo-se num trabalho com um grau de dificuldade superior ao da tarefa 2. Com a tarefa 2 (exploração), os alunos trabalham com diversas representações – tabela, gráfico e expressão analítica. Com o problema da tarefa 3, os alunos traduzem informação dada de linguagem natural para linguagem matemática e resolvem um problema que admite diversas estratégias de resolução. A escolha destas tarefas é apoiada no conhecimento didático da professora, já que tem o cuidado de proporcionar aprendizagens diversificadas aos seus alunos.

As tarefas, desde que são propostas pela investigadora até chegarem aos alunos, passam por diferentes fases, com exceção da tarefa 1. As tarefas 2 e 3 são adaptadas pela professora às características dos seus alunos e à sua forma de aprendizagem, proporcionando um trabalho mais orientado e com um grau de desafio crescente, de forma a envolver todos os alunos na sua resolução, através de informação acessível à maior parte da turma. As tarefas 2 e 3

passam assim por duas fases do quadro teórico proposto por Stein e Smith (1998), enquanto a tarefa 1 é apresentada aos alunos como sugerida pela investigadora.

Na seleção das tarefas e na forma como as explora em sala de aula com os seus alunos, a professora mobiliza diversos aspetos do seu conhecimento didático, já que resolve as tarefas antes de as apresentar aos seus alunos, apoiando-se no seu conhecimento matemático, enquadra-as curricularmente e define a forma de trabalho mais adequada à respetiva resolução. Em sala de aula, acompanha o trabalho dos alunos e proporciona momentos de apresentação e discussão de ideias, levando-os a justificarem e generalizarem ideias, aspetos importante do conhecimento da prática letiva. As tarefas são adaptadas pela professora tendo em conta o trabalho que desenvolve com os seus alunos, nomeadamente com as tarefas que habitualmente lhes propõe, com o conhecimento que possui dos seus alunos, relativamente às suas dificuldades e ritmos diferentes de aprendizagem e com os objetivos que pretende atingir com aquela aula. A professora seleciona tarefas que oferecem oportunidades diferentes de aprendizagem aos alunos, na medida em que favorecem o trabalho com diversas representações, apelam ao raciocínio e à justificação de ideias. A partilha e justificação de ideias são aspetos muito valorizados pela professora durante o momento de apresentação e discussão das estratégias de resolução.

É importante continuar a estudar as implicações das tarefas apresentadas aos alunos na sua aprendizagem, tendo em conta a forma como são selecionadas e exploradas pelo professor. Na verdade, o professor pode selecionar tarefas matematicamente válidas para os seus alunos, mas se não forem bem conduzidas em sala de aula, de forma a contemplar o envolvimento dos alunos e a implicá-los na apresentação e discussão de ideias, traduzem-se em aprendizagens pouco significativas para eles.

Referências

- Boavida, A. M., & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Ed.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16 (1), 1-6.
- Jackson, K. J., Shahan, E. C., Gibbons, L. K., & Cobb, P. A. (2012). Launching complex tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 18 (1), 24-29.
- NCTM (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a construção de um quadro de referência. *Quadrante*, 2, 29-54.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp.11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2011). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. In N. Planas (Ed.), *Educación matemática: Teoría, crítica y práctica*. Barcelona: Graó.

- Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., Henriques, A. C., & Quaresma, M. (2013). Designing and using exploratory tasks. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI Study 22* (pp 9-15). (Vol. 1). Oxford.
- Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education*, 40, 65–82.
- Rodrigues, C., Menezes, L., & Ponte, J. P. (2014). Práticas de discussão matemática no ensino da Álgebra. In M. H. Martinho, R. A. Tomás Ferreira, A. M. Boavida, & L. Menezes (Eds.), *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp 65–78). Braga: APM.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313-340.
- Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3 (4), 268-275.
- Watson, A., Ohtani, M., Ainley, J., Frant, J. B., Doorman, M., Kieran, C., et al. (2013). Introduction. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI Study 22* (pp 9-15). (Vol. 1). Oxford.