UM MODELO PARA O SISTEMA PRESA-PREDADOR

JORGE ROCHA
Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências
Universidade do Porto

Observando dados anuais relativos à percentagem de peixes predadores (peixes que se alimentam de outros peixes) no total de peixes pescados num porto italiano, dados esses relativos ao período 1914 - 23, nota-se claramente um aumento desta percentagem durante o período da primeira guerra mundial. A primeira explicação apresentada pelo biólogo Umberto D'Anconna baseava-se na diminuição da actividade da pesca verificada nesse período. No entanto, se a diminuição da actividade da pesca favorece a população de peixes predadores por disporem de mais peixes presa, também será verdade que o número destes aumenta com a diminuição da pesca.

O matemático Vito Volterra propôs um modelo para este sistema dividindo a população de peixes em dois grupos, os peixes-presa e os peixes predadores, e tomando em consideração que:

i) a variação instantânea da população de peixes-presa deverá ser proporcional ao tamanho dessa população nesse mesmo instante descontando o efeito dos predadores, efeito esse que se entende proporcional ao número possível de encontros presa/predador,

ii) a variação instantânea da população de peixes predadores deverá ser proporcional ao número possível de encontros presa/predador, descontando um factor proporcional ao tamanho desta população, já que os predadores competem entre si pelos recursos.

Estas considerações conduzem ao seguinte sistema de equações diferenciais

$$x'(t) = a\,x(t) - b\,x(t)\,y(t) \quad \text{e} \quad y'(t) = -c\,y(t) + d\,x(t)\,y(t)$$

onde x(t) representa o número de presas no instante t, y(t) representa o número de predadores no instante t, e a, b, c, e d são números reais positivos.

Uma análise qualitativa deste sistema de equações diferenciais permite concluir que:

- na ausência de peixes predadores a população de peixes presa cresce indefinidamente,

- na ausência de peixes presa as espécies de peixes predadores tendem a extinguir-se,

- admitindo como ponto de partida a existência de x presas e y predadores, e excluindo um ponto de equilíbrio, a solução correspondente é periódica, isto é, ao fim de um certo tempo T, e apesar da interacção entre eles, volta-se a obter uma população constituída por x presas e y predadores (solução periódica de período T).

Por outro lado, como os dados obtidos no porto italiano correspondem a médias anuais, é natural considerar médias ao longo das órbitas periódicas. Essas médias são

$$x_0 = \frac{c}{d} \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{a}{b}$$

Resta introduzir no sistema o efeito (moderado) da pesca. Sempre que há actividade de pesca a população total de peixes diminui e entende-se que essa diminuição afecta de igual modo peixes-presa e peixes predadores. Assim, instantaneamente, o efeito da pesca diminui em ε x(t) a população de peixes-presa e diminui em ε y(t) a população de peixes predadores, onde ε é um factor positivo que aumenta se a actividade da pesca aumenta e que diminui se a actividade da pesca diminui.

Considerando agora este efeito obtemos um sistema de equações diferenciais análogo ao anterior, trocando a constante a por a-ε e a constante c por c+ε . As médias ao longo das órbitas periódicas são agora

$$x_1 = \frac{c + \varepsilon}{d} \quad \text{e} \quad y_1 = \frac{a - \varepsilon}{b}$$

Assim, assumindo que o peixe pescado é uma amostragem da população, se a actividade da pesca diminui (isto é ε diminui), como aconteceu durante a primeira grande guerra, a média observável x_1 diminui, a média observável y_1 aumenta, e portanto a percentagem de peixes predadores na população total aumenta, explicando as observações de Umberto D'Anconna.

Nota: esta exposição é inteiramente baseada na secção 10 do quarto capítulo do livro "Differential Equations and their applications" de Martin Braun, páginas 441 a 449.