ENSINO APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE LIMITE

J.C. DAVID VIEIRA
Departamento Matemática
Universidade de Aveiro

As dificuldades relativas ao ensino e à aprendizagem do conceito de limite são há muito conhecidas.

As tentativas de simplificações, por vezes abusivas, de conceitos tão delicados arriscam-se a gerar polémica como o provam textos relativamente recentes publicados no Boletim da SPM.

" Simplificar tanto quanto possível, mas não mais do que o possível" – Einstein.

Conhecedor deste facto, porquê abordar este tema?

Há alguns anos, após a leitura de [2], iniciei um trabalho, ainda inacabado, para detectar as primeiras dificuldades dos alunos na compreensão do conceito de limite. O estudo abrangeu algumas centenas de alunos de Análise Matemática II (2º semestre do 1º ano) das licenciaturas de Ciências e Tecnologia da Universidade de Aveiro. Foram igualmente inquiridos alunos dos 3º e 5º anos das licenciaturas em Matemática.

Nesta sessão apresentei alguns exemplos de respostas que me pareceram representativas das confusões apre(e)ndidas e tentei dar uma resposta, obviamente incompleta, à questão: porquê isto?

No final apresentei algumas sugestões – a testar no terreno – para a abordagem do tema, sem iludir as dificuldades do mesmo.

O questionário – base do trabalho – continha várias respostas de definição de limite de uma função real de variável real, num ponto, propostas estas que seguiam de perto o percurso histórico da evolução do conceito de limite.

As respostas foram cruzadas com a resposta ao seguinte item:

> "Diga em poucas palavras o que entende por limite, ou seja, explique o que significa para si a expressão o limite de uma função f quando x $\to$ t é um número L".

Registo algumas das respostas com que ilustrei a sessão e que permitem ver confusões conceptuais, dificuldades de expressão escrita e grande confusão na manipulação de expressões simbólicas.

Para mim a expressão referida diz-me o número para o qual a função se dirige (tende) sem o atingir; fiquei confuso!!! se atinge ou não.

- Nunca ninguém me perguntou isto e nunca me tinha apercebido das dúvidas que poderia ter sobre limites. Realmente senti-me confusa (...). Quando o limite dá $\pm\infty$ existe ou não o limite? o limite tem de ser um valor?
- Os εε e δδ é que é uma complicação; só sei isto com as sucessões.
- Limite de uma função num ponto é o valor que essa função admite numa vizinhança desse ponto. [Muitas respostas deste tipo]
- Limite de uma função é um ponto extremo do seu contradomínio quando o x tende para um extremo do seu domínio.
- Limite é o valor de y mais alto ou mais baxo (sic) quando se vai tomando valores de t.
- Limite é o número máximo que uma função pode ter quando x $\to$ t.
- Quando uma determinada função tende para um determinado domínio, essa função terá significado até ao número determinado. Atingindo aí o seu máximo. Por vezes uma determinada função nunca chega a ter limite, o caso quando L=$+\infty$.
- Uma função tem por limite um número L, quando é limitada arbitrariamente por valores de x.
- Limite é o valor que uma função não pode ultrapassar.
- $\lim\limits_{x \to t}(f(x)) = L$ significa que a derivada da função f(x) no ponto t tem o valor de L.
- Limite é algo que é atingido no fim, algo propriamente definido pela função de x $\to$ t.
- O limite é o número mais próximo de t que está definido pela função f.
- O limite é uma vizinhança de um ponto.

E agora só uma pequena amostra das definições simbólicas apresentadas:

- $\forall n > 0\ \exists p \in \mathrm{N} : n > p : |U_n - L| < \varepsilon$
- $\exists p \in \mathrm{N} \quad \forall a \geq 0 : p \geq n \Rightarrow |a - U_n| < L$
- $\forall \delta > 0\ \exists p \in \mathrm{N} : |U_n - p| < \delta$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists p > 0\ \forall n > p : |\lim U_n - p| < \varepsilon$
- $\forall \delta > 0\ \exists n \in \mathrm{N} : n > p \Rightarrow |U_n - \delta| < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists p > 0 : n > p \Rightarrow |f(x) - \delta| < L$
- $\forall h \in \Re^+\ \exists p \in \mathrm{N}\ h > p \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
- $\forall \delta > 0\ \exists x \in \mathrm{N} : n > p \Rightarrow |\lim - \delta| < L$
- $\exists p\ \forall x \in \delta\ p - \delta < L < p + \delta$

Procurando uma resposta a este descalabro, percorri a literatura usual do ensino secundário e do 1º ano universitário.

Os inúmeros conceitos, - limite inferior, limite superior, ínfimo, supremo, mínimo, máximo, limite segundo Heine, limite segundo Cauchy, limites de sucessões, limites de funções, limites infinitos e limites de funções num ponto de acumulação ou num ponto aderente -, o pouco tempo para assimilação e o facto de praticamente só serem avaliadas capacidades de cálculo podem servir para uma primeira explicação do fenómeno.

Quanto à literatura séria: Sebastião e Silva, Dias agudo, N. Bourbaki, L. Schwarz, E. Lages de Lima, G. Choquet, S. Guerreiro, R. Bartle e A. Machado, entre outros, penso não ser de grande ajuda para alunos e mesmo para muitos professores, devido à apresentação aparentemente díspar. Só em R. Bartle e A. Machado se fala directa e explicitamente em duas definições não equivalentes: uma que "ignora" o que se passa no ponto em que se pretende definir limite e outra que considera o que se passa em tal ponto; basicamente, situações em que se considera o limite num ponto de acumulação ou num ponto aderente.

Para assentar algumas ideias propus uma abordagem adaptada de [1] e que julgo poder ser uma via que não foge às dificuldades, antes as explicita. É uma bordagem progressiva onde se propõem algumas "definições" que são analisadas e sucessivamente eliminadas pela apresentação de contra-exemplos simples, até se chegar às duas definições já referidas.

Esta proposta pode ser executada num tempo aceitável e julgo que vale a pena experimentá-la no terreno.

Enfrentar o problema pela via positiva parece-me mais eficaz do que a permanente fuga em frente que consiste em tratar os nossos estudantes como incapazes, retirando do programa o que contém efectivas delicadezas conceptuais.

Referências

[1] Smith, W., Limits and Continuity, ...(?)

[2] Williams, S. , Models of Limit Held by College Calculus Students, J. for Research Math-Ed, 1991