Domínios de Atracção e Velocidades de Convergência

Madalena Malva

Instituto Politécnico de Viseu - Escola Superior de Tecnologia
CEAUL - Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa

Resumo:

Gomes e Pestana (Nonstandard domains of attraction and rates of convergence. New perspectives in theoretical and applied statistics, Wiley Ser. Prob. Math. Statistics, 1987) mostraram que o comportamento pré–assintótico, em valores extremos ocorre em grande variedade de situações e encontraram uma explicação: o domínio de atracção de uma lei estável pode ser particionado num "domínio de atracção standard" — em que as constantes de atracção são da forma $A\,n^{1/\alpha}$, onde α é o índice de atracção da estável —, e num domínio de atracção não–standard, em que as constantes de atracção são necessariamente da forma $L(n)\,n^{1/\alpha}$ com $L(n)$ de variação lenta, convergindo para 0 ou ∞. Neste trabalho exploramos a questão da qualidade da aproximação nas caudas no domínio de atracção não standard de uma estável simétrica, impondo um controle extra na sua variação, com um parâmetro de segunda ordem.

Palavras–chave: Variáveis estáveis, domínio de atracção standard, domínio de atracção não–standard.

Abstract: Gomes and Pestana (Nonstandard domains of attraction and rates of convergence. New perspectives in theoretical and applied statistics, Wiley Ser. Prob. Math. Statistics, 1987) showed that de pre–asymptotic behavior of extremes values occurs in many situations, and found an explanation: the domain of attraction of a stable law can be portioned into a "standard domain of attraction", where the constants of attraction are of the form $A\,n^{1/\alpha}$ with α denoting the index of the stable law, and in a non–standard domain of attraction, where the constants of attraction are necessarily of the form $L(n)\,n^{1/\alpha}$, with $L(n)$ a slowly varying function converging to 0 or ∞. In this work we exploit the question of the quality of the approximation in the tails of symmetric laws belonging to a non–standard domain of attraction, when considering an extra control parameter of second order on the variation of the tail.

Keywords: Stable laws, standard domain of attraction, non–standard domain of attraction.

1 Introdução

Gnedenko e Kolmogorov (1954) afirmam, no seu notável livro sobre somas de variáveis aleatórias, que o valor epistemológico da Teoria das Probabilidades advém, privilegiadamente, dos resultados assintóticos. De facto estes, para além de alargarem o nosso conhecimento e compreensão dos fenómenos em que há intervenção do acaso, permitem usar *aproximações* simples, em vez de resultados exactos, tantas vezes insuportáveis.

Coloca isto a questão, naturalmente, de avaliar quando passa a ser possível usar a aproximação postulada nos teoremas limites; assim, grande parte da investigação sobre teoremas limite fracos (e nomeadamente sobre o Teorema Limite Central e o Teorema Limite Extremal) aborda questões de velocidades de convergência e de grandes desvios.

Desde fases muito iniciais à investigação sobre resultados assintóticos que os investigadores mais profundos chamaram a atenção para estas questões. Pela importância que veio a ter na investigação futura, Fisher e Tippett (1928), ao chamarem a atenção para o "penultimate behavior" de Φ^n — onde Φ é a função distribuição da gaussiana $(0,1)$, que eles notaram estar mais próxima de uma "penultimate" weibull, mesmo para $n = 10^{12}$, do que da "ultimate limiting gumbel" — foi um marco na investigação posterior, estranhamente por colocarem um falso problema.

De facto, na vastíssima família das funções distribuição, nada de estranho há em encontrar funções de distribuição mais próximas de Φ^n do que acontece com Λ, a função distribuição da Gumbel; também nada de estranho há em que entre essas muitas aproximações algumas sejam Weibull (sendo triparametrada, tem uma riqueza de formas que propicia ser uma excelente aproximação para quase tudo). De facto, Gomes e Pestana (1987) mostraram que a existência de "penultimate approximation" é a regra, e não a excepção, sendo o fenómeno generalizado no domínio de atracção não standard de qualquer estável para máximos.

Decerto o mesmo aconteceria em domínios de atracção de estáveis para somas. Pereira, Oliveira e Pestana (1996) mostraram que de facto isso acontece, mas não levaram a investigação a toda a sua generalidade, pois neste caso há a dificuldade extra de apenas três distribuições estáveis para somas serem conhecidas em forma analiticamente tratável.

No entanto, a literatura vasta na área económica veio, de novo, evidenciar a importância de modelos estáveis para somas, e nomeadamente sem variância finita. Por isso, abordamos a investigação da qualidade das aproximações. Os métodos que usamos, inspirados em trabalhos da mesma índole para extremos (Fraga Alves, De Haan e Tao Lin (2003)) é "controlar" a regularidade das caudas através de um parâmetro de segunda ordem.

Claro que em somas há a dificuldade acrescida de ambas as caudas influenciarem o comportamento limite. Nesta investigação preliminar, controlamos essa dificuldade considerando apenas variáveis aleatórias simétricas.

2 Variáveis Estáveis e Domínios de Atracção

Diz-se que uma variável aleatória X é estável para somas se todos os termos da sucessão de somas parciais de réplicas independentes de X forem do mesmo tipo. Por outras palavras, denotando $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, onde as X_k são réplicas independentes de X, dizemos que X é estável se para todo $n \in \mathbf{N}$ existirem $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbf{R}$, $c > 0$ e $a \in \mathbf{R}$ tais que

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \frac{X - b}{a} .$$

As "constantes de atracção" ou "constantes normalizadoras" $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbf{R}$ têm a função de estabilizar a soma (ou seja, "centrar" S_n subtraindo-lhe b_n por forma a localizá-la junto da origem, e "reduzir" dividindo por a_n para estabilizar a escala).

Por outro lado, diz-se que uma variável aleatória X está no domínio de atracção da variável aleatória Y_α, com expoente característico $0 < \alpha \leq 2$, e escreve-se $X \in \mathcal{D}(Y_\alpha)$ se e só se existirem constantes de atracção $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbf{R}$ tais que

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \stackrel{\mathrm{d}}{\longrightarrow} Y_\alpha, \quad \text{quando} \quad n \to \infty .$$

As condições de atracção podem ser expressas usando a teoria de variação regular de Karamata (1930):

Teorema: A variável aleatória $X \in \mathcal{D}(Y_2)$ *se e só se o seu segundo momento truncado,* $s(x) = \int_{-x}^{x} w^2 \, \mathrm{d}F_X(x)$, *for uma função de variação lenta. Do mesmo modo tem-se* $X \in \mathcal{D}(Y_\alpha)$, $0 < \alpha < 2$, *se e só se*

1. $\dfrac{1 - F_X(x)}{F_X(-x)} \longrightarrow k \in [0, +\infty)$, quando $t \to \infty$.

2. $\dfrac{F_X(-t\,x) + 1 - F_X(t\,x)}{F_X(-x) + 1 - F_X(x)} \longrightarrow t^{-\alpha}$, quando $t \to \infty$, *ou seja, a soma das caudas* $\mathrm{P}(|X| > x)$, *é uma função de variação regular com expoente* $-\alpha$.

A demonstração pode ser consultada em Galambos (1995, p. 257-262).

O domínio de atracção de uma lei estável pode ser particionado num "domínio de atracção standard" — em que as constantes de atracção são da forma $A\,n^{1/\alpha}$ onde α é o índice da estável — , e num "domínio de atracção não–standard", em que as constantes de atracção são necessariamente da forma $L(n)\, n^{1/\alpha}$, com L uma função de variação lenta no sentido de Karamata, isto é,

$$\frac{L(t\,x)}{L(x)} \longrightarrow K \in [0, +\infty[, \quad \text{quando} \quad x \to \infty$$

e $0 < \alpha \leq 2$ é o índice característico da variável aleatória limite Y.

Prova-se que qualquer variável estável é infinitamente divisível. Portanto, a função característica de uma variável aleatória estável pode ser escrita usando a representação canónica de Lévy. A representação geral de uma função característica estável é:

$$\varphi(t) = \exp\left\{ i\,a\,t - c\,|t|^{\alpha} \left[1 + i\,\beta\, \frac{t}{|t|}\, w(t,\alpha) \right] \right\} , \tag{1}$$

com localização $a \in \mathbf{R}$, escala $c > 0$, índice ou expoente característico $0 < \alpha \leq 2$, coeficiente de assimetria $-1 \leq \beta \leq 1$ e

$$w(t,\alpha) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\,\alpha}{2}\right) & \alpha \in (0,1) \cup (1,2] \\ \frac{2}{\pi} \ln(|t|) & \alpha = 1\,. \end{cases}$$

Considere-se agora uma sucessão $\{X_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ de variáveis aleatórias simétricas independentes e identicamente distribuídas no domínio de atracção não standard de uma estável simétrica Y_α, com função característica

$$\varphi_{Y_\alpha}(t) = \exp\{-c\,|t|^{\alpha}\} , \quad \alpha \in (0,2) \text{ e } c > 0$$

então, as caudas da função distribuição comum das variáveis $X_k\,, k = 1, 2, \cdots$ têm o seguinte comportamento assintótico

$$F(-x) = \frac{c_1 + \mathrm{o}(1)}{(-x)^{\alpha}} L(x) , \quad x < 0 , \tag{2}$$

$$1 - F(x) = \frac{c_2 + \mathrm{o}(1)}{x^{\alpha}}\, L(x) , \quad x > 0 , \tag{3}$$

onde $c_1\,, c_2 \geq 0\,, c_1 + c_2 > 0$ e $L(x)$ é uma função de variação lenta em infinito. E neste caso de simetria, $c_1 = c_2$.

Excluindo o caso $\alpha = 2\,, \beta$ qualquer, verifica-se que na expressão (1) se tem

$$\beta = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2}$$

e o parâmetro de escala c é para todo o α $(0 < \alpha \leq 2)$

$$c = -(c_1 + c_2) Q(\alpha) ,$$

com

$$Q(\alpha) = \begin{cases} -\cos\left(\frac{\pi\,\alpha}{2}\right) \Gamma(1-\alpha) & \alpha \in (0,1) \\ -\frac{\pi}{2} & \alpha = 1 \\ \cos\left(\frac{\pi\,\alpha}{2}\right) \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha - 1} & \alpha \in (1,2)\,. \end{cases}$$

3 Velocidades de Convergência

Considere-se uma sucessão $\{X_k\}_{k\in\mathbf{R}}$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas no domínio de atracção de uma estável de índice α, Y_α. Para simplificar vamos supor que estamos a trabalhar apenas com vvariáveis aleatórias simétricas.

O caso $\alpha = 2$ isto é, quando se está a trabalhar no domínio de atracção da gaussiana, foi já muito explorado, sabendo-se, por exemplo, que quando as variáveis aleatórias X_k têm terceiro momento finito, denotando por F_n a função de distribuição das somas normalizadas e por Φ a função de distribuição da gaussiana $(0,1)$ se tem $\max\limits_x\left|F_n(x) - \Phi(x)\right| = \mathrm{O}(n^{-1/2})$.

Quando $0 < \alpha < 1$ o problema torna-se um pouco mais complexo, mas existem alguns resultados no campo dos domínios de atracção standard, é num trabalho de Cramér de 1963 onde se mostra que, sob certas condições, se

$$1 - F(x) = \frac{p}{x^\alpha} + \frac{q}{x^\beta} + \mathrm{o}(x^{-\beta}), \quad x \to +\infty,$$

então

$$\begin{cases} F_n(x) - Y_\alpha(x) = -\frac{\mathrm{Q}\;\mathrm{G}_{\alpha,\beta}(x)}{n^{\beta/\alpha-1}} + \mathrm{o}(n^{1-\beta/\alpha}) & \text{se} \quad \beta < 2\,\alpha \\ F_n(x) - Y_\alpha(x) = -\frac{\mathrm{P}^2\;\mathrm{G}_{\alpha,2\alpha}(x)}{2n} + \mathrm{o}(n^{-1}) & \text{se} \quad 2\alpha < \beta < 2 \end{cases}$$

onde P e Q são constantes e $\mathrm{G}_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} t^{\beta-1}\exp(-\mathrm{P}t^\alpha)\sin(tx)\mathrm{d}t$.

Nos domínios de atracção não standard, referimos aqui o trabalho de Iglésias Pereira *et al.* de 1996 por ser especialmente interessante para nós: se $\{X_k\}_{k\in\mathbf{R}}$ for uma sucessão de variáveis aleatórias simétricas independentes e identicamente distribuídas, com função distribuição comum F com comportamento assintótico dada pelas expressões (2) e (3), onde se substituiu $L(x)$ por $\ln(x)$, isto é,

$$1 - F(x) = \frac{k\,\log(x)}{x^\alpha} + \mathrm{r}(x), \quad x > 0.$$

A função característica de F é $\varphi(t) = 1 - 2\,t\int_0^{+\infty}\sin(t\,x)[1 - F(x)]\,\mathrm{d}x$.

Usando as seguintes aproximações válidas quando $t \to 0$ e $\alpha \neq 1$

$$\int_0^\infty \sin(t\,x)\frac{L(x/t)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \Gamma(1-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\,\alpha}{2}\right)\,L(1/t) + \mathrm{o}[L(1/t)],$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t\,x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \Gamma(1-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\,\alpha}{2}\right).$$

Tomando t na vizinhança de zero, e considerando $0 < \alpha < 2$, conclui-se que

$$\ln(\varphi(t)) = -c\,|t|^\alpha\,\widetilde{L}(t),$$

onde $c = -2\,k\,\Gamma(1-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\,\alpha}{2}\right)$ se $\alpha \neq 1$ e $\widetilde{L}(t) = 1 - \ln|t|$.

Atendendo às propriedades do logaritmo pode-se escrever

$$\ln(\varphi(t)) \approx -c\,|t|^{\alpha}\left(\frac{1-|t|^{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n} + 1\right),$$

onde resulta que a função característica de $S_n^* = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{A_n}$, tomando $A_n = \ln(n)\,n^{1/\alpha}$, é tal que

$$\ln(\varphi_{S_n^*}) \approx -c\,|t|^{\alpha_n} \quad \text{com} \quad \alpha_n \longrightarrow \alpha^+\,, \quad \text{quando} \quad n \to \infty\,.$$

Considere-se uma função de distribuição F de uma variável aleatória X no domínio de atracção de uma estável de índice α. Suponhamos que X é simétrica, absolutamente contínua e que, para $x > 0$

$$1 - F(x) = \frac{L(x)}{x^{\alpha}} + \frac{A}{x^{\beta}} + r(x)$$

com $0 < \alpha < 2\,, \alpha < \beta < \nu\,,$ L uma função de variação lenta, $\mathrm{r}(x) = \mathrm{o}(\mathrm{x}^{-\nu})$ e A uma constante. A função característica de X é

$$\varphi(t) = 1 - 2\,t\int_0^{\infty}\sin(t\,x)\left(\frac{L(x)}{x^{\alpha}} + \frac{A}{x^{\beta}} + r(x)\right)\mathrm{d}x\,.$$

Fazendo $y = x\,|t|$ e efectuando algumas simplificações tem-se

$$\varphi(t) = 1 - 2\,t\int_0^{\infty}\mathrm{sgn}(t)\sin(\mathrm{sgn}(t)\,y)\left(\frac{L(x)}{y^{\alpha}}\,|t|^{\alpha} + \frac{A}{y^{\beta}}\,|t|^{\beta} + r\left(\frac{y}{|t|}\right)\right)\frac{1}{|t|}\,\mathrm{d}y$$

$$= 1 - 2\,|t|^{\alpha}\int_0^{\infty}\frac{\sin(y)\,L(y/|t|)}{y^{\alpha}}\,\mathrm{d}y - 2\,A\,|t|^{\beta}\int_0^{\infty}\frac{\sin(y)}{y^{\beta}}\,\mathrm{d}y - 2\int_0^{\infty}\sin(y)\,r\left(\frac{y}{|t|}\right)\mathrm{d}y$$

$$= 1 - 2|t|^{\alpha}\left\{\frac{\Gamma(2-\alpha)}{1-\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)L\left(\frac{1}{|t|}\right) + \mathrm{o}\left[L\left(\frac{1}{|t|}\right)\right]\right\} - 2A|t|^{\beta}\frac{\Gamma(2-\beta)}{1-\beta}\cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) -$$

$$- \int_0^{\infty}\sin(y)r\left(\frac{y}{|t|}\right)\mathrm{d}y$$

$$= 1 - 2|t|^{\alpha}\left\{\frac{\Gamma(2-\alpha)}{1-\alpha}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)L\left(\frac{1}{|t|}\right) + \mathrm{o}\left[L\left(\frac{1}{|t|}\right)\right]\right\} - 2A|t|^{\beta}\frac{\Gamma(2-\beta)}{1-\beta}\cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) + \mathrm{o}(|t|^{\nu})$$

$$= 1 - |t|^{\alpha}\,a\,L\left(\frac{1}{|t|}\right) - |t|^{\alpha}\,r_1(t) - |t|^{\beta}\,b + r_2(t)$$

com $a = 2\frac{\Gamma(2-\alpha)}{1-\alpha}\cos\left(\frac{\pi\,\alpha}{2}\right)$ e $b = 2\,A\,\frac{\Gamma(2-\beta)}{1-\beta}\,\cos\left(\frac{\pi\,\beta}{2}\right)$, $r_1(t) = 2\mathrm{o}\left[L\left(\frac{1}{|t|}\right)\right]$ e $r_2(t) = \mathrm{o}(|t|^{\nu})$.

Como

$$|t|^\alpha\, r_1(t) = \mathrm{o}\left[|t|^\alpha\, L\left(\frac{1}{|t|}\right)\right]\ , \quad r_2(t) = \mathrm{o}\left[|t|^\alpha\, L\left(\frac{1}{|t|}\right)\right]\ ,$$

e

$$|t|^\beta\, b = \mathrm{o}\left[|t|^\alpha\, L\left(\frac{1}{|t|}\right)\right]$$

resulta,

$$\varphi(t) = 1 - |t|^\alpha\, a\, L\left(\frac{1}{|t|}\right) + \rho_1(t)$$

onde

$$\rho_1(t) = \mathrm{o}\left[|t|^\alpha\, L\left(\frac{1}{|t|}\right)\right]\ .$$

Usando

$$\ln(1-x) = -x + \mathrm{O}_{x\to 0}(x^2) = -x + \mathrm{o}_{x\to 0}(x^\delta)\ , \forall \delta \in (0,2)\ ,$$

vem, para t numa vizinhança de zero tal que $\varphi(t) > 0$

$$\ln(\varphi(t)) = -|t|^\alpha\, a\, L\left(\frac{1}{|t|}\right) + \rho_3(t)$$

onde $\rho_3(t) = \rho_1(t) + \rho_2(t) = \mathrm{o}\left(|t|^\alpha\, L\left(\frac{1}{|t|}\right)\right)$. Substituindo t por $\frac{t}{B_n} = \frac{t}{n^{1/\alpha}\, L_1(n)}$, onde L_1 é uma função de variação lenta, e multiplicando por n,

$$n\, \ln\varphi\left(\frac{t}{n^{1/\alpha}\, L_1(n)}\right) = -\frac{|t|^\alpha\, a}{L_1^\alpha(n)}\, L\left(\frac{n^{1/\alpha}\, L_1(n)}{|t|}\right) + n\, \rho_3\left(\frac{t}{n^{1/\alpha}\, L_1(n)}\right)\ .$$

Ou seja,

$$\left(\varphi\left(\frac{t}{n^{1/\alpha}L_1(n)}\right)\right)^n = \exp\left\{-\frac{|t|^\alpha\, a}{L_1^\alpha(n)} L\left(\frac{n^{1/\alpha}L_1(n)}{|t|}\right) + n\rho_3\left(\frac{t}{n^{1/\alpha}L_1(n)}\right)\right\}$$

$$\left(\varphi\left(\frac{t}{n^{1/\alpha}L_1(n)}\right)\right)^n = \exp\left\{-\frac{|t|^\alpha\, a}{L_1^\alpha(n)} L\left(\frac{n^{1/\alpha}L_1(n)}{|t|}\right)\right\} \exp\left\{n\rho_3\left(\frac{t}{n^{1/\alpha}L_1(n)}\right)\right\}\ .$$

O estudo de velocidades de convergência no que se refere ao domínio de atracção da gaussiana “parece"uma teoria com um alto grau de sofisticação e complexidade. Porém, quando se aborda o estudo da velocidade de convergência nos domínios de atracção de estáveis não gaussianas é que as dificuldades emergem em todo o seu esplendor.

Tentámos, com o uso de parâmetros de segunda ordem — a exemplo do que se tem feito nos domínios de atracção de estáveis para extremos — controlar a velocidade de convergência. Os resultados parcelares a que chegamos dependem de condições porventura artificiosas, e a sua extensão para domínios de atracção não-*standard* traz complexidades ainda maiores. Assim, mantém-se o estatuto algo decepcionante das leis estáveis: grandes promessas, por manterem a forma quando sujeitas a convoluções, que se esfumam em nada dada a sua intratabilidade analítica-

Talvez seja de facto de se optar pela solução radical que é usar cuadas paretianas (isto é, varição regular), e desistir da estabilidade estrita. No fundo, como Tukey advogava, mais vale uma solução aproximada para um problema real do que uma solução exacta para um problema aproximado.

Agradecimentos

Ao Professor Dinis Pestana pelo constante apoio prestado.
À Professora Sandra Mendonça pelos comentários e sugestões feitas ao longo deste trabalho e que em muito o enriqueceram.
Investigação subsidiada por FCT/POCTI/FEDER, Projecto VEXTRA e pelo programa PRODEP, Acção 5.3.

Referências

[1] Abramawitz, M. and Stegun, I. (1992). *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York.

[2] Alves, I. F., Haan, L. and Lin, T. (2003). Estimation of the parameter controlling the speed of convergence in extreme value theory. *Mathematical Methods of Statistics*, **12**, 155-176.

[3] Bingham, N. H., Goldie, C. M. and Teugels, J. L. (1989). *Regular Variation*, Cambridge Press, Cambridge.

[4] Cramér, H. (1962). On the approximation to a stable probability distributions. In *Studies in Mathematical Analysis and Related Topics* (Szergo, G.,ed.), Stanford Press, Califórnia, 70-76.

[5] Cramér, H. (1963). On asymptotic expansions for sums of independente random variables with limiting stable distributions, *Sankhya Ser.*, **25**, 12-24.

[6] Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Some of its Applications*, vol. I, Wiley, New York.

[7] Fisher, R. A., Tippet, N. (1954). Recente publications: reviews: researches into mathematical principles of the theory of wealty, *Amer. Math. Monthly*, **8**, 439-440.

[8] Galambos, J. (1954). *Advanced Probability Theory*, M. Dekker, New York.

[9] Gnedenko, B. V., Kolmogorov, A. N. (1954). *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Addison-Wesley, Reading, Mass.

[10] Gomes, I., Pestana, D. (1987). Nonstandard domains of attraction an rates of convergence. In *New Perspectives in Theoretical and Applied Statistics* (Puri, M. L., Vilaplana, J. P. e Wertz, W., eds), Wiley, New York, 467-477.

[11] Ibragimov, I. A., Linnik, Y. V. (1971). *Independent and Stationary Sequences of Random Variables*, Wolters-Noordhoff, Netherlands.

[12] Karamata, J. (1930). Sur un mode de croissance réguluiére des functions, Mathematica (Cluj), **4**, 38-53.

[13] Luckacs, E. (1970). *Characteristic Functions*, Griffin, London.

[14] Oliveira, O. (1997). Constantes de atracção e velocidades de convergência em situações pré-assintóticas, In *A Estatística a Decifrar o Mundo* (Vasconcelos, R., Alves, I. F., Castro, L. C., Pestana D., eds.), Edições SPE, Lisboa, 117-119.

[15] Pereira, H. I., Oliveira, O. e Pestana, D. (1997). Limites estáveis e comportamentos pré-assintóticos, In *A Estatística a Decifrar o Mundo* (Vasconcelos, R., Alves, I. F., Castro, L. C., Pestana D., eds.), Edições SPE, Lisboa, 109-116.

[16] Pestana, D., Velosa, S. (2002).*Introdução à probabilidade e à Estatística*, Fundação Calouste Gulbenkian.