[1] Distribuições Duais, Sua Génese e Caracterizações

Madalena Malva
Escola Superior de Tecnologia de Viseu
Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa
malva@infante.ipv.pt
Fernando Sequeira
DEIO, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa
ferseque@fc.ul.pt

Sumário:

Seja X uma variável positiva, com função de distribuição F e valor médio μ. É óbvio que $f^* = \frac{1-F(x)}{\mu}$ é uma função densidade de probabilidade no caso de X ser absolutamente contínua, e $p_k^* = \frac{1-F(x)}{\mu}, k \in \mathbb{N}$, é uma função massa de probabilidade no caso de X ser discreta; dizemos que f e f^* são funções dendidade de probabilidade duais, e p_k e p_k^* são funções massa de probabilidade duais. Se X for Exponencial, $f = f^*$, uma propriedade característica que tem interesse investigar no âmbito mais geral das densidades duais de funções densidade de probabilidade Pareto generalizadas, e outras densidades de Pearson - betas, F de Fischer-Snedecor - que lhes estão associadas de forma simples. No caso das discretas, propriedade análoga é válida no que respeita variáveis Geométricas.

Na interpretação deste tipo de dualidade encontram-se algumas aplicações interessantes. A dual da Poisson pode ser interpretada num esquema de filtragem com filtro uniforme discreto. Filtros uniformes contínuos são investigados no âmbito de dualidade de variáveis absolutamente contínuas.

Abstract:

Let X be a random variable with distribution function F and mean value μ. It is obvious that $f^* = \frac{1-F(x)}{\mu}$ is a probability density function in the case of X being absolutely continuous and $p_k^* = \frac{1-F(x)}{\mu}, k \in \mathbb{N}$ is a probability mass function in the case os X being discrete; we say that f e f^* are dual probability density functions and p_k and p_k^* are dual probability mass functions. If X is exponencial, $f = f^*$, a characteristic insteresting to be investidated within the range of the dual densities of general Pareto's density probability functions and other Pearson's densities – betas, F of Fisher-Snedecor – which are associated to them in a simple form. In the case of discrete similar property is valid as far as Geometric variables are concerned.

In the interpretation of this kind of duality there can be found some more interesting applications. The Poisson dual can be interpreted in a frame of filtering with a uniform discrete filter. Uniform continuous filters are investigated within the duality of absolutely continuous variables.

Palavras-chave: Função densidade probabilidade dual, função massa probabilidade dual, densidades "auto-duais", distribuição conjugada, modelos hierárquicos,fórmulas de Pollaczeck-Khinchine e de Beckman.

AMS (2000) subject classification: 62E99

[1] Investigação parcialmente subsidiada por FCT/POCTI/FEDER, Projecto VEXTRA.

1. Introdução

Comecemos por observar que se X for uma variável aleatória positiva com valor médio finito μ_X, função de distribuição F_X e função densidade de probabilidade f_X, então

$$f_X^*(x) = \frac{1 - F_X(x)}{\mu_X}$$

é uma função densidade de probablidade, que denominamos *dual* de f_X; analogamente, chamamos duais às correspondentes variáveis aleatórias, funções de distribuição, funções características, transformadas de Laplace, etc.

De facto, basta recordar que se $X > 0$, existindo $\mu_X = \mathbb{E}(X)$ este pode ser calculado como $\mu_X = \int_0^\infty (1 - F_X(x))\ \mathrm{d}x$. Esta expressão — que tem a vantagem de ser genérica, transformando o integral de Stiletjes num integral de Riemann — estabelece-se imediatamente usando integração por partes, uma vez que a existência de valor médio garante que $\lim_{x\to\infty} x[1 - F_X(x)] = 0$.

Analogamente, no caso de uma variável aleatória discreta com suporte natural, é óbvio que definindo $p_k^* = \frac{1-F_X(k-1)}{\mu_X}$ se obtém uma função massa de probabilidade dual.

É imediato estabelecer que se $X \frown \mathit{Exponencial}(\delta)$ ou $Y \frown \mathit{Geométrica}(p)$, $f_X^* = f_X$ e $p_Y^* = p_Y$, são "auto-duais". Adiante usaremos funções características para estabelecer que se trata de uma caracterização da exponencial entre as absolutamente contínuas, e da geométrica entre as discretas, respectivamente. Tem, no entanto, interesse considerar relações menos fortes na família das Paretos generalizadas, e outras famílias com esta relacionadas, que abordamos adiante.

No caso de $X \frown \mathit{Poisson}(\lambda)$, a conjugada X^* tem uma interpretação simples em termos de modelos hierárquicos: corresponde a uma filtragem ("*thinning*") da Poisson por uma uniforme discreta. O objectivo desta nota é relacionar a dualidade, entendida na acepção que aqui apesentamos, com somas aleatórias, um tema de crescente importância em modelação estatística.

2. Densidades Duais — Alguns Exemplos

Apresentamos seguidamente, com os comentários adequados, algumas densidades (no sentido geral: função densidade de probabilidade no caso absoluamente contínuo, função massa de probabilidade no caso discreto) duais.

1. **Família das Pareto**

   - **Pareto clássica**

     De seguida vamos tentar encontrar a função dual para a distribuição Pareto. A função densidade de probabilidade da Pareto é dada por:

     $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}} & \text{se } x \geq \alpha \\ 0 & \text{se } x < \alpha \end{cases}$$

     como $\alpha, \beta > 0$.

A média de uma v.a. com distribuição Pareto de parâmetros α e β é dada por

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\beta\alpha}{\beta - 1} \ .$$

A função de distribuição é dada por

$$F(x) = 1 - \frac{\alpha^\beta}{x^\beta}.$$

Calculemos agora a função dual.

$$f^*(x) = \frac{1 - 1 + \frac{\alpha^\beta}{x^\beta}}{\frac{\beta\alpha}{\beta-1}} = \frac{\frac{\alpha^\beta}{x^\beta}}{\frac{\beta\alpha}{\beta-1}}$$

$$\Leftrightarrow f^*(x) = \frac{\beta - 1}{x^\beta}\left(\frac{\beta\alpha^\beta}{\alpha}\right) = \frac{\beta - 1}{x^\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta^{-\frac{1}{\beta-1}}}\right)^{\beta-1}$$

Ou seja, a variável X^* tem distribuição Pareto $\left(\beta - 1, \frac{\alpha}{\beta^{-\frac{1}{\beta-1}}}\right)$.

- **Pareto Generalizada**

Consideremos agora uma v.a. X com distribuição de Pareto, i.e., $X \frown Pareto(\alpha)$. Consideremos a seguinte reprametrização da função de distribuição

$$F_X(x) = 1 - (1 + \gamma x)^{-1/\gamma} \text{ com } x > 0 \ , \delta \in \mathbb{R} \text{ e } 1 + \gamma x > 0 \ .$$

Vamos calcular a $\mathbb{E}(X)$ recorendo ao resultado para v.a. positivas em que

$$\mu_X = \int_0^\infty (1 - F_X(x)\mathrm{d}x) \quad .$$

Prova-se que a esperança de X só existe no caso em que $0 < \gamma < 1$, tendo-se neste caso

$$\mu = \int_0^\infty (1 - \gamma x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\gamma - 1}\left[(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}\right]$$

$$\Leftrightarrow \mu = \frac{1}{1 - \gamma} \quad .$$

Podemos agora calcular a função dual de f_X tendo-se

$$f_X^*(x) = \frac{1 - F_X(x)}{\mu} = \frac{1 - 1 + (1 + \gamma x)^{-1/\gamma}}{1 - \gamma}$$

$$\Leftrightarrow f_X^*(x) = (1 - \gamma)(1 + \gamma x)^{-1/\gamma} \quad .$$

Quando $0 < x < \frac{1}{|\gamma|}$, as expressões que se obtém para a esperança e função dual são iguais às obtidas para o caso $0 < \gamma < 1$.

No modelo Pareto generalizado apresentado anteriormente destinguem-se os três submodelos seguintes :

– $\gamma \to 0$ submodelo Exponencial

$$\omega_0(X) = 1 - e^{-x} \ , \qquad x \geq 0 \ ,$$

– $\gamma > 0$ a pareto usual

$$\omega_{1,\alpha}(X) = 1 - x^{-\alpha} \ , \qquad x \geq 1 \ ,$$

– $\gamma < 0$ uma subclasse da família Beta

$$\omega_{2,\alpha}(X) = 1 - (-x)^{-\alpha} \ , \qquad -1 \leq x \leq 0 \ .$$

Note que α é o parâmetro de escala e é tal que, $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

2. • **Geométrica**

Consideremos o caso de uma variável aleatória com distribuição Geométrica, i.e., $X \sim G(p)$. Se $X \sim G(p)$ então a função massa de probabilidade é dada por

$$\mathbb{P}(X = x) = pq^x, x = 0, 1, 2, ...$$

e a média da variável é

$$\mathbb{E}(x) = \frac{q}{p},$$

onde p é a probabilidade de sucesso e q=1-p . A função de distribuição de X é dada por

$$F(x) = p\frac{1 - q^{x+1}}{1 - q} \ .$$

Calculando agora a função dual obtemos

$$f^*(x) = \frac{1 - p\frac{1-q^{x+1}}{1-q}}{\frac{q}{p}} \Leftrightarrow f^*(x) = \frac{\frac{1-q-p+pq^{x+1}}{1-q}}{\frac{q}{p}} \Leftrightarrow f^*(x) = \frac{p(p - p + pq^{x+1})}{pq}$$

$$f^*(x) = \frac{p^2 q^{x+1}}{pq} \Leftrightarrow f^*(x) = pq^x \ .$$

Também neste caso a função dual coincide com a função massa de probabilidade da variável aleatória.

3. • **Betas**

Quando no caso 1b) trabalhamos com a Pareto generalizada surgiu-nos ,quando $\gamma < 0$, uma subfamília importante— a família das betas. Neste ponto vamos calcular a função dual para duas betas particulares, o caso em que $\alpha = 1$ e o caso em que $\beta = 1$.
Se $X \sim Be(\alpha, \beta)$ a função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases} \ ,$$

com

$$B(\alpha, \beta) = \int_{0^+}^{1^-} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \ .$$

A função distribuição é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)} \displaystyle\int_{0^+}^{x} y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}dy & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \ ,$$

sendo a média dada por

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \ .$$

Vamos tentar calcular a função dual de $f(x)$ quando $\alpha = 1$. Neste caso

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(1-x)^{\beta-1}}{B(1,\beta)} & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases} \ ,$$

e

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{1 + \beta} \ .$$

Como

$$B(1,\beta) = \int_0^1 (1-x)^{\beta-1} \Leftrightarrow B(1,\beta) = \left[-\frac{1}{\beta}(1-x)^{\beta} \right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow B(1,\beta) = \frac{1}{\beta} \ ,$$

tem-se

$$F(x) = \beta \int_0^x (1-y)^{\beta-1} dy \Leftrightarrow F(x) = \beta \left[-\frac{1}{\beta}(1-y)^{\beta} \right]_0^x$$

$$\Leftrightarrow F(x) = 1 - (1-x)^{\beta} \ .$$

Sendo a função dual dada por

$$f^*(x) = \frac{1 - F(x)}{\mu} \Leftrightarrow f^*(x) = \frac{1 - 1 + (1-x)^{\beta}}{\frac{1}{1+\beta}}$$

$$f^*(x) = (\beta + 1)(1-x)^{\beta}$$

Assim a função dual de uma função densidade de probabilidade de uma beta com $\alpha = 1$, é ainda uma beta , i.e.,

$$X^* \frown Beta(1, \beta + 1) \ .$$

De seguida vamos ver o que acontece quando $X \frown Beta(\alpha, 1)$. Neste caso

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}}{B(\alpha,1)} & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases} \ ,$$

e

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha + 1},$$

tendo-se

$$B(\alpha,1) = \int_0^x x^{\alpha-1} \Leftrightarrow B(\alpha,1) = \left[\frac{1}{\alpha} x^{\alpha} \right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow B(\alpha,1) = \frac{1}{\alpha} \ ,$$

e

$$F(x) = \alpha \int_0^x y^{\alpha-1} dy \Leftrightarrow F(x) = [y^{\alpha}]_0^x$$

$$\Leftrightarrow F(x) = x^\alpha \ .$$

A função dual é dada por

$$f^*(x) = \frac{1-F(x)}{\mu} = \frac{1-x^\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha+1}} = \frac{\alpha+1}{\alpha}(1-x^\alpha)$$

$$f^*(x) = \frac{\alpha+1}{\alpha}((1-x^\alpha)^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Neste caso podemos dizer que

$$X^* = (1-X^\alpha)^\alpha \frown Beta(1, \frac{\alpha+1}{\alpha}) \ .$$

Note-se que

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^\alpha < 1 \Rightarrow -1 < -x^\alpha < 0 \Rightarrow 0 < 1-x^\alpha < 1 \Rightarrow 0 < (1-x^\alpha)^\alpha < 1 \ .$$

4. • **Família F de Fisher–Snedecor**
Se $X \frown F(m,n)$, então a v.a.

$$Y = \frac{1}{1+\frac{m}{n}X} \frown Beta\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right) \text{ com } 0 < y < 1 \ .$$

E consequentemente para cada $x > 0$,

$$F_X(x) = 1 - F_Y\left[\frac{1}{1+\frac{m}{n}x}\right] \ .$$

Para $n > 2$ a esperança de X é dada por

$$\mu_X = \mathbb{E}(X) = \frac{n}{n-2} \ .$$

Calculando a função dual de X para $n > 2$ obtém-se

$$f_X^*(x) = \frac{1-F_X(x)}{\mu}$$

$$\Leftrightarrow f_x^*(x) = \frac{1-1+F_Y\left[\frac{1}{1+\frac{m}{n}x}\right]}{\frac{n}{n-2}} \ , \text{ se } n > 2$$

$$\Leftrightarrow f_X^*(x) = \frac{n-2}{n}F_Y\left[\frac{1}{1+\frac{m}{n}x}\right] \text{ para } x > 0 \ .$$

A menos da constante $\frac{n-2}{n}$ a função dual de f_X é função de distribuição de uma Beta$\left(\frac{n}{2}\ , \frac{m}{2}\right)$ no caso em que $n > 2$, pois caso contrário X não tem esperança .

3. Poisson dual e filtragem uniforme discreta

Consideremos a variável aleatória X com distriuição de Poisson , i.e., $X \sim P(\lambda)$, a função massa de probabilidade é dada por :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-k}\lambda^k}{k!} \ , k = 0, 1, 2, ...$$

A função de distribuição é dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{e^{-k}\lambda^k}{k!},$$

e a esperança de X é dada por

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \ .$$

Consideremos a variável aleatória

$$Y|_{X=k} \frown \text{Uniforme discreta no conjunto } \{0,1,...,k\} \ .$$

Tem-se

$$\mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{\lambda} P(X > j) \ .$$

Ou seja, a variável aleatória Y tem função de probabilidade dada por

$$\mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{\lambda} P(X > j)$$

e o conjunto suporte de Y é $\{0, 1, ..., k\}$. Ou seja,

$$\mathbb{P}(Y = j) = \frac{\text{cauda direita da Poisson}}{\text{valor médio da Poisson}} \ .$$

Pegando na igualdade anterior tem-se

$$p_j = \frac{1}{\lambda}(1 - F_X(j)) \Leftrightarrow \lambda p_j = 1 - F_X(j) \Leftrightarrow F_X(j) = 1 - \lambda p_j$$

onde $p_j = \mathbb{P}(Y = j)$.

A dual da função f é dada por

$$f^*(x) = \frac{1 - F_X(x)}{\mu} \Leftrightarrow f^*(x) = \frac{1 - 1 + \lambda p_x}{\lambda} \Leftrightarrow f^*(x) = p_x = \mathbb{P}(Y = x) \ .$$

Mas ,

$$\mathbb{P}(Y = x) = \frac{1}{\lambda} pb(X > x) \ ,$$

ou seja ,

$$f^*(x) = \frac{\text{cauda direita da Poisson}}{\text{valor médio da Poisson}} \ .$$

Note-se que esta interpretação viabiliza o cálculo do valor médio e variância por condicionamento:

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}[Y|X]) = \mathbb{E}\left(\frac{X}{2}\right) = \frac{\lambda}{2}$$

e ,

$$Var(Y) = \mathbb{E}(Var(Y|X)) + Var(\mathbb{E}(Y|X))$$

$$\Leftrightarrow Var(Y) = \mathbb{E}\left(\frac{(X+1)^2 - 1}{12}\right) + Var\left(\frac{X}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow Var(Y) = \mathbb{E}\left(\frac{X^2}{12}\right) + \mathbb{E}\left(\frac{X}{6}\right) + \frac{1}{4}Var(X)$$

$$\Leftrightarrow Var(Y) = \frac{(\lambda + \lambda^2) + 2\lambda + 3\lambda}{12} \Leftrightarrow Var(Y) = \frac{\lambda^2 + 6\lambda}{12} \ .$$

4. Funções características e dualidade

As variáveis duais também podem ser caracterizadas pelas suas funções características .

Seja $X \geq 0$ com função densidade $F_X(x)$, função característica $\varphi_x(t)$, e suponha-se que existe $\mu_X = \mathbb{E}(x) < \infty$. Então existe uma variável aleatória Y com função densidade de probabilidade

$$f_Y(x) = \frac{1 - F_X(y)}{\mu_X} I_{(0,\infty)} \ .$$

Calculemos a função característica de Y .

$$\varphi_Y(t) = \int_0^\infty e^{ity} \frac{1 - F_X(y)}{\mu_X} dy = \frac{1}{\mu_X} \left[\left[\frac{e^{ity}}{it} (1 - F_X(y)) \right]_0^\infty + \frac{1}{it} \int_0^\infty e^{ity} f_X(y) dy \right]$$

$$\Leftrightarrow \varphi_Y(t) = \frac{1}{\mu_X} \left[-\frac{1}{it} + \frac{1}{it} \varphi_X(t) \right] \Leftrightarrow \varphi_Y(t) = \frac{\varphi_X(t) - 1}{it\mu_x} \ .$$

No caso discreto tem-se que $X \geq 0$ com função densidade F_X , função característica φ_X e suponhamos que existe $\mu_X = \mathbb{E}(X) < \infty$. Então existe uma variável aleatória com função massa de probabilidade dada por

$$p_k = p(x_k) = \frac{\mathbb{P}(X \geq x_k)}{\mu} = \frac{1 - F_X(x_{k-1})}{\mu} \ , \text{ com } x_k = 0, 1, 2, \ldots \ .$$

Calculando a função característica de Y vamos obter

$$\varphi_Y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{itk}}{\mu} \mathbb{P}(X \geq K) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \ ,$$

com

$$a_k = \frac{\mathbb{P}(X \geq k)}{\mu} \text{ e } z = e^{it} \ .$$

A série anterior é uma série de potências , logo os coeficientes a_k são únicos . Assim , os coeficientes a_k determinam completamente a distribuição de X através da relação

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \mu a_k \ ,$$

supondo que X é discreta de suporte nos inteiros não negativos .

Se $X \frown Exponencial(\alpha)$a sua função característica é dada por :

$$\varphi_X(t) = \int_0^\infty e^{itx} \alpha e^{-\alpha x} dx$$

$$\Leftrightarrow \varphi_X(t) = \alpha \int_0^\infty e^{-(\alpha - it)x}$$

$$\Leftrightarrow \varphi_X(t) = \left[\frac{-\alpha}{\alpha - it} e^{-(\alpha - it)x} \right]_0^\infty$$

$$\Leftrightarrow \varphi_X(t) = \frac{\alpha}{\alpha - it} \ .$$

Vamos calcular a função característica de $X \frown$ Geométrica(p)

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} p(1-p)^k \Leftrightarrow \varphi_X(t) = p \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}(1-p)^k \ ,$$

que é uma série de potências de razão igual a $e^{it}(1-p)$ e cujo primeiro termo é um. A soma da série é dada por

$$\varphi_X(t) = \frac{p}{1 - e^{it}(1-p)} \ .$$

Ou seja ,

$$a_0 = p \ , a_1 = p(1-p) \ , a_2 = p(1-p)^2 ...$$

a Caracterização da exponencial e geométrica pela auto-dualidade

Vamos provar que a exponencial é a única distribuição contínua tal que $f(x) = f^*(x)$. Consideremos uma variável aleatória X positiva, com função distribuição $F(x)$ e valor médio α, vamos provar que se $f(x) = \frac{1-F(x)}{\alpha}$ então $X \frown EXP(\alpha)$. Tem-se

$$\frac{1-F(x)}{\alpha} = f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{f(x)}{1-F(x)}.$$

Se integrarmos a expressão anterior obtemos

$$-ln(1-F(x)) = \frac{x}{\alpha} + c \Leftrightarrow ln(1-F(x)) = -\frac{x}{\alpha} + c'$$

$$\Leftrightarrow 1 - F(x) = e^{-\frac{x}{\alpha}+c'} \Leftrightarrow F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\alpha}} e^{c'}$$

Seja $k = e^c$, temos que

$$F(x) = 1 - ke^{-\frac{x}{\alpha}}.$$

Mas $F(0) = 0$ donde

$$F(0) = 1 - k = 0 \Leftrightarrow k = 1,$$

ou seja,

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\alpha}} I_{(0,+\infty)},$$

isto é,

$$X \frown EXP(\frac{1}{\alpha}).$$

Provemos agora que a distribuição geométrica é a única distribuição discreta que verifica $f(x) = f^*(x)$. Para tal vamos recorrer a um teorema que diz o seguinte:

Seja X uma variável aleatória de valores inteiros não negativos que satisfaz

$$\mathbb{P}(X > m + n \setminus X > m) = \mathbb{P}(X \geq n)$$

para quaisquer m e n inteiros positivos.Então X tem distribuição geométrica.

Tem-se que

$$f(x) = \frac{1-F(x)}{\mu} \Leftrightarrow F(x) = 1 - \mu f(x) \Leftrightarrow \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - \mu \mathbb{P}(X = x)$$

Por outro lado,

$$\mathbb{P}(X > m + n \setminus X > m) = \frac{\mathbb{P}(X > m + n \bigcap X > m)}{\mathbb{P}(X > m)} = \frac{\mathbb{P}(X > m + n)}{\mathbb{P}(X > m)}$$

$$= \frac{1-\mathbb{P}(X \le m+n)}{1-\mathbb{P}(X \le m)} = \frac{1-1+\mu\mathbb{P}(X=m+n)}{1-1+\mu\mathbb{P}(X=m)} = \frac{p_{m+n}}{p_m} \; .$$

Como,

$$p_k = P(X=k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k) \Leftrightarrow p_k = \sum_{i=k}^{\infty} \mathbb{P}(X=i) - \sum_{j=k+1}^{\infty} \mathbb{P}(X=j)$$

$$\Leftrightarrow p_k = q_{k-1} - q_k \text{ com } \mathbb{P}(X > m) = q_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} p_k \; .$$

Tem-se que

$$\mathbb{P}(X > m+n \setminus X > m) = \frac{q_{m+n-1} - q_{m+n}}{q_{m-1} - q_m} \; .$$

Atendendo à notação introduzida anteriormente podemos escrever

$$\mathbb{P}(X > m+n \setminus X > m) = \frac{\mathbb{P}(X > m+n)}{\mathbb{P}(X > n)} = \mathbb{P}(X \ge n) = \frac{q_{m+n}}{q_n}$$

donde

$$q_{m+n} = q_m q_{n-1} \text{ e } q_{m+1} = q_m q_0,$$

com

$$q_0 = p(X > 0) = p_1 + p_2 + p_3 + ... + = 1 - p_0 \Leftrightarrow q_0 = 1 - p_0.$$

Prova-se que

$$q_k = (1-p_0)^k.$$

Assim,

$$q_{k-1} - q_k = (1-p_0)^{k-1} - (1-p_0)^k = (1-p_0)^{k-1}(1-1+p_0) \; ,$$

ou seja,

$$p_k = q_{k-1} - q_k = p_0(1-p_0)^{k-1}.$$

Tem-se então que

$$\mathbb{P}(X > m+n \setminus X > m) = \frac{q_{m+n-1} - q_{m+n}}{q_{m-1} - q_m} = \frac{p_0(1-p_0)^{m+n}}{p_0(1-p_0)^m} = (1-p_0)^n = q_{n-1}.$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(X > m+n \setminus X > m) = \mathbb{P}(X > n)$$

Ou seja, X^* tem distribuição geométrica.

b Fórmulas de Pollaczeck–Khinchine e de Beckman, e interpretação probabilística da dualidade

Seja $N \frown$Geometrica(1-p) com N a tomar os valores $0, 1, 2, ...$ com probabilidade $p_k = (1-p)p^k$ e $S_N = \sum_{k=0}^{N} y_k$, onde os y_k são réplicas independentes de Y, e N é independente dos y_k. Então

$$\varphi_S(t) = \mathbb{E}(e^{itS_N}) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}[e^{itS_N} | N=n](1-p)p^n = \frac{1-p}{1-p\frac{\varphi_X(t)-1}{i\mu_X t}} \; .$$

Esta é a célebre fórmula de Pollaczeck–Khinchine por eles deduzida num contexto completamente diferente : seja o tempo de serviço numa fila de espera (FIFO) T , com $\mathbb{E}(T) = \mu_T < \infty$ e $n\mu_T = p$ o período de ocupação médio numa unidade de tempo . (Assume-se que $p < 1$, caso contrário a fila de espera crece indefinidamente) . Um cliente que se junte à fila de espera no instante $t > 0$, tem que esperar W (waiting time) até ser servido . A caracterização do tempo de espera W foi feita por Pollaczeck–Khinchine em termos de função característica

$$\varphi_W(t) = \frac{1-p}{1-p\frac{\varphi_T(t)-1}{i\mu_T t}} \quad .$$

Assim, o que estabelecemos acima foi que o problema de Pollaczeck–Khinchine tem a mesma solução que a soma aleatória (geométrica) de parcelas com distribuição conjugada no sentido de

$$f_Y(y) = \frac{1-F_X(y)}{\mu_X} \ .$$

Considere-se, agora, o processo de risco clássico

$$Z(t) = ct - \sum_{k=1}^{N(T)} X_K \ ,$$

com $Z(0) = 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} X_K = 0$, $N(t)$ e $X_k's$ independentes. Z(t) é a reserva de uma companhia de seguros no instante t , os X_k são as indeminizações pagas em [0,t] . Note-se que $N(t)$ é um processo de Poisson homogéneo .

Consideremos X_k cópias independentes de X com f.d. F_X e $\mathbb{E}(X) = \mu < \infty$. Seja u o capital inicial da companhia de seguros. A probabilidade de ruína, como função de u , é

$$\psi(u) = \mathbb{P}[u + Z(t) < 0 \text{ para algum } t > 0] \ .$$

Reescreva-se $c = (1+\theta)\mu_X\lambda$ na definição $Z(t) = ct - \sum_{k=1}^{N(T)} X_K$, e defina-se

$$L = sup_{t>0} \sum_{i=1}^{N(t)} -(1+\theta)\mu_X t = sup_{t>0} - Z(t) \ ,$$

que é a perda agregada máxima. Como $Z(0) = 0$, $L \geq 0$ q.c. . Notando que

$$1 - \psi(u) = \mathbb{P}[u + Z(t) \geq 0 \text{ para algum } t > 0]$$

$$= \mathbb{P}[u + (1+\theta)\mu_X\lambda t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \geq 0, \forall t > 0]$$

$$= \mathbb{P}[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i - (1+\theta)\mu_X\lambda t \leq u, \forall t > 0] = \mathbb{P}[L \leq u] \ .$$

A probabilidade de ruína pode então ser representada sob a forma

$$\mathbb{P}[L > u] = 1 - \frac{\theta}{1+\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{*n}(u)}{(1+\theta)^n} \ ,$$

onde $H^{*0}(u) = H(u)$ é a função de Heaviside e para $n = 1, 2, ...$

$$H^{*n} = \frac{1}{\mu_X} \int_0^u H^{*(n-1)}(u-x)[1 - F_X(x)]\mathrm{d}(x), u \geq 0,$$

que é fórmula de Beckman para a probabilidade de ruína .

A fórmula de Beckman implica que

$$L = L_1 + ... + L_N^* \text{ em distribuição },$$

com $N^*, L_!, ..., L_N^*$ independentes e $N \frown$ Geométrica(p) com $p = \frac{\theta}{1+\theta}$ i.e.,

$$N^* = \begin{cases} j & \text{j=0,1,...} \\ \dfrac{\theta}{(1+\theta)^{j+1}} & \end{cases},$$

onde as variáveis aleatórias L_K são i.i.d com densidade

$$f_L(x) = \frac{1 - F_X(x)}{\mu_X},$$

i.e., L_K têm distribuição conjugada.

Agradecimento: Agradecemos as sugestões de S. Velosa, que permitiram ultrapassar de forma simples um ponto obscuro.

Bibliografia

Pestana, D.D. e Velosa, S.F.(2002). Introdução à Probabilidade e Estatística, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

Khintchine,A.Y. (1960), Mathematical Methods in the Theory of Queueing, M.G. Kendall,Sc.D.,London.

Rohatgi,V.K.(1975).An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics, John Wiley and Sons, New York.