O Teorema das Quatro Cores

LURDES SOUSA
Departamento de Matemática,
Escola Superior de Tecnologia de Viseu

"A imaginação é mais importante do que o conhecimento."
Albert Einstein

"O poder da Matemática reside na evasão a todo o pensamento supérfluo e na prodigiosa economia de operações mentais."
Ernst Mach

1. Introdução

O Problema das Quatro Cores trata da determinação do número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa, de países reais ou imaginários, de forma a que países com fronteira comum tenham cores diferentes. Em 1852, Francis Guthrie conjecturou que 4 era esse número mínimo. Mas, não obstante a aparente simplicidade, só ao cabo de mais de cem anos, em 1976, se conseguiu provar que realmente a conjectura estava certa, obtendo-se o chamado Teorema das Quatro Cores.

O Problema das Quatro Cores tem a característica indubitavelmente fascinante de ser um problema matemático de formulação muito simples, a par duma enorme complexidade de resolução, que fez com que permanecesse por resolver durante mais de uma centena de anos. Há outros assim; por exemplo, é bem sabido que o famoso Último Teorema de Fermat só há escassos anos foi demonstrado.

Muitos dos melhores matemáticos do século XX trabalharam seriamente neste problema. Este estudo teve um papel muito importante no desenvolvimento da Teoria dos Grafos. Pelo caminho muitas questões foram postas e vários problemas relacionados foram resolvidos.

Neste artigo, começa-se por fazer uma apresentação do problema, dá-se uma breve história dos seus desenvolvimentos. De seguida recordam-se alguns conceitos e propriedades sobre grafos e mostra-se como a Teoria dos Grafos se relaciona com o Problema das Quatro Cores. Avança-se com a descrição da demonstração do Teorema das Quatro Cores feita por Kempe. Esta demonstração estava errada como veio a ser descoberto por Heawood. Mas ela encerrava já as ideias base que inspiraram mais tarde a demonstração de Appel e Haken, em 1976, de que se fala na Secção 7. Apesar de finalmente provado, não era ainda o fim da história do Teorema das Quatro Cores...

2. Apresentação do Problema

Pretendemos determinar o número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa de forma que quaisquer dois países contíguos tenham cores diferentes. Consideremos, por exemplo, os dois mapas da Figura 1. É fácil ver que bastam duas cores para colorir cada um deles.

Para os mapas da Figura 2, duas cores já não chegam, sendo três suficientes, como se ilustra[1].

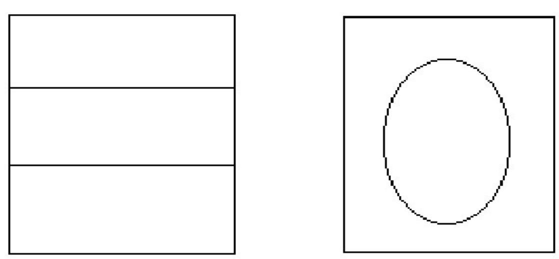

Figura 1

[1] Ao longo de todo este artigo, por razões de ordem tipográfica, as cores foram substituídas por padrões a preto e branco ou diferentes tons de cinza.

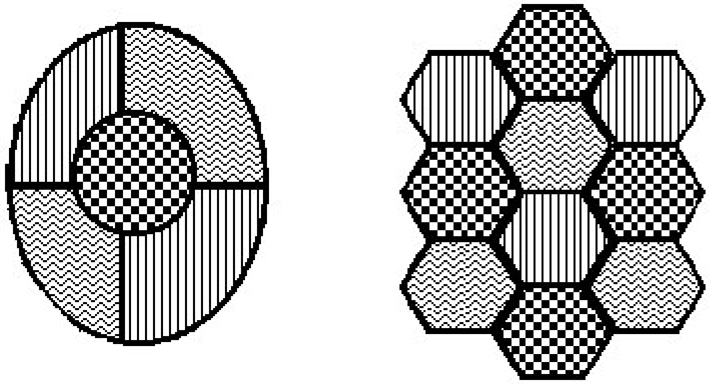

Figura 2

Rapidamente se conclui que para os mapas da Figura 3, três cores são insuficientes.

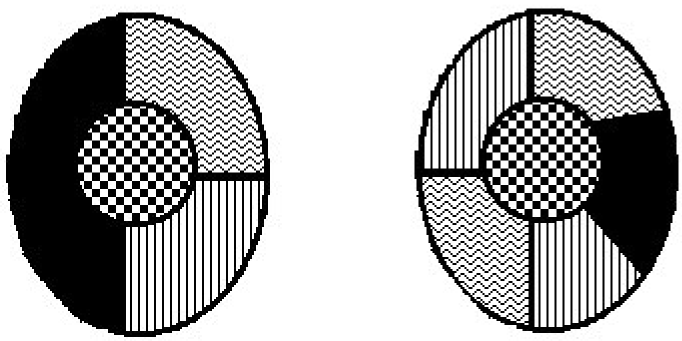

Figura 3

Apesar de hoje sabermos que quatro cores bastam, nem sempre é imediato encontrar um processo de colorir um dado mapa com apenas quatro cores. Sugere-se ao leitor que tente fazê-lo com o mapa da Figura 4.

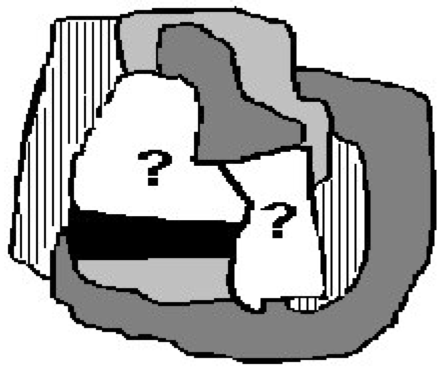

Figura 4

Esta dificuldade inspira alguns jogos sobre coloração de mapas. A seguir, apresentam-se dois exemplos.

Jogo1: Dois jogadores, A e B têm quatro lápis de cores diferentes e um mapa não colorido. Cada um dos jogadores pinta sucessivamente uma região do mapa. Perde o primeiro que não consiga colorir adequadamente nenhuma das regiões ainda sem cor.

Jogo 2: Dois jogadores, A e B têm quatro lápis de cores diferentes e uma folha de papel em branco. O jogador A desenha um país. O jogador B põe-lhe uma cor e desenha outro país que faça fronteira com o anterior. E assim sucessivamente. Perde o primeiro que não consiga colorir adequadamente o país proposto.

Deixamos também a proposta de alguns exercícios.

Exercício 1: Colorir as várias regiões de Portugal assinaladas na Figura 5, usando apenas 4 cores.

Figura 5

<u>Exercício 2</u>: Encontrar um algoritmo para colorir com apenas 4 cores mapas com um certo tipo de configuração, por exemplo, constituídos por sucessivas coroas circulares divididas num número par ou ímpar de países, como ilustrado na Figura 6. Pode começar-se por um caso mais simples: considerar apenas os mapas desta forma tais que cada coroa circular está particionada num número par de partes.

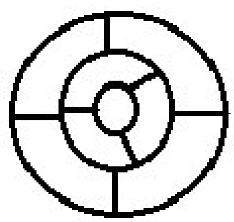

Figura 6

Acabamos de lidar com alguns mapas, mas é concerteza forçoso precisar a que tipo de mapas nos estamos a referir. Antes de mais, estamos a falar de mapas na esfera ou no plano, o que vem ao encontro da nossa ideia de mapa da geografia do globo terrestre. Estudar o problema na esfera ou no plano é equivalente. Basta pensar na coloração dos países num globo terrestre ou num planisfério, trata-se essencialmente do mesmo. Sem pretendermos definir com rigor o alcance de tal equivalência, vamos ilustrá-la com outro exemplo. Suponhamos que temos um mapa na esfera, de países imaginários, representando a Figura 7 duas faces dessa esfera. Se fizermos um corte no meio do país A, e supondo que a esfera é feita de um material suficientemente maleável, podemos deformá-la até ficar plana, sem alterar as relações de fronteira entre países, obtendo então um mapa plano, como ilustrado na Figura 8.

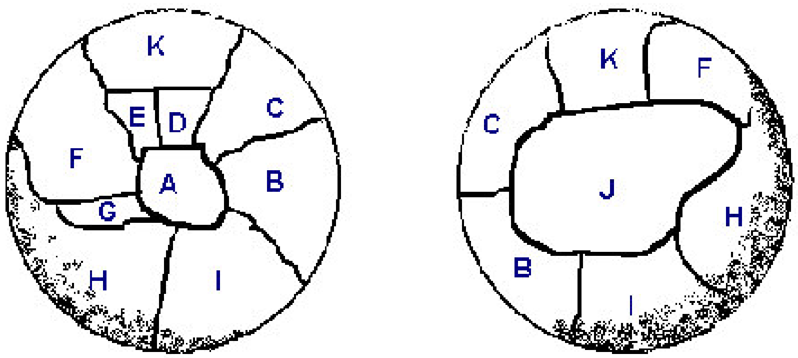

Figura 7

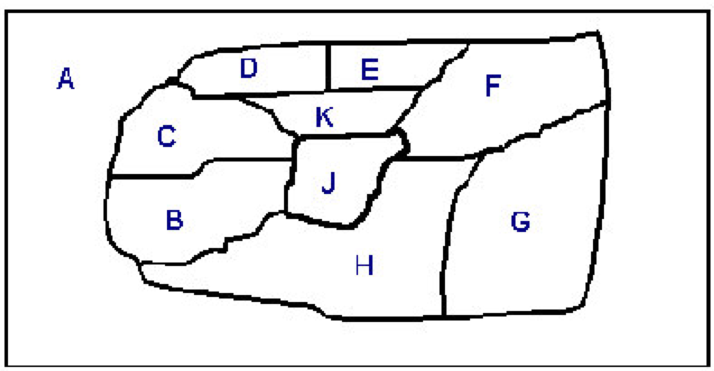

Figura 8

Podemos obter um efeito similar fazendo uma projecção da esfera no plano, como se um foco de luz no pólo norte projectasse a sombra do mapa na esfera sobre o plano (Figura 9).

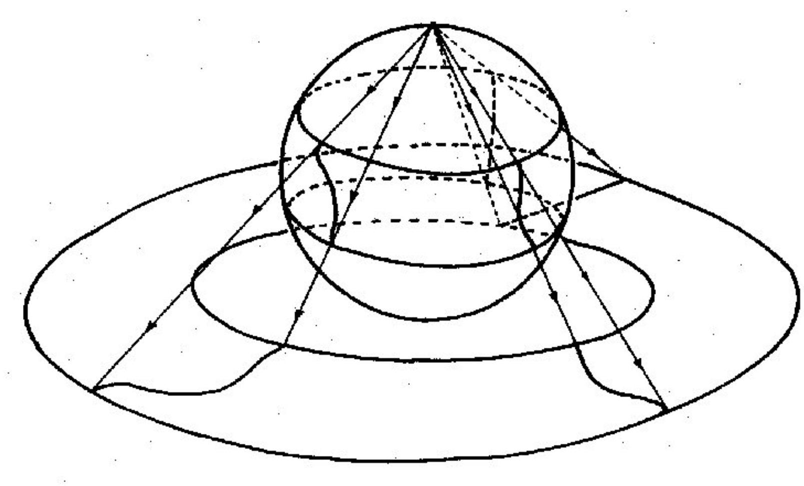

Figura 9

Por outro lado, consideremos o mapa da Figura 10, com cinco países, A, B, C, D e E, onde os países A e B têm partes separadas. É fácil deduzir não ser possível colori-lo com apenas 4 cores, visto que ambas as partes de A, assim como ambas as partes de B, devem ter a mesma cor.

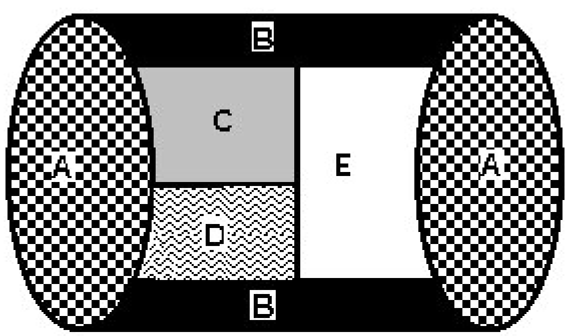

Figura 10

Na verdade, não é difícil concluir que, se admitirmos que os mapas podem ter países com partes separadas, então para qualquer número natural n existem sempre mapas que precisam de n cores. Portanto, o nosso problema só faz sentido se excluirmos este tipo de mapas.

3. Notas históricas

A história do problema das quatro cores começou em 1852, quando Francis Guthrie tentava colorir os vários distritos do mapa de Inglaterra de tal modo que dois distritos vizinhos não tivessem a mesma cor. Depois de ter reflectido sobre o problema, conjecturou que qualquer mapa poderia ser colorido com apenas quatro cores. Francis Guthrie, que foi advogado, botânico e, sobretudo, matemático, tinha um irmão mais novo, Frederick Guthrie, que era aluno de Augustus De Morgan (o De Morgan das conhecidas leis de De Morgan, na Lógica). Em 23 de Outubro de 1852, Frederick apresentou a conjectura do seu irmão mais velho ao professor de De Morgan. Este ficou muito entusiasmado e, no mesmo dia, escreveu uma carta a Sir William Rowan Hamilton na qual explicava o problema. (Recorde-se a propósito que, de entre os vários feitos famosos de Hamilton, se encontra a descoberta dos quaterniões). Esta carta foi conservada e encontra-se hoje nos arquivos do Trinity College em Dublin. Contrastando com a animação de De Morgan, Hamilton não achou o problema interessante. Respondeu quatro dias mais tarde dizendo que tão cedo não tencionava debruçar-se sobre a questão.

Nos tempos que se seguiram, foi sobretudo através de De Morgan que a comunidade científica tomou conhecimento da Conjectura das Quatro Cores. De Morgan escreveu algumas cartas para outros matemáticos conhecidos, o problema foi discutido e teve alguns desenvolvimentos. Por exemplo, De Morgan ocupou-se durante algum tempo com a questão de saber se quando 4 países têm dois a dois fronteiras comuns, um deles tem de estar dentro dos outros três.

Depois de 1860, por um período de cerca de 20 anos, o interesse dos matemáticos pelo Problema das Quatro Cores esmoreceu. Pelo menos, não aparece discutido na literatura matemática desse tempo. Mas não foi esquecido. Com efeito, em 13 de Julho de 1878, Arthur Cayley indagava na secção de Matemática da Royal Society se porventura alguém já submetera uma solução da Conjectura das Quatro Cores. O próprio Cayley publicou uma pequena análise do problema nos *Proceedings of the Royal Geographical Society* em 1879. Caley era um advogado brilhante, mas aproveitava todo o tempo que podia para a Matemática. Entre outras áreas, contribuiu significativamente para o desenvolvimento da Geometria Algébrica.

Em 1879, Alfred Bray Kempe, que era também um advogado e que tinha estudado no Trinity College de Cambridge, onde fora aluno de Cayley, publicou uma demonstração completa do Teorema das Quatro Cores no *American Journal of Mathematics*. A demonstração de Kempe foi estudada por vários matemáticos de renome, alguns deles tendo feito sugestões para melhorar a demonstração. Portanto, em 1879, considerava-se definitivamenete estabelecido o Teorema das Quatro Cores.

Mas, em 1890, Percy John Heawood provou que a demonstração de Kempe tinha um erro. No mesmo artigo, Heawood lamentava não ter sido capaz de obter nenhuma demonstração alternativa do teorema. Conseguiu no entanto dar mais um passo positivo, nomeadamente, provou o Teorema das Cinco Cores. Isto é, demonstrou que não são necessárias mais do que cinco cores para colorir um mapa plano onde países de fronteira comum têm cores diferentes. Heawood estudou também a questão do número de cores necessárias para colorir mapas sobre vários tipos de superfícies fechadas, para além da esfera, as chamadas superfícies esféricas com "asas", como ilustrado na Figura 12 da Secção 4. Estas questões também já tinham sido abordadas por Kempe.

Heawood deu um contributo relevante no estudo destes problemas. E, surpreendentemente, eles foram resolvidos antes do Problema das Quatro Cores. Contribuições de vulto nestes assuntos foram dadas por Gerhard Ringel e J.W.T. Youngs e também por Jean Mayer. Na secção seguinte, é dada uma ideia de alguns dos resultados a que estes matemáticos chegaram.

Durante 124 anos, muitos métodos foram desenvolvidos para atacar o Problema das Quatro Cores. O livro de Ore de 1967 [O] dá uma panorâmica bastante completa do muito que se produzira até à data em Teoria de Grafos para abordar o Problema, bem como de vários outros problemas que foram sendo solucionados nesse percurso.

Finalmente, em 1976, com a ajuda de um IBM 360, em Urbana (Illinois), Kenneth Appel e Wolfgang Haken apresentaram uma demonstração do Teorema das

Quatro Cores. Quando a notícia do feito se espalhou pelos vários departamentos de matemática, houve um enorme entusiasmo, muitos professores interromperam as aulas para comemorar. Mas a euforia esfriou em muitos deles quando souberam que essa demonstração incluía mais de mil horas do uso de computadores de alta velocidade. A prova era demasiado longa para ser verificada à mão e havia sempre a possibilidade de os computadores terem cometido algum erro de difícil detecção. Hoje em dia a validade da demonstração é aceite na generalidade da comunidade matemática, mas continua a ser polémica. Está em causa o reconhecer uma argumentação baseada numa enorme quantidade de cálculos por computador, impossíveis de ser verificados detalhadamente por um ser humano durante toda a sua vida.

Nunca é demais lembrar que muitos foram os matemáticos que contribuíram com o seu trabalho para o feliz desfecho de 1976. Para além dos nomes já referidos e de muitos outros que não cabe aqui enumerar, assinala-se o facto de Birkhoff e Heesch terem contribuído com ideias que foram cruciais na obtenção da prova de Apple e Haken. O nome de John Koch está também ligado a esta memorável descoberta, tendo trabalhado com Appel e Haken nos programas computacionais que levaram à solução do Problema das Quatro Cores.

Mas a história do Teorema das Quatro Cores não acaba aqui. A dificuldade em verificar todos os cálculos feitos na demonstração de Apple e Haken tem sido um incentivo para alguns matemáticos tentarem encontrar uma prova mais simples. Em Agosto de 1994, no Congresso Internacional de Matemática, em Zurique, Paul D. Seymour apresentou uma prova simplificada do Teorema das Quatro Cores, cuja formulação foi o resultado de trabalho conjunto com Neil Robertson, Daniel P. Sanders e Robin Thomas [RSST]. Também eles não conseguiram dispensar o uso do computador. Contudo, foram capazes de reduzir a quantidade de cálculos para um nível bastante mais tolerável. Aqueles que tenham os programas ao seu dispor e que tenham compreendido os fundamentos teóricos, poderão em menos de um dia reproduzir a demonstração. A questão de construir uma demonstração que não necessite o auxílio de computadores continua em aberto!

4. Número cromático

Vários matemáticos distintos acreditavam que o Teorema das Quatro Cores era verdadeiro e tentaram prová-lo. Pouco a pouco foram aparecendo demonstrações da sua validade para mapas com um certo número de países. O Quadro 1 dá conta do ano e dos matemáticos que provaram o Teorema das Quatro Cores para todos os mapas com um número de países menor ou igual que um dado n.

Quadro 1

Ano	Autor	n
1920	Philip Franklin	25
1926	C. N. Reynolds	27
1936	Philip Franklin	31
1938	C. E. Winn	35
1968	Oystein Ore e Joel Stemple	40

Foi referido na secção anterior que vários outros problemas relacionados com este foram investigados. Em particular, a questão do número de cores necessárias para colorir mapas sobre vários tipos de superfícies fechadas, para além da esfera, as chamadas superfícies esféricas com "asas". Na Figura 12 estão representadas a superfície S_0, que é uma esfera (sem "asas"), a superfície S_1, que é a esfera com uma asa, e as superfícies S_2 e S_3. De um modo geral, para cada número natural n, uma superfície S_n é uma esfera com n "asas". De notar que estudar o problema para a esfera com uma "asa" é equivalente a estudá-lo para o *torus* (Figura 13), que é uma superfície com a forma de um pneu.

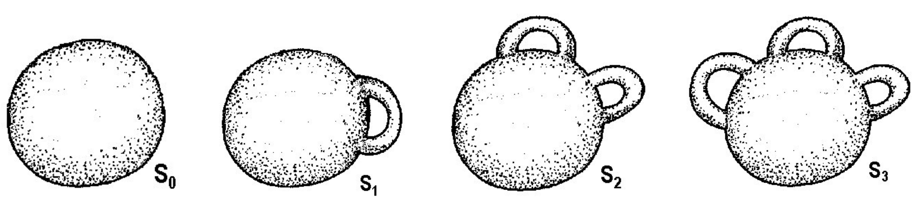

Figura 12

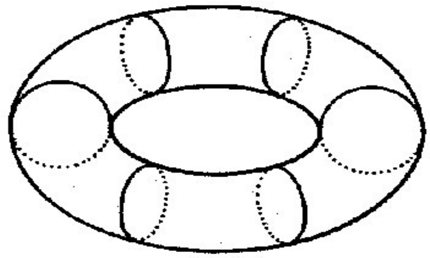

Figura 13

Chama-se *número cromático* de uma superfície *S*, e designa-se por $\chi(S)$, ao número mínimo de cores necessárias para colorir qualquer mapa sobre *S*. Portanto o Teorema das Quatro Cores asserta precisamente que o número cromático de S_0 é igual a 4.

Heawood descobriu que, para $p \geq 1$, o número cromático da superfície S_p satisfaz a desigualdade

$$\chi(S_p) \leq \left[\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\right],$$

onde $[x]$ designa a *característica* do número x, ou seja, o maior número inteiro que não é maior do que x. Heawood tinha a impressão de que se verificava mesmo a igualdade, mas não conseguiu demonstrá-lo. Finalmente, em 1968, Ringel e Youngs provaram o que já Heawood intuíra, ou seja, que, para $p \geq 1$, se verifica

$$\chi(S_p) = \left[\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\right]. \tag{1}$$

O Quadro 2 a seguir indica o número cromático de S_p para $1 \leq p \leq 19$, obtido pela fórmula (1). De notar que o Teorema das Quatro Cores, que só veio a ser provado mais tarde, estabelece afinal que a fórmula também é válida para $p = 0$. Na verdade, substituindo, em (1), p por 0, obtém-se o número 4.

Quadro 2

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\chi(S_p)$	7	8	9	10	11	12	12	13	13

5. Mapas e Grafos

Já vimos que o Problema das Quatro Cores diz respeito a mapas sobre uma esfera ou sobre o plano. Já vimos que esses mapas não podem ter países com partes separadas. Mas, para estudar o problema com rigor, é necessário ser mais preciso na definição de mapa. Para isso, vamos considerar uma estrutura mais geral, o conceito de grafo.

Um *grafo* é constituído por um conjunto finito de *vértices* e um conjunto finito de *arcos* (ou *arestas*) que ligam pares de vértices. Por exemplo, na Figura 14 está representado um grafo com 4 vértices e 6 arestas.

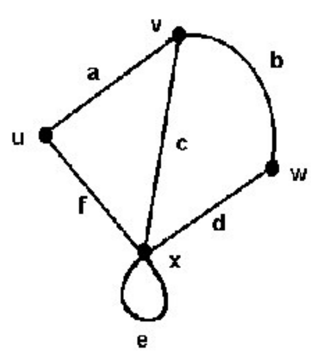

Figura 14

O *grau de um vértice* é o número de arcos que se intersectam nesse vértice. No grafo da Figura 14, o vértice *u* tem grau 2 e o vértice *v* tem grau 3.

Um *lacete* é um arco com as duas extremidades no mesmo vértice. Dois vértices dizem-se *adjacentes* se estiverem ligados por um arco. Na Figura 14, o arco *e* é um lacete e os vértices *u* e *v* são adjacentes.

Num grafo, um *caminho* de um vértice *u* para um vértice *v* é uma sequência finita de arcos que ligam *u* a *v*. Por exemplo, no grafo da Figura 14, a sequência $\langle c,b \rangle$ é um caminho de *x* para *w*. Um grafo diz-se *conexo* se para quaisquer dois vértices diferentes do grafo existir sempre um caminho que os liga. A Figura 15 apresenta exemplos de grafos, um desconexo, o outro conexo.

Figura 15

A Figura 16 apresenta vários exemplos de grafos. Note-se que ela contém alguns grafos que apesar de parecerem diferentes são na verdade essencialmente iguais. A aparente diferença prende-se com a maneira como estão desenhados.

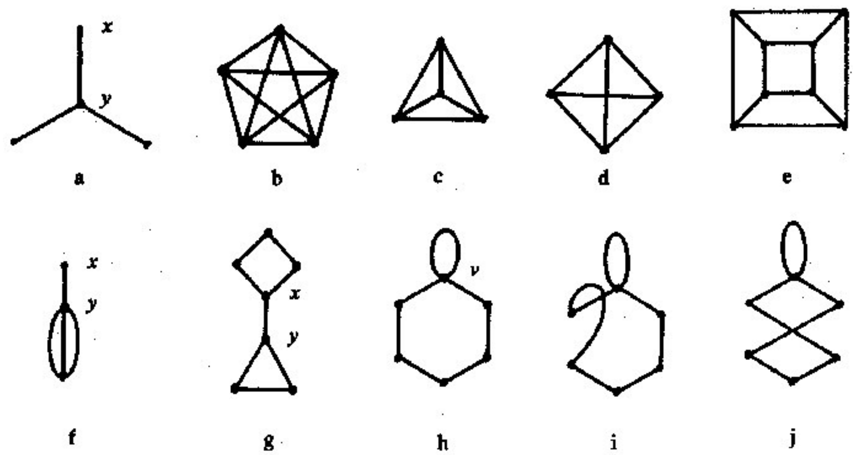

Figura 16

Por exemplo, os grafos *c* e *d* são essencialmente o mesmo. Com efeito, ambos têm 4 vértices e 6 arestas, de tal modo que cada vértice está ligado a cada um dos outros por um arco.

Como é que um mapa é um grafo? Consideremos, por exemplo, o mapa representado à esquerda na Figura 17.

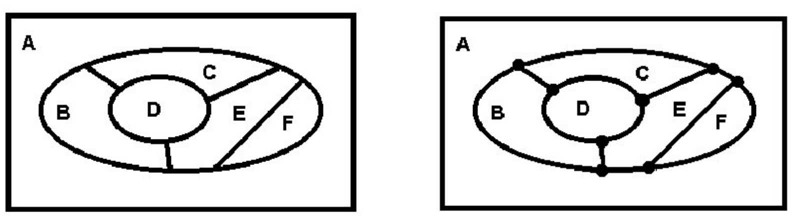

Figura 17

Tomando, para vértices, os pontos de intersecção de fronteiras e, para arcos, as fronteiras que ligam esses vértices, temos um grafo, como ilustrado à direita da mesma figura. Esse grafo tem uma propriedade especial, é planar. Um *grafo planar* é um grafo que pode ser desenhado no plano de forma que os arcos não se intersectem a não ser nos vértices. Como facilmente se conclui, todo o mapa no plano é um grafo planar.

Um grafo planar particiona o plano em regiões conexas, chamadas as *faces* do grafo. Num mapa as faces são exactamente os países.

Nem todos os grafos são planares. Por exemplo, o grafo *b* da Figura 16 não é planar. Note-se ainda que nem todos os grafos planares são mapas; por exemplo, o grafo *g* é planar mas não é um mapa.

Voltando à Figura 17, ela mostra como é que um mapa pode ser identificado com um grafo. Mas a este mapa podemos associar outro grafo, o chamado *grafo dual*. No grafo dual, os vértices vão ser os países e existe um arco entre dois vértices se e só se os dois países têm fronteira comum. Podemos imaginar que os arcos são estradas entre as capitais de países contíguos; deste modo, as capitais são os vértices e cada estrada entre uma capital e outra é um arco. Este processo está ilustrado na Figura 18, onde o grafo representado à direita é o grafo dual do grafo da Figura 17. Pode provar-se que o grafo dual de um mapa também é planar.

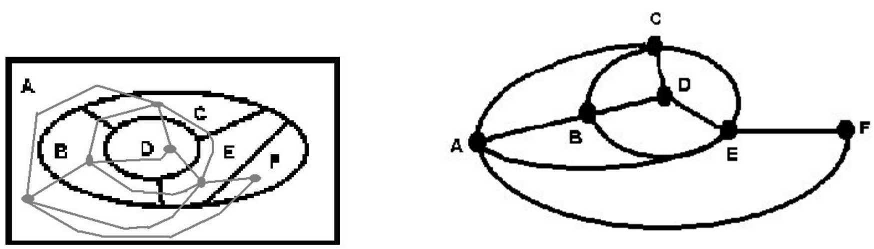

Figura 18

Agora o nosso problema de coloração do mapa dado é equivalente ao seguinte: Colorir cada vértice do grafo dual de forma que cada dois vértices adjacentes tenham cores diferentes (Figura 19).

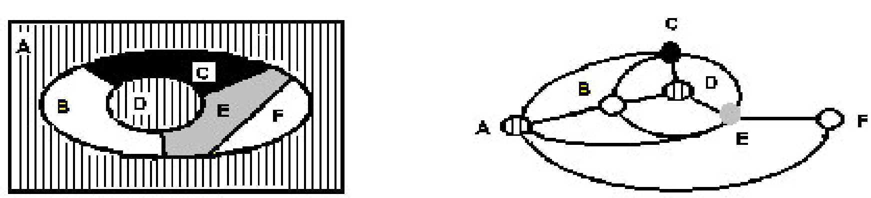

Figura 19

O estudo da coloração de um grafo, no sentido acabado de referir, tem uma grande diversidade de aplicações. Um exemplo de aplicação é a feitura de horários, horários com um certo grau de complexidade, claro está. Por exemplo, suponhamos que temos uma grande escola onde um grande número de alunos vai fazer exames de variadíssimas disciplinas. Consideramos determinados períodos de tempo onde esses exames vão decorrer, por exemplo, todas as manhãs e todas as tardes dos dias úteis do mês de Julho. Queremos que o número de dias em que vão decorrer os exames seja o menor possível. Os vértices do grafo vão ser as disciplinas, um arco entre dois vértices significa que os exames das duas disciplinas não podem ser ao mesmo tempo, porque há alunos comuns aos dois. As cores são as manhãs e as tardes do mês de Julho. Portanto, o nosso objectivo é colorir o grafo com o menor número de cores possível.

Ora bem, mas estes já poderão ser grafos de um tipo diferente dos nossos mapas, nomeadamente um problema de horários pode dar origem a um grafo não planar. Voltando aos mapas, o grafo dual de um mapa tem características particulares. Por exemplo, não tem lacetes. Outra propriedade do grafo dual de um mapa é ser *conexo* – estamos a supor que a esfera é completamente coberta por países, não há ilhas. Muito mais se poderia dizer sobre as propriedades de um grafo dual de um mapa, mas essa é informação que não cabe aqui. Note-se entretanto que, quando as questões sobre mapas se complicam, são os grafos duais que são usados, justamente por ser mais simples trabalhar com eles do que com os mapas propriamente ditos. A demonstração de Appel e Haken lida com a coloração de vértices de grafos e não com a coloração de faces.

6. A demonstração de Kempe

Esta secção debruça-se sobre a demonstração de Kempe do Teorema das Quatro Cores, demonstração essa que tinha afinal um erro, como foi descoberto por Heawood, mas que, no entanto, continha algumas das ideias base que haviam de servir à demonstração de Appel e Haken.

Um instrumento precioso vai ser a Fórmula de Euler para mapas planares conexos, que se recorda na subsecção seguinte.

6.1. A Fórmula de Euler

Dado um grafo planar conexo, seja V o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces do grafo. Estes números relacionam-se pela chamada *Fórmula de Euler* ,

$$F + V = A + 2 .$$

Note-se que, em particular, esta não é mais do que a Fórmula de Euler que relaciona as faces, arestas e vértices de um poliedro convexo e que permite concluir que os únicos poliedros regulares que existem são o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro, conhecidos por pitagóricos.

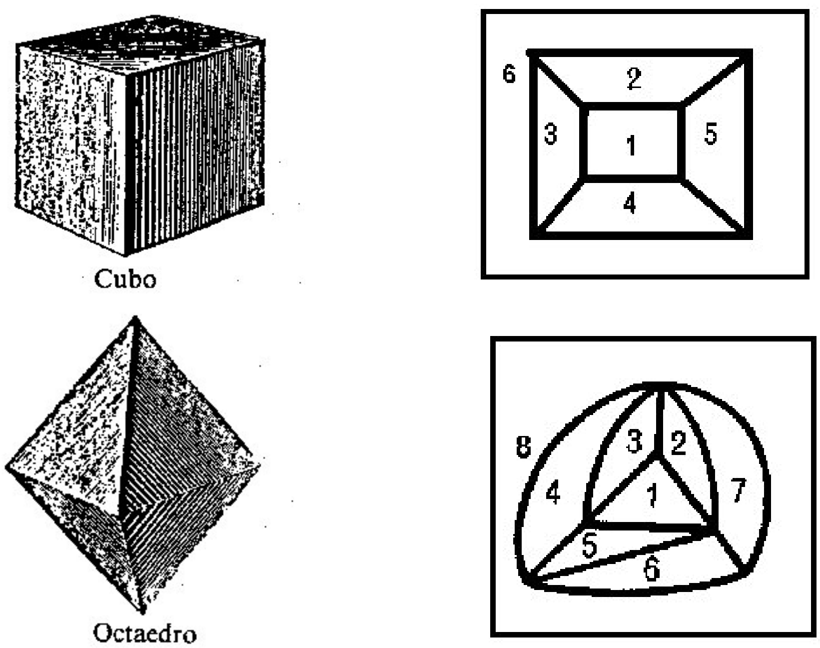

Figura 20

6. 2. A demonstração de Kempe

De seguida, apresenta-se um esquema da demonstração de Kempe, que foi publicada em 1879.

Para isso é necessária a seguinte definição:

Um *mapa pentacromático* é um mapa que não pode ser colorido com menos de cinco cores.

Note-se que provar o Teorema das Quatro Cores é equivalente a demonstrar que não existem mapas pentacromáticos, ou seja, que todos os mapas podem ser coloridos com menos de cinco cores. Como já vimos que existem mapas que exigem 4 cores, fica então claro que 4 é o número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa.

Mas os mapas podem ter os mais variados aspectos. Por onde começar? Kempe começou por mostrar que bastava provar a propriedade só para certo tipo de mapas. Considerou os chamados mapas normais.

Um mapa diz-se *normal* se satisfizer as duas condições seguintes:

(i) Não contém um país isolado dentro de outro, i.e., um país que tenha um só vizinho.
(ii) Em cada ponto de fronteira não se encontram mais do que três vizinhos.

Na Figura 21 estão representados dois mapas que não são normais, o primeiro falha (i) e o segundo não satisfaz (ii).

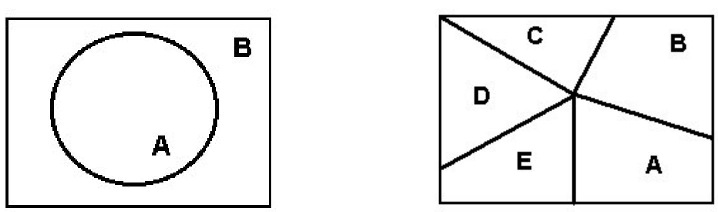

Figura 21

Note-se que quando passamos ao grafo dual, (i) significa que todos os vértices têm grau superior a 1; se à condição (i) se juntar (ii), fica assegurado que as faces do grafo dual associado são todas triangulares.

A demonstração de Kempe de que não existem mapas pentacromáticos pode estruturar-se na prova das quatro afirmações seguintes:

1) Se existir algum mapa pentacromático, então também existe um mapa pentacromático normal.

2) Se existe mapa pentacromático normal, então existe mapa pentacromático normal mínimo.

3) Qualquer mapa normal contém pelo menos um país com menos de seis países vizinhos.

4) Nenhum mapa pentacromático normal e mínimo pode conter um país com menos de seis vizinhos.

Com efeito, de 3) e 4), conclui-se (por contradição) que não existem mapas pentacromáticos normais mínimos. Esta conclusão, juntamente com o facto 2), leva à não existência de mapas pentacromáticos normais. Por 1), isto assegura que não é possível encontrar mapas pentacromáticos.

Adianta-se já que o anunciado erro teve lugar na parte final de 4). Vamos agora observar cada um dos quatro passos da demonstração.

1) Dado um mapa M, chega-se a um mapa M* normal, procedendo do seguinte modo:

Cada uma das configurações do tipo (i) é substituída pela que se obtém suprimindo o país isolado, como ilustrado na Figura 22.

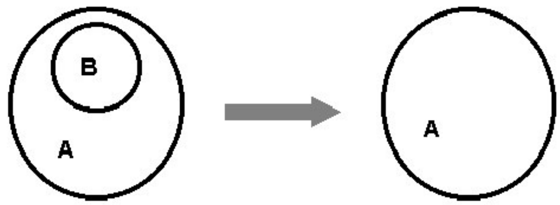

Figura 22

Se M tem configurações do tipo (ii), fazemo-las desaparecer introduzindo um novo país que "apaga" o vértice onde se encontram países a mais, como ilustrado na Figura 23.

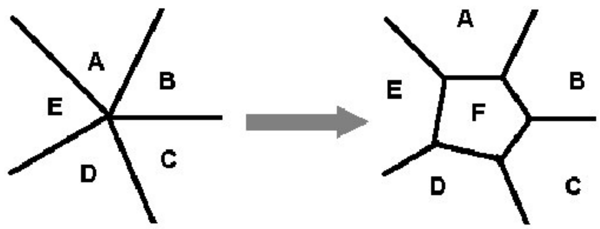

Figura 23

Facilmente se conclui que o mapa M*, assim obtido a partir de M, é normal. Além disso, se M* pudesse ser colorido só com quatro cores, também para M bastariam quatro cores. Por conseguinte, se existir um mapa pentacromático M, o mapa M* é também pentacromático, sendo portanto, um mapa pentacromático normal.

2) É claro que se existir um mapa pentacromático normal, também existe um mapa pentacromático normal mínimo, visto que, de todos os mapas pentacromáticos normais, pode seleccionar-se um com o menor número possível de países.

3) Vamos agora mostrar que qualquer mapa normal contém pelo menos um país com menos de seis países vizinhos. Aqui vai ter um papel fundamental a Fórmula de Euler, referida atrás.

Dado um mapa normal, denotemos por F_i o número de países que fazem fronteira com *i* países. Sendo *F* o número de países do mapa, temos então que

$$F = F_2 + F_3 + ... \quad (1)$$

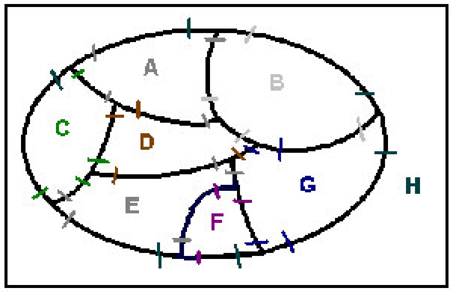

Figura 24

Cada face ou país com i países vizinhos tem uma fronteira constituída por i arestas. Como cada aresta é fronteira de dois países vizinhos, contando, para cada país, o número de arestas que formam a sua fronteira, contamos cada aresta duas vezes (Figura 24). Portanto, designando por A o número de arestas, temos

$$2A = 2F_2 + 3F_3 + 4F_4 + ... \qquad (2)$$

Por outro lado, o mapa é normal, pelo que, em cada vértice concorrem exactamente três arestas. Por isso, denotando por V o número de vértices, tem-se

$$2A = 3V \ . \qquad (3)$$

Pela Fórmula de Euler, sabe-se que

$$F + V = A + 2 \, . \qquad (4)$$

Usando (1), (2) e (3) para eliminar F, A e V em (4), obtém-se

$$\sum_i F_i + \frac{\sum_i iF_i}{3} = \frac{\sum_i iF_i}{2} + 2 \, .$$

Após desembaraçar de denominadores, um cálculo simples leva à igualdade

$$\sum_i (6-i)F_i = 12 .$$

Como a soma é 12, alguma das parcelas $(6-i)F_i$ é maior do que zero e portanto, para algum i, $i < 6$. Ou seja, existe pelo menos um país no mapa cujo número de países com os quais faz fronteira é inferior a 6.

Consequentemente, o conjunto de configurações da Figura 25 constitui um *conjunto inevitável* de configurações de qualquer mapa pentacromático normal, i.e., todo o mapa pentacromático normal contém pelo menos uma destas configurações.

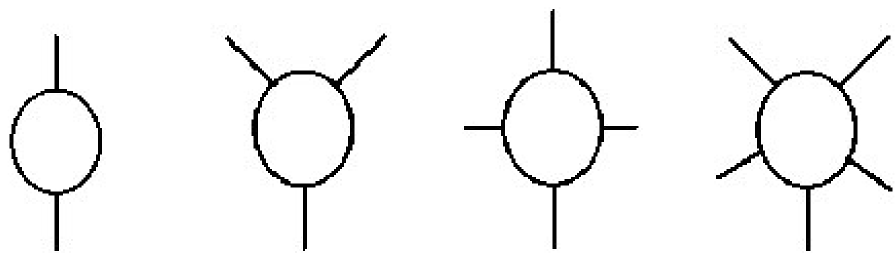

Figura 25

4) Provar que nenhum mapa penta normal e mínimo pode conter um país com menos de seis países vizinhos, completaria a demonstrção de que não pode existir nenhum mapa pentacromático, visto que isto contradiz 3), já estabelecido. Neste ponto, Kempe enganou-se, mas grande parte do seu raciocínio estava correcto e contribuiu para a posterior demonstração de Apple e Haken.

Com o objectivo de provar 4), Kempe quis provar que as quatro configurações da Figura 25, que já se viu constituirem um conjunto inevitável, eram redutíveis. Uma configuração diz-se *redutível* se não poder fazer parte de um mapa pentacromático normal mínimo. Portanto, a ideia de Kempe era provar que qualquer mapa pentacromático normal mínimo não tem nenhum país com menos de seis países vizinhos.

O erro da demonstração de Kempe estava precisamente na prova de que a última das configurações é redutível!

Para concluir que a primeira das configurações da Figura 25 é redutível, suponhamos que temos um mapa M pentacromático normal mínimo do qual faz parte essa configuração. Seja A o país que, na representação da figura, tem a forma de círculo. Denotemos por M* o mapa obtido de M, removendo o país A, como ilustrado na Figura 26.

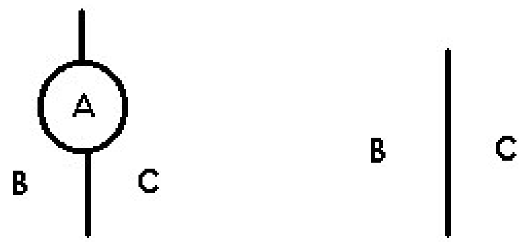

Figura 26

É claro que, sendo M normal, também M* o é; como M* tem um país a menos do que M e é suposto M ser um mapa pentacromático mínimo, conclui-se que M* não pode ser pentacromático, ou seja bastam quatro cores para colorir M*. Mas, nesse caso, também para M só são necessárias quatro cores, para isso bastando que A tenha uma das duas cores que não entram na coloração de B e C. Isto é contraditório com a hipótese de que M é pentacromático. Por conseguinte a configuração estudada não faz parte de nenhum mapa pentacromático normal mínimo.

Quanto à segunda configuração da Figura 25, pode usar-se um processo análogo para concluir que é redutível e que, portanto, não não faz parte de nenhum mapa pentacromático normal mínimo. A prova de que a terceira configuração é redutível é menos simples, mas também aqui a prova de Kempe estava correcta.

A falha de Kempe foi na demonstração de que a quarta configuração da Figura 25 era redutível. Como já foi referido, o erro foi descoberto por Heawood.

7. A demonstração de Appel e Haken

Como acabámos de ver, para provar o Teorema das Quatro Cores basta encontrar um conjunto de configurações tal que:

i. O conjunto é inevitável, i. e., qualquer mapa pentacromático normal contém pelo menos uma dessas configurações.
ii. Todas as configurações do conjunto são redutíveis.

Perante a descoberta do erro da demonstração, feita por Heawood, abriam-se claramente dois caminhos:

1) Tentar chegar a uma demonstração correcta de que a quarta configuração da Figura 25 era realmente redutível.
2) Tentar encontrar um outro conjunto inevitável de configurações e mostrar que todas essas configurações eram redutíveis.

Não tendo sido possível provar 1), numerosos matemáticos enveredaram por 2). Vários aficionados do problema criaram programas para, usando computadores, construir conjuntos inevitáveis de configurações. Fizeram também programas para averiguar se uma dada configuração é ou não redutível. Mas estes programas eram muito complicados e demasiado longos. Finalmente, em Junho de 1976, Appel e Haken conseguiram provar o Teorema das Quatro Cores. Eles construiram um conjunto inevitável de 1482 configurações redutíveis. Tinham continuado e aperfeiçoado o trabalho que vinha sendo feito nesse domínio com a ajuda de computadores, sobretudo na linha das ideias de Heeshe sobre o assunto.

Ficava então provado o

Teorema das Quatro Cores. Todo o grafo planar sem lacetes admite uma coloração dos vértices com apenas quatro cores.

A demonstração de que aquele conjunto de quase um milhar e meio de configurações é inevitável, mas sobretudo a demonstração de que as suas configurações são redutíveis, envolveram cálculos enormes. Muitos desses cálculos foram feitos à mão; mas grande parte deles foi feita por computadores, envolvendo cerca de 1200 horas de tempo de cálculo em computador. Koch deu uma contribuição importante nos cálculos computacionais.

8. Depois da demonstração de Appel e Haken

Mas a demonstração de Appel e Haken não foi aceite por todos os matemáticos. Foram levantadas várias dúvidas, principalmente por duas razões:

A) Parte da demonstração de Appel e Haken usa um computador e não pode ser verificada à mão.
B) Mesmo a parte dos cálculos da demonstração feitos à mão é muito complicada e morosa, portanto é de crer que nunca ninguém fez uma verificação completa e independente dos autores destes cálculos.

Perante tanta controvérsia, um grupo de matemáticos, Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour e Robin Thomas, mais para a sua própria paz de consciência, como eles dizem, decidiram em 1993 estudar a demonstração de Appel e Haken, com o intuito de se convencerem da sua validade. Mas acabaram por desistir. Verificar a parte computacional requereria uma enorme quantidade de programação, e, além disso, teriam de introduzir à mão no computador a descrição de 1478 grafos. E essa não era a parte mais controversa da demonstração. Em vez de verificar a demonstração de Appel e Haken, decidiram então tentar provar o Teorema por si próprios e acabaram por obter uma demonatração bastante mais simples, se bem que ainda envolvendo muitos cálculos. A ideia base da prova é a mesma que a de Apple e Haken. Mas, em vez de 1478, determinam um conjunto inevitável de 633 configurações redutíveis.

Robertson, Sanders, Seymour e Thomas conseguiram reduzir a resolução do problema a dimensões consideravelmente mais manejáveis do que as de Apple e Haken. No entanto, permanece em aberto a questão: Será possível encontrar uma demonstração do Teorema das Quatro Cores mais simples? Mais precisamente, será possível encontrar uma demonstração cujos cálculos subjacentes tenham uma dimensão humanamente atingível sem ajuda de computadores?

Referências

[AH] K. Appel and W. Haken, Every planar map is four colorable. Part I. Discharging, *Illinois J. Math.,* vol. 21, 1977, 429-490.

[AHK] K. Appel, W. Haken and J. Koch, Every planar map is four colorable. Part II. Reducibility, *Illinois J. Math.,* vol. 21, 1977, 491-567.

[B] David Barnette, Map coloring, polyhedra, and the four color problem, The Dolciani Mathematical Expositions 8, 1983

[F] Rudolf Fritsch, Gerda Fritsch, The four color theorem: history, topological foundations, and the idea of proof, Springer-Verlag New York, Inc., 1998

[M] Miguel de Guzmán, Contos com contas, Gradiva 1991

[O] Oyestein Ore, The four-color problem, New York: Academic Press, 1967

[R] Gerhard Ringel, Map color theorem, Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag, 1974

[RSST] N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, R. Thomas, A new proof of the Four-Colour Theorem, *Electronic Research announcements of the Am. Math. Soc.,* Vol. 2, Number 1, 1996