**Ana Patrícia Morais da Fonseca Martins**

# As construções do Sistema dos Números Reais por Dedekind, Weierstrass e Méray

**Departamento de Matemática Pura**

**Faculdade de Ciências da Universidade do Porto**

**Março 2004**

**Ana Patrícia Morais da Fonseca Martins**

# As construções do Sistema dos Números Reais por Dedekind, Weierstrass e Méray

*Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto*
*para obtenção do grau de Mestre em Ensino da Matemática*

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Março 2004

## Agradecimentos

Um Muito Obrigada ao meu orientador Professor Doutor Carlos Sá ... .

A todos os demais ... .

# Índice

# Introdução

Já na Antiguidade Clássica o número adivinhava-se como sendo um objecto que poderíamos estudar por si próprio. O lema da filosofia pitagórica *tudo é número* justificava o facto de a aritmética ser para os Pitagóricos a ciência por excelência. E, apesar de estes matemáticos e filósofos designarem por números apenas os números naturais, parece terem sido eles os primeiros a observar a existência de grandezas incomensuráveis, ou seja, de grandezas do mesmo tipo que não admitem nenhuma medida em comum[1]. A descoberta de que na própria geometria os naturais e as suas razões eram insuficientes para descrever simples propriedades como, por exemplo, comparar a diagonal dum quadrado com o seu lado, ou a diagonal dum cubo com a sua aresta, praticamente demoliu a base da fé pitagórica nos números. Desta forma, a geometria passou a ser o modelo que, pela coesão interna das suas deduções, e pelo carácter evidente dos seus axiomas, garantia a coerência dos outros campos da matemática. Desde o tempo dos Pitagóricos até ao século XIX, parece não ter havido dificuldade para as várias gerações de matemáticos em aceitar os números irracionais. O conceito ainda mais geral de número real era percebido intuitivamente, apesar da existência de tal entidade ser apenas assegurada por considerações de natureza geométrica ou algébrica[2].

No século XVIII, o cálculo era intuitivamente compreendido e executado através de algoritmos, era aplicado à resolução de inúmeros problemas, nas mais diferentes áreas, sem que os seus fundamentos fossem postos em causa[3]. Em todo o caso, alguns

[1]Veja-se (Boyer, 1974), pág. 53.
[2]Veja-se (Collette, 1973), pág. 212.
[3]Veja-se (Katz, 1998), pág. 582.

matemáticos interrogavam-se já sobre a justificação de certos procedimentos e métodos do cálculo diferencial e integral. Nos anos seguintes ao aparecimento do documento *The Analyst* (em 1734), a mais importante crítica aos conceitos de *infinitesimais* e *fluxões* introduzidos no século XVII, do filósofo irlandês George Berkeley, os matemáticos fizeram várias tentativas no sentido de criar fundações rigorosas para o cálculo. As abordagens mais comuns eram as de basear o cálculo no *movimento* (Mac-Laurin), no conceito de *limite* (Newton, D'Alembert, L'Huiller), em *razões de zeros* (Euler); ou ainda em *infinitesimais* (Leibniz, Carnot)[4]. Já nos finais do século dezoito (1797), Lagrange assumiu a existência de uma expansão em série de Taylor para toda a função. O título completo do seu texto, *Teoria das funções analíticas contendo os princípios do cálculo diferencial, desprovidos de toda a consideração de infinitamente pequenos ou de evanescências, de limites ou de fluxões e reduzidos à análise algébrica de quantidades finitas*, mostra o cepticismo com o qual ele, e muitos dos matemáticos seus contemporâneos, olhavam para a noção de limite, e denota um certo desejo de reduzir o cálculo à "análise algébrica". Em todo o caso, também a tentativa de Lagrange de libertar o cálculo dos conceitos de infinitesimais, de fluxões, de razões de zeros e até de limite, que considerava pouco precisos, não era rigorosa. Na segunda década do século XIX provar-se-ia existirem funções diferenciáveis que não podem ser representadas em série de Taylor[5].

Foi Augustin-Louis Cauchy, um dos mais ilustres matemáticos franceses de todos os tempos, quem, nos inícios do século XIX, primeiro baseou o cálculo sobre o conceito de limite. Mas algumas das principais ideias desta teoria, abordadas com bastante profundidade no seu *Cours d'Analyse* de 1821, foram antecipadas por Bernhard Bolzano, um grande matemático e filósofo checo cuja obra foi injustamente desconsiderada pelos seus contemporâneos[6]. Em todo o caso, devido à pouca popularidade das suas ideias políticas e teológicas, Bolzano foi proibido de publicar as suas obras, daí que muitos dos seus feitos tenham sido atribuídos a Cauchy, bem como a outros matemáticos[7].

---

[4]Veja-se (Katz, 1998), págs. 520, 578–587.

[5]Veja-se (Katz, 1998), págs. 586–590.

[6]Vejam-se (Grattan-Guiness, 1970) e (Boyer, 1974), pág. 381.

[7]Veja-se (Sebestik, 1964), pág. 129.

Os trabalhos de Bolzano marcam um ponto de viragem na pesquisa sobre os fundamentos da análise real, uma mudança de tal forma importante, que à geometria seria retirado o papel dominante que até então possuía nas ciências matemáticas.

> "(...) é claro que é uma intolerável ofensa contra um *método correcto* deduzir verdades das matemáticas *puras* (ou gerais) (isto é, da aritmética, da álgebra, da análise) de considerações que pertencem somente a uma parte *aplicada* (ou especial), a saber, a *geometria*."[8]

Bolzano foi o primeiro matemático a rejeitar explicitamente uma abordagem geométrica e espacial para os fundamentos do cálculo, invocando, pelo contrário, argumentos de natureza puramente aritmética. A necessidade que sentiu na criação de tais fundações terá decorrido do rigor lógico com que caracterizou as suas obras, rigor este que foi muito além daquele requerido por matemáticos anteriores[9].

A contribuição mais significativa de Bolzano para a matemática foi o seu artigo "Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen jezwey Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege" (Demonstração puramente analítica do teorema: entre dois quaisquer valores que dão resultados de sinais opostos, encontra-se pelo menos uma raiz real da equação)[10], datado de 1817. No seu prefácio, e através de uma exposição por vezes irónica, dá-nos conta dos mais comuns erros de raciocínio praticados na tentativa de demonstração do resultado que constitui o título deste seu artigo, e que, à primeira vista, parece evidente. Tais tentativas erradas envolviam quer o uso de verdades geométricas que os matemáticos "importavam" para o campo da aritmética, quer resultados baseados em conceitos errados de função contínua. E é exactamente no sentido de contrariar tais procedimentos, e por forma a elaborar uma demonstração correcta do teorema que actualmente é conhecido por *Teorema de Bolzano*, ou *Teorema dos valores intermédios*, que Bolzano apresenta no seu artigo um conjunto de resultados e definições, que, por si sós, constituem ainda uma contribuição bastante importante para a análise.

[8]Em (Bolzano, 1817), prefácio, I ) — citado em (Sebestik, 1964), pág. 137.

[9]Veja-se (Sebestik, 1964), págs. 129–133.

[10]Este artigo está traduzido para francês em (Sebestik, 1964).

Senão, vejamos! Podemos aí encontrar a primeira definição formal do conceito de função contínua[11], que, pelo facto de se basear no conceito de limite, renega o recurso a qualquer intuição geométrica; o critério de convergência de séries que viria a ser conhecido por *Critério de Cauchy*[12], se bem que a prova da condição suficiente não esteja correcta; e também um lema que é a primeira versão publicada de um teorema redescoberto cerca de cinquenta anos mais tarde por Karl Weierstrass, e que, por isso, recebeu o nome de *Teorema de Bolzano-Weierstrass*[13]. Finalmente, o teorema dos valores intermédios é deduzido como um corolário de um resultado mais geral, que citamos de seguida, e que, segundo I. Grattan-Guiness[14], constitui uma novidade no pensamento matemático da época, por se referir a propriedades de funções.

> "Se duas funções de $x$, $f(x)$ e $\varphi(x)$, *variam segundo a lei da continuidade* para *todos* os valores de $x$, ou pelo menos para aqueles situados entre $\alpha$ e $\beta$; e se além disso $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$ e $f(\beta) > \varphi(\beta)$: então existe sempre um certo valor intermédio $x$ entre $\alpha$ e $\beta$ para o qual $f(x) = \varphi(x)$."[15]

Em todo o caso, Bolzano não se apercebeu que até mesmo as suas provas eram incorrectas. A falta de uma definição aritmética de um número real tornaria inválidos alguns dos seus raciocínios, mas, a não ser por este aspecto, o trabalho de Bolzano é inteiramente notável. Apesar de as provas de Bolzano serem incompletas, este artigo é um marco na história da análise real, por ter sido a primeira tentativa sucedida de libertar o cálculo dos infinitesimais. A precisão das definições de Bolzano e o rigor das suas deduções marcam pois um quebrar com a matemática do passado.

Ainda relativamente à contribuição de Bolzano no processo de aritmetização da análise, deve referir-se que no ano de 1961 foi pela primeira vez publicado um estudo dum manuscrito inacabado do matemático, onde tentaria construir uma teoria dos números reais. Na esperança de que a sua obra fosse terminada, Bolzano legou o seu manuscrito *Grössenlehre* (Teorias das quantidades) ao seu aluno favorito Robert

[11] Veja-se (Bolzano, 1817), II) *a*) — citado em (Sebestik, 1964), pág. 139.
[12] Veja-se (Bolzano, 1817), §7 — citado em (Sebestik, 1964), pág. 151.
[13] Veja-se (Bolzano, 1817), §12 — citado em (Sebestik, 1964), pág. 153.
[14] Veja-se (Grattan-Guiness, 1970), pág. 376.
[15] Em (Bolzano, 1817), §15 — citado em (Sebestik, 1964), pág. 159.

Zimmermann. Mas Zimmermann acabou por deixar de se dedicar às matemáticas, tendo oferecido a obra do seu mestre à Biblioteca Nacional de Viena[16]. Não nos sendo então possível analisar a obra original de Bolzano, será à partida difícil precisar se, de facto, o matemático terá elaborado uma teoria coerente dos números reais. Em todo o caso, a ter em conta as exposições quer de Rychlik, em (Rychlik, 1961), quer de B. van Rootselaar, em (Rootselaar, 1962), somos conduzidos a partilhar da opinião de que, dadas as inúmeras imprecisões aí existentes, o manuscrito de Bolzano contém apenas uma tentativa de construção de tal teoria. Inclusivamente, Rychlik propõe algumas alterações ao manuscrito de Bolzano, segundo as quais, a não ser pela diferença de terminologia, a teoria de Bolzano seria idêntica à que Georg Cantor viria a elaborar mais tarde, e segundo a qual um número real é definido à custa de sucessões de números racionais.

No que respeita à semelhança das obras de Bolzano e de Cauchy, e relativamente ao conjunto dos números reais, se há quem seja da opinião de que a contribuição de Bolzano tenha sido mais relevante do que a de Cauchy, como é o caso de I. Grattan Guiness[17], há também quem defenda precisamente o contrário, como por exemplo H. Freudenthal[18]. Se bem que em relação a Bolzano não possamos afirmar com certeza qual o alcance da sua obra, parece não ter havido de facto por parte deste matemático uma formulação correcta de uma teoria dos números reais. Já em relação a Cauchy, podemos percorrer o seu *Cours d'Analyse*, e constatar que, apesar de não ser formulada uma definição concreta do conceito de número real, pelo menos é utilizado por diversas vezes um resultado envolvendo números *irracionais*, que afirma que um número irracional é o limite de diversas fracções de números racionais[19]. Em todo o caso, Cauchy parece não se ter apercebido que este resultado se reduz a um ciclo vicioso, já que, recorrendo à definição de *limite*, a existência do número irracional depende do conhecimento prévio da quantidade da qual se aproximam os termos de uma determinada sucessão de números racionais. E, apesar de não definir o conceito

---

[16]Veja-se (Rychlik, 1961), pág. 313.
[17]Veja-se (Grattan-Guiness, 1970), pág. 377.
[18]Veja-se (Freudenthal, 1971), págs. 386–387.
[19]Veja-se (Cauchy, 1821), págs. 19, 317, 341.

de número real, tal resultado é ainda utilizado para definir as operações algébricas e exponenciais para números reais, como uma extensão, através do conceito de limite, das mesmas operações definidas no conjunto dos números racionais[20].

Mas, o que será importante reter das contribuições de Bolzano e de Cauchy é que, de facto, a partir do conceito de limite, nunca seria possível obter uma definição correcta de número real, daí que a prova da condição suficiente do critério de convergência de Cauchy nunca pudesse ter sido estabelecida correctamente por nenhum destes matemáticos. E daí que também não fosse possível provar que *toda a sucessão convergente admite um limite*, resultado este considerado por alguns matemáticos como uma base suficientemente rigorosa de toda a análise[21].

Com Bolzano e Cauchy estaria terminada a primeira etapa no processo de aritmetização da análise: a criação de toda uma teoria que permitiria avançar na construção duma base sólida para a análise, abrangendo quer a formulação de definições, quer a elaboração de critérios de convergência de séries. Mas se nos meados do século XIX os matemáticos se contentariam com uma compreensão intuitiva dos números, a introdução do rigor na análise põe em evidência a falta de clareza e a imprecisão do conjunto dos números reais[22]. O estudo mais aprofundado dos limites mostrou a necessidade de adquirir uma compreensão lógica dos números, em particular pelo facto de uma sucessão de números racionais poder admitir como limite um número irracional[23]. O processo de colocar a teoria da recta real numa base aritmética sólida foi continuado ainda no século XIX, ignorando quase por completo o trabalho de Bolzano. Sendo um dos pioneiros da aritmetização da análise, Bolzano seria agora sucedido numa nova etapa: a construção do conjunto dos números reais.

São cinco os nomes dos matemáticos que devem ser referenciados quando falamos na elaboração de teorias dos números irracionais no século XIX: Charles Méray, Karl Weierstrass, Richard Dedekind, Georg Cantor e Heinrich Eduard Heine. Apesar de

[20]Veja-se (Cauchy, 1821), págs. 321–359.

[21]Entre estes matemáticos estão Richard Dedekind e Charles Méray cujas obras analisamos nos capítulos seguintes

[22]Veja-se (Collette, 1973), pág. 212.

[23]Veja-se (Boyer, 1949), pág. 282.

as publicações das suas teorias terem sido quase simultâneas, veremos que foram elaboradas em épocas diferentes, sendo igualmente diferentes as razões que moveram estes matemáticos a empreender semelhante tarefa.

Sendo fiel à cronologia dos acontecimentos, devemos afirmar que foi Méray o primeiro, de entre vários matemáticos, a publicar uma teoria dos números irracionais. No ano de 1869, no artigo intitulado "Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données"[24], o matemático expôs a sua teoria, que não iria diferir muito da que Cantor viria a publicar mais tarde em 1872. Mas pouca importância foi dada a este documento, em parte por Méray não ser na época um matemático de renome. O facto de ter sido o único matemático do século XIX de nacionalidade francesa a empreender semelhante tarefa no sentido da aritmetização da análise, sendo os demais de origem alemã, permite, de certa forma, confirmar que na época não existia em França, tal como existia na Alemanha, uma apreciação notória do problema da construção dos números irracionais. Daí que, tal como afirma Abraham Robinson,

> "(...) só muito mais tarde se pôde compreender que ele tinha produzido uma teoria que contribuiu para o renome de alguns dos maiores matemáticos desse período."[25]

Méray pretendia com as suas obras edificar a análise, que para si constituía o fundamento de todas as matemáticas, sobre bases sólidas, excluindo, em particular, qualquer empréstimo que a geometria pudesse fornecer a algumas demonstrações. Uma vez que as definições existentes de números irracionais eram para si insatisfatórias, ele viu-se na necessidade de criar uma teoria dos números irracionais, que, em todo o caso, iria assumir um papel secundário na sua obra. Será pois neste sentido que Abraham Robinson refere que, apesar deste assunto "(...) ter sobressaído acima de todo o seu restante trabalho, o seu desenvolvimento pode ser visto mais como um acidente."[26].

[24]Em *Revue des Sociétés Savantes des departements*, Section sciences mathématiques, physiques et naturelles, (10), 280–289.

[25]Em (Robinson, 1991), pág. 1698.

[26]Em (Robinson, 1991), pág. 1699.

Se existem diversas formas de introduzir a noção de número irracional: a forma geométrica, a forma física ou partindo da noção de número e das operações fundamentais da aritmética, Weierstrass considera que apenas o último método permite fundamentar rigorosamente a análise e resolver todas as suas dificuldades[27]. Foi ao leccionar prestigiados cursos de matemática na Universidade de Berlim, iniciados no ano de 1856, nos quais começou por reconstruir os fundamentos da análise, que o matemático sentiu a necessidade de elaborar uma teoria dos números irracionais, uma vez que não tinha nenhuma à sua disposição que considerasse correcta. Ora, o facto de nunca ter publicado as suas lições fez com que a sua teoria fosse conhecida muito mais tarde do que a sua elaboração. Para que possamos ter acesso às teorias de Weierstrass, é necessário analisar as diferentes redacções dos seus cursos feitas por alguns dos seus alunos. Apesar de iniciada no ano de 1863 no curso intitulado *Teoria geral das funções analíticas*, a teoria weierstrassiana dos números irracionais apenas pode ser encontrada pela primeira vez no ano de 1872, integrada no livro *Os Elementos de Aritmética*, do seu aluno Kossak.

No que respeita a Dedekind, terá sido a falta de uma verdadeira fundação científica para a aritmética, sentida ao leccionar uma disciplina de elementos de Cálculo Diferencial na Escola Politécnica de Zurique, que levou o matemático a elaborar uma teoria dos números irracionais, destacando-se esta de outras suas contemporâneas pelo seu carácter original. Se bem que, tal como nos dá conta no prefácio da sua obra *Continuidade e Números Irracionais*, tais considerações remontassem ao ano de 1858, Dedekind não publicou a sua obra antes do ano de 1872. Justifica a demora nesta publicação justifica-a pelo facto de considerar a sua teoria pouco simples e "(...) pouco promissora (...)"[28] na época. Em todo o caso, esta afirmação do matemático seria desmentida pela influência que a sua obra teve sobre o desenvolvimento da análise, da topologia em geral, assim como sobre os seus próprios trabalhos relativos à continuidade de espaços de dimensão $n$.

No ano de 1872, surgiu ainda a publicação de uma outra teoria dos números

[27] Veja-se (Weierstrass, 1923), págs. 203, 204 — citado em (Dugac, 1973).

[28] Em (Dedekind, 1963), pág. 2.

irracionais, a de Cantor, no seu artigo "Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen"[29], que seria semelhante àquela já elaborada por Méray. Uma vez que no mesmo ano foi proposta uma simplificação a esta teoria por Heine, no seu artigo "Die Elemente der Functionenlehre"[30], é aceitável que por vezes seja designada por teoria de Heine-Cantor, se bem que Cantor tenha publicado em 1883 um artigo mais detalhado sobre a sua própria teoria dos números irracionais. Mas, como frequentou os cursos de Weierstrass em Berlim[31], algures entre os anos de 1863 e 1866, Cantor terá assistido às primeiras exposições de Weierstrass da sua teoria dos números irracionais. Portanto, se quisermos considerar apenas aquelas teorias que surgiram espontaneamente, sem se apoiarem em qualquer teoria rigorosa já existente, então teremos de colocar sobre o mesmo plano apenas as de Dedekind, de Weierstrass e de Méray, sobre as quais esta apresentação se irá debruçar nos próximos capítulos.

[29]Em *Mathematische Annalen*, (5), 123–132.

[30]Em *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, (74), 172–188.

[31]Veja-se (Dugac, 1973), pág. 57.

# Capítulo 1

# Richard Dedekind

Foi ao leccionar uma disciplina de elementos de Cálculo Diferencial na Escola Politécnica de Zurique que Dedekind se viu na obrigação de elaborar uma teoria sobre os números irracionais. A falta de uma definição rigorosa de grandeza contínua, bem como a necessidade de recorrer a evidências geométricas para explicar tal conceito, ou mesmo a impossibilidade de demonstrar que "(...) toda a grandeza que cresce continuamente, mas não para além de todos os limites, aproxima-se necessariamente do seu valor limite (...)"[1], provocaram em Dedekind um sentimento de insatisfação de tal ordem que decidiu "(...) pensar nesta questão até que encontrasse uma fundamentação perfeitamente rigorosa e puramente aritmética para os princípios da análise infinitesimal."[2]. Reconhecendo o teorema anterior, ou algum outro equivalente a ele, como uma base suficientemente rigorosa para análise infinitesimal, Dedekind chegou à conclusão de que seria apenas necessário "(...) descobrir qual a sua verdadeira origem nos elementos da aritmética (...)"[3] para que se estabelecesse uma definição concreta da essência da continuidade requerida para um conjunto de números. Foi com a introdução do importante conceito de *corte* que Dedekind resolveu esta questão, no dia 24 Novembro de 1858, como nos dá conta no prefácio do livro *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* (*Continuidade e Números Irracionais*)[4], onde apresenta pela primeira vez a sua teoria dos números irracionais.

[1]Em (Dedekind, 1963), pág. 1.
[2]Em (Dedekind, 1963), pág. 1.
[3]Em (Dedekind, 1963), pág. 2.
[4]Esta obra está traduzida para inglês em (Dedekind, 1963).

Contudo, foi apenas no ano de 1872 que publicou esta obra, poucos dias após ter recebido[5] no mesmo ano a publicação de Heine da teoria dos números irracionais de Cantor[6], bem como o próprio documento original de Cantor[7]. É de notar pois que a teoria apresentada nesta obra é o resultado do produto de muitos anos de ponderação sobre o assunto.

No ano de 1872, ano em que Dedekind publicou a sua teoria dos números irracionais, o estado de desenvolvimento da álgebra simbólica ainda não contemplava as terminologias e simbologias relativas à teoria de conjuntos. A notação actual da teoria de conjuntos seria apenas introduzida no ano de 1889, com Giuseppe Peano. Na obra *Continuidade e Números Irracionais*, Dedekind faz muito pouco uso de uma notação simbólica, limitando-se àquela referente às relações de ordem entre números (quer reais, quer racionais), que ele próprio introduz. Se bem que tentemos manter o estilo original de Dedekind, a exposição que faremos da sua teoria difere por vezes daquela apresentada pelo matemático. Optaremos algumas vezes pelo uso de uma notação simbólica, por oposição a uma linguagem completamente textual utilizada por Dedekind.

[5] Veja-se (Dedekind, 1963), pág. 3.

[6] Veja-se "Die Elemente der Functionenlehre", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, (74), 172–188.

[7] Veja-se "Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", *Mathematische Annalen*, (5), 123–132.

## 1.1 Definição dos números reais à custa dos racionais

Até aos meados do século XIX, a incorrecção das provas de resultados envolvendo grandezas contínuas residia no facto de que o maior domínio de números até então construído de um modo puramente aritmético — o conjunto dos racionais — não possuía a continuidade exigida no decorrer de tais demonstrações. Tornava-se então necessário apelar a intuições geométricas que conferiam à linha recta esta continuidade procurada. Concluindo assim que os racionais não possuíam a mesma completude que a linha recta, Dedekind estabelece a prioridade de criar um sistema de números que possuísse essa característica. Este novo domínio seria formado através da junção de novas entidades aos racionais, entidades estas que viria a designar por *números irracionais*. Desta forma, a criação de um novo sistema de números, através da introdução de novos elementos, foi feita a partir de entidades já existentes, seguindo pois uma linha de pensamento construtivista.

> "Eu vejo a aritmética como uma consequência necessária, ou pelo menos natural, do simples acto aritmético de contagem, e a própria contagem como nada mais do que a criação sucessiva de séries infinitas de inteiros positivos na qual cada elemento é definido através deste procedimento imediato (...)"[8]

Segundo Dedekind, os diferentes conjuntos de números surgem como um *acto de criação* natural que se justifica pela necessidade de responder às exigências da mente humana. Razão pela qual, ao se observarem as limitações existentes nas operações inversas de subtracção e divisão dos inteiros positivos, tenha surgido a necessidade de criar os números negativos e fraccionários, "(...) e no conjunto de todos os números racionais ganhou-se um instrumento infinitamente mais perfeito (...)"[9]. É neste contexto que Dedekind pretende construir os números irracionais, como uma extensão dos racionais.

[8] Em (Dedekind, 1963), pág. 4.

[9] Em (Dedekind, 1963), pág. 4.

"Tal como os números negativos e racionais fraccionários são formados a partir de uma nova criação, e tal como as leis de operações com estes números devem e podem ser reduzidas às leis de operações com inteiros positivos, também nos devemos esforçar ao máximo para definir os números irracionais apenas em termos dos números racionais."[10]

[10]Em (Dedekind, 1963), pág. 10.

## 1.2 Comparação dos números racionais com os pontos de uma linha recta

Tendo em conta que Dedekind pretende criar uma base aritmética sólida para o conjunto dos números reais, é compreensível que a primeira secção da sua obra, *Propriedades dos números racionais*, seja relativa à reformulação em termos aritméticos das propriedades do conjunto que constituirá a base da sua construção: o corpo dos números racionais, que denota por $R$. É, de facto, "(...) para evitar até a aparência de que a aritmética necessitasse de ideias estranhas a ela (...)"[11], que Dedekind opta por aritmetizar algumas ideias geométricas acerca da estrutura do conjunto dos racionais. Desta forma, e referindo-se à relação de ordem em $R$, estabelece como válidas as propriedades de transitividade e densidade, bem como a definição (não formalizada) de *corte*, pondo em evidência que o conjunto dos racionais forma um domínio infinito totalmente ordenado[12].

**Propriedades 1.2.1 (Racionais)** Sendo $a$, $b$ e $c$ números racionais arbitrários,
(I) Se $a > b$ e $b > c$ então $a > c$. Sempre que $a$ e $c$ sejam distintos, e o número $b$ seja menor do que um deles e maior do que o outro, diremos que "$b$ está entre os números $a$ e $c$".
(II) Se $a$ e $c$ forem diferentes, então existem infinitos números racionais entre $a$ e $c$.
(III) Para qualquer racional $a$, o conjunto dos racionais pode ser repartido em duas classes, $A_1$ e $A_2$, cada uma com infinitos elementos. $A_1$ contém todos os números menores do que $a$ e $A_2$ todos os números maiores do que $a$. O número $a$ pode pertencer a qualquer uma das classes, sendo, respectivamente, o maior número da primeira classe ou o menor da segunda classe. Em todo o caso, a separação do conjunto dos números racionais nas duas classes $A_1$ e $A_2$ é tal que todo o número da primeira classe $A_1$ é menor do que todo o número da segunda classe $A_2$.

---

[11]Em (Dedekind, 1963), pág. 5.

[12]Segundo Dugac, a terminologia original utilizada por Dedekind foi a de "Gebiet wohkgeordnet" — veja-se (Dugac, 1976), pág. 39.

Estabelecendo uma correspondência entre os números racionais e os pontos de uma linha recta, onde se definem à partida duas direcções opostas, Dedekind enuncia, neste novo contexto, as mesmas propriedades que havia atribuído aos elementos de $R$. Este assunto é abordado na secção II *Comparação dos números racionais com os pontos de uma linha recta* da sua obra.

**Propriedades 1.2.2 (Pontos de uma linha recta)** Sendo $p$, $q$ e $r$ pontos arbitrários de uma linha recta $L$,
(I) Se $p$ se situa à direita de $q$, e $q$ à direita de $r$, então $p$ situa-se à direita de $r$. Dizemos então que "$q$ está entre os pontos $p$ e $r$".
(II) Se $p$ e $r$ forem distintos, existe sempre uma infinidade de pontos entre eles.
(III) Para um ponto $p$ qualquer de $L$, os pontos de $L$ pertencem a duas classes, $P_1$ e $P_2$, contendo cada uma infinitos elementos; $P_1$ contém todos os pontos $p_1$ que se situam à esquerda de $p$ e $P_2$ todos os pontos $p_2$ à direita de $p$; o ponto $p$ pode pertencer tanto à primeira como à segunda classe. Em qualquer dos casos, a separação da linha recta $L$ nas duas classes $P_1$ e $P_2$ é tal que todo o ponto da classe $P_1$ está à esquerda de todo o ponto de $P_2$.

Estando assim definida a posição relativa de dois quaisquer pontos, bastaria escolher na linha recta uma origem e uma unidade de comprimento para a medida de segmentos para que a comparação dos racionais com os pontos de uma tal linha recta se tornasse uma correspondência efectiva. Esta correspondência é o ponto chave da teoria dos números irracionais de Dedekind, já que irá permitir identificar qual a *essência* da continuidade de uma linha recta. Se por um lado a todo o número racional $a$ corresponde um e um só ponto $p$, já o recíproco não se poderá afirmar. O facto desta correspondência não ser biunívoca permite pois concluir que:

> "A linha recta $L$ é infinitamente mais rica em elementos-pontos do que o domínio $R$ dos números racionais em elementos-números."[13]

[13]Em (Dedekind, 1963), pág. 9.

Não sendo o conjunto dos racionais capaz de traduzir aritmeticamente todos os fenómenos da linha recta, Dedekind considera absolutamente necessária a criação de novos números. Esta criação deverá ser feita por forma a que o domínio de todos os números assim obtido possua a pretendida completude (continuidade) da linha recta.

Antes mesmo de apresentar o princípio no qual considera estar patente a essência da continuidade da recta, Dedekind justifica as demoradas considerações que fez, e que afirma alguns poderem achar supérfluas[14], pelo facto de o modo como irá introduzir os números irracionais ser um modo puramente aritmético, contrariamente ao que sucedia até então. O conceito de *grandeza extensível*, no qual se baseavam muitas das definições conhecidas na época de um número irracional, chega mesmo a ser classificado por Dedekind como sendo um conceito bastante obscuro e complicado[15].

[14] Veja-se (Dedekind, 1963), pág. 9.

[15] Veja-se a carta escrita por Dedekind a Lipschitz, a 27 de Julho de 1876 — citado em (Sinaceur, 1979), pág. 125.

## 1.3 Essência da continuidade da linha recta

> "Em que consiste então esta continuidade? Tudo deve depender na resposta a esta questão, e somente através dela obteremos uma base científica para a investigação de *todos* os domínios contínuos."[16]

Sendo a linha recta conotada com a continuidade requerida para um conjunto de números, faltará somente indicar qual a característica precisa desta propriedade, para que se possa formar uma base sólida para a construção dos números reais.

O princípio que se segue, enunciado na secção III *Continuidade da linha recta* do livro *Continuidade e Números Irracionais* de Dedekind, irá responder a esta questão, devendo notar-se que a sua simplicidade parece não condizer com o imenso tempo que o matemático afirma ter ponderado em vão sobre este assunto[17]. É que este resultado é tão somente o converso da alínea (III) das propriedades 1.2.2 dos pontos de uma linha recta, página 21.

**Princípio de continuidade da linha recta** "Se todos os pontos da linha recta pertencerem a duas classes de tal forma que qualquer ponto da primeira classe se situa à esquerda de qualquer ponto da segunda classe, então existe um e um só ponto que produz esta divisão de pontos em duas classes, separando a linha recta em duas porções."[18]

É importante realçar que Dedekind assumiu este princípio como um axioma, o axioma que confere à linha recta a sua continuidade. O facto de considerar que a maioria das pessoas acharia o seu conteúdo bastante óbvio, e em harmonia com as ideias que possuímos da linha recta, acaba por diminuir a *limitação* de ser "(...) completamente incapaz de expor uma prova da sua correcção (...)"[19].

Em todo o caso, como refere Frajese[20], ele não notou, ou pelo menos não o referiu, que se pode demonstrar a unicidade do ponto determinado pelo axioma. Esta

[16] Em (Dedekind, 1963), pág. 10.
[17] Veja-se (Dedekind, 1963), pág. 9.
[18] Em (Dugac, 1976), pág. 11.
[19] Em (Dedekind, 1963), pág. 11.
[20] Veja-se (Frajese, 1972), pág. 126.

demonstração é feita por redução ao absurdo, com base nas alíneas (II) e (III) das propriedades 1.2.2 dos pontos de uma linha recta, página 21. Suponhamos que $p$ e $p'$ são dois pontos distintos que produzem a divisão da recta em duas classes $L_1$ e $L_2$, de modo que todo o ponto de $L_1$ está à esquerda de todo o ponto de $L_2$, e consideremos, sem perda de generalidade, que $p$ está à esquerda de $p'$. Pela alínea (II) de tais propriedades, existem infinitos pontos $p''$ compreendidos entre $p$ e $p'$, e como cada um destes pontos $p''$ está situado à direita de $p$ e à esquerda de $p'$, podemos afirmar, invocando a alínea (III) das mesmas propriedades, que $p''$ é, respectivamente, um ponto de $L_2$ e de $L_1$. Desta forma, obtemos um absurdo já que, pelo *princípio de continuidade da linha recta*, a construção das classes $L_1$ e $L_2$ é feita supondo que todo o ponto de $L_1$ se situa à esquerda de todo o ponto de $L_2$.

## 1.4 Cortes e números reais

Identificada a essência da continuidade da linha recta, torna-se agora óbvio para Dedekind como completar o domínio descontínuo dos números racionais: bastará pois criar entidades que sejam definidas de um modo puramente aritmético, e que conservem a propriedade da continuidade característica dos pontos de uma linha recta.

Será a noção de *corte*, introduzida na secção IV *Criação dos números irracionais* da sua obra, que irá resolver tal questão, daí que esta entidade seja a base da criação de Dedekind dos números irracionais.

Mas, tal como sucede frequentemente com as novas teorias matemáticas, também esta foi alvo de críticas. Entre outras razões, a falta de objectividade na linguagem empregue por Dedekind terá sido a causa apontada para que o seu conceito de número *irracional* envolvesse um ciclo vicioso, já que seria necessário pressupor *a priori* a existência de tal número[21]. A reflexão sobre esta e outras oposições será, sem dúvida, imprescindível para que possamos identificar qual o carácter inovador desta teoria dos números irracionais, bem como apontar eventuais lacunas aí existentes. Será então com mais segurança que poderemos precisar o papel de Dedekind no processo de aritmetização da análise empreendido no século XIX.

### 1.4.1 Cortes de números racionais

Ora, a alínea (III) das propriedades 1.2.1 dos racionais, página 20, já havia estabelecido que, dado qualquer racional $a$, era possível dividir o conjunto $R$ em duas classes $A_1$ e $A_2$ de forma que todo o número de $A_1$ fosse inferior a todo o número de $A_2$, podendo o próprio número $a$ ser o maior elemento de $A_1$ ou o menor elemento de $A_2$. Considerando esta propriedade como uma definição, Dedekind introduziu o conceito de *corte*.

**Definição 1.4.1** Uma qualquer divisão do conjunto dos números racionais em duas classes $A_1$ e $A_2$ tal que todo o número de $A_1$ seja menor do que todo o número em $A_2$ diz-se um **corte**, e representa-se por $(A_1, A_2)$.

[21] Veja-se, por exemplo, (Dugac, 1976), pág. 43.

Repare-se que, segundo esta definição, um mesmo número racional $a$ poderá originar dois cortes, conforme $a$ seja atribuído a uma ou outra classe. Representando-os por $(A_1, A_2)$ e $(A_1', A_2')$, bastará para tal considerar as seguintes classes, que definimos de uma forma simbólica:

$$A_1 = \{a_1 \in \mathbb{Q} : a_1 \leq a\} \ , \quad A_2 = \{a_2 \in \mathbb{Q} : a_2 > a\}$$
$$A_1' = \{a_1' \in \mathbb{Q} : a_1' < a\} \ , \quad A_2' = \{a_2' \in \mathbb{Q} : a_2' \geq a\}.$$

Mas, apesar de os considerar *diferentes*, Dedekind não considera estes cortes como sendo *essencialmente diferentes*[22], daí que afirme que todo o racional $a$ produz somente um corte.

Os cortes produzidos por números racionais possuem ainda a propriedade característica enunciada de seguida, e cuja prova, apesar de não ser considerada por Dedekind, decorre facilmente da definição de corte.

**Propriedade dos cortes (Cortes produzidos por racionais)** Dado um qualquer corte produzido por um número racional, ou entre os elementos da primeira classe existe um que é o maior, ou entre os da segunda classe existe um elemento que é o menor. Reciprocamente, se um corte possui esta propriedade então ele é originado por este número racional máximo ou mínimo.

Tal como Fraenkel expõe no capítulo III *Números racionais e reais* do seu livro (Fraenkel, 1964), podemos, em termos lógicos, considerar a existência dos quatro tipos de cortes que se seguem, consoante a existência de elementos máximo e mínimo nas suas classes: i) $A_1$ tem um elemento máximo e $A_2$ tem um elemento mínimo; ii) $A_1$ tem um elemento máximo e $A_2$ não tem elemento mínimo; iii) $A_1$ não tem elemento máximo e $A_2$ tem um elemento mínimo; iv) $A_1$ não tem elemento máximo e $A_2$ não tem elemento mínimo. A hipótese i) não pode verificar-se já que, considerando $a_1$ o elemento máximo de $A_1$ e $a_2$ o elemento mínimo de $A_2$, ter-se-ia $a_1 < a_2$ e portanto

[22]Esta definição será enunciada mais adiante, aquando do estudo das possíveis relações entre dois cortes, na secção 1.5.1 *Relação entre dois cortes*, mas, para já, entenda-se que dois cortes se dizem *essencialmente diferentes* quando correspondem a números diferentes.

o racional $\frac{1}{2}(a_1 + a_2)$, que é maior do que $a_1$ e menor do que $a_2$, teria (segundo a definição de *corte*) de pertencer a $A_2$ e $A_1$, respectivamente, o que é um absurdo. Se para cortes do tipo ii) ou iii) o elemento máximo de $A_1$ e o elemento mínimo de $A_2$ forem iguais (sendo obviamente números racionais), obtemos, como já foi referido, dois cortes que Dedekind considera não serem *essencialmente diferentes*, sendo então produzidos pelo mesmo número. Um corte do tipo iv) não é obviamente produzido por nenhum racional, daí que a propriedade anterior se revele fundamental nesta teoria dos números irracionais. É que esta é a situação que Dedekind considera na secção IV *Criação dos números irracionais* da sua obra como sendo aquela que define os números *irracionais*.

Ora, o facto de nem todos os cortes serem produzidos por números racionais justifica a descontinuidade de $R$, e, o que é ainda mais importante, identifica a existência de novos números. Será portanto à custa da noção de *corte* que serão definidas estas novas entidades, que mais não serão do que os números *irracionais*.

Em (Dedekind, 1858), primeira redacção inédita do seu livro *Continuidade e números irracionais*, Dedekind provou[23] que existe um corte que não é originado por nenhum número racional: o corte cuja primeira classe $A_1$ é composta por todos os racionais cujo quadrado é inferior a 2. Já em (Dedekind, 1963), primeira edição efectiva desta sua obra, o matemático considera o caso mais geral de todos os cortes produzidos por raízes quadradas de números inteiros positivos que não são quadrados perfeitos[24]. A prova deste resultado é pois uma mera generalização daquela relativa ao primeiro exemplo.

**Proposição 1.4.1** Existe uma infinidade de cortes que não são originados por números racionais.

***Demonstração***: Sendo $D$ um inteiro positivo, diferente de um quadrado perfeito, existe $\lambda$ inteiro positivo tal que:

$$\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2.$$

[23]Veja-se (Dedekind, 1858), pág. 10 — citado em (Dugac, 1976), apêndice XXXII, pág. 206.
[24]Veja-se (Dedekind, 1963), pág. 13.

Considerando as classes de racionais que numa notação simbólica actual denotaríamos por:

$$A_2 = \{a_2 \in \mathbb{Q}^+ : {a_2}^2 > D\} \quad \text{e} \quad A_1 = \mathbb{Q} \backslash A_2,$$

Dedekind limita-se a afirmar que $(A_1, A_2)$ é um corte, ou seja, que todo o elemento $a_1$ de $A_1$ é menor do que todo o elemento $a_2$ de $A_2$. Com efeito, sendo $a_1$ e $a_2$ dois elementos genéricos de $A_1$ e $A_2$, respectivamente, se $a_1 \leq 0$ é óbvio que $a_1 < a_2$; se $a_1 > 0$ então ${a_1}^2 \leq D$, e como ${a_2}^2 > D$ e $a_2$ é positivo, vem que $a_1 < a_2$.

Bastará mostrar que $(A_1, A_2)$ não é produzido por nenhum racional para que se conclua que existe um número infinito de cortes não originados por racionais. Neste sentido, Dedekind começa por mostrar que não existe nenhum racional cujo quadrado seja igual a D, e, finalmente, que as classes $A_1$ e $A_2$ que definem o corte não possuem, respectivamente, elemento máximo e elemento mínimo.

• Vejamos então que não existe nenhum racional cujo quadrado é igual a $D$. Repare-se, inclusivamente, que se tal racional existisse, ele pertencia a $A_1$ e produzia o corte. Suponhamos, por redução ao absurdo, que existem $t$ e $u$ inteiros positivos tais que:

$$t^2 - Du^2 = 0,$$

sendo $u$ o menor número nestas condições. Note-se que a obtenção de um novo par de inteiros positivos $t'$ e $u'$, com $u' < u$, tais que $D = \left(\dfrac{t}{u}\right)^2$ permite concluir a prova.

Como $\lambda u < t < (\lambda+1)u$, o número $u' = t - \lambda u$ é um inteiro positivo menor do que $u$. Relativamente ao inteiro $t'$, Dedekind escolhe $t' = Du - \lambda t$, limitando-se a afirmar ser um número positivo. A justificação para tal escolha pode encontrar-se em (Dugac, 1976), página 42. Ora, das igualdades:

$$t'u = Du^2 - \lambda tu = t^2 - \lambda tu = t(t - \lambda u) = tu'$$

decorre que, de facto, o inteiro $t'$ é positivo, uma vez que os inteiros $u, t$ e $u'$ também o são.

Uma vez que $t'$ verifica a relação:

$$t'^2 - Du'^2 = (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2) = 0,$$

obtém-se um racional, $\frac{t'}{u'}$, cujo quadrado é igual a $D$, sendo $t'$ e $u'$ inteiros positivos com $u' < u$.

Obtivemos então números $t'$ e $u'$, com $u' < u$, tais que $D = \left(\frac{t}{u}\right)^2$, o que é um absurdo.

Portanto, o quadrado de qualquer número racional tem de ser inferior ou superior a $D$, mas nunca poderá ser igual a ele.

• Provemos agora que a classe $A_1$ não admite máximo e a classe $A_2$ não admite mínimo.

Considerando

$$y = \frac{x(x^2 + 3D)}{3x^2 + D},$$

onde $x$ é tomado arbitrariamente, é utilizando as expressões:

$$y - x = \frac{2x(D - x^2)}{3x^2 + D} \quad \text{e} \quad y^2 - D = \frac{(x^2 - D)^3}{(3x^2 + D)^2}$$

que Dedekind mostra que nem a classe $A_1$ admite elemento máximo, nem a classe $A_2$ admite elemento mínimo. Ora, se $x$ for um elemento de $A_1$ e for positivo, existe ainda um elemento de $A_1$ maior do que $x$: basta notar que $x^2 < D$, decorrendo das igualdades anteriores que $y > x, y^2 < D$. Logo, $y$ pertence a $A_1$ e, portanto a classe $A_1$ não admite máximo. Dedekind não se refere ao caso em que $x$ é não positivo. Repare-se que, se $x \leq 0$, é óbvio que existe ainda um número $y$ em $A_1$ maior do que ele: pelo facto de $D$ ser um inteiro positivo diferente de um quadrado perfeito, basta tomar $y = 1$.

Agora, se $x$ for um elemento de $A_2$, $x^2 > D$, donde $y < x$ e $y^2 > D$. Logo $y$ pertence a $A_2$. Desta forma, concluímos que $A_2$ não admite elemento mínimo, conforme pretendido.

Apesar de Dedekind não o referir, repare-se que as classes iniciais poderiam, em alternativa, ser definidas por:

$$A'_2 = \{a_2 \in \mathbb{Q}^+ : {a_2}^2 \geq D\} \quad \text{e} \quad A'_1 = \mathbb{Q} \backslash A'_2.$$

Conforme veremos na secção 1.5.1 *Relação entre dois cortes*, o corte $(A'_1, A'_2)$ produzido desta outra forma é originado pelo mesmo número que o corte $(A_1, A_2)$. Em todo o caso, esta escolha não iria alterar a estrutura da prova, uma vez que não existe nenhum racional cujo quadrado seja igual a $D$.

Portanto, existe de facto uma infinidade de cortes que não são originados por números racionais.

$\blacksquare$

### 1.4.2 Criação dos números irracionais

Já que aos cortes produzidos por racionais podemos fazer corresponder números racionais, fazendo corresponder determinados números aos cortes cujas primeira e segunda classes não possuem, respectivamente, elemento máximo e elemento mínimo, obtém-se um conjunto de números que é uma extensão do domínio dos racionais. Foi exactamente esta a abordagem que Dedekind seguiu, denominando estes novos números de *irracionais*.

**Definição 1.4.2** "Sempre que um corte $(A_1, A_2)$ não seja produzido por nenhum número racional, criamos um novo número, um número *irracional* $\alpha$, que consideramos completamente definido por este corte $(A_1, A_2)$; diremos que o número $\alpha$ corresponde a este corte, ou que origina este corte."[25]

A todo o corte irá então corresponder um determinado número, quer ele seja racional ou irracional. Desta forma, Dedekind alargou o domínio dos números racionais, designando-o por conjunto dos números *reais*, denotando-o por $\mathcal{R}$. Para concluir, finalmente, que $\mathcal{R}$ é o conjunto que se procurava inicialmente como possuindo a mesma continuidade da linha recta, bastou a Dedekind mostrar que o conjunto de todos os cortes constitui um domínio ordenado, e que, além disso, verifica a propriedade de continuidade.

Antes mesmo de proceder a esta verificação, vejamos algumas das objecções feitas ao conceito de número irracional de Dedekind, para que, com o seu conhecimento, possamos entender melhor a teoria que se segue.

[25]Em (Dedekind, 1963), pág. 15.

### 1.4.3 Considerações acerca do conceito de número irracional de Dedekind

Duas das críticas mais importantes tecidas à teoria dos números irracionais de Dedekind foram pela primeira vez apontadas por Rudolf Lipschitz e Heinrich Weber, através de correspondências que trocaram com o matemático. Segundo Lipschitz, a teoria de Dedekind não diferia daquela que havia sido elaborada pelos gregos acerca das grandezas incomensuráveis, daí que não se lhe pudesse atribuir nenhum carácter inovador.

> "(...) sem colocar em dúvida a legitimidade da vossa definição, devo reconhecer que ela não difere a não ser na forma de expressão, e não no conteúdo em si, da definição estabelecida pelos Antigos. Posso afirmar somente que considero a definição dada por Euclides V, 5 (...) e o que a segue, por tão satisfatório quanto a sua."[26]

Em relação a este assunto, várias foram as cartas trocadas pelos dois matemáticos, cada qual defendendo o seu ponto de vista[27]. A importância desta discussão, iniciada por Lipschitz no ano de 1876, justifica o facto de ainda na actualidade serem vários os autores que se debruçam sobre esta comparação. Para perceber um pouco melhor esta controvérsia, podem consultar-se (Corry, 1994), (Gardies, 1984) ou ainda (Stein, 1990). Em todo o caso, todas estas exposições parecem ir de encontro à ideia defendida pelo próprio Dedekind numa carta que escreveu a Lipschitz a 10 de Junho de 1876:

> "(...) os princípios euclidianos por si só, sem a junção do princípio da continuidade que *não está* contido neles, são incapazes de fundamentar uma teoria completa dos números reais como razões entre grandezas (...)"[28]

[26]Carta de 08 de Junho de 1876 — citado em (Sinaceur, 1979), pág. 116. A definição à qual se refere esta citação é a seguinte: *Elementos*, V, Def. 5: "Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, quando, dados quaisquer equimúltiplos da primeira e da terceira e dados quaisquer equimúltiplos da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos simultaneamente excedem, são simultaneamente iguais ou ficam aquém dos últimos." — em (Euclid, 1956), pág. 114.

[27]Estas cartas podem ser consultadas, por exemplo, em (Sinaceur, 1979).

[28]Carta de 10 de Junho de 1876 — citado em (Sinaceur, 1979), pág. 121.

Na construção de Dedekind do conceito de *número irracional*, a noção de *corte* assume um papel fundamental. No entanto, veremos que as expressões utilizadas por Dedekind para se referir à criação desse número são pouco claras, gerando até alguma contradição.

> "Sempre que um corte $(A_1, A_2)$ não seja produzido por nenhum número racional, criamos um novo número, um número *irracional* $\alpha$, que consideramos completamente definido por este corte $(A_1, A_2)$; diremos que o número $\alpha$ corresponde a este corte, ou que origina este corte."[29] (Definição 1.4.2)

Desta definição parece ser claro, tal como pareceu a Weber, que o número irracional não é nada mais do que o próprio corte. Mas Dedekind não concorda com esta identificação e, em resposta a Weber, afirma:

> "Nós somos uma raça divina e sem dúvida que possuímos poder criativo, não só para coisas materiais (...) mas especialmente para coisas da mente. Esta é precisamente a mesma questão que levanta [Weber] em relação à minha teoria dos irracionais, quando afirma que o número irracional é nada mais do que o próprio corte, enquanto eu prefiro criar algo *novo* (diferente do corte) que corresponde ao corte e em relação ao qual eu afirmo que faz nascer, cria o corte."[30]

Devemos confessar ser um pouco difícil interpretar esta perspectiva: um número irracional não é um corte, é antes *algo* que corresponde ao corte. Ainda na mesma carta, Dedekind explica o seu ponto de vista. Tal aplicação do poder criativo que atribui à mente humana é, segundo ele, justificável pela semelhança de todos os números. É que, existindo igualmente cortes produzidos por números racionais, não teria sentido, nesse caso, afirmar que um racional seria idêntico ao corte que produz. Da mesma forma, não poderemos agora dizer que um número irracional é um corte. Dedekind estabeleceu uma correspondência entre cortes e números irracionais. Com ela não pretendeu identificar estas duas entidades, mas antes assegurar que ambas verificavam as mesmas propriedades. E repare-se que já havia feito algo semelhante

[29] Em (Dedekind, 1963), pág. 15.

[30] Carta de 24 de Janeiro de 1888 — citado em (Ewald, 1996), pág. 835.

ao comparar os números racionais com os pontos de uma linha recta[31]. Em todo o caso, as palavras que Dedekind dirige a Weber justificam o facto de não sabermos a entidade com a qual identificar, de facto, um número irracional.

Devemos notar ainda que a segunda parte da definição que citámos anteriormente parece entrar em contradição com a primeira parte. Ora, o número $\alpha$ considerou-se *completamente definido* pelo corte mas, curiosamente, Dedekind afirma de seguida que o corte é *originado* pelo número $\alpha$. Ao dizer que o irracional $\alpha$ origina o corte, cometeu uma imprecisão: a suposição *a priori* de que o número $\alpha$ existe. E esta é também a perspectiva de Pierre Dugac[32]. Para explicar a sua crítica, Dugac compara os cortes originados por números racionais àqueles originados por irracionais. Relativamente aos primeiros, Dedekind afirma no início da secção IV *Criação dos números irracionais* que "(...) todo o número racional $a$ produz um corte (...)"[33]. Ora, esta afirmação não levanta qualquer objecção já que, por um lado o racional existe antes de se criar o corte, e, além disso, o modo como são formados os cortes, a partir de elementos de $\mathbb{Q}$, justifica plenamente o uso da palavra *criar*. Mas o mesmo não se poderá dizer quando o corte é originado por um número irracional. É que, no entender de Dugac, com o qual concordamos, na expressão "*o número irracional $\alpha$ cria o corte*", a palavra *criar* pressupõe uma certa existência *a priori* de $\alpha$, quando na realidade é o número $\alpha$ que é criado pelo corte.

Em todo o caso, veremos nas secções seguintes que a correspondência entre cortes e números (compreendendo agora os racionais e os irracionais) ficará perfeitamente caracterizada sem esta expressão pouco "feliz" e desnecessária de Dedekind.

[31] Veja-se secção 1.2 *Comparação dos números reais com os pontos de uma linha recta.*
[32] Veja-se (Dugac, 1976), pág. 43.
[33] Em (Dedekind, 1963), pág. 13.

## 1.5 $\mathcal{R}$ domínio ordenado

Sendo os números reais definidos à custa de cortes, basta estudar as possíveis relações entre dois quaisquer cortes para que se conclua que no conjunto dos números reais está definida uma relação de ordem. Este estudo é feito por Dedekind na secção IV *Criação dos números irracionais* da sua obra.

### 1.5.1 Relação entre dois cortes

Tendo em conta o modo como são "criados" os números irracionais, é estabelecida a seguinte definição de desigualdade entre dois quaisquer números.

**Definição 1.5.1** Dois números (racionais ou irracionais) dizem-se **diferentes** ou **desiguais** quando e apenas quando corresponderem a cortes essencialmente diferentes.

Uma vez que para definir completamente um corte basta precisar uma das suas classes, o estudo das possíveis relações entre dois cortes necessita apenas da análise da relação entre, por exemplo, as respectivas primeiras classes.

Assim, dois quaisquer cortes $(A_1, A_2)$ e $(B_1, B_2)$ originados, respectivamente, pelos números $\alpha$ e $\beta$ (racionais ou irracionais) serão classificados por Dedekind como *perfeitamente idênticos*, *essencialmente iguais* ou *essencialmente diferentes*. Refira--se que a terminologia de cortes *essencialmente iguais* foi a adoptada por Dugac[34], e que usamos nesta exposição, para traduzir a designação de cortes *não essencialmente diferentes* utilizada por Dedekind[35] A exposição que se segue completa a descrição textual feita por Dedekind com o uso de uma notação simbólica actual relativa à teoria de conjuntos.

• Se todo o número de $A_1$ está contido em $B_1$ e todo o número de $B_1$ está também contido em $A_1$, ou simbolicamente se $A_1 = B_1$, pela própria definição das classes de um corte, as duas classes $A_2$ e $B_2$ são necessariamente idênticas, ou seja, $A_2 = B_2$. Os cortes $(A_1, A_2)$ e $(B_1, B_2)$ são então ***perfeitamente idênticos***, relação esta que Dedekind denota simbolicamente por $\alpha = \beta$ ou $\beta = \alpha$.

[34]Veja-se (Dugac, 1976), pág. 44.

[35]Veja-se (Dedekind, 1963), pág. 17.

• Se as classes $A_1$ e $B_1$ não são idênticas, isto é se $A_1 \neq B_1$, existe pelo menos um elemento num dos conjuntos que não pertence ao outro.

Suponhamos inicialmente que seja $A_1$ a possuir pelo menos um elemento $a'_1$ que não é elemento de $B_1$. Então $a'_1$ pertence a $B_2$ ($a'_1 = b'_2$), daí que, pela definição de corte, todo o elemento de $B_1$ seja inferior a qualquer elemento de $B_2$, e, em particular, a $b'_2 = a'_1$. Assim sendo, todos os números de $B_1$ pertencem a $A_1$, relação esta que denotamos simbolicamente por $B_1 \subsetneqq A_1$.

Conforme o elemento $a'_1$ seja único ou não, Dedekind obtém cortes que designa, respectivamente, por *essencialmente iguais* e *essencialmente diferentes*. Vejamos de seguida estes dois casos.

• Se $B_1 \subsetneqq A_1$ e $a'_1$ é único, Dedekind mostra que os dois cortes são originados pelo mesmo número.

Uma vez que $a'_1$ é o único elemento de $A_1$ que pertence a $B_2$, todo o elemento $a_1$ de $A_1$ que seja diferente de $a'_1$ (isto é, todo o $a_1 \in A_1 \backslash \{a'_1\}$) pertence a $B_1$, logo $a_1 < a'_1$. Portanto, $a'_1$ é o maior dos números de $A_1$, o que significa que $A_1$ possui elemento máximo. Mas então, pela *propriedade de cortes produzidos por racionais*, página 26, podemos concluir que, neste caso, o corte $(A_1, A_2)$ é originado por $\alpha = a'_1 = b'_2$.

Podemos afirmar também que, sendo $a'_1 = b'_2$, todo o elemento $b_2$ diferente de $b'_2$ (isto é, todo o $b_2 \in B_2 \backslash \{b'_2\}$) verifica a relação[36] $b_2 > b'_2$. Portanto $b'_2$ é o elemento mínimo de $B_2$, concluindo-se, à semelhança do caso anterior, que o corte $(B_1, B_2)$ é originado por $\beta = b'_2 = a'_1 = \alpha$.

Assim os dois cortes são originados pelo mesmo número $\alpha = \beta$, designando-se neste caso por cortes ***essencialmente iguais***, ou, como já foi referido, por cortes *não essencialmente diferentes* segundo a terminologia original de Dedekind.

Dois cortes *essencialmente iguais* são então cortes que, apesar de diferentes, são originados pelo mesmo número. Repare-se que Dedekind já havia introduzido esta terminologia para o caso em que os cortes fossem originados por números racionais[37].

---

[36] O caso contrário não pode verificar-se. Com efeito, se $b_2 < b'_2 = a'_1$, $b_2$ seria um elemento de $A_1$. Pelo facto de $a'_1$ ser o único elemento de $A_1$ que não pertence a $B_1$, $b_2$ pertenceria a $B_1$, o que é um absurdo.

[37] Veja-se (Dedekind, 1963), pág. 13.

• No caso em que $B_1 \subsetneqq A_1$, existindo em $A_1$ pelo menos dois elementos que não pertencem a $B_1$, Dedekind prova que existe uma infinidade de números nestas condições.

Consideremos dois desses elementos, $a_1'$ e $a_1''$, que, obviamente, são números racionais. Ora, pela alínea (II) das propriedades 1.2.1 dos números racionais, isto é pela propriedade de densidade do conjunto dos racionais, página 20, existe uma infinidade de racionais entre $a_1'$ e $a_1''$. Pela alínea (III) das mesmas propriedades, qualquer que seja o racional $x$ entre $a_1'$ e $a_1''$, podemos concluir, por um lado, que $x$ é um elemento de $A_1$, caso contrário $x$ pertenceria a $A_2$ e a condição $x < a_1''$ conduziria a um absurdo. Mas, por outro lado, $x$ não poderá ser um elemento de $B_1$, uma vez que, sendo $a_1'$ e $a_1''$ elementos de $B_2$ ($a_1' = b_2', a_1'' = b_2''$), se tem $b_2' < x < b_2''$; ora, se $x$ pertencesse a $B_1$, a relação $b_2' < x$ conduziria a um absurdo.

Assim sendo, conclui-se que existe uma infinidade de números $x$ que são elementos de $A_1$ mas não de $B_1$ (isto é, pertencentes a $A_1 \backslash B_1$), pelo que $\alpha$ e $\beta$ são números diferentes. Dois cortes que se relacionem desta forma são designados por Dedekind como ***essencialmente diferentes***, relação esta que, neste caso particular, denota por $\alpha > \beta$ ou $\beta < \alpha$. Dedekind não justifica porque é $\alpha > \beta$ e não $\alpha < \beta$. Repare-se que, existindo uma infinidade de racionais entre $a_1'$ e $a_1''$ que pertencem a $A_1$ mas não a $B_1$, a relação $\alpha < \beta$ não poderia, de facto, verificar-se. Com efeito, nesse caso teríamos uma infinidade de racionais entre $\alpha$ e $\beta$ que, por serem superiores a $\alpha$ e portanto não pertencerem a $A_1$, não pertenceriam a $B_1$ e que, por serem inferiores a $\beta$, não pertenceriam a $B_2$, o que contraria o facto de $(B_1, B_2)$ ser um corte.

• Se considerarmos agora que temos $A_1 \subsetneqq B_1$, iremos obter mais dois casos que esgotarão as possíveis relações entre as classes $A_1$ e $B_1$.

Se existir apenas um elemento $b_1'$ em $B_1$ que não pertence a $A_1$, os cortes dir-se-ão do mesmo modo ***essencialmente iguais***, sendo originados pelo mesmo número racional $\alpha = \beta$.

E, finalmente, caso $b_1'$ não seja único, à semelhança do caso já tratado, teremos dois cortes ***essencialmente diferentes***, com $\alpha < \beta$ ou $\beta > \alpha$.

A correspondência que Dedekind estabeleceu entre cortes e números reais não é uma correspondência biunívoca. E, uma vez que o estudo da relação entre cortes tem por objectivo definir, através dessa comparação, uma relação entre números, devemos sintetizar o que foi exposto por Dedekind. Dois números dir-se-ão diferentes quando e apenas quando corresponderem a cortes essencialmente diferentes; o mesmo número real corresponde a dois cortes desde que estes sejam essencialmente iguais; mas, no entanto, cortes essencialmente iguais são diferentes.

Considerando todas as possíveis relações entre dois cortes, Dedekind conclui que, dados dois números diferentes, um é necessariamente o *maior*, o outro o *menor*, não sendo possível uma terceira hipótese. Em todo o caso, reconhece que estas duas possibilidades estavam de facto contempladas no uso do *comparativo* (maior, menor) para designar a relação entre dois reais $\alpha$ e $\beta$. Dedekind não considera ter cometido um erro de extrema gravidade ao assumir *a priori* tais terminologias para a relação entre dois quaisquer reais:

> "Em tais investigações precisamos de tomar o maior cuidado para que, mesmo com as melhores intenções de ser honesto, não sejamos conduzidos, através de uma escolha errada de expressões emprestadas de outras noções já desenvolvidas, ao uso de inadmissíveis transferências de um domínio para o outro."[38]

[38] Em (Dedekind, 1963), pág. 18.

### 1.5.2 Relação de ordem no conjunto dos números reais

Estando os números reais definidos através de cortes, podemos então expressar do seguinte modo a relação de ordem entre dois quaisquer reais $\alpha$ e $\beta$, aos quais correspondem os cortes $(A_1, A_2)$ e $(B_1, B_2)$:

$\alpha = \beta$, se os cortes associados a estes números forem *perfeitamente idênticos* ou *essencialmente iguais*;

$\alpha > \beta$, se os cortes forem *essencialmente diferentes*, tendo-se $B_1 \subsetneqq A_1$;

$\alpha < \beta$, se os cortes forem *essencialmente diferentes*, com $A_1 \subsetneqq B_1$.

Antes mesmo de abordar as propriedades relativas à relação de ordem no conjunto dos números reais, Dedekind analisa[39] com um pouco mais de pormenor o caso em que $\alpha > \beta$. O estudo deste caso contém a prova de que entre dois quaisquer números (racionais ou irracionais) existe sempre uma infinidade de racionais. Este resultado, que consideramos na proposição que se segue, será fundamental na prova da *continuidade* do conjunto dos números reais.

**Proposição 1.5.1** "Se $\alpha > \beta$, isto é, se existem infinitos números em $A_1$ que não pertencem a $B_1$, então existem infinitos destes números que são ao mesmo tempo diferentes de $\alpha$ e de $\beta$; todo o racional $c$ nestas condições é $< \alpha$, porque está contido em $A_1$ e ao mesmo tempo é $> \beta$ por estar contido em $B_2$."[40]

Para mostrar que o conjunto dos reais é um domínio ordenado, resta verificar que neste conjunto também são válidas as propriedades (I) e (II) dos racionais, página 20, sendo de igual modo possível fazer corresponder a todo o número real, aquilo que designaríamos por uma *partição* de $\mathcal{R}$. Tais propriedades são abordadas na secção V *Continuidade do domínio dos números reais* da obra de Dedekind, mas as suas demonstrações são omitidas, por decorrerem de imediato das definições relacionadas com cortes dadas anteriormente.

[39] Veja-se (Dedekind, 1963), pág. 18.

[40] Em (Dedekind, 1963), pág. 18.

**Propriedades 1.5.1 (Reais)** Sendo $\alpha, \beta$ e $\gamma$ números reais quaisquer,

(I) Se $\alpha > \beta$ e $\beta > \gamma$ então $\alpha > \gamma$. Diremos que "$\beta$ está entre $\alpha$ e $\gamma$".

(II) Se $\alpha$ e $\gamma$ forem diferentes, então existem infinitos números reais distintos $\beta$ entre $\alpha$ e $\gamma$.

(III) Se $\alpha$ é um número arbitrário, então todos os números do conjunto $\mathcal{R}$ pertencem a duas classes, $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$, contendo cada uma infinitos elementos. A primeira classe $\mathcal{U}_1$ contém todos os números $\alpha_1$ menores do que $\alpha$; a segunda $\mathcal{U}_2$ todos os números $\alpha_2$ maiores do que $\alpha$; e o número $\alpha$ pode pertencer à primeira ou à segunda classe, sendo, respectivamente, o maior elemento da primeira ou o menor elemento da segunda classe. Em qualquer um dos casos, a separação do conjunto $\mathcal{R}$ nas duas classes $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ é tal que todo o número da primeira classe $\mathcal{U}_1$ é menor do que todo o número da segunda classe $\mathcal{U}_2$. Diremos então que esta separação é originada pelo número $\alpha$.

## 1.6 $\mathcal{R}$ domínio contínuo

A característica que distingue o conjunto dos reais dos outros conjuntos de números é apresentada como um teorema, conferindo a este domínio a mesma continuidade atribuída à linha recta. É exactamente este resultado que falta enunciar para se concluir que o domínio dos reais é o conjunto que se procurava.

**Teorema da continuidade do conjunto dos números reais** "Se o conjunto $\mathcal{R}$ de todos os números reais se dividir em duas classes $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ de tal modo que todo o número $\alpha_1$ da classe $\mathcal{U}_1$ é menor do que todo o número $\alpha_2$ da classe $\mathcal{U}_2$, então existe um e um só número $\alpha$ através do qual esta divisão é produzida."[41]

A demonstração deste teorema é feita definindo os cortes em $\mathcal{R}$ de um modo semelhante aos cortes no conjunto dos racionais $R$, e mostrando que a cada corte de reais corresponde um e um só número real. No entanto, Dedekind não definiu o que entendia por *cortes* no conjunto dos números reais, muito embora este conceito esteja implícito na alínea (III) das propriedades 1.5.1 dos números reais, página 40. Devemos então assumir, tal como fez Dedekind, que tal definição é uma extensão da definição 1.4.1, página 25, de *corte* no conjunto dos números racionais.

***Demonstração***: A partir do corte $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$ no conjunto dos números reais, Dedekind define o corte $(A_1, A_2)$ no conjunto dos racionais. Para tal, considera como elementos de $A_1$ e $A_2$, respectivamente, os números racionais de $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$. Simbolicamente, temos então:

$$A_1 = \{u_1 \in \mathcal{U}_1 : u_1 \text{ é racional}\} \quad \text{e} \quad A_2 = \{u_2 \in \mathcal{U}_2 : u_2 \text{ é racional}\}.$$

Sendo $\alpha$ o número que origina o corte $(A_1, A_2)$ e $\beta$ um número arbitrário diferente de $\alpha$, existe uma infinidade de racionais $c$ entre $\alpha$ e $\beta$. Apesar de Dedekind não justificar esta afirmação, repare-se que ela decorre de imediato da proposição 1.5.1, página 39. Ora, caso $\beta < \alpha$, ainda pela mesma proposição 1.5.1, tem-se $c < \alpha$, daí que $c$ pertença

[41] Em (Dedekind, 1963), pág. 20.

a $A_1$, e portanto também à classe $\mathcal{U}_1$. Como $\beta < c$, conclui-se que $\beta$ é um elemento de $\mathcal{U}_1$.

Se, por outro lado, $\beta > \alpha$, então $c > \alpha$, pelo que $c$ é um elemento de $A_2$, e também de $\mathcal{U}_2$. Como $\beta > c$, $\beta$ é igualmente um elemento de $\mathcal{U}_2$.

Portanto, qualquer número $\beta$ diferente de $\alpha$ é um elemento de $\mathcal{U}_1$ ou $\mathcal{U}_2$, conforme se tenha $\beta < \alpha$ ou $\beta > \alpha$. Logo, pela alínea (III) das propriedades 1.5.1 dos números reais, página 40, conclui-se que $\alpha$ é o maior elemento de $\mathcal{U}_1$ ou o menor elemento de $\mathcal{U}_2$. Logo $\alpha$ define no conjunto dos números reais o corte $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$.

Dedekind refere-se ainda à unicidade deste número $\alpha$ que origina o corte $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$, mas não apresenta qualquer justificação. Em todo o caso, a sua prova é imediata. Supondo que existisse um real $\alpha'$ diferente de $\alpha$ que originava também o corte $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$ (com $\alpha' > \alpha$, sem perda de generalidade), existiriam, pela alínea (II) das propriedades 1.5.1, infinitos números reais $r$ entre $\alpha$ e $\alpha'$. Da alínea (III) das mesmas propriedades, e como $\alpha < r$, $r$ seria um elemento de $\mathcal{U}_2$, e, uma vez que $r < \alpha'$, $r$ seria também um elemento de $\mathcal{U}_1$, o que é um absurdo. Portanto $\alpha$ é o único número que define o corte $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$.

$\blacksquare$

## 1.7 Operações em $\mathcal{R}$

> "Para reduzir qualquer operação entre dois números reais $\alpha$, $\beta$ a operações com números racionais, é apenas necessário definir, a partir dos cortes $(A_1, A_2)$, $(B_1, B_2)$ produzidos pelos números $\alpha$ e $\beta$ no conjunto $R$ [dos números racionais], o corte $(C_1, C_2)$ ao qual deve corresponder o resultado da operação, $\gamma$."[42]

Foi então através deste resultado, e portanto recorrendo apenas a relações entre classes de cortes, que Dedekind pôde definir as diferentes operações aritméticas no conjunto dos números reais, bem como provar as propriedades destas operações.

Devemos mesmo notar, tal como afirma Dugac[43], que é notável que nesta época Dedekind tenha formulado um resultado que, apesar de se referir somente a cortes, terá algo que se possa entender como um primeiro passo na definição de uma lei de composição.

Na secção VI *Operações com números reais* da sua obra, Dedekind apenas mostra como adicionar dois reais, considerando pois a operação aritmética mais simples. Mas afirma, na mesma secção, que de uma forma semelhante, se podem definir as operações elementares de subtracção, multiplicação e divisão, e até mesmo a potenciação de um número, extracção de raízes ou a operação logaritmo.

### 1.7.1 Adição

Indo de encontro ao que afirma no resultado citado anteriormente, Dedekind mostra, na secção VI da sua obra, como formar o corte que será produzido pela soma $\alpha + \beta$, para reais $\alpha$ e $\beta$ quaisquer. Aborda inicialmente o caso em que $\alpha$ e $\beta$ são racionais, limitando-se simplesmente a generalizar as suas conclusões quando algum destes números é irracional, ou no caso em que ambos o sejam.

Sejam pois $\alpha$ e $\beta$ dois reais que originam, respectivamente, os cortes $(A_1, A_2)$ e $(B_1, B_2)$ no conjunto dos racionais. O corte $(C_1, C_2)$ ao qual irá corresponder a soma $\alpha + \beta$ é formado do seguinte modo: um racional $c$ será um elemento de $C_1$ se existirem

[42] Em (Dedekind, 1963), pág. 21.
[43] Veja-se (Dugac, 1976), pág. 45.

números $a_1$ de $A_1$ e $b_1$ de $B_1$ tais que $c \leq a_1 + b_1$. Caso contrário, $c$ pertencerá a $C_2$.

Vejamos agora a prova de que, de facto, o corte $(C_1, C_2)$ é originado pela soma entre os reais $\alpha$ e $\beta$.

• Se $\alpha$ e $\beta$ forem racionais, todo o número $c_1$ de $C_1$ verifica $c_1 \leq \alpha + \beta$, já que se tem $a_1 \leq \alpha$ e $b_1 \leq \beta$, para quaisquer $a_1$ e $b_1$. Além disso, todo o número $c_2$ de $C_2$ é tal que $c_2 \geq \alpha + \beta$. Com efeito, se fosse $c_2 < \alpha + \beta$, existiria um racional positivo $p$ tal que $\alpha + \beta = c_2 + p$, donde se teria $c_2 = (\alpha - \frac{1}{2}p) + (\beta - \frac{1}{2}p)$; ora, como $(\alpha - \frac{1}{2}p)$ é um elemento de $A_1$ e $(\beta - \frac{1}{2}p)$ um elemento de $B_1$, $c_2$ pertenceria a $C_1$, o que é um absurdo.

Portanto, neste caso, ou a classe $C_1$ possui um elemento máximo, ou $C_2$ possui um elemento mínimo. Pela *propriedade de cortes produzidos por racionais*, página 26, concluímos então que o corte $(C_1, C_2)$ é originado pela soma $\alpha + \beta$.

• Caso algum dos números $\alpha$ e $\beta$ não seja racional, ou caso ambos não o sejam, Dedekind limita-se a fazer a seguinte observação:

> "(...) não violamos a definição [da operação adição] que é válida na aritmética dos racionais se em todos os casos entendermos por soma $\alpha+\beta$ de dois quaisquer números reais $\alpha$, $\beta$, o número $\gamma$ que origina o corte $(C_1, C_2)$. Mais ainda, caso apenas um dos números $\alpha, \beta$ seja racional, por exemplo $\alpha$, é fácil verificar que é indiferente para a soma $\alpha + \beta$ se o número $\alpha$ é colocado na classe $A_1$ ou na classe $A_2$."[44]

Fazendo uso de uma notação simbólica actual, vejamos o que sucede em cada um destes casos.

• Se apenas $\alpha$ for racional, é evidente que:

$$\forall\ c_1 \in C_1, c_1 < \alpha + \beta,$$

porque $\forall\ a_1 \in A_1, b_1 \in B_1,\ a_1 \leq \alpha$ e $b_1 < \beta$.

Para provar que $\forall\ c_2 \in C_2, c_2 > \alpha + \beta$, suponhamos, por absurdo, que[45] $\exists\ c_2 \in C_2 : c_2 < \alpha + \beta$. Ora, pela proposição 1.5.1, página 39, existem infinitos

[44]Em (Dedekind, 1963), pág. 22.

[45]Repare-se que a igualdade $c_2 = \alpha + \beta$ não pode verificar-se já que $c_2$ e $\alpha$ são racionais e $\beta$ é irracional.

racionais entre $c_2$ e $\alpha + \beta$. Além disso, pelo facto de $c_2 \in C_2$, tem-se $\forall\ a_1 \in A_1$, $b_1 \in B_1\ c_2 > a_1 + b_1$. Portanto, é sempre possível encontrar racionais positivos $p$ e $q$ de tal modo que:

$$a_1 + b_1 < c_2 < a_1 + p + b_1 + q < \alpha + \beta, \quad \forall\ a_1 \in A_1,\ b_1 \in B_1.$$

Mas a última destas desigualdades conduz a um absurdo, pelo facto de $a_1 + p \notin A_1$ e $b_1 + q \notin B_1$. Portanto, $c_2$ é um elemento de $C_2$.

Assim, pelo *teorema de continuidade do conjunto dos números reais*, página 41, existe um e um só número (que não é racional) que produz o corte $(C_1, C_2)$ e que, portanto, pela definição 1.4.2, página 31, define o número irracional $\alpha + \beta$. É pois indiferente, neste caso, a classe à qual pertence o número $\alpha$, já que em qualquer dos casos, o corte é originado por $\alpha + \beta$.

• Se $\alpha$ e $\beta$ forem ambos irracionais, é também evidente que $\forall\ c_1 \in C_1, c_1 < \alpha + \beta$. A prova de que $\forall\ c_2 \in C_2, c_2 > \alpha + \beta$ é idêntica à do caso anterior.

Portanto, também neste caso o corte $(C_1, C_2)$ é originado pelo número $\alpha + \beta$.

### 1.7.2 Outras operações

É de notar que as outras operações aritméticas de subtracção, multiplicação e divisão necessitam de algumas considerações para que sejam definidas através de cortes. Por exemplo, no caso da multiplicação de dois reais $\alpha, \beta$, que originam os cortes $(A_1, A_2)$ e $(B_1, B_2)$, a primeira classe do corte $(C_1, C_2)$ ao qual corresponde o produto $\alpha.\beta$ não poderia simplesmente considerar-se formada por todos os produtos $a_1.b_1$, com $a_1 \in A_1$ e $b_1 \in B_1$. Isto porque, caso $A_1$ e $B_1$ contivessem números negativos muito pequenos, tal classe não cumpriria a definição de corte, já que $C_1$ conteria números positivos muito grandes.

Relativamente à operação de subtracção, é sabido que na primeira versão desta sua obra *Continuidade e Números Irracionais*, Dedekind já havia começado a desenvolver alguns detalhes[46]. Aí o matemático refere quais as classes do corte $(C_1, C_2)$ que será originado pelo número $\alpha - \beta$, o qual designa por *diferença* de $\alpha$ e $\beta$. Sendo $\alpha$ e $\beta$ os números correspondentes aos cortes de racionais $(A_1, A_2)$ e $(B_1, B_2)$, um racional $z$ é dito ser um elemento de $C_1$ se existirem elementos $a_1$ de $A_1$ e $b_2$ de $B_2$ tais que $z < a_1 - b_2$; sendo todos os outros racionais elementos da classe $C_2$. Apesar de não ser provado que, de facto, o número $\alpha - \beta$ origina o corte $(C_1, C_2)$, repare-se que esta demonstração é em tudo semelhante àquela referente à operação de adição, abordada na secção anterior.

É evidente que as dificuldades inerentes à definição das operações aritméticas dos números reais decorrem do facto de estes serem definidos através de cortes, podendo ser sempre contornadas definindo a classe $C_1$ de uma forma adequada. Em todo o caso, tal como afirma Fraenkel

> "Apesar destas dificuldades serem ultrapassadas utilizando um ou outro método, é importante compreender a razão porque surgiram: por definir um irracional ou número real através da totalidade de todos os racionais."[47]

Ainda segundo o mesmo autor, se por um lado a teoria de Dedekind acerca dos números reais se distingue de outras suas contemporâneas pelo seu "*carácter não*

[46]Veja-se (Dedekind, 1858), pág. 14 — citado em (Dugac, 1976), apêndice XXXII, pág. 208.
[47]Em (Fraenkel, 1964), pág. 32, 34.

*técnico*", definindo os reais como um agregado de números racionais, por outro lado a abstracção do seu método conduziu a que as operações com cortes não se revelassem muito úteis em cálculo. Da mesma opinião era Georg Cantor que, tal como refere Dugac[48], considerava que os números não se apresentavam na análise sob a forma de "cortes", sendo apenas com extrema habilidade e dificuldade que poderiam ser escritos nessa forma. Relativamente a este aspecto, devemos reconhecer existir, sem dúvida, um carácter algo artificial na teoria dos números irracionais de Dedekind.

Através das suas definições para as operações aritméticas, Dedekind afirma poder provar teoremas como $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ que, segundo ele, nunca haviam sido devidamente provados. Quem não concordou com o facto de não existir semelhante prova foi Lipschitz que, numa troca de correspondência com Dedekind, afirmou poderem encontrar-se nos *Elementos* de Euclides todos os princípios necessários e suficientes à demonstração desta e de outras proposições[49]. Em resposta a Lipschitz, Dedekind afirma ter consultado inúmeros livros e não ter encontrado nenhum raciocínio convincente, a não ser afirmações do tipo:

"(...) $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, uma vez que $(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = (\sqrt{ab})^2 = ab$ (...)"[50]

Ora, de facto, já havia sido provado que $(mn)^2 = m^2n^2$, mas sendo $m$ e $n$ números racionais. Uma vez que este tipo de prova considerava como válida tal igualdade para $m$ e $n$ irracionais, sem sequer existir qualquer referência anterior ao produto de dois números irracionais, Dedekind mostra-se convicto de que, de facto, a sua é a primeira demonstração correcta de tal resultado[51].

Dugac refere que Weierstrass já tinha feito tais demonstrações nos seus cursos de Berlim[52]. Em todo o caso, é compreensível que Dedekind não tivesse conhecimento delas, já que, apesar de iniciada no ano de 1863, a primeira exposição impressa da teoria weierstrassiana dos números reais foi publicada apenas no ano de 1872, no livro *Os Elementos da Aritmética* de Kossak.

[48]Veja-se (Dugac, 1976), pág. 45.

[49]Veja-se carta de 08 de Junho de 1876 — citado em (Sinaceur, 1979), pág. 117.

[50]Carta de 10 de Junho de 1876 — citado em (Sinaceur, 1979), pág. 119.

[51]Para uma análise mais aprofundada acerca deste assunto, pode consultar-se (Corry, 1994).

[52]Veja-se (Dugac, 1976), págs. 45–46.

### 1.7.3 Propriedades das operações aritméticas em $\mathcal{R}$

Tal como já foi referido, por volta do ano de 1872, não era ainda utilizada uma simbologia relativa à teoria de conjuntos. Pudemos aperceber-nos das secções anteriores de que, pelo facto dos números reais serem definidos à custa de cortes, e por não existir uma tal linguagem simbólica, as operações entre reais assumiam um aspecto um pouco confuso. Assim, e uma vez que a teoria dos números irracionais de Dedekind é elaborada à custa de noções de conjuntos, o matemático vê-se na obrigação de introduzir os seus próprios conceitos, por forma a facilitar a linguagem aí empregue[53].

Ora, como as operações entre números reais são definidas à custa das mesmas operações entre racionais, é compreensível que tais conceitos apenas se refiram a números racionais. Curiosamente, Dedekind designa por *intervalo* todo o conjunto de racionais que possui a propriedade de conter todos os racionais entre dois quaisquer dos seus elementos. Caso existam números maiores e números menores do que qualquer elemento de um intervalo $A$, ele diz-se um *intervalo finito*, ficando desta forma o conjunto $R$ dos racionais dividido em três partes $A_1, A, A_2$, sendo $A_1$ a primeira classe de um determinado corte e $A_2$ a segunda classe de outro corte. Os números determinados por estes cortes (racionais ou irracionais) são então ditos os *limites* inferior e superior do intervalo $A$, sendo ainda introduzidos os conceitos de *relação de inclusão* e de *porção* de um intervalo. Sem dúvida que estes conceitos facilitariam as definições das operações aritméticas através de cortes, mas tal como afirma Dedekind, seriam ainda necessárias considerações mais detalhadas assim que tentássemos adaptar aos reais os inúmeros teoremas relativos aos números racionais, referindo ser o caso, por exemplo, da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Em todo o caso, segundo Dedekind,

> "(...) tudo se reduz a mostrar que as operações aritméticas possuem uma certa continuidade (...)"[54]

[53]Veja-se (Dedekind, 1963), pág. 22.

[54]Em (Dedekind, 1963), pág. 23.

Tal como afirma Pierre Dugac

> "Temos aqui então um embrião da futura teoria das álgebras topológicas e das teorias que utilizarão simultaneamente as estruturas da álgebra e da análise."[55]

Esta *continuidade*, expressa-a no teorema que se segue.

**Teorema 1.7.1** "Se o número $\lambda$ é o resultado de uma operação entre os números $\alpha, \beta, \gamma$, ... e $\lambda$ pertence ao intervalo $L$, então podemos considerar intervalos $A, B, C$, ..., aos quais pertençam $\alpha, \beta, \gamma$, ... de modo que, substituindo os números $\alpha, \beta, \gamma$, ... por números arbitrários de $A, B, C$, ..., o resultado da operação aplicada a estes novos números é sempre um número do intervalo $L$."[56]

Perante a tamanha generalidade deste resultado, Dedekind reconhece ser necessário introduzir novos conceitos por forma a simplificar o seu enunciado. É então sobre as noções de *grandeza variável*, *função* e *valores limite* que afirma deverem definir-se até as mais simples operações aritméticas, assunto que, no entanto, não aborda nesta obra.

---

[55] Em (Dugac, 1976), pág. 46.

[56] Em (Dedekind, 1963), pág. 23.

## 1.8 Análise Infinitesimal

A última secção de *Continuidade e Números Irracionais*, intitulada *Análise Infinitesimal*, indica claramente que Dedekind utiliza a sua teoria dos números irracionais para construir os fundamentos da análise, tal como se tinha proposto no prefácio da sua obra.

Será a noção de *limite*, definida no início dessa secção, que se revelará fundamental na demonstração de alguns dos mais importantes resultados basilares da análise. Com estas provas, Dedekind pretende pois dar exemplos da ligação entre o seu *teorema da continuidade dos números reais*, página 41, e a Análise Infinitesimal, enfatizando desta forma a ideia por si defendida de que a propriedade da *continuidade* fundamenta a base de todos os domínios *contínuos*.

Em termos de linguagem de formulação, podemos situar a sua definição de limite entre a de Cauchy[57], que, à primeira vista, parece identificar-se mais com as definições imprecisas do século XVIII, e a de Weierstrass[58], enunciada como actualmente à custa de $\varepsilon$'s e $\delta$'s.

**Definição 1.8.1** "Dizemos que uma grandeza variável $x$ que toma sucessivos valores numéricos se aproxima de um valor limite fixo $\alpha$ quando, no decurso do processo, $x$ estiver finalmente compreendido entre dois números entre os quais o próprio $\alpha$ também está, ou, de uma forma equivalente, quando a diferença $x - \alpha$, tomada em termos absolutos, se tornar finalmente mais pequena do que qualquer valor diferente de zero."[59]

Utilizando este conceito e a sua teoria dos números irracionais, Dedekind demonstra o teorema que se segue, o qual havia considerado no início da sua obra como constituindo uma base suficientemente rigorosa para a análise infinitesimal.

**Teorema 1.8.1** "Se uma grandeza $x$ cresce continuamente [no sentido estrito] mas não para além de todos os limites então aproxima-se do seu valor limite."[60]

[57]Veja-se (Cauchy, 1821), pág. 19.
[58]Veja-se (Schwarz, 1861), pág. 2 — citado em (Dugac, 1973), pág. 119.
[59]Em (Dedekind, 1963), pág. 24.
[60]Em (Dedekind, 1963), pág. 24.

Tal como já foi referido, Dedekind não utiliza nesta obra qualquer notação simbólica a não ser a que se refere a relações de ordem entre números. Mas na apresentação da demonstração deste teorema justifica-se que introduzamos alguma simbologia actual, por forma a que melhor se entendam os argumentos aí utilizados.

***Demonstração***: Por hipótese, existe um, e portanto uma infinidade de números $\alpha_2$ tais que, para todos os valores da grandeza $x$, se tem $x < \alpha_2$. É então designado por $\mathcal{U}_2$ o conjunto de todos estes números $\alpha_2$, que, simbolicamente, podemos escrever na forma:

$$\mathcal{U}_2 = \{\alpha_2 \in \mathcal{R} : \text{ para todos os valores da grandeza } x, x < \alpha_2\}.$$

$\mathcal{U}_1$ é o conjunto de todos os outros números reais, ou seja,

$$\mathcal{U}_1 = \{\alpha_1 \in \mathcal{R} : \text{ para algum valor da grandeza } x, x \geq \alpha_1\}.$$

Ora, qualquer número de $\mathcal{U}_1$ é inferior a qualquer número de $\mathcal{U}_2$. Logo, pelo *teorema da continuidade do conjunto dos números reais*, página 41, existe apenas um real $\alpha$ que produz esta separação em $\mathcal{R}$. Pela alínea (III) das propriedades 1.5.1 dos reais, página 40, $\alpha$ será o maior elemento de $\mathcal{U}_1$ ou o menor elemento de $\mathcal{U}_2$. Mas, como a grandeza $x$ nunca pára de crescer, $\alpha$ não poderá ser o maior elemento de $\mathcal{U}_1$, pelo que é o menor elemento de $\mathcal{U}_2$.

Para concluir, Dedekind limita-se a afirmar que qualquer que seja $\alpha_1$, acabaremos finalmente por ter $\alpha_1 < x < \alpha$, o que significa que $x$ se aproxima do seu valor limite. Mas, utilizemos uma notação simbólica para compreender como concluir isto. Pela própria definição do conjunto $\mathcal{U}_1$, temos $\forall\ \alpha_1 \in \mathcal{U}_1\ \exists\ x_0 : \alpha_1 \leq x_0$. Como $\alpha \in \mathcal{U}_2$, podemos ainda dizer que $\alpha_1 \leq x_0 < \alpha$. Mas é o facto da grandeza $x$ crescer estritamente que permite concluir o pretendido. Tem-se que:

$$\forall\ \alpha_1 \in \mathcal{U}_1\ \exists\ x_0 : \forall\ x,\ x > x_0 \Rightarrow \alpha_1 < x < \alpha,$$

o que significa, por definição (e pelo facto de $\alpha \in \mathcal{U}_2$), que a grandeza $x$ se aproxima do seu valor limite $\alpha$, conforme pretendíamos.

■

No final desta demonstração, Dedekind afirma que este teorema é equivalente ao teorema da continuidade dos números reais. Segue-se ainda um outro resultado da análise infinitesimal, igualmente equivalente ao *teorema da continuidade dos números reais*, mas que considera ser mais frequentemente utilizado.

**Teorema 1.8.2** "Se na variação de uma grandeza $x$ pudermos, para toda a grandeza positiva $\delta$ dada, fazer corresponder uma posição a partir da qual $x$ varia a menos de $\delta$, então $x$ aproxima-se de um valor limite."[61]

***Demonstração***: Por hipótese, dada uma grandeza positiva $\delta$ arbitrária, existe uma ordem a partir da qual a grandeza $x$ varia a menos de $\delta$, o que significa que se nessa altura $x$ tomar o valor $a$ então, a partir desse momento, tem-se continuamente $x > a-\delta$ e $x < a+\delta$ (o que significa nada mais do que $|x-a| < \delta$). Desta forma, provou-se que estes valores da variável $x$ se situam entre dois determinados valores finitos, facto este que Dedekind utiliza para efectuar uma dupla separação no conjunto dos números reais.

À classe $\mathcal{U}_2$, Dedekind faz "(...) corresponder um número $\alpha_2$ (por exemplo $a+\delta$) quando no decorrer do processo $x$ se torna finalmente $\leq \alpha_2$ (...)"[62]. Numa notação simbólica, denotá-la-íamos por:

$$\mathcal{U}_2 = \{\alpha_2 \in \mathcal{R} : \text{ existe uma ordem a partir da qual } x \leq \alpha_2\},$$

ou ainda por:

$$\mathcal{U}_2 = \{\alpha_2 \in \mathcal{R} : \exists\, x_0 : \forall\, x \ \ (x > x_0 \ \Rightarrow x \leq \alpha_2)\}.$$

A correspondente classe $\mathcal{U}_1$ é formada por todos os outros números reais. Representamo--la por:

$$\mathcal{U}_1 = \{\alpha_1 \in \mathcal{R} : \forall\, x_0\ \exists\, x : \ (x > x_0 \ \wedge x > \alpha_1)\}.$$

Como esta divisão de $\mathcal{R}$ define um corte, $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$, podemos concluir, pelo *teorema da continuidade dos números reais*, página 41, existir um e apenas um número $\alpha$ que o origina. Atendendo ao modo de construção destas classes $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$, é compreensível que

[61] Em (Dedekind, 1963), pág. 25.
[62] Em (Dedekind, 1963), pág. 26.

Dedekind designe o número $\alpha$ como sendo o *limite superior* da variável $x$ (observando que se mantém sempre finito).

Tendo em conta o comportamento da variável $x$, que, a partir de certa ordem, situa os seus valores entre os reais $a-\delta$ e $a+\delta$, é formado um segundo corte $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, no conjunto $\mathcal{R}$. Um número $\beta_1$ (por exemplo, $a-\delta$) pertencerá à classe $\mathcal{B}_1$ quando, no decorrer do processo, $x$ se tornar finalmente $\geq \beta_1$. À semelhança do corte $(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2)$, denotamos simbolicamente a classe $\mathcal{B}_1$ por:

$$\mathcal{B}_1 = \{\beta_1 \in \mathcal{R} : \text{ existe uma ordem a partir da qual } x \geq \beta_1\},$$

ou por:

$$\mathcal{B}_1 = \{\beta_1 \in \mathcal{R} : \exists\, x_0 : \forall\, x \quad (x > x_0 \ \Rightarrow x \geq \beta_1)\}.$$[63]

A classe $\mathcal{B}_2$ contém todos os outros reais. Representamo-la por:

$$\mathcal{B}_2 = \{\beta_2 \in \mathcal{R} : \forall\, x_0 \ \exists\, x : \quad (x > x_0 \ \wedge x < \beta_2)\}.$$

Uma vez que esta separação origina também um corte no conjunto dos números reais, existe igualmente um único número $\beta$ que o produz, o qual Dedekind designa por *limite inferior* da variável $x$.

Será o estudo da relação entre estes números $\alpha$ e $\beta$ que irá permitir concluir que a grandeza $x$ se aproxima do seu valor limite. Ora, tal como afirma Dedekind, os dois números $\alpha$ e $\beta$ são obviamente caracterizados pela seguinte propriedade:

> "(...) se $\varepsilon$ é uma grandeza positiva arbitrariamente pequena então temos sempre finalmente $x < \alpha + \varepsilon$ e $x > \beta - \varepsilon$, mas nunca finalmente $x < \alpha - \varepsilon$ e nunca finalmente $x > \beta + \varepsilon$."[64]

o que, numa notação simbólica, significa que

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, x_0 : \ \forall\, x \quad x > x_0 \quad \Rightarrow \ \beta - \varepsilon < x < \alpha + \varepsilon,$$

[63]Em (Dedekind, 1963) são cometidos alguns erros na definição da classe $\mathcal{B}_1$, sendo trocado, por exemplo, $\beta_1$ por $\beta_2$ ou por $\beta$. Em todo o caso, tais falhas facilmente se identificam.

[64]Em (Dedekind, 1963), pág. 27.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, x_0\ \exists\, x: \quad x > x_0\ \wedge\ x \geq \alpha - \varepsilon$$

e

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, x_0\ \exists\, x: \quad x > x_0\ \wedge\ x \leq \beta + \varepsilon.$$

Supondo que $\alpha$ e $\beta$ fossem distintos, a relação $\alpha < \beta$ não poderia verificar-se já que, como afirma Dedekind[65], se tem *continuamente* $\alpha_2 \geq \beta_1$.

Para justificar que também não é possível o caso $\alpha > \beta$, Dedekind afirma

> "(...) a variável $x$ oscila, e, por mais que avance o processo, suporta sempre variações cuja quantidade ultrapasse o valor $(\alpha-\beta)-2\varepsilon$, onde $\varepsilon$ é uma grandeza positiva arbitrariamente pequena."[66]

Tentemos compreender as palavras do matemático, tendo em conta a propriedade que caracteriza os números $\alpha$ e $\beta$. Ora, já vimos que, dada uma quantidade $\varepsilon$ positiva arbitrária, há infinitos valores de $x$ tais que $x \leq \beta+\varepsilon$ e também há infinitos valores de $x$ tais que $x \geq \alpha - \varepsilon$. Portanto, por grande que seja a ordem, é sempre possível encontrar valores de $x$ superiores àquela tais que $x \leq \beta+\varepsilon$ e $x \geq \alpha-\varepsilon$. Sejam $x'$ e $x''$ dois desses valores. De $x' \leq \beta+\varepsilon$ (e, portanto, $-x' \geq -\beta-\varepsilon$) e $x'' \geq \alpha-\varepsilon$, vem que $x''-x' \geq \alpha-\beta-2\varepsilon$. Ou seja, há variações da grandeza $x$ que são superiores a $\delta = \alpha-\beta-2\varepsilon$. Portanto, se fosse $\beta < \alpha$, o valor de $\delta$ não seria tão pequeno quanto se quisesse.

Assim, temos necessariamente $\alpha = \beta$.

Como já foi provado que para toda a grandeza positiva arbitrariamente pequena, se tem finalmente $\beta-\varepsilon < x < \alpha+\varepsilon$, ou seja,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_0:\ \forall\, x\ \ (x > x_0 \quad \Rightarrow\ \beta-\varepsilon < x < \alpha+\varepsilon),$$

basta atender à definição 1.8.1 de limite duma grandeza variável, página 50, para que se conclua que $x$ se aproxima do seu valor limite $\alpha = \beta$.

$\blacksquare$

[65]Em vez de $\alpha_2 \geq \beta_1$, Dedekind escreve $\alpha_2 \geq \beta_2$ — veja-se (Dedekind, 1963), pág. 27. Mas, pelas definições dos cortes $(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2)$ e $(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$, podemos apenas afirmar que $\alpha_2 \geq \beta_1$.

[66]Em (Dedekind, 1963), pág. 27.

## 1.9 Considerações acerca da teoria dos números irracionais de Dedekind

> "Nunca imaginei que a minha concepção de números irracionais tivesse algum valor particular, senão não a teria guardado para mim durante quase catorze anos."[67]

Esta visão algo modesta de Dedekind sobre a sua obra será, eventualmente, fruto da "simplicidade" como introduziu o conceito de número irracional. Como nos dá conta no prefácio do seu livro *Continuidade e Números Irracionais*, para provar rigorosamente alguns dos resultados basilares da análise infinitesimal, tinha de recorrer a algumas "evidências" da geometria. A falta de uma "(...) verdadeira fundamentação científica para a aritmética (...)"[68] impossibilitava-o sequer de expressar de um modo rigoroso o significado do conceito de *grandeza contínua*, tão frequentemente usado no cálculo diferencial. Identificando numa grandeza geométrica a característica que faltava ao conjunto dos racionais, a *continuidade*, Dedekind definiu a linha orientadora da sua obra. Deveria definir os irracionais de tal forma que, juntamente com os racionais, o conjunto de todos os números possuísse a propriedade da *continuidade* ou *completude*. Foi partindo da existência do domínio dos racionais e introduzindo a noção de *corte*, que resolveu esta questão. Se a todo o número racional se pode fazer corresponder um corte, Dedekind mostrou existirem cortes para os quais tal não é possível. Assim, sempre que um corte não seja definido por um racional, é *criado* um novo número, um *irracional*. Ao estabelecer uma correspondência entre cortes e números reais pôde então provar, por comparação entre estes dois tipos de entidades, que o conjunto dos números reais é um domínio *contínuo*.

Atendendo ao modo como Dedekind introduz o conceito de irracional, seríamos conduzidos a identificar um número irracional com o corte que o define. E esta é também a perspectiva de vários autores que expõem a teoria dos números irracionais

[67] Carta que Dedekind escreve a Lipschitz, em 10 de Julho de 1876 — citado em (Sinaceur, 1979), pág. 118.

[68] Em (Dedekind, 1963), pág. 1.

elaborada por este matemático, entre eles, Leo Corry, Hermann Weyl e Morris Kline[69]. No entanto, como vimos na secção 1.4.3 *Considerações acerca do conceito de número irracional*, na opinião de Dedekind não podemos fazer uma avaliação tão linear quanto essa. A noção de *correspondência* justifica que, de facto, se distingam as duas entidades *corte* e *número*. Mas então permanece a dúvida de saber *o que são*, para Dedekind, os números irracionais. De acordo com as suas próprias palavras, *algo* novo, que corresponde ao corte que o define[70].

Além de um número irracional ser *criado* pelo corte, Dedekind afirma explicitamente que o corte também é *originado* pelo irracional[71]. Conforme vimos já na secção 1.4.3 *Considerações acerca do conceito de número irracional*, a ser considerada com rigor esta expressão, é necessário supor *a priori* a existência do irracional. Note-se que a entidade *corte* havia sido já definida através de conjuntos de racionais; além de que, com uma definição de número irracional, o que se pretende precisar, de facto, é o conceito de *irracional*. A expressão "*o número $\alpha$ (irracional) origina o corte*" será pois apenas um "abuso" de linguagem que, na carta de resposta a Weber, Dedekind fez questão de enfatizar. Até porque, a ser considerada em rigor essa expressão, tornamos, escusadamente, imprecisa a teoria dos números irracionais de Dedekind.

Devemos reconhecer que o facto de um número real ser definido à custa de um corte acarreta algumas desvantagens. Senão, vejam-se as dificuldades inerentes à definição das diferentes operações, e tenha-se em conta que os exemplos abordados nesta exposição foram apenas os mais simples, relativos a operações aritméticas. Inclusivamente, segundo Dedekind, é possível considerar casos mais elaborados como, por exemplo, o da função logaritmo. Esta dificuldade foi mesmo reconhecida pelo matemático, quando pretendia verificar quais as propriedades dos números racionais que seriam ainda válidas no conjunto dos números reais. Contudo, ele próprio solu-

---

[69]Vejam-se, respectivamente, (Corry, 1996), pág. 73, (Weyl, 1994), pág. 111 e (Kline, 1990), pág. 986.

[70]Veja-se a carta que Dedekind escreve a Weber em 24 de Janeiro de 1888 — citado em (Ewald, 1996), pág. 835.

[71]Vejam-se a definição 1.4.2 de número irracional, página 31, e a carta que Dedekind escreve a Weber em 24 de Janeiro de 1888 — citado em (Ewald, 1996), pág. 835.

cionou esta questão enunciando o teorema 1.7.3 que, pelo facto de envolver leis de composição, Pierre Dugac considera notável para a época[72].

A partir do ano de 1880, a teoria dos números irracionais elaborada por Dedekind teve uma grande aceitação entre a comunidade matemática[73]. Inclusivamente, eram vários os matemáticos que consideravam, tal como Dedekind, que a sua teoria era mais simples do que as de Weierstrass e de Cantor, publicadas no mesmo ano de 1872. A popularidade, reconhecimento, ou simples interesse pela obra de Dedekind justificaram o facto de o seu livro *Continuidade e Números Irracionais* ser traduzido para inglês em 1901, russo em 1908, polaco em 1914, em italiano em 1926 e até em japonês[74].

A forma "natural" como Dedekind construiu o seu conceito de número irracional permitiu que as suas ideias fossem difundidas por todo o mundo. E tão "somente" por ter conseguido responder à pergunta orientadora da sua obra: *Qual é a essência da continuidade*?

[72]Veja-se (Dugac, 1976), pág. 46.
[73]Veja-se (Dugac, 1976), págs. 60–62.
[74]Veja-se (Dugac, 1976), pág. 62.

# Capítulo 2

# Karl Weierstrass

O auge da actividade profissional docente de Karl Weierstrass culminou com o convite como professor da Universidade de Berlim, no ano de 1856. Os prestigiados cursos de matemática que leccionou até ao semestre de verão de 1887 atraíram estudantes de toda a Europa, entre eles, Georg Cantor, Sofia Kovalevskaya, Leo Königsberger ou Gösta Mittag-Leffler. Segundo Pierre Dugac, os esforços conjugados, quer de Weierstrass, quer de outros dois seus colegas, Ernst Eduard Kummer e Leopold Kronecker, deram à Universidade de Berlim a reputação de líder mundial em estudos matemáticos, na época[1].

Foi exactamente ao leccionar os seus cursos em Berlim, ao tentar construir os fundamentos da análise, que Weierstrass sente a necessidade de construir uma teoria dos números reais, uma vez que não tinha nenhuma à sua disposição que fosse correcta. A matéria leccionada nestes cursos pode ser dividida em quatro grandes temas: teoria das funções analíticas, teoria das funções elípticas, aplicações das funções elípticas à geometria e à mecânica, e ainda teoria das funções abelianas. E é exactamente como uma introdução ao primeiro destes temas — *Teoria das Funções Analíticas* — que é apresentada a teoria weierstrassiana dos números reais, constituindo assim a base de todo o seu edifício matemático.

É certo que são diversos os factores que dificultam a análise da obra matemática de Weierstrass, logo, em particular, a pequena parte relativa à teoria dos números reais

[1] Veja-se (Dugac, 1973), pág. 62.

que aqui nos propomos estudar, mas sem dúvida alguma que o mais importante é o facto de nunca ter publicado nenhuma das suas lições. Inclusivamente, para aperfeiçoar cursos que foi repetindo ao longo dos anos, o matemático tinha a necessidade de se basear em apontamentos redigidos por alunos seus[2]. Neste sentido, podemos entender que Dugac refira que tanto Weierstrass, como o seu colega Kronecker, apresentavam nas suas lições os resultados das suas pesquisas e, contrariamente ao que se fazia habitualmente na Alemanha, evitavam imprimir os seus trabalhos[3].

Ora, para que possamos ter acesso às teorias de Weierstrass, é necessário analisar as diferentes redacções dos seus cursos feitas por alguns dos seus alunos, o que, evidentemente, retira alguma da credibilidade que proporcionaria uma possível análise da obra original. Em todo o caso, tal como já foi apontado, o próprio matemático apoiou-se em algumas destas versões para aperfeiçoar cursos que leccionaria mais tarde, o que, de algum modo, será um indicador de que estes textos são representativos das suas concepções matemáticas. É curioso notar inclusivamente que, não fossem estas notas dos alunos ajudarem a que as suas lições se tornassem, ano após ano, mais acessíveis, e talvez a popularidade dos seus cursos de Berlim não tivesse sido tão grande[4]. Isto porque, segundo o relato de L. Kiepart, um aluno de Weierstrass, a única forma de obter algum registo dos cursos iniciais, era anotando-os por estenografia, sem qualquer preocupação com a sua compreensão; mesmo assim, o número de alunos caiu de pouco mais de uma centena para 7, existindo entre estes alguns que tinham a impressão de não terem compreendido o curso.

Em todo o caso, é preciso ter em conta que, se existem algumas destas redacções que merecem todo o crédito (tal como é apontado por Dugac[5], as de Adolf Hurwitz, G. Hettner, ou ainda Salvatore Pincherle), existem outras que o próprio Weierstrass "condena", como a de Otto Biermann, ou relativamente às quais mantém algumas reservas, como a de E. Kossak[6].

---

[2]Veja-se (Dugac, 1973), pág. 60.

[3]Veja-se (Dugac, 1973), págs. 60, 61.

[4]Veja-se (Dugac, 1973), pág. 60.

[5]Veja-se (Dugac, 1973), págs. 68 e 78.

[6]Veja-se (Dugac, 1973), págs. 83 e 68, respectivamente.

Weierstrass inicia o seu estudo sobre os fundamentos da análise com o curso de inverno de 1859–1860, intitulado *Introdução à Análise*, mas é apenas no ano de 1863 que podemos situar a sua primeira teoria dos números irracionais. No entanto, tal como confirma a redacção que Hermann Amandus Schwarz fez do curso *Cálculo Diferencial*, do semestre de verão de 1861, Weierstrass já tinha neste ano um modelo para a construção dos números irracionais — as séries. Isto porque, neste curso, o matemático afirma existirem quantidades que não podemos exprimir com a ajuda da unidade e das suas partes, e para as quais é necessário utilizar a forma das séries infinitas[7]. É de referir, no entanto, que estas séries não se podem identificar com as séries usuais. É que, tendo como base a noção de conjunto, as séries de Weierstrass irão permitir, contrariamente ao que sucede com as usuais, que seja aplicada a propriedade comutativa na obtenção das suas somas.

O início da construção feita por Weierstrass da sua teoria dos números irracionais pode então ser situado no ano de 1863, sendo abordado no curso intitulado *Teoria Geral das Funções Analíticas*, leccionado no semestre de inverno de 1863–1864. Foi inspirado numa parte deste curso, repetido dois anos mais tarde no semestre de inverno de 1865–1866, que Kossak escreveu o seu livro *Os Elementos da Aritmética*, publicado em 1872, onde podemos encontrar a primeira exposição impressa da teoria weierstrassiana dos números reais.

A exposição seguinte desta teoria pode ser encontrada na redacção elaborada por Hettner, relativa ao curso *Introdução à Teoria das Funções Analíticas*, que Weierstrass leccionou em 1874. Seguem-se a esta as redacções de Pincherle e de Hurwitz do mesmo curso sobre funções analíticas, leccionado no semestre de verão de 1878, que, a ter em conta as observações feitas por Dugac[8], devem ser consideradas como bastante representativas da obra de Weierstrass. Podemos inclusivamente ler numa nota de rodapé feita pelo historiador à redacção de Hurwitz[9], que o próprio matemático apreciava as redacções de Hurwitz e utilizava-as, provavelmente para melhorar os seus cursos ao longo dos tempos. É exactamente por estas razões que a redacção de Adolf

---

[7] Veja-se (Dugac, 1973), pág. 57.

[8] Veja-se (Dugac, 1973), págs. 78, 79.

[9] Veja-se (Dugac, 1973), pág. 96, nota de rodapé 2.

Hurwitz será aquela que constitui a base desta exposição da teoria dos números reais de Weierstrass. Além da vantagem acrescida de, no artigo (Dugac, 1973) de Pierre Dugac, estar exposta uma tradução para alemão do apêndice dessa redacção, que segundo o próprio Dugac teria sido originalmente escrita em letras góticas[10].

Podemos ainda encontrar outras duas exposições da teoria weierstrassiana dos números reais. Uma delas, redigida por Victor Dantscher (e exposta no seu livro (Dantscher, 1908)[11]), é relativa ao curso do semestre de inverno de 1884–1885, também sobre funções analíticas. Por último, existe ainda a de G. Thieme, respeitante ao último curso de análise leccionado por Weierstrass na Universidade de Berlim, no semestre de verão de 1886, intitulado *Capítulos Seleccionados da Teoria das Funções*, e relativamente à qual Dugac afirma:

> "(...) a redacção de THIEME não tem de todo a clareza e a ordem da de HURWITZ, nem mesmo daquela de HETTNER, e a estrutura dos capítulos, das proposições e dos teoremas não é bem tida em conta."[12]

Para compreendermos as duas construções do conceito de número irracional apresentadas nos outros dois capítulos desta exposição, as de Richard Dedekind e de Charles Méray, não é necessário tomar conhecimento do modo como os matemáticos construíram os conjuntos dos números naturais ou dos números racionais. Inclusivamente, vimos no capítulo anterior de Dedekind que ele assume a existência dos racionais e passa a definir, à sua custa, os números irracionais. E de igual forma irá proceder Méray, como veremos no capítulo que se segue a este. Ora, o mesmo não sucede com a teoria elaborada por Weierstrass. Para que possamos entender o seu conceito de número irracional é imprescindível conhecer os seus anteriores conceitos de número natural e de número racional, razão pela qual não podemos dissociar o estudo das construções dos diferentes sistemas numéricos dos números naturais, racionais ou reais.

[10]Veja-se (Dugac, 1973), pág. 78.

[11]Segundo Dugac este livro responde às diferentes críticas dirigidas à teoria weierstrassiana dos números reais, sobretudo a de Gottlob Frege — veja-se (Dugac, 1973), pág. 83.

[12]Em (Dugac, 1973), pág. 86.

Vejamos então de que forma nos é apresentada a teoria de Weierstrass dos números reais, no seu curso de 1878, que consta na redacção de Hurwitz. Inicialmente é introduzido o conceito de *número usual* ou *número inteiro*, definido como sendo um conjunto de unidades, e que corresponde a um número inteiro positivo. Um número que seja constituído por unidades de diferentes tipos é designado por *número complexo*. E é à custa destes dois tipos de números e das *partes exactas da unidade*, que correspondem aos números fraccionários positivos da forma $\frac{1}{n}$, que se constroem as *grandezas numéricas*. Os *números usuais mistos* (correspondentes aos racionais positivos) serão então um tipo destas grandezas, a saber, aquelas compostas por um número finito de elementos. De igual modo, os números irracionais positivos serão definidos como um tipo de grandezas numéricas, a saber, aquelas constituídas por uma infinidade de elementos. Será por esta razão que o modelo dos números irracionais da construção de Weierstrass é a série infinita. Finalmente, através do conceito de *elemento oposto* de um qualquer número (inteiro ou racional), Weierstrass cria o conjunto dos números negativos, pelo que, estendendo sucessivamente aos novos números todas as operações aritméticas, acaba por completar o conjunto dos números reais.

Dada a própria natureza desta construção do conjunto dos números reais, feita por sucessivas extensões de conceitos a novas entidades, é compreensível que apenas no final da sua apresentação possamos ver justificadas todas as ideias desenvolvidas ao longo da sua exposição.

Se bem que a redacção de Hurwitz seja a que suporta essencialmente esta apresentação da teoria weierstrassiana dos números reais, também são mencionadas algumas abordagens diferentes feitas pelo matemático, nomeadamente, nas redacções de Hettner e de Thieme. E é exactamente na última destas redacções, a de Thieme, que encontramos expressa da forma mais clara a ideia de que a noção de limite não pode surgir na condição de definição dos números reais. A citação seguinte mostra que, de facto, Weierstrass reconhece o erro que alguns matemáticos haviam cometido na definição de um número irracional:

> "Se se partir da existência de grandezas numéricas racionais, então não tem sentido definir os irracionais como limites dos mesmos, porque começamos por não poder saber se ainda haverá outras grandezas numéricas além das racionais."[13]

Sendo as séries o modelo de construção dos números irracionais, Weierstrass contorna esta questão definindo um número real, não como a soma de uma série (ou seja, um limite), mas como sendo a própria série (isto é, como um agregado de elementos). Tal série, como já foi referido, não pressupõe no entanto uma ordenação dos seus termos.

[13]Em (Thieme, 1886), pág. 59 — citado em (Dugac, 1973), pág. 134.

## 2.1 Números usuais e números complexos

A apresentação que faremos nesta secção da teoria weierstrassiana dos *números usuais*, ou seja, dos números inteiros positivos, irá permitir que desde já nos habituemos à presença constante de resultados da teoria de conjuntos, que já referimos existir na construção do conjunto dos números reais elaborada por este matemático.

A introdução do curso de Weierstrass *Introdução à Teoria das Funções Analíticas*, redigido por Hurwitz e relativo ao ano de 1878, é iniciada com a noção de *número*, cuja ideia de ser um "agregado" de unidades é a mesma que podemos encontrar no sétimo livro dos *Elementos* de Euclides[14].

**Definição 2.1.1** "O conceito de número surge através da reunião mental de coisas, nas quais se descobriu uma característica comum, especialmente de coisas mentalmente idênticas. Designamos essa coisa como a unidade do número."[15]

São ainda utilizadas as designações de *número usual*, *número inteiro* e *número inteiro usual*[16] como referência a este conceito que representa um número inteiro positivo.

Por oposição, um número que possa admitir diferentes *unidades* será definido como um *número complexo*.

**Definição 2.1.2** "Por um número complexo entendemos o agregado de números de diferentes unidades (...) A estas diferentes unidades damos o nome de elementos do número complexo."[17]

Na continuação da citação anterior, podemos ainda tomar conhecimento de um exemplo de número complexo: aquele que é composto de diferentes unidades monetárias. Em todo o caso, a importância deste conceito apenas será notada com a definição de uma *grandeza numérica*, na secção 2.2 *Partes exactas da unidade e*

[14]Veja-se (Euclid, 1956), pág. 277, definições I e II.

[15]Em (Hurwitz, 1878), pág. 1 — citado em (Dugac, 1973), pág. 96.

[16]Veja-se (Hurwitz, 1878), págs. 1, 6 e 8, respectivamente — citado em (Dugac, 1973), págs. 96, 98 e 100, respectivamente.

[17]Em (Hurwitz, 1878), pág. 1 — citado em (Dugac, 1973), pág. 96.

*números usuais mistos*, conceito este que está na base das definições dos números racionais e dos números irracionais.

Dada a própria natureza das definições de número usual e de número complexo, as possíveis relações e operações entre cada um destes tipos de números reduzem-se a relações entre elementos de conjuntos.

**Definição 2.1.3** "Ora dizemos que 2 coisas $a$ e $b$ são iguais uma à outra, quando existe uma associação ou relação entre elas, que se designa por $a = b$, tal que também é $b = a$ e que se $a = b$ e $b = c$, também é $a = c$."[18]

Note-se que, segundo a definição anterior, a relação de igualdade entre dois números quaisquer é simétrica e transitiva. Tendo em conta que também será, obviamente, reflexiva, podemos interpretar a relação de igualdade de dois números usuais ou complexos como sendo uma relação de equivalência.

Se para Weierstrass tem sentido apresentar ainda uma definição mais particular para a igualdade de *números usuais*, já o mesmo não acontece para os *números complexos*. Este facto não irá, contudo, provocar nenhuma contradição no seguimento da sua teoria. Isto porque, tal como já foi referido, os números complexos apenas são utilizados para introduzir o conceito de grandeza numérica, e aí sim, Weierstrass irá esclarecer o que entende por igualdade entre tais entidades.

**Definição 2.1.4** "Ora podemos dizer que dois números usuais $a$ e $b$ são iguais um ao outro quando, ao coordenarmos a uma unidade de $a$ uma unidade de $b$, a outra unidade de $a$ uma outra de $b$, e assim por diante, cada unidade de $a$ encontra uma correspondente de $b$, e portanto não sobra nenhuma unidade de $a$ nessa coordenação."[19]

Numa linguagem actual, diríamos simplesmente que dois números usuais $a$ e $b$ são iguais se existir uma correspondência bijectiva entre as unidades de cada um deles.

Relativamente à igualdade de números complexos, apenas é considerada a seguinte observação:

[18]Em (Hurwitz, 1878), pág. 1 — citado em (Dugac, 1973), pág. 96.
[19]Em (Hurwitz, 1878), págs. 1 e 2 — citado em (Dugac, 1973), pág. 96.

> "Seria muito limitativo se apenas disséssemos que 2 números complexos são iguais um ao outro quando um elemento arbitrário ocorresse num deles tantas vezes quantas no outro, pois podem ocorrer relações entre os elementos dum número complexo."[20]

Para melhor entendermos esta ideia, vejamos um exemplo bastante actual: à partida, diríamos que os números complexos compostos, um deles por 100 unidades de 1 cêntimo, e o outro por 1 unidade de 1 euro não seriam iguais. No entanto, a relação existente entre os elementos *cêntimo* e *euro* do número complexo fazem com que estes números sejam, de facto, iguais, o que revela a "limitação" da definição geral de igualdade 2.1.3.

No caso de não existir uma correspondência bijectiva entre as unidades de dois números usuais $a$ e $b$, é introduzido o conceito de *desigualdade*.

**Definição 2.1.5** Se, na correspondência estabelecida entre as unidades de dois números usuais $a$ e $b$, existir alguma unidade de $a$ que não tenha uma correspondente de $b$, diz-se que $a$ é **maior do que** $b$, e escreve-se $a > b$, ou $b$ é **menor do que** $a$, e escreve-se $b < a$.

A noção de *reunião* entre conjuntos será a base da definição da operação *adição* entre dois quaisquer números. Assim, as unidades que compõem a soma de dois números provêm da *reunião* das unidades dos números dados.

**Definição 2.1.6** "Por soma de dois números $a$ e $b$, que podem ser números usuais ou complexos, entendemos o número que surge através da associação conceptual das unidades do número $b$ com as do número $a$."[21]

Sem quaisquer considerações, que apenas se referem à teoria dos conjuntos, Weierstrass apresenta duas propriedades desta operação relativa a números usuais:

(I) $a + b = b + a$

(II) $(a + b) + c = (a + c) + b$.

[20]Em (Hurwitz, 1878), págs. 2 e 3 — citado em (Dugac, 1973), pág. 97.

[21]Em (Hurwitz, 1878), pág. 1 — citado em (Dugac, 1973), pág. 96.

A partir destas duas leis deduz ainda que a adição de tantos números quantos se queira é independente da ordem pela qual a adição se efectua[22].

A operação de *subtracção* entre números usuais só é considerada para diferenças que sejam ainda números usuais, restrição esta que está de acordo com a ideia já referida de que Weierstrass opta por construir inicialmente conjuntos de números positivos.

**Definição 2.1.7** "Se $c$ for um número (usual), então ele pode encarar-se como soma dum número dado $a$ e dum número procurado $b$. Designa-se então $b$, como surgindo de $c$ e $a$, por $(c-a)$. $(c-a)$ é portanto o número que, adicionado a $a$, dá $c$ como resultado. Por agora, o símbolo $(c-a)$ só tem significado quando é $c > a$."[23]

Caso os números $a$ e $c$ sejam tais que $c > a$, chegamos a algo imaginário, segundo as palavras de Weierstrass.

A definição da operação de *multiplicação* entre quaisquer números denota mais uma vez a relação bastante próxima entre esta teoria dos números reais e a teoria dos conjuntos.

**Definição 2.1.8** "Por $ab$ entendemos aquele número que, quando $b$ é considerado como unidade, consiste de $a$ tais unidades $(b)$. A operação de, a partir de $a$ e $b$, encontrar o número $ab$, chama-se multiplicação."[24]

As propriedades

(I) $ab = ba$

(II) $(ab)c = (ac)b$

(III) $(a+b)c = ac + bc$

seguem, segundo Weierstrass, da própria definição desta operação.

É curioso observar a argumentação utilizada na prova de que, quando a operação de multiplicação satisfaz as propriedades anteriores, a partir de dois quaisquer números inteiros usuais $a$ e $b$, se pode sempre encontrar o número $ab$ . O mesmo será dizer, numa linguagem actual, que a operação de multiplicação é uma aplicação. A justificação

[22]Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 2 — citado em (Dugac, 1973), pág. 97.

[23]Em (Hurwitz, 1878), pág. 3 — citado em (Dugac, 1973), pág. 97.

[24]Em (Hurwitz, 1878), pág. 3 — citado em (Dugac, 1973), pág. 97.

apresentada envolve, mais uma vez, apenas algumas ideias da teoria dos conjuntos. Das propriedades (I) e (III) é deduzida a igualdade:

(III') $(a+b+c+...)(a'+b'+c'+...) = aa'+ab'+ac'+...+ba'+bb'+bc'+...+ca'+cb'+cc'+...$

Uma vez que os elementos constituintes de $a$ e $b$ são a unidade,

> "(...) resulta que $ab$ pode representar-se como soma duma certa quantidade de símbolos 1.1. Mas a este símbolo mesmo pode ainda atribuir-se um significado arbitrário, pois ele não pode cindir-se mais. Se lhe atribuirmos o valor 1 (a unidade), então a operação indicada por $ab$ está agora completamente determinada."[25]

Note-se que esta prova postula que 1.1=1. Esta igualdade irá revelar-se fundamental para a definição da operação de multiplicação de partes exactas da unidade, na secção 2.2.2 *Operações com números usuais mistos.*

Relativamente à multiplicação de números complexos, Weierstrass afirma que falta ainda dizer o que se entende por produto de dois elementos de um número complexo[26], se bem que não formule tal conceito. A razão desta omissão justifica-se pelo facto de os números complexos apenas surgirem como base do conceito de grandeza numérica, aspecto que já notámos. Desta forma, quando forem abordadas operações entre grandezas numéricas, será definida a operação de multiplicação entre os elementos que compõem tais entidades.

Da mesma forma que a subtracção foi definida à custa da adição de dois números, também agora a definição da operação inversa de *divisão* entre quaisquer números irá recorrer à multiplicação.

**Definição 2.1.9** "É natural perguntar se um dado número $c$ pode ser produzido através da multiplicação dum número dado $a$ por um [número] procurado $b$. Denota-se o número $b$ por $c/a$."[27]

Através da observação de que este símbolo $c/a$ só tem um significado real quando $c$ é um múltiplo de $a$ (isto é, quando ocorre no domínio numérico que tem o número

[25]Em (Dugac, 1973), pág. 9 — citado em (Dugac, 1973), pág. 100.
[26]Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 9 — citado em (Dugac, 1973), pág. 100.
[27]Em (Hurwitz, 1878), pág. 3 — citado em (Dugac, 1973), pág. 97.

$a$ como unidade), é referida a necessidade da introdução de novos elementos. Desta forma, a operação de divisão aplicada a números usuais assume um papel bastante importante na construção dos números racionais, uma vez que exige a criação de novas entidades, os números fraccionários.

Relativamente às operações definidas para números usuais, é de notar que, se para o caso da operação inversa de subtracção foi imposta a condição de que a diferença de dois números usuais fosse ainda um número usual, no caso da divisão já é permitido o cálculo do quociente entre dois quaisquer números, não sendo, portanto, um deles necessariamente múltiplo do outro. Assim, se para a primeira destas operações não se ampliou o conjunto dos números já existente, incluindo-se, eventualmente, os números negativos, o mesmo não sucedeu para a divisão. Esta abordagem corresponde exactamente à ideia de que, para construir o conjunto dos números reais, Weierstrass define inicialmente conjuntos de números positivos: inteiros, racionais e reais, e apenas no final da sua teoria considera os correspondentes números simétricos, definidos à custa do conceito de *elemento oposto*.

## 2.2 Partes exactas da unidade e números usuais mistos

A construção do conjunto dos números racionais positivos assenta sobre o conceito de *parte exacta da unidade* que corresponde a um número fraccionário positivo da forma $\dfrac{1}{n}$. Combinações lineares finitas de coeficientes inteiros positivos destas partes exactas da unidade definirão então os *números usuais mistos*, ou seja, os números racionais positivos.

**Definição 2.2.1** Uma **parte exacta da unidade**, $\dfrac{1}{a}$, é um elemento, dos quais há $a$ no elemento principal, a unidade.

Através do exemplo apresentado de que a 4ª parte exacta da 5ª parte exacta da unidade é a $(4.5)^{\text{a}}$ parte exacta da unidade[28], podemos perceber qual seria a demonstração (omissa) da proposição que se segue.

**Proposição 2.2.1** *a*) Partes exactas das partes exactas da unidade são igualmente partes exactas da unidade.
*b*) Em geral, a $(m.n)^{\text{a}}$ parte exacta da unidade, isto é $\dfrac{1}{m.n}$, tem de ser a $m^{\text{a}}$ parte exacta de $\dfrac{1}{n}$ e reciprocamente também a $n^{\text{a}}$ parte exacta de $\dfrac{1}{m}$.

Vejamos então qual a justificação apresentada para que a 4ª parte exacta da 5ª parte exacta da unidade seja a $(4.5)^{\text{a}}$ parte exacta da unidade. É que, sendo $\frac{1}{4.5}$ a $(4.5)^{\text{a}}$ parte exacta da unidade, tem-se, por definição,

$$\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{4.5}\ (4.5 \text{ tais parcelas}) = 1$$

ou

$$\left(\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}\right)+...+\left(\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}\right)(5 \text{ tais parcelas}) = 1.$$

Mas, por outro lado, $\frac{1}{5}$ é a 5ª parte exacta da unidade, donde cinco tais elementos são equivalentes à unidade. Portanto $\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{4.5}$ tem de ser equivalente a $\frac{1}{5}$, o que significa que $\frac{1}{4.5}$ tem de ser a 4ª parte exacta de $\frac{1}{5}$.

[28] Veja-se (Hurwitz, 1878), págs. 4, 5 — citado em (Dugac, 1973), pág. 98.

Um número complexo composto destes novos elementos e da unidade principal será então uma *grandeza numérica*.

**Definição 2.2.2** "A partir de agora, entenderemos por grandeza numérica qualquer número complexo cujos elementos são a unidade e as suas partes exactas, de que há infinitas."[29]

Desta definição é claro que uma grandeza numérica pode conter quer uma quantidade finita, quer uma quantidade infinita de elementos.

Na redacção de Adolf Hurwitz, a partir da qual, até ao momento, temos desenvolvido esta apresentação, é incluída uma secção intitulada *Grandezas numéricas formadas de infinitos elementos*. Depreendemos então que as considerações acerca de grandezas numéricas anteriores a tal parte desse curso se referem a grandezas compostas de um número finito de elementos, se bem que tal não seja dito explicitamente. Tais considerações apresentamo-las de seguida nas secções 2.2.1 *Comparação de números usuais mistos* e 2.2.2 *Operações com números usuais mistos*.

A identificação entre grandezas com um número finito de elementos e os números racionais positivos é bem clara na redacção que Thieme faz do curso *Capítulos Seleccionados da Teoria das Funções Analíticas*, leccionado por Weierstrass no ano de 1886. Em todo o caso, deve ter-se em consideração que a terminologia de *grandeza numérica racional* se refere aí quer a um racional positivo, quer a um racional negativo, contrariamente à redacção de Hurwitz onde apenas são considerados inicialmente números positivos.

> "Começámos por definir uma grandeza numérica racional como uma grandeza composta por uma quantidade finita de elementos; daí segue que a podemos representar como um múltiplo de uma parte positiva ou negativa da unidade principal."[30]

Na redacção de Thieme pode mesmo encontrar-se a designação *número racional*, acontecendo o mesmo na que Hettner elaborou relativa ao curso *Introdução à Teoria das Funções Analíticas*, que Weierstrass leccionou no ano de 1874[31]. Em todo o caso,

[29]Em (Hurwitz, 1878), pág. 4 — citado em (Dugac, 1973), pág. 98.

[30]Em (Thieme, 1886), pág. 59, 60 — citado em (Dugac, 1973), pág. 135.

[31]Veja-se (Hettner, 1874), pág. 36 — citado em (Dugac, 1973), pág. 129.

segundo as abordagens aí utilizadas, tal terminologia aplica-se quer a números racionais positivos, quer a números racionais negativos. Isto decorre do facto de nestas redacções os números negativos serem definidos também no início da construção dos sistemas numéricos, e, portanto, toda a teoria desenvolvida se aplicar igualmente a estas novas entidades. Na redacção de Adolf Hurwitz, podemos apenas encontrar as designações de *números usuais mistos*, ou simplesmente *números mistos*[32] para denominar os racionais positivos, por analogia aos *números usuais* que são agregados de apenas um elemento — a *unidade* do número. No que se segue adoptaremos frequentemente a terminologia de *número usual misto* para nos referirmos a grandezas compostas de uma quantidade finita de elementos. Desta forma, evitaremos confusões que, pelo exposto, se associam à terminologia *grandeza numérica*.

Podemos pois entender que o conceito de *grandeza numérica* se revela fundamental na construção do conjunto dos números racionais, sucedendo o mesmo, tal como veremos mais adiante, para a construção do conceito de número irracional.

[32]Veja-se (Hurwitz, 1878), págs. 6 e 8, respectivamente — citado em (Dugac, 1973), pág. 98 e 99, respectivamente.

### 2.2.1 Comparação de números usuais mistos

Para poder definir a igualdade de dois números usuais mistos, Weierstrass enuncia as duas transformações que podemos efectuar sobre tais grandezas numéricas[33]:

1) Quaisquer $n$ elementos $\frac{1}{n}$ podem ser substituídos pela unidade principal.

2) Qualquer elemento pode ser substituído pelas suas partes exactas.

E, como exemplo de tais operações, é indicada a substituição de 1 por $n.\frac{1}{n}$ ou ainda a de $\frac{1}{a}$ por $b.\frac{1}{a.b}$, justificada pela aplicação da proposição 2.2.1, página 70.

Tendo em conta estas transformações, e o facto de a comparação de números usuais mistos envolver somente relações entre conjuntos, a compreensão das definições de *igualdade* e *desigualdade* entre estes números é pois imediata.

**Definição 2.2.3** Dois números usuais $a$ e $b$ dizem-se **iguais** quando, através das transformações indicadas, $a$ puder ser transformado num outro número $a'$, que contenha os mesmos elementos que $b$ e tantas vezes como $b$.

Para definir o conceito de desigualdade, Weierstrass recorre à ideia da divisão da maior de tais grandezas em duas outras.

**Definição 2.2.4** "Mas se se puder transportar $a$ através de transformações em $a', a''$, onde $a'$ contém os mesmos elementos tantas vezes como $b$, mas $a''$ representa ainda outra grandeza numérica, então dizemos $a > b$ ou $b < a$."[34]

> "Os elementos da teoria dos números ensinam como se realiza, na prática, a comparação das grandezas numéricas $a$ e $b$ através de transformações."[35]

Antes mesmo de explicar como proceder para efectuar tal comparação, Weierstrass refere-se à comparação de números usuais, para a qual utiliza os conceitos de *divisor comum* e *máximo divisor comum*. Já a comparação de números usuais mistos terá por base os conceitos de *múltiplo comum* e *menor múltiplo comum* entre um conjunto de números usuais, cujas definições podemos depreender da citação que se segue.

[33]Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 5 — citado em (Dugac, 1973), pág. 98.

[34]Em (Hurwitz, 1878), pág. 5 — citado em (Dugac, 1973), pág. 98.

[35]Em (Hurwitz, 1878), pág. 6 — citado em (Dugac, 1973), pág. 98.

> "(...) para quaisquer números inteiros $a_1, a_2, ..., a_n$, existem sempre múltiplos comuns. Quer dizer, números $c$, que são um múltiplo de cada um dos números $a_1, ..., a_n$, e em especial [existe] um número $c_1$ cujos múltiplos são todos os números $c$. Chama-se a $c_1$ o menor múltiplo comum dos números $a_1, ...a_n$."[36]

Sejam então $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ...; \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, ...$ os elementos que compõem as grandezas $a$ e $b$. Caso $c$ seja o menor múltiplo comum dos números $a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ...$, esta grandeza $c$ pode ser escrita nas múltiplas formas $\alpha_1 a_1 = c,\ \alpha_2 a_2 = c, ..., \beta_1 b_1 = c,\ \beta_2 b_2 = c, ...$ . Assim, em vez de cada elemento $\frac{1}{a_n}$, pode pôr-se

$$\alpha_n \frac{1}{\alpha_n a_n} = \alpha_n \text{ elementos} \frac{1}{c}.$$

As grandezas numéricas $a$ e $b$ são então transformadas noutras que apenas possuem o elemento $\frac{1}{c}$. Desta forma, a sua comparação torna-se agora exequível: caso $a$ e $b$ possam ser transformadas de modo a que tenham tantos elementos $\frac{1}{c}$ uma como a outra, elas são (por definição) iguais; caso contrário, são desiguais.

[36]Em (Hurwitz, 1878), pág. 6 — citado em (Dugac, 1973), pág. 99.

### 2.2.2 Operações com números usuais mistos

A definição da operação de adição de números usuais mistos é apenas uma extensão da adição de números usuais.

**Definição 2.2.5** A **soma**, $a+b$, de dois números usuais mistos $a$ e $b$, obtém-se se aos elementos de $a$ acrescentarmos um elemento de $b$, depois um segundo elemento de $b$, e assim por diante até todos os elementos de $b$ se esgotarem.

Através de simples argumentos relativos à teoria dos conjuntos, Weierstrass prova que são ainda válidas para números usuais mistos as leis:

(I) $a+b=b+a$

(II) $(a+b)+c=(a+c)+b$,

referindo igualmente que a ordem pela qual se adicionam tantas destas grandezas numéricas quantas se queira continua a não ter influência sobre o resultado final. Finalmente observa que

> "A adição é uma operação unívoca; a saber, se no lugar de $b$, em $a+b$, se puser outro número $b_1 > b$, então a soma também se torna noutra."[37]

Com efeito, $b$ pode transformar-se em $b'$ e $b_1$ em $b'+b''$, donde $a+b_1 > a+b$.

Até este ponto, a operação de multiplicação apenas se definiu para números usuais, para a qual são válidas as seguintes leis:

(I) $ab=ba$

(II) $(ab)c=(ac)b$

(III) $a(b+c)=ab+ac$.

Ora, os números usuais mistos são números complexos cujas unidades são a unidade e as suas partes exactas. E, relativamente ao produto de duas unidades, sabemos já que $1.1=1$, igualdade que Weierstrass postulou para a multiplicação de números usuais. Portanto, resta apenas dar um significado para o produto de partes exactas da unidade.

[37] Em (Hurwitz, 1878), pág. 8 — citado em (Dugac, 1973), pág. 99.

> "Temos pois de dizer relativamente às nossas grandezas numéricas (números mistos), o que entendemos por $\frac{1}{m}.\frac{1}{n}$. Mas este significado não é arbitrário, se estabelecermos que unidade vezes unidade deve ser novamente unidade."[38]

Na secção 2.1 *Números usuais e números complexos*, a propósito da multiplicação de números usuais, foi deduzida das leis (I) e (III) a seguinte relação, para $a, b, c, ..., a', b', c', ...$ números usuais quaisquer:

(III') $(a+b+c+...)(a'+b'+c'+...) = aa'+ab'+ac'+...+ba'+bb'+bc'+...+ca'+cb'+cc'+...$

Partindo do princípio que também agora a operação de multiplicação entre partes exactas da unidade deva verificar as leis (I) e (III), e portanto, também (III'), vem que:

$$\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+ \dots \text{ m parcelas}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+ \dots \text{ n parcelas}\right) = 1$$
$$= \left(\frac{1}{m}.\frac{1}{n}+\frac{1}{m}.\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{m}.\frac{1}{n}+\frac{1}{m}.\frac{1}{n}+\dots\right).^{39}$$

Mas isto significa que $m.n$ membros $\frac{1}{m}.\frac{1}{n}$ são equivalentes à unidade. Logo, $\frac{1}{m}.\frac{1}{n}$ é a $(m.n)^{\text{a}}$ parte exacta da unidade.

Apesar de não ser apresentada uma definição explícita do produto de duas partes exactas da unidade, podemos, a partir do anteriormente exposto, formular a seguinte definição.

**Definição 2.2.6** O **produto da $m^{\text{a}}$ parte exacta da unidade**, $\frac{1}{m}$, **pela $n^{\text{a}}$ parte exacta da unidade**, $\frac{1}{n}$, é a $(m.n)^{\text{a}}$ parte exacta da unidade, $\frac{1}{m.n}$, isto é,

$$\frac{1}{m}.\frac{1}{n} = \frac{1}{m.n}$$

Estando definido o produto de dois quaisquer elementos de um número usual misto, ou seja, de partes exactas da unidade ou de duas unidades $(1.1. = 1)$, a observação seguinte esclarece como devemos efectuar o produto entre números usuais mistos.

[38] Em (Hurwitz, 1878), pág. 9 — citado em (Dugac, 1973), pág. 100.

[39] No original é assumida apenas a validade da propriedade (III) para partes exactas da unidade, da qual se afirma subsistir também (III') — veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 9 (citado em (Dugac, 1973), pág. 100). Repare-se, no entanto, que a lei (I) é fundamental para deduzir que, para quaisquer partes exactas $\alpha, \beta, \gamma$, se tem $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma+\beta\gamma$. E esta igualdade é imprescindível para que (III') seja válida.

"(...) se $a$ e $b$ forem duas grandezas numéricas arbitrárias, que sejam compostas dos elementos $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$, então a multiplicação é agora exequível pelas leis I)–III) e pelo significado de $\frac{1}{m}.\frac{1}{n}$."[40]

Assim, muito embora não seja explicitamente formulado o conceito de produto de dois números usuais mistos, isto é, de duas grandezas numéricas compostas de um número finito de elementos, podemos considerar a definição seguinte.

**Definição 2.2.7** O **produto**, $a.b$, **de dois números usuais mistos** arbitrários é igual à soma de todos os produtos possíveis entre os elementos de $a$ e $b$.

Veremos na secção 2.3.2.2 *Operações com números finitos* que esta definição será estendida ao outro tipo de grandezas numéricas, aquelas compostas de infinitos elementos. E será por esta razão que apenas nessa secção poderemos ver justificados certos resultados relativos a números usuais mistos. É, por exemplo, o caso da prova de que o produto de dois quaisquer números usuais mistos tem um valor unívoco completamente determinado, que será um caso particular da mesma propriedade relativa exactamente a grandezas com uma infinidade de elementos.

A multiplicação de dois números usuais mistos quaisquer verifica ainda as propriedades (I), (II) e (III) da operação multiplicação de números usuais. A prova de tal facto decorre de os números usuais mistos serem compostos de elementos, a unidade e as suas partes exactas, que igualmente verificam as leis (I), (II) e (III)[41].

Note-se que, até este ponto da construção de domínios numéricos, apenas foi definido o conjunto dos números racionais positivos, *números usuais mistos*, estando este munido das operações de adição e multiplicação.

[40]Em (Hurwitz, 1878), pág. 10 — citado em (Dugac, 1973), pág. 100.

[41]É de notar que, para definir o produto entre partes exactas da unidade, foi assumida a validade das propriedades (I) e (III). A propriedade (II) $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$, onde $\alpha, \beta, \gamma$ são partes exactas, demonstra-se facilmente atendendo às definições de multiplicação destes elementos e à validade da mesma lei (II) para a multiplicação de números usuais.

## 2.3 Números com infinitos elementos

*Números com infinitos elementos* é o título, na redacção de Hurwitz, da secção onde é desenvolvida toda a teoria dos números reais, sendo inicialmente apresentada a teoria relativa aos reais positivos, e só com o conceito de *elemento oposto* se generalize esta aos reais negativos.

Um dos pontos fundamentais para a construção do conceito de número real é estabelecer uma forma que nos permita distinguir os números racionais dos que não o sejam, isto é, dos números irracionais. A forma como Weierstrass definiu, de um modo puramente aritmético, a diferença entre estes dois tipos de números está bastante explícita na redacção (Thieme, 1886), que Thieme redigiu do curso leccionado por Weierstrass no ano de 1886. Portanto, no que se segue, consideram-se algumas passagens mais significativas de tal redacção.

O conceito mais geral de número que apresentámos até ao momento foi o de *número usual misto*, correspondente a um racional positivo, e que coincide com uma grandeza numérica composta por uma quantidade finita de elementos. Mas as grandezas numéricas podem igualmente conter uma infinidade de elementos. E é observando que existem grandezas deste último tipo que não são equivalentes a nenhum racional, que Weierstrass conclui que o conjunto dos números não fica completo com os números racionais. Razão pela qual surja a necessidade de criar novos números.

> "Se considerarmos por exemplo o número $e$, que é composto dos elementos $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, ..., \frac{1}{n!}, ...$, então esta é uma série bem definida, que define uma grandeza completamente determinada; igualmente Hermite conseguiu mostrar que não há nenhuma grandeza numérica racional que lhe seja igual pela definição apresentada; daí segue que o domínio das grandezas não se esgota com os números racionais."[42]

As únicas grandezas numéricas que podemos de alguma forma comparar são aquelas que possuem um valor finito. Weierstrass chama *números finitos* a estas grandezas

[42]Em (Thieme, 1886), pág. 59 — citado em (Dugac, 1973), pág. 135. A demonstração de que, sendo $x$ um número inteiro, a exponencial $e^x$ não pode tomar um "valor comensurável", pode ser consultada em (Hermite, 1912), pág. 154.

que correspondem exactamente a todos os números reais positivos. Será portanto relativamente a estas entidades que Weierstrass desenvolve as leis aritméticas, sendo apenas abordadas inicialmente as da adição e multiplicação. Com a introdução do conceito de *elemento oposto*, esta álgebra é estendida aos números reais negativos e, finalmente, com a definição de divisão de dois quaisquer números, fica completo o conjunto dos reais.

### 2.3.1 Grandezas numéricas formadas de infinitos elementos

> "Para que se possa fazer uma ideia exacta de tais grandezas numéricas com infinitos elementos, é preciso que estes elementos sejam seleccionados, por uma lei definida, do domínio numérico [construído] até agora (unidade e partes exactas da mesma)."[43]

Como exemplo de tais entidades, é referida a série geométrica

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{3.3.3} + \ldots .$$

No entanto, este é apenas um exemplo do caso excepcional de uma grandeza constituída por uma infinidade de elementos que é equivalente a um número racional, existindo, evidentemente, casos em que somas destas não são iguais a nenhum racional. Desta forma, torna-se necessário desenvolver conceitos que se apliquem a todo o tipo de grandezas numéricas. Os primeiros considerados por Weierstrass são relativos à comparação destas entidades.

#### 2.3.1.1 Comparação de números com infinitos elementos

As transformações sobre grandezas numéricas compostas de um número finito de elementos, definidas na secção 2.2.1 *Comparação de números usuais mistos*, permanecem ainda válidas no caso de estas entidades serem compostas de uma infinidade de elementos. Assim, poderemos igualmente substituir quaisquer $n$ elementos $\frac{1}{n}$ pela unidade principal, ou mesmo substituir qualquer elemento pelas suas partes exactas. Já relativamente à relação de *igualdade*, Weierstrass afirma:

> "(...) não conseguiríamos chamar iguais uma à outra a duas grandezas numéricas, apenas quando ambas podem transformar-se numa mesma terceira, porque uma tal grandeza numérica de infinitos elementos não pode em geral trazer-se a uma forma que só contenha uma unidade (infinitos números não têm nenhum múltiplo comum finito em geral)."[44]

[43] Em (Hurwitz, 1878), pág. 11 — citado em (Dugac, 1973), pág. 101.
[44] Em (Hurwitz, 1878), pág. 11 — citado em (Dugac, 1973), pág. 101.

Para ultrapassar este obstáculo, é introduzido o conceito de *parte integrante* de uma grandeza numérica.

**Definição 2.3.1** $a'$ é uma **parte integrante** de $a$ quando $a'$ puder ser transformado em $a''$ de tal modo que todos os elementos de $a''$ ocorram tantas vezes em $a$ como em $a''$ e, além disso, $a$ contiver outros elementos ou o mesmo em maior quantidade.

Acerca desta definição, Weierstrass observa que uma parte integrante $a'$ dum número $a$ com infinitos elementos apenas poderá conter uma quantidade finita de elementos de $a$; com efeito, apenas podemos estabelecer uma relação entre o número de ocorrências dos elementos de $a''$, quer em $a$ como em $a''$, se este for um número finito. A partir deste conceito são definidas as relações de igualdade e desigualdade entre duas quaisquer grandezas numéricas. Estas definições podem pois aplicar-se a números usuais mistos, a números com uma quantidade finita de elementos, ou àqueles compostos com infinitos elementos.

**Definição 2.3.2** Duas grandezas numéricas $a$ e $b$ dizem-se **iguais** quando qualquer parte integrante de $a$ pode, através de transformações, tornar-se numa de $b$ e, reciprocamente, cada parte integrante de $b$ numa de $a$.

As propriedades de simetria e transitividade da relação de igualdade entre qualquer tipo de grandezas numéricas são enunciadas sem prova[45]. Atendendo a que também será válida a propriedade reflexiva, poderemos interpretar a relação de igualdade entre duas quaisquer grandezas como sendo uma relação de equivalência.

**Definição 2.3.3** Diz-se que $b > a$ quando qualquer parte integrante de $a$ pode transformar-se numa de $b$ mas não reciprocamente.

Relativamente à relação de desigualdade, Weierstrass mostra ainda que no caso de duas grandezas numéricas cumprirem a relação $b > a$, um número $c'$ que esteja contido em apenas um dos números só poderá estar contido em $b$. Isto porque, se assim não sucedesse, a definição de desigualdade entre grandezas numéricas não teria

[45]Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 15 — citado em (Dugac, 1973), pág. 103.

nenhum sentido. Esta prova decorre facilmente de argumentações relativas à teoria dos conjuntos.

A propriedade transitiva desta relação de desigualdade entre qualquer tipo de grandezas numéricas é enunciada sem qualquer prova[46].

[46] Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 15 — citado em (Dugac, 1973), pág. 103.

#### 2.3.1.2 Exemplos de grandezas com infinitos elementos equivalentes a números racionais

Utilizando o conceito de *parte integrante* de uma grandeza numérica, Weierstrass determina somas de séries[47], exemplificando assim que existem grandezas numéricas compostas de infinitos elementos que são equivalentes a números racionais. Inclusivamente, podemos ler na redacção de (Thieme, 1886) que Weierstrass considera como uma excepção quando uma grandeza numérica formada por uma quantidade infinita de elementos é equivalente a uma grandeza numérica racional[48]. E a partir do mesmo conceito de parte integrante, é provada ainda, na redacção de Hurwitz, a igualdade entre duas grandezas numéricas com uma infinidade de elementos.

**Exemplo 1**: Vejamos então como é provado que o número

$$a \equiv \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots \quad \text{é igual a 1.}$$

Pela definição 2.3.2 de *igualdade* de duas grandezas numéricas, página 81, há a demonstrar que toda a parte integrante de $a$ é parte integrante de 1 e, reciprocamente, que toda a parte integrante de 1 é também parte integrante de $a$. Relativamente à primeira destas provas, são estabelecidas inicialmente as relações:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{1.2} = 1; \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3}; \ \ldots \ ; \quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{1}{n},$$

a partir das quais se obtém o número 1:

$$\text{(I)} \quad \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n.(n+1)} + \frac{1}{n+1} = 1.$$

Representando $c$ uma parte integrante arbitrária do número $a$, a argumentação segue considerando $\frac{1}{r(r+1)}$ o elemento "mais alto", isto é, de ordem mais alta, de $a$ que está contido em $c$. Então tem-se:

$$c \leq \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{r(r+1)},$$

[47]Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 12 — citado em (Dugac, 1973), pág. 101.

[48]Veja-se (Thieme, 1886), pág. 59 — citado em (Dugac, 1973), pág. 135.

e portanto, por (I), $c < 1$. Assim, qualquer parte integrante $c$ de $a$ é também uma parte integrante de 1.

Em relação à prova de que toda a parte integrante de 1 é parte integrante de $a$, Weierstrass afirma:

> "Ora admitamos que $c'$ seja uma grandeza numérica contida em 1, portanto $c' < 1$, de modo a que $(c', c'') = 1$; então, por I), é também
>
> $$(c', c'') = \frac{1}{1.2} + ... + \frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{r+1}."^{49}$$

Na redacção de Hurwitz não existe qualquer referência anterior que esclareça qual o significado da terminologia $(c', c'') = 1$. Em todo o caso, pelo facto de $c'$ ser uma grandeza numérica inferior a 1, parece ser óbvio existir ainda uma outra grandeza numérica $c''$ que juntamente com $c'$ perfaça o número 1.

Para concluir que $c'$ é ainda parte integrante de $a$, é observado que se pode escolher $r$ suficientemente grande por forma a que $c'' > \frac{1}{r+1}$. Então

$$c' < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{r(r+1)},$$

pelo que $c'$ também está contido em $a$.

Provados os dois passos anteriores, tem-se então que $1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ...$ .

Desta forma, provou-se existirem grandezas numéricas com infinitos elementos que são equivalentes a números racionais. A partir deste exemplo, Weierstrass prova ainda a igualdade entre duas grandezas compostas por uma infinidade de elementos.

**Exemplo 2**: Mostremos que o número:

$$b \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ...$$

é igual ao número $a$, e portanto também igual a 1.

[49] Em (Hurwitz, 1878), págs. 12 e 13 — citado em (Dugac, 1973), pág. 102.

"É

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)},$$
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n(n+1)^2},$$
$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{n(n+1)^3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{1}{n(n+1)^{m-1}} = \frac{1}{(n+1)^m} + \frac{1}{n(n+1)^m},$$
$$\overline{\hspace{10em}}$$
$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + ... + \frac{1}{(n+1)^m} + \frac{1}{n(n+1)^m}.$$

Por exemplo (n=1):

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m}."[50]$$

O número $b$ é obtido através de uma adição semelhante à última, mas que seja constituída de infinitas parcelas:

$$b \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... \textit{ ad inf.}$$

Weierstrass apenas se refere à prova de que qualquer número que seja parte integrante de $b$ também o é de $a$. Em todo o caso, a condição recíproca desta pode mostrar-se de um modo semelhante.

Seja $c$ uma parte integrante de $b$. Então

$$c \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^m}. \tag{2.1}$$

Provemos que $c$ é ainda parte integrante de $a$. Da igualdade (I) do exemplo anterior e de $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m}$ (igualdade anteriormente obtida), tem-se

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m} = \frac{1}{1.2} + ... + \frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{r+1}.$$

Escolhendo $r$ de tal modo que $\dfrac{1}{r+1} < \dfrac{1}{2^m}$, segue da relação (2.1) que[51] $c \leq \dfrac{1}{1.2} + ... + \dfrac{1}{r(r+1)}$. Desta forma se conclui que $c$ é ainda uma parte integrante de $a$.

[50] Em (Hurwitz, 1878), pág. 13 — citado em (Dugac, 1973), pág. 102.

[51] Tratando-se claramente de uma gralha, o original consultado apresenta a desigualdade $\frac{1}{r+1} > \frac{1}{2^m}$ em vez de $\frac{1}{r+1} < \frac{1}{2^m}$ — veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 13 (citado em (Dugac, 1973), pág. 102).

É evidente que os dois exemplos anteriores são apenas casos particulares de um vasto conjunto de grandezas numéricas com infinitos elementos, existindo muitas que não são iguais a nenhum racional. E, mesmo antes de definir as possíveis operações sobre estas grandezas, Weierstrass observa conhecerem-se já procedimentos semelhantes para a obtenção de novos números, sendo um exemplo o caso das raízes quadradas.

> "Sempre se foi levado ao alargamento do domínio numérico quando se chegou a uma operação impossível. Por exemplo nas raízes quadradas. Nestas últimas tinha-se um algoritmo definido para, em tais raízes que tinham um sentido (racional), encontrar efectivamente o número. Também ainda se aplicava o mesmo [algoritmo] quando a raiz não "dava certo" e obtinha-se então uma fracção decimal que se prolongava até ao infinito. Em todo o caso, definia-se por exemplo $\sqrt{2}$ encontrando pelo dito algoritmo para cada casa (decimal) *um* número determinado. Então podia dizer-se: não há decerto nenhum racional que, multiplicado por si mesmo, dê 2, mas pode estabelecer-se uma série de números racionais, dos quais cada um dos mais tardios se aproxima mais desta propriedade do que um dos mais precoces."[52]

Se bem que este seja apenas um exemplo daquilo que actualmente designamos por *número irracional*, podemos ver ilustrada nesta citação uma obtenção de irracionais através de limites de números racionais. E, apesar de ainda não termos abordado o modo como na redacção de Hurwitz é definido um irracional, podemos já adiantar que não encontramos aí explícita esta ideia de ser o limite de uma sucessão de números racionais. Em todo o caso, tal poderá depreender-se de toda a teoria que aí é apresentada. A seguinte passagem do final da redacção de Thieme esclarece que Weierstrass tinha, de facto, esta ideia bem presente (se não em 1878, pelo menos já em 1886).

> "Na vizinhança de qualquer grandeza numérica irracional há contudo uma quantidade arbitrária de grandezas numéricas racionais, que se lhe tornam arbitrariamente próximas. Deste modo, qualquer grandeza numérica irracional arbitrária é um limite de racionais, quer dizer, dos que neste caso estão definidos."[53]

[52]Em (Hurwitz, 1878), pág. 14 — citado em (Dugac, 1973), pág. 103.
[53]Em (Thieme, 1886), pág. 59 — citado em (Dugac, 1973), pág. 135.

### 2.3.2 Números finitos e números infinitamente grandes

É exactamente numa subsecção intitulada *Números finitos e números infinitamente grandes*, da redacção de Hurwitz, que Weierstrass observa que nem todas as grandezas numéricas formadas de infinitos elementos podem ser comparadas. Se estas entidades se identificassem com as séries numéricas usuais, cujos termos são positivos, poderíamos desde já compreender a razão para que tal sucedesse. Isto porque, se existem séries numéricas de termos positivos cuja soma é igual a um número real efectivo (as séries convergentes), existem outras (as divergentes) cuja soma é infinita e que, portanto, não são associadas a nenhum real. Pretendendo Weierstrass construir um conjunto de números, associando-os a grandezas numéricas, apenas tem sentido comparar e operar com aqueles que possuam um *valor finito* (que designa por *números finitos*), e não com os que denomina de *infinitamente grandes*. Podemos então entender que tais *números finitos* se identificam com os números reais positivos. Por isso a presente secção é exactamente o cerne de toda a construção dos números reais elaborada por Weierstrass.

Em todo o caso, devemos apontar desde já não existir uma completa identificação entre as séries usuais e as grandezas numéricas de Weierstrass. A diferença entre tais entidades é justificada pelo facto de a noção de conjunto estar presente na definição de grandeza numérica, razão pela qual não é pressuposta uma ordenação dos seus elementos. Esta questão, que igualmente é observada pelo matemático, será desenvolvida na secção 2.3.3.8 *Reformulação do critério de somabilidade*. É de referir, inclusivamente, que Weierstrass utiliza também para as suas somas a designação de séries. Desta forma, terá a necessidade de introduzir a terminologia de séries *incondicionalmente convergentes* por forma a distinguir as suas séries das usuais, que designa por séries *condicionalmente convergentes*.

**Definição 2.3.4** Diz-se que uma **grandeza numérica** $a$ **tem um valor finito** se existirem grandezas $c$ compostas duma quantidade finita de elementos, que sejam maiores do que $a$.

Repare-se então que para averiguar se as grandezas compostas de uma infinidade de elementos possuem, ou não, um valor finito, Weierstrass faz intervir grandezas com um número finito de elementos que, obviamente, têm um valor finito.

**Definição 2.3.5** Uma grandeza numérica $a$ diz-se **infinitamente grande** se qualquer número $c$, que seja composto dum número finito de elementos, for parte integrante de $a$.

Desta definição decorre que qualquer número contendo uma quantidade finita de elementos é parte integrante de quaisquer grandezas infinitamente grandes $a$ e $b$. Portanto, tem-se sempre $a = b$, sendo impossível estabelecer quando $a < b$ ou $a > b$. É observando exactamente que não se pode calcular com números infinitamente grandes, que Weierstrass justifica o facto de a restante teoria por si apresentada se referir apenas a números finitos[54].

[54]Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 16 — citado em (Dugac, 1973), pág. 104.

#### 2.3.2.1 Considerações acerca do conceito de grandeza numérica

A redacção de Hurwitz peca pela falta duma terminologia concreta para designar os diferentes tipos de grandezas numéricas definidos ao longo do curso. Por esta razão, pareceu-nos oportuno esclarecer que "números" Weierstrass definiu até este ponto.

O recente conceito de *número finito*, isto é, de uma grandeza numérica cujo valor seja finito, não será mais do que um número real positivo. Destes números, há a considerar dois tipos: aqueles que sejam compostos duma quantidade finita de elementos, os ditos *números usuais mistos* (racionais positivos), e aqueles que possuam uma infinidade de elementos mas que não são equivalentes a nenhum número usual misto. Para estes últimos Weierstrass não reservou, na redacção de Hurwitz, nenhuma terminologia específica, mas repare-se que correspondem aos números irracionais positivos. Em todo o caso, é de referir que, tal como havia sucedido para a terminologia *número racional*, também podemos encontrar nas redacções de Hettner e de Thieme a terminologia de *número irracional*[55]. Deve notar-se igualmente que, decorrendo das abordagens aí seguidas, esta última designação abrange quer os números irracionais positivos, quer os irracionais negativos.

Antes mesmo de considerar as operações com números finitos, vejamos como deveremos interpretar os números reais positivos na forma como foram definidos por Weierstrass. Conforme já observámos, a relação de *igualdade* entre duas quaisquer grandezas, definida na página 81, poderá interpretar-se como sendo uma relação de equivalência. Em particular, para o caso de tais grandezas numéricas serem *números finitos*. Por esta razão, os números reais positivos podem identificar-se com os representantes de todas as classes de equivalência da relação de igualdade, quando a consideramos definida exactamente no conjunto de todos os números finitos.

Na redacção que Hettner elaborou do curso *Introdução à Teoria das Funções Analíticas*, leccionado por Weierstrass no ano de 1874, podemos ainda encontrar a representação de um número real positivo à custa de fracções decimais. Weierstrass

[55]Vejam-se (Hettner, 1874), pág. 36 e (Thieme, 1886), pág. 59 — citados em (Dugac, 1973), págs. 129 e 134, respectivamente.

mostra que, de um modo geral,

> "Se tivermos uma série de números inteiros [positivos]
>
> $$1, g_1, g_2, g_3, ..., \quad \text{onde} \quad g_1 < g_2 < g_3$$
>
> e formarmos os elementos que têm as grandezas $g_1, g_2, g_3, ...$ como denominadores, então é sempre possível representar qualquer grandeza numérica por uma série de tais elementos (...)"[56]

Deduz então que todo o número $a$ pode ser escrito na forma:

$$a = h_0 + h_1 \frac{1}{g} + h_2 \frac{1}{g^2} + h_3 \frac{1}{g^3} + ...,$$

de modo a que $h_1, h_2, h_3, ...$ tomem valores entre $0, 1, 2, 3, ..., g-2, g-1$. Nesta redacção de Hettner as grandezas numéricas compostas de elementos positivos são também identificadas com os números reais positivos. Assim, o desenvolvimento decimal de um real positivo será um caso particular da igualdade anterior para $g = 10$. O modo como Weierstrass define a relação de *igualdade* entre duas grandezas numéricas representadas em fracção decimal assume um papel fundamental na obtenção do desenvolvimento decimal dos números reais. Considerando iguais duas tais grandezas apenas quando elas coincidirem "(...) em todos os algarismos individuais (...)" [57], Weierstrass afirma que o desenvolvimento dum número arbitrário numa fracção decimal, que é sempre possível, será único. Por um número real positivo, não deverá então entender-se nada mais do que uma tal série numérica. No entanto, Weierstrass parece não se ter apercebido (pelo menos, tanto quanto os extractos disponíveis da redacção de Hettner permitem concluir) de que o desenvolvimento de um número em fracção decimal não é, de facto, único. Note-se, por exemplo, o caso do número 1 que admite os dois desenvolvimentos:

$$1 + 0\frac{1}{10} + 0\frac{1}{10^2} + 0\frac{1}{10^3} + ... \quad \text{e} \quad 0 + 9\frac{1}{10} + 9\frac{1}{10^2} + 9\frac{1}{10^3} + ...$$

[56] Em (Hettner, 1874), pág. 28 — citado em (Dugac, 1973), pág. 128.
[57] Em (Hettner, 1874), pág. 27 — citado em (Dugac, 1973), pág. 128.

#### 2.3.2.2 Operações com números finitos

Tendo, até ao momento, sido definidas as operações de adição e multiplicação de números usuais mistos, o curso de Weierstrass relativo à redacção de Hurwitz prossegue com as definições das mesmas operações relativas agora a números finitos.

Relativamente à primeira destas operações aritméticas, Weierstrass afirma

> "A definição de adição de números com infinitos elementos é a mesma que para números inteiros, e também valem para ela as leis da adição. (Decerto apenas para uma quantidade finita de parcelas.)"[58]

Repare-se que na citação anterior não tem sentido considerar a adição de números com infinitos elementos como sendo a mesma do que para números **inteiros**. Isto porque, para adicionar números finitos teremos de adicionar os seus elementos, que poderão ser partes exactas da unidade; e estes elementos não são considerados na adição de números inteiros ou usuais. Weierstrass deveria querer referir-se à adição de números **complexos**, troca esta que poderá justificar-se pelo facto de a definição da operação de adição 2.1.6, página 66, se referir em conjunto para números usuais e para números complexos. Em todo o caso, seria mais imediato considerar a definição da operação de adição de números finitos como uma extensão daquela relativa a números usuais mistos, página 75.

Tal como é notado na transcrição anterior, apenas poderemos considerar somas que envolvam uma quantidade finita de parcelas[59]. O caso de somas de infinitas parcelas (do qual as próprias grandezas numéricas compostas de infinitos elementos são um exemplo) será considerado apenas mais adiante, na secção 2.3.2.3 *Somas de infinitos números*.

A definição de multiplicação entre quaisquer grandezas numéricas mantém o mesmo enunciado relativamente à operação entre números usuais mistos, ou seja, em relação à definição 2.2.7, página 77.

[58] Em (Hurwitz, 1878), pág. 16 — citado em (Dugac, 1973), pág. 104.

[59] Segundo Dugac esta observação foi feita pelo próprio Adolf Hurwitz — veja-se (Dugac, 1973), pág. 81.

**Definição 2.3.6** O **produto** $a.b$ de dois quaisquer números $a$ e $b$ obtém-se multiplicando cada elemento de $a$ por cada elemento de $b$ e formando a soma destes produtos singulares.

**Proposição 2.3.1** O produto $a.b$ tem um valor unívoco completamente determinado, e tem um valor finito se $a$ e $b$ tiverem valores finitos.

Repare-se que ao serem demonstradas estas duas condições para números finitos, a sua validade fica provada para todo o tipo de grandezas que possuam um valor finito, em particular para *números usuais mistos*. Desta forma, podemos perceber a razão pela qual Weierstrass não se referiu a esta questão quando abordou a multiplicação destes últimos números, facto este que já havíamos mencionado na secção 2.2.2 *Operações com números usuais mistos.*

***Demonstração***: Mostremos inicialmente que o produto $a.b$ tem um valor unívoco completamente determinado. Para determinar o produto $a.b$, basta saber o número de vezes que um elemento arbitrário $\frac{1}{r}$ aí ocorre. Mas $\frac{1}{r}$ apenas poderá ocorrer no produto $a.b$ quando $\frac{1}{r_1}$ for um elemento de $a$, $\frac{1}{r_2}$ um elemento de $b$ e for válida a igualdade:

$$\frac{1}{r_1}.\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}.$$

Ora, o elemento com denominador $r_1$ só ocorre em $a$ em quantidade finita, digamos $p_1$; do mesmo modo, o elemento $\frac{1}{r_2}$ apenas ocorrerá em $b$ um número finito de vezes, digamos $p_2$. Além disso, $r$ apenas se pode escrever finitas vezes em função de dois factores, ou seja, existirá um certo $n$ para o qual:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1}.\frac{1}{r_2} = ... = \frac{1}{r_{2n-1}}.\frac{1}{r_{2n}},$$

onde $\frac{1}{r_{2n-1}}$ representam elementos de $a$ e $\frac{1}{r_{2n}}$ elementos de $b$. Representando por $p_i$ as ocorrências de cada um destes elementos, podemos então determinar sempre quantas vezes um elemento $\frac{1}{r}$ ocorre no produto $ab$, a saber, $p_1.p_2 + ... + p_n.p_{n+1}$ vezes. Desta forma, o produto $ab$ tem um valor determinado.

Vejamos agora a forma como Weierstrass justifica o facto de o produto $a.b$ ser finito sempre que $a$ e $b$ sãos finitos. Pela definição 2.3.4 de *grandeza numérica com valor finito*, página 87, $a.b$ será finito se existir um número composto de uma quantidade finita de elementos que seja maior do que $a.b$. Pelo facto de $a$ e $b$ serem finitos, existem números $a'$ e $b'$, compostos de uma quantidade finita de elementos, que são maiores do que qualquer número composto de elementos de $a$ e $b$, respectivamente. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r, ...$ os elementos de $a$ e $\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_s, ...$ os de $b$, ordenados por ordem crescente. Escolha-se, arbitrariamente, uma parte integrante $c$ de $a.b$. Essa parte integrante será formada, por multiplicação, a partir duma certa quantidade de elementos de $a$ e $b$, dos quais nenhum dos de $a$ contém um elemento superior a $\alpha_r$ e nenhum dos de $b$ contém um elemento superior a $\alpha'_s$. Desta forma, teremos:

$$c \leq (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_r)(\alpha'_1 + \alpha'_2 + ... + \alpha'_s).$$

Como[60] $a'b' > (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_r)(\alpha'_1 + \alpha'_2 + ... + \alpha'_s)$, também $a'b' > c$. Portanto $a'b'$ é um produto maior do que qualquer parte integrante arbitrária de $ab$, e portanto maior do que o próprio $ab$. Sendo $a'b'$ um número composto duma quantidade finita de elementos, conclui-se então que o produto $ab$ é finito.

■

Relativamente à operação de multiplicação de quaisquer grandezas numéricas, é ainda referida, sem qualquer prova, a validade das seguintes propriedades[61]:

(I) $ab = ba$

(II) $abc = acb$

(III) $a(b + c) = ab + ac$

Facilmente depreendemos que estas leis resultam de uma simples aplicação da definição

[60]Muito embora Weierstrass não o refira, a desigualdade que se segue $a'b' > (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_r)(\alpha'_1 + \alpha'_2 + ... + \alpha'_s)$ decorre do facto de, para números usuais mistos arbitrários $a, b, c, d$ se ter $(a > b \ \wedge c > d) \ \Rightarrow \ ac > bd$. A prova deste resultado obtém-se de imediato a partir da definição da relação de desigualdade entre números usuais mistos e das propriedades da multiplicação de números usuais mistos.

[61]Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 17 — citado em (Dugac, 1973), pág. 104.

2.3.2 de *igualdade de grandezas numéricas*, página 81, e da definição 2.2.7 de *multiplicação de números usuais mistos*, página 77. Obviamente que a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição se refere apenas a somas de um número finito de parcelas, sendo abordada na secção 2.3.2.3.3 *Extensão da operação multiplicação* a sua extensão para uma quantidade infinita de parcelas.

Acerca do próximo resultado, Adolf Hurwitz acrescenta na sua demonstração uma nota referindo-se à sua incorrecção.

**Proposição 2.3.2** "Se for $b' > b$, então também $ab' > ab$."[62]

***Demonstração***:

> "De $b' > b$ segue que existe um número $c$ composto de finitos elementos, que está contido em $b'$ mas não em $b$; $b' = (c, c')$; então se $c' = (c'', c''')$ onde novamente $c''$ contém uma quantidade finita de elementos, então é $b' > c + c''$ e $c + c'' > b$, e consequentemente $ab' > a(c + c'')$, $a(c + c'') > ab$, portanto finalmente $ab' > ab$ q.e.d."[63]

Dugac refere em nota de rodapé que Hurwitz escreveu na margem desta demonstração "não rigorosamente"[64].

■

A incorrecção da prova exibida por Weierstrass deve-se ao facto de ser assumida a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para números finitos, a qual ainda não se provou. Esta suposição permitiu obter incorrectamente as desigualdades $ab' > a(c + c'')$ e $a(c + c'') > ab$.

[62]Em (Hurwitz, 1878), pág. 17 — citado em (Dugac, 1973), pág. 104.
[63]Em (Hurwitz, 1878), pág. 17 — citado em (Dugac, 1973), págs. 104 e 105.
[64]Veja-se (Dugac, 1973), pág. 105.

#### 2.3.2.3 Somas de infinitos números

Até este ponto, apenas pudemos considerar somas com um número finito de parcelas. Ora, na subsecção da redacção de Hurwitz cujo título é exactamente *Somas de infinitos números*, é desenvolvida toda uma teoria geral acerca da adição de infinitos números. É de notar, em todo o caso, que as grandezas numéricas com infinitos elementos são elas próprias somas com uma infinidade de parcelas. Assim, podemos encontrar na presente secção alguns pontos da teoria relativa a este tipo de grandezas que, por opção de Weierstrass, não foram na altura desenvolvidos. Dada a proximidade entre grandezas com infinitos elementos e somas de infinitos números, é inclusivamente compreensível que alguns conceitos desenvolvidos nesta secção sejam mesmo uma extensão de conceitos relativos ao primeiro tipo destas entidades. Esta semelhança poderá ainda notar-se em exemplos dados ao longo do curso.

> "Para que uma tal soma [de infinitas parcelas] tenha um valor finito é preciso, antes de mais, que nenhum elemento ocorra infinitas vezes."[65]

Isto porque, caso contrário, toda a grandeza numérica composta de uma quantidade finita de elementos seria inferior a essa soma, logo, por definição, essa soma não teria um valor finito.

O critério formulado para averiguar se uma soma com infinitos números possui ou não um valor finito, acaba por ser uma mera reformulação da definição 2.3.4 de grandeza numérica com valor finito, página 87. Adoptaremos a designação de *Critério de somabilidade* para este critério, de acordo com aquela utilizada por Dugac no seu artigo (Dugac, 1973)[66].

---

[65]Em (Hurwitz, 1878), pág. 18 — citado em (Dugac, 1973), pág. 105.

[66]Veja-se (Dugac, 1973), pág. 81.

#### 2.3.2.3.1 Critério de somabilidade

**Proposição 2.3.3** "Para que uma série de infinitos números [seja] somável e tenha um valor finito para soma, é necessário e suficiente que se possa mostrar a existência duma grandeza numérica que seja maior do que qualquer soma formada a partir duma quantidade arbitrária dos números da série."[67]

Este critério permite que desde já compreendamos a razão pela qual as séries de Weierstrass diferem das séries usuais (sendo que, para já, nos possamos apenas referir a séries compostas por elementos positivos). Isto porque a grandeza numérica que garante a somabilidade de uma série de Weierstrass é "maior do que **qualquer soma** formada a partir duma quantidade arbitrária de números da série". É, portanto, explícita a independência na ordenação dos números de tal série, o que não sucede com as séries usuais.

Que seja possível mostrar para uma determinada série a existência de uma grandeza numérica que seja maior do que qualquer soma de uma quantidade arbitrária de números da série, depreende-se, tal como refere Weierstrass[68], do exemplo apresentado de seguida. Este exemplo denota a proximidade já referida entre somas de infinitos números e grandezas compostas de uma infinidade de elementos.

No segundo dos exemplos apresentados na secção 2.3.1.2 *Exemplos de grandezas com infinitos elementos equivalentes a números racionais*, foi obtida a seguinte igualdade :

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{(a+1)^2} + ... + \frac{1}{(a+1)^m} + \frac{1}{a(a+1)^m} \ .$$

Considerando infinitos números $b_1, ..., b_n, ...$ inferiores a um dado número $b$, é formada a série de termos

$$b_1.\frac{1}{a+1}, b_2.\frac{1}{(a+1)^2}, ..., b_n.\frac{1}{(a+1)^m}, ... \ .$$

Sendo $b_r\frac{1}{(a+1)^r}$, relativamente a $r$, o membro mais elevado de entre os números da série, a soma $S$ de uma quantidade arbitrária destes números verifica as desigualdades:

$$S \leq b_1.\frac{1}{a+1} + b_2.\frac{1}{(a+1)^2} + ... + b_r.\frac{1}{(a+1)^r} < b\left(\frac{1}{a+1} + ... + \frac{1}{(a+1)^r}\right) < b.\frac{1}{a} \ .$$

[67]Em (Hurwitz, 1878), pág. 18 — citado em (Dugac, 1973), pág. 105.

[68]Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 18 — citado em (Dugac, 1973), pág. 105.

Obtivemos então uma grandeza numérica, $b\frac{1}{a}$, maior do que qualquer soma composta de números da série numérica considerada, conforme pretendido.

Na redacção de Hurwitz podemos apenas encontrar uma prova da condição suficiente do critério de somabilidade, a qual apresentamos de seguida.

***Demonstração***: Pretende então provar-se que, caso exista uma grandeza numérica maior do que qualquer soma de uma quantidade arbitrária de números de uma série numérica, esta série terá uma soma finita.

Mas para obter a soma dos infinitos números $a_1, a_2, a_3, ...$ de uma série numérica basta determinar o número de vezes que um elemento $\alpha$ aí ocorre, e juntar todos os elementos $\alpha$. Tendo em conta as palavras que se seguem de Weierstrass, cada um destes elementos ocorrerá na série apenas um número finito de vezes.

> "Nenhum [elemento] pode ocorrer infinitas vezes, porque se $m$ for o número que é maior do que qualquer soma $\sum a_i$ que é formada a partir dos números $a_1, a_2, a_3, ...$, então já a partir do elemento infinitas vezes ocorrente poderíamos compor um número suficientemente grande, que desse uma soma $> m$, o que contradiria a pressuposta propriedade de $m$."[69]

A argumentação segue considerando agora que $\alpha, \beta, \gamma, ...$ representam não apenas os elementos, mas também a quantidade de vezes que eles ocorrem na série numérica. Então a soma dos números $a_1, a_2, a_3, ...$ é a mesma que a soma dos elementos $\alpha, \beta, \gamma, ...$ Portanto, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ será finita se também for finita a soma dos seus elementos, ou seja, se existir uma grandeza composta de uma quantidade finita de elementos que seja maior do que $\alpha+\beta+\gamma+...$ . Dos elementos $\alpha, \beta, \gamma, ...$, é escolhida uma quantidade arbitrária (finita) de soma $b$. Sendo $a', a'', a''', ..., a^{(n)}$ aqueles dos números $a_1, a_2, a_3, ...$ que contêm os elementos escolhidos (obviamente em quantidade finita), tem-se $a' + ... + a^{(n)} \geq b$. Mas, por hipótese, existe um número $m$ que é maior do que qualquer soma de números da série $a_1, a_2, a_3, ...$, em particular, $m > a' + ... + a^{(n)}$ . Como $a' + a'' + a''' + ... + a^{(n)}$

[69] Em (Hurwitz, 1878), pág. 19 — citado em (Dugac, 1973), págs. 105 e 106.

é um número com uma quantidade finita de elementos, pela propriedade transitiva da relação de desigualdade vem que $m > b$.

Desta forma, provou-se a existência de uma grandeza numérica com um número finito de elementos, a soma $a' + a'' + a''' + ... + a^{(n)}$, que é inferior a qualquer soma de elementos entre $\alpha, \beta, \gamma, ...$ . O que significa, pela definição 2.3.4, página 87, que a soma $\alpha + \beta + \gamma + ...$ é finita. Portanto, também é finita a soma $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ .

■

Uma vez que a operação de adição só se aplicava, até aqui, a uma quantidade finita de números, tornou-se necessário generalizar agora algumas propriedades para somas de infinitos números. A primeira delas, à qual se refere a proposição seguinte, pode ser entendida como uma extensão a tais somas das transformações válidas para grandezas numéricas compostas de uma infinidade de elementos.

Após a prova desta proposição, segue-se o parágrafo *Soma por partes*, no qual se justifica a aplicação das propriedades comutativa e associativa na obtenção das somas das séries de Weierstrass.

**Proposição 2.3.4** "(...) numa soma com infinitos membros, o igual pode ser substituído pelo igual sem alterar o valor da soma. (...) [isto é] se $a_1 = a'_1, a_2 = a'_2$, etc., também

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + ...}_{\sum a_i} = \underbrace{a'_1 + a'_2 + a'_3 + ...}_{\sum a'_i} ."$$ [70]

***Demonstração***: Ora, pela definição 2.3.2 de *igualdade* entre grandezas numéricas compostas de infinitos elementos, página 81, basta provar que qualquer número $c$ que esteja contido numa das somas também o está na outra.

De seguida, Weierstrass considera, em vez da soma $a_1 + a_2 + a_3 + ...$, a soma $\alpha + \beta + \gamma + ...$, onde $\alpha, \beta, \gamma, ...$ são os elementos da série $a_1, a_2, a_3, ...$ Analogamente, passa da soma $a'_1 + a'_2 + a'_3 + ...$ à soma $\alpha' + \beta' + \gamma' + ...$, sendo $\alpha', \beta', \gamma', ...$ os elementos de $a'_1, a'_2, a'_3, ...$ . Em todo o caso, subentende-se do decorrer da demonstração que, tal como já havia acontecido na prova da proposição 2.3.3, também agora $\alpha, \beta, \gamma, ...$

[70] Em (Hurwitz, 1878), pág. 20 — citado em (Dugac, 1973), pág. 106.

e $\alpha', \beta', \gamma', ...$ representem não apenas os elementos das respectivas grandezas, mas também o número de vezes que nelas ocorrem.

A argumentação seguiria agora com a prova de dois passos: primeiro que qualquer parte integrante de $\sum a_i$ é parte integrante de $\sum a'_i$ e finalmente a condição recíproca desta. Na redacção de Hurwitz, podemos apenas encontrar a primeira destas provas. A razão para que tal suceda deve-se ao facto de a relação de igualdade entre quaisquer grandezas numéricas, a qual se definiu na página 81, verificar a propriedade simétrica.

Sendo $c$ uma parte integrante arbitrária de $\sum a_i$ (ou, o que é o mesmo, de $\alpha + \beta + \gamma + ...$), podemos transformar $c$ num número $c'$, de modo a que $c'$ também contenha alguns (mas não todos) dos elementos $\alpha, \beta, \gamma, ...$, quando muito tantas vezes quantas $\sum a_i$. Mas assim podemos escolher em $\alpha, \beta, \gamma, ...$ uma quantidade finita de elementos cuja soma seja superior a $c$. Designando por $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_r$ as grandezas $a_i$ onde foram escolhidos tais elementos, tem-se $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + ... + \bar{a}_r > c$ e, portanto, também $\bar{a}'_1 + \bar{a}'_2 + ... + \bar{a}'_r > c$. Desta forma, $c$ é ainda uma parte integrante da soma $\sum a'_i$, conforme pretendido.

$\blacksquare$

#### 2.3.2.3.2 Soma por partes

> "Seja dada uma quantidade infinita de grandezas numéricas, cuja soma tenha um valor finito. Pode então decompor-se esta série numérica em grupos; a quantidade destes grupos pode ser finita ou infinita, e cada grupo pode novamente conter uma quantidade finita ou infinita de grandezas numéricas."[71]

Mesmo antes de demonstrar que, qualquer que seja a decomposição considerada, o valor da soma de uma série não se altera, Weierstrass dá um exemplo de uma tal reordenação dos membros de uma série.

**Exemplo**: Considere-se a soma:

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{(a+1)^{\lambda}}\frac{1}{(b+1)^{\mu}},$$

e prove-se inicialmente que possui um valor finito. Escolhendo uma quantidade arbitrária (finita) de membros, onde $l$ é o mais elevado valor de $\lambda$ ocorrente, e $m$ o de $\mu$, obtém-se uma soma $S$ que verifica as desigualdades seguintes:

$$S \leq \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{1}{(a+1)^{\lambda}}\frac{1}{(b+1)^{\mu}} \leq \sum_{1}^{l}\frac{1}{(a+1)^{\lambda}}\sum_{1}^{m}\frac{1}{(b+1)^{\mu}} < \frac{1}{a}.\frac{1}{b}.$$

Apesar de não ser justificada, repare-se que a última das desigualdades decorre da expressão:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + ... + \frac{1}{(n+1)^m} + \frac{1}{n(n+1)^m},$$

obtida no segundo dos exemplos apresentados na secção 2.3.1.2 *Exemplos de grandezas com infinitos elementos equivalentes a números racionais*. Desta forma, $\frac{1}{a}.\frac{1}{b}$ é maior do que a soma de quaisquer membros arbitrários (em quantidade finita) escolhidos na série numérica, pelo que a soma $\sum_{1}^{\infty}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(a+1)^{\lambda}}\frac{1}{(b+1)^{\mu}}$ é finita.

A decomposição da série dada em grupos é feita considerando um número infinito de grupos, contendo cada um deles uma infinidade de grandezas numéricas.

[71] Em (Hurwitz, 1878), pág. 21 — citado em (Dugac, 1973), pág. 106.

"Aqui só é fácil realizar uma decomposição em grupos, a saber

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{(a+1)^{\lambda}}\frac{1}{(b+1)^{\mu}}=\frac{1}{b+1}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{(a+1)^2}+...\right)$$
$$+\frac{1}{(b+1)^2}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{(a+1)^2}+...\right)+...\text{ .''}$$[72]

A garantia de que um qualquer reagrupamento dos termos de uma série numérica não altera o valor da sua soma é estabelecida na proposição seguinte.

**Proposição 2.3.5** "Se se decompuser uma série infinita de números em grupos, se juntarem os números de cada grupo somando-os, e depois se adicionarem todos os grupos uns aos outros, então a soma final é igual à soma da série infinita dos números."[73]

***Demonstração***: Sendo $a_1, a_2, a_3, ...$ a série de números, são inicialmente considerados os grupos $a_1 + a_1' + a_1'' + ...$; $a_2 + a_2' + a_2'' + ...$; ..., cujas correspondentes somas são designadas pelos números $b_1, b_2, ...$ .

Pela definição 2.3.2 de igualdade entre números finitos, página 81, para mostrar o pretendido seria necessário considerar dois passos: primeiro que toda a parte integrante de $\sum_i a_i$ é uma parte integrante da soma dos grupos, isto é, de $\sum_i (a_i + a_i' + a_i'' + ...)$; e finalmente a condição recíproca desta. Weierstrass optou por uma prova diferente. Atendendo a que um elemento $\alpha$ ocorre finitas vezes na soma $a_1 + a_2 + a_3 + ...$, basta mostrar que este número de ocorrências é exactamente igual àquele relativo ao elemento $\alpha$ na soma $b_1 + b_2 + b_3 + ...$ . Se $\alpha$ ocorrer nos números $a, b, ..., g$ da série numérica, então ele apenas ocorrerá naqueles dos grupos $b_1, b_2, ...$ que tiverem um dos números $a, b, ..., g$ como parcela. Portanto ele ocorrerá na soma $b_1 + b_2 + ...$ exactamente tantas vezes como em $a_1 + a_2 + ...$, sendo isto válido para qualquer elemento arbitrário da soma $\sum a_i$.

■

Tendo em conta o modo como são construídos os grupos de somas $b_1, b_2, ...$ na demonstração anterior, podemos, mais uma vez, comprovar que nas séries de Weierstrass não é pressuposta nenhuma ordenação nos seus termos. Será por esta razão que

[72] Em (Hurwitz, 1878), pág. 21 — citado em (Dugac, 1973), pág. 107.
[73] Em (Hurwitz, 1878), pág. 22 — citado em (Dugac, 1973), pág. 107.

a decomposição em grupos de uma tal série pode ser feita comutando convenientemente as suas parcelas.

O recíproco desta proposição é também enunciado.

**Proposição 2.3.6** "Seja $b_1 + b_2 + ...$ uma soma de infinitos membros. Seja possível representar $b_p$ como uma soma de infinitas grandezas numéricas. $b_p = a_p + a'_p + a''_p + ...$ . Então é $\sum b = \sum a$."[74]

Pressupondo, tal como é observado por Hurwitz, que $\sum b$ tem um valor finito, a prova deste resultado é em tudo semelhante à demonstração da anterior proposição 2.3.5.

[74]Em (Hurwitz, 1878), pág. 22 — citado em (Dugac, 1973), pág. 107.

**2.3.2.3.3 Extensão da operação de multiplicação** Tal como foi observado na secção 2.3.2.2 *Operações com números finitos*, a adição de números finitos apenas poderia considerar-se para uma quantidade finita de parcelas. Assim, relativamente à operação de multiplicação definida igualmente para números finitos, as leis

$$ab = ba; \ abc = acb; \ a(b+c) = ab + ac$$

seriam válidas apenas para somas com um número finito de termos. Por forma a que tenha sentido efectuar um produto de somas constituídas por uma infinidade de parcelas, Weierstrass formula a seguinte definição, que é apenas uma extensão da definição 2.3.6, página 91, relativa a números finitos.

**Definição 2.3.7** Para multiplicar uma série $\sum a_\lambda$ por outra $\sum b_\mu$ tem de se multiplicar cada número $a_\lambda$ que ocorre na primeira série por cada número $b_\mu$ que ocorre na segunda das séries, e formar a soma destes produtos singulares, ou seja,

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\lambda b_\mu.$$

A exposição que se segue na redacção de Hurwitz, respeitante a produtos de séries é extremamente obscura, não se entendendo com clareza o que é pretendido por Weierstrass. Em todo o caso, devemos referir que podemos aí encontrar a prova de que $\sum \sum a_\lambda b_\mu$ é finito sempre que $\sum a_\lambda$ e $\sum b_\mu$ o sejam. Weierstrass atribui ainda um significado a $\sum \sum a_\lambda b_\mu$, pelo que o produto de duas séries fica completamente determinado. Através da decomposição dos números finitos $a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ...$ nos seus elementos constituintes, dá um significado à expressão $\sum \sum a_\lambda b_\mu$, a saber:

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\lambda b_\mu = (a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + ...) + (a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 + ...) + ... \ .$$

### 2.3.3 Operações indirectas e novos números

Se bem que na redacção de Hurwitz não exista nenhum título de uma secção que "anuncie" a criação de novos números, os *elementos opostos*, a sua importância na construção dos números reais parece justificá-lo.

Se, por um lado, as definições das operações de adição e multiplicação foram sucessivamente estendidas por Weierstrass até abrangerem os números finitos até aqui definidos, o mesmo não sucedeu com as operações de subtracção e divisão que designa de "indirectas"[75]. A operação de subtracção apenas se definiu para *números usuais* $a$ e $b$, cumprindo a condição $a > b$, não tendo sido portanto criado o conjunto dos números inteiros negativos. Já a operação de divisão foi um pouco mais além, sendo definida para números usuais $a$ e $b$, mas não sendo condição necessária que $a$ fosse um múltiplo de $b$. Desta forma, a operação de divisão permitiu a criação dos *números usuais mistos*, ou seja, dos racionais positivos. Ora, é evidente que estas duas últimas operações de subtracção e divisão necessitam de ser estendidas aos outros conjuntos de números. E, tal como afirma Weierstrass:

> "(...) para podermos atribuir um sentido à subtracção em todos os casos, temos de alargar o domínio numérico. No entanto, com a divisão não [acontece assim]. Esta aparente incongruência provém de acima já termos introduzido as partes exactas, e portanto já aí termos alargado o domínio numérico, embora *apenas* com base na divisão."[76]

O conjunto de todos os números até aqui definidos será então alargado com a junção dos *elementos opostos*, isto é, dos simétricos de todos os elementos existentes. Mas a introdução destes novos números irá tornar novamente "desactualizadas" as definições das diferentes operações aritméticas, bem como os conceitos relativos à comparação de números. A reformulação de todos estes conceitos irá portanto culminar com a obtenção de um domínio numérico incluindo todos os números definidos até ao momento, os *números finitos*, bem como os seus simétricos. Pelo facto de ficar munido de um conjunto de operações aritméticas que lhe conferem a estrutura de

[75]Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 24 — citado em (Dugac, 1973), pág. 108.

[76]Em (Hurwitz, 1878), pág. 24 — citado em (Dugac, 1973), pág. 108.

corpo ordenado completo, poderemos então identificá-lo com o *conjunto dos números reais*.

#### 2.3.3.1 Extensão da operação subtracção e elementos opostos

Genericamente, a operação de subtracção é definida da seguinte forma:

**Definição 2.3.8** Dados $a$ e $b$ números finitos, a sua **diferença**, $(a-b)$, é o número que adicionado a $b$, dá soma $a$.

Daí que $(a-b)+b=a$ seja a equação definidora da subtracção.

Vejamos como construir estas diferenças, por forma a que a operação de subtracção esteja definida para quaisquer números finitos $a$ e $b$. São inicialmente consideradas grandezas tais que $a>b$, podendo estas ser compostas por uma quantidade finita ou infinita de elementos. E será ao abordar o caso em que se tenha $a<b$ que surgirá a necessidade de introduzir novos números, os *elementos opostos*.

• **Se $a$ e $b$ forem números com quantidade finita de elementos e $a>b$**, então a diferença obtém-se facilmente. Será apenas necessário aplicar ao número $a$ as transformações definidas sobre números usuais mistos, abordadas na secção 2.2.1 *Comparação de números usuais mistos*. Transformando $a$ em $a'+a''$, onde $a'$ contém os mesmos elementos (e mais nenhum) que $b$ e tantas vezes quantas $b$, obtém-se de imediato a diferença procurada, a saber, o número $a''$.

• **Se $a>b$ mas $a$ e $b$ forem números com infinitos elementos**, a diferença não pode ser formada directamente. Weierstrass afirma[77] que também neste caso existem procedimentos para obter $(a-b)$. A construção deste número é descrita na demonstração do próximo resultado.

**Proposição 2.3.7** Se $a$ e $b$ forem grandezas numéricas compostas por uma infinidade de elementos tais que $a>b$ então é possível obter a diferença $a-b$.

[77] Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 25 — citado em (Dugac, 1973), pág. 108.

Para obter o número $(a - b)$, Weierstrass enuncia e demonstra ainda o seguinte resultado.

**Proposição 2.3.8** Dadas grandezas numéricas $a$ e $b$, se $b+\varepsilon > a$, sendo $\varepsilon$ um elemento arbitrário, então ou $b = a$ ou $b > a$.

***Demonstração***: Sejam $\alpha_1, \alpha_2, ...$ e $\beta_1, \beta_2, ...$ os elementos de $a$ e $b$, respectivamente. Ora $b + \varepsilon > a$ significa que, de entre os elementos $\beta_1, \beta_2, ..., \varepsilon$, se pode escolher uma quantidade finita, de tal modo que a soma $S$ dos escolhidos verifique[78] $S \geq a$. Relativamente a esta escolha, são consideradas duas possibilidades:

> "(...) ou $\varepsilon$ não precisa de estar entre os escolhidos, sendo então já $b > a$, ou $\varepsilon$ tem necessariamente de se encontrar entre os escolhidos, sendo então $b = a$ porque qualquer parte integrante de $b$ é parte integrante de $a$, e reciprocamente não pode haver nenhuma parte integrante de $a$ que não seja também parte integrante de $b$."[79]

Sendo o primeiro destes casos imediato, vejamos a argumentação que poderemos utilizar para provar que, quando $\varepsilon$ se encontra necessariamente entre os elementos escolhidos da soma $S$, se tem $b = a$. Ora, pela definição 2.3.2 de igualdade entre quaisquer grandezas numéricas, página 81, há que mostrar que toda a parte integrante de $b$ é parte integrante de $a$ e, reciprocamente, que toda a parte integrante de $a$ é ainda parte integrante de $b$. Weierstrass apenas se refere à segunda destas provas. Mas a sua exposição torna-se bastante confusa, em parte devido ao facto, já notado, de não distinguir desigualdades no sentido estrito de desigualdades no sentido lato. E será também pelo facto de Hurwitz escrever no final desta demonstração "falso"[80], que optámos, no que resta desta prova, por uma abordagem diferente.

Mostremos inicialmente que, se $\varepsilon$ tem necessariamente de se encontrar entre os elementos escolhidos de soma $S$, por forma a que $S \geq a$, então toda a parte integrante de $b$ é parte integrante de $a$. Mas toda a soma $S'$ de quaisquer elementos $\beta_1, \beta_2, ...$

[78]No original, considera-se a desigualdade no sentido estrito $S > a$ — veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 25 (citado em (Dugac, 1973), pág. 109).

[79]Em (Hurwitz, 1878), pág. 25 — citado em (Dugac, 1973), pág. 109.

[80]Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 25 — citado em (Dugac, 1973), pág. 109.

será tal que $S' < a$. Tal significa, pela definição 2.3.2, página 81, que qualquer parte integrante de $b$ (cuja soma é $S'$) é parte integrante de $a$, conforme pretendíamos.

Por redução ao absurdo, suponhamos agora que existe uma parte integrante de $a$ que não é parte integrante de $b$. Mas então existe $n$ finito de tal forma que:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < a \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geq b.$$

Pelo facto de $\sum_{1}^{n} \alpha_i$ ser uma parte integrante de $a$, existe sempre um elemento $\varepsilon$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \varepsilon \leq a.$$

Como

$$b + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \varepsilon,$$

teremos $b+\varepsilon \leq a$. Mas isto é um absurdo, já que, por hipótese, se tem $b+\varepsilon > a$, para qualquer elemento $\varepsilon$.

■

Weierstrass está agora em condições de demonstrar a proposição 2.3.7, a partir da qual determina a diferença entre grandezas $a$ e $b$ com infinitos elementos tais que $a > b$.

***Demonstração*** **[Proposição 2.3.7]**: Da proposição anterior podemos afirmar que se for $a > b$, existem elementos, cuja soma denotamos por $S$, que podem ser adicionados a $b$, de tal forma que se tenha ainda $b+S \leq a$. Mais uma vez o original de Weierstrass[81] apenas contempla a desigualdade no sentido estrito, $b + S < a$.

Caso seja $b + S = a$, determinámos, por definição, a diferença $a - b$: é a soma $S$, já que adicionada a $b$ dá soma $a$.

Se $b + S < a$, Weierstrass afirma:

> "Na série de elementos $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$, seja então $\alpha$ o primeiro [portanto, o maior] que tem a propriedade de ser ainda $a > b + \alpha$."[82]

[81] Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 26 (citado em (Dugac, 1973), pág. 109).

[82] Em (Hurwitz, 1878), pág. 26 — citado em (Dugac, 1973), pág. 109.

Aplicando à desigualdade $a > b+\alpha$ o mesmo raciocínio que a $a > b$, podemos encontrar um elemento $\alpha'$ (com $\alpha' \leq \alpha$) tal que se verifique ainda $a \geq b+\alpha+\alpha'$. Uma vez mais a desigualdade é apenas considerada no sentido estrito[83], $a > b+\alpha+\alpha'$. Apesar de não ser justificada a razão pela qual $\alpha' \leq \alpha$, é fácil verificar a sua validade. Se tivéssemos $\alpha' > \alpha$ então de $a > b+\alpha$, viria $a > b+\alpha'$, o que contradiria a pressuposição de $\alpha$ ser o maior elemento tal que $a > b+\alpha$.

Agora, se tivermos $a = b+\alpha+\alpha'$, a diferença $a-b$ está encontrada. Senão, a argumentação segue de forma semelhante ao caso $a > b+\alpha$.

A obtenção da diferença $a-b$ decorre então da repetição sucessiva dos passos anteriores.

> " Ora se eu puser $c = \alpha + \alpha' + \alpha'' + ...$ ad inf., então posso mostrar que $c$ é finito e adicionado a $b$ dá $a$, portanto é $c = (a-b)$."[84]

Mostremos então que $c$ é finito.

> "Se $b'$ for uma grandeza que satisfaz a desigualdade $a < b+b'$, para $b'$ pode por exemplo ser escolhido o próprio $a$, então segue-se que a soma duma quantidade arbitrária de grandezas $\alpha$ tem de ser menor do que $b'$."[85]

Portanto, qualquer parte integrante de $c$ é inferior a $b'$, ou seja, inferior a $a$. Pelo facto de $a$ ser uma grandeza finita, conclui-se que $c$ é finito, conforme pretendido.

Para provar a igualdade $b+c = a$ há a considerar dois passos: que todo o número contido em $b+c$ está contido em $a$ e, reciprocamente, que qualquer número que esteja contido em $a$ está contido em $b+c$. Tal como é dito por Weierstrass, estes factos mostram-se facilmente: com efeito basta notar que, para um $n$ arbitrário, se tem:

$$a > b + \alpha + \alpha' + \alpha'' + ... + \alpha^{(n)}.$$

Desta forma $a = b+c$, o que significa que $c = \sum \alpha = a-b$ é a diferença entre os números $a$ e $b$. ■

[83] Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 26 (citado em (Dugac, 1973), pág. 109).
[84] Em (Hurwitz, 1878), pág. 26 — citado em (Dugac, 1973), pág. 109.
[85] Em (Hurwitz, 1878), pág. 26 — citado em (Dugac, 1973), pág. 109.

• **Se os números** $a$ **e** $b$ **forem tais que** $a < b$, é então necessário alargar o domínio numérico.

A cada elemento $\alpha$ de uma qualquer grandeza numérica, isto é, à unidade principal e às suas partes exactas, faz-se corresponder o seu simétrico que se designará por seu *elemento oposto*, e se denotará por $\alpha'$.

**Definição 2.3.9** "Para cada um dos elementos até agora considerados, tomamos a mais um oposto ao mesmo, quer dizer, um tal que num agregado de elementos destrua o seu elemento correspondente."[86]

Dadas grandezas numéricas arbitrárias $a, b$ e $b'$, Weierstrass postula vários resultados[87] respeitantes a este conceito, os quais se conjugam na proposição seguinte.

**Proposição 2.3.9** $a$) Se $a$ for um número que contenha o elemento $\alpha$, isto é, $a = a_1 + \alpha$, então $(a_1 + \alpha) + \alpha' = a_1$.
$b$) Para cada número arbitrário $b$, composto de elementos considerados até agora, existe um número $b'$ que o anula. Se $\alpha, \beta, \gamma, \delta, ...$ forem os elementos constituintes de $b$, então $b'$ é composto pelos elementos $\alpha', \beta', \gamma', \delta', ...$ .
$c$) $(b')' = b$.

Estabelecidos estes resultados acerca de elementos opostos, vejamos como poderemos obter a diferença de dois números finitos $a$ e $b$ tais que $a < b$. Pela definição da operação subtracção, temos $(a - c) + c = a$. Mas, pela proposição anterior, também $(a + c') + c = a$. Desta forma, $a - c$ tem o mesmo significado que $a + c'$, pelo que o cálculo da diferença $a - c$, sendo $a < c$, passa da operação de subtracção para a adição de números. Atendendo a que os elementos constituintes de $c'$ são os opostos dos elementos de $c$, sabemos então como formar a diferença $a - c$. Apesar de tal não ser mencionado na redacção de Hurwitz, deve notar-se que ainda não se definiu a operação de adição para elementos opostos. Desta forma, será apenas na próxima secção 2.3.3.3 *Reformulação da operação de adição* que a operação de subtracção poderá ser considerada para dois quaisquer números.

[86]Em (Hurwitz, 1878), pág. 27 — citado em (Dugac, 1973), pág. 109.
[87]Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 27 — citado em (Dugac, 1973), pág. 110.

Relativamente ao elemento oposto de uma parte exacta da unidade, Weierstrass formula e demonstra o resultado que se segue. A sua prova irá permitir ainda a formulação dos conceitos de *unidade positiva* e *unidade negativa*.

**Proposição 2.3.10** O oposto $\alpha'$ duma parte exacta $\frac{1}{n}$ da unidade 1 é a $n$-ésima parte exacta do oposto da unidade, $1'$.

***Demonstração***: Pela proposição 2.3.9, tem-se

$$a + \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}\right)}_{n \text{ parcelas}} + \underbrace{\left(\alpha' + \alpha' + \alpha' + ...\right)}_{n \text{ parcelas}} = a,$$

igualdade que podemos escrever na forma:

$$a + 1 + (\alpha' + \alpha' + \alpha' + ...) = a.$$

Mas o mesmo será dizer que $\alpha' + \alpha' + \alpha' + ... = 1'$, sendo $1'$ o elemento oposto da unidade. Isto significa, por definição, que $\alpha'$ é a $n^{\text{a}}$ parte exacta de $1'$.

■

**Definição 2.3.10** "A unidade principal deverá dizer-se a positiva e a oposta a unidade negativa, correspondentemente aos elementos."[88]

Até este ponto, as diferentes operações aritméticas, bem como os critérios de comparação de números, aplicam-se somente a números positivos. A introdução do conceito de *elemento oposto* irá portanto exigir a reformulação de todos esses conceitos, aspecto que iremos abordar nas próximas secções.

[88]Em (Hurwitz, 1878), pág. 28 — citado em (Dugac, 1973), pág. 110.

#### 2.3.3.2 Reformulação do conceito de grandeza finita

O novo conceito de grandeza finita irá revelar-se fundamental na distinção entre as séries de Weierstrass e as séries usuais de termos positivos.

**Definição 2.3.11** "Uma grandeza diz-se finita se tanto o número formado pelos elementos positivos, como também o formado pelos negativos, for finito. (Os últimos devem naturalmente comparar-se com a unidade negativa)."[89]

A partir desta reformulação podemos pois aperceber-nos que as somas das séries de Weierstrass podem ser calculadas ordenando de uma qualquer forma os seus membros. Será esta a razão que justifica a diferença entre estas séries e as usuais cujos termos sejam positivos.

#### 2.3.3.3 Reformulação da operação de adição

**Definição 2.3.12** "Por soma de duas grandezas, entendemos a reunião dos elementos duma com os da outra."[90]

Em particular, será agora possível adicionar elementos opostos. Como vimos na secção 2.3.3.1 *Extensão da operação de subtracção e elementos opostos*, para obter a diferença entre números finitos, necessitamos apenas de considerar a operação de adição entre números, se bem que possam incluir-se elementos opostos. Portanto, estaremos agora em condições de aplicar a operação de subtracção a quaisquer números finitos. Tal como é observado mais adiante na redacção de Hurwitz[91], esta dependência entre as duas operações justifica a transferência das propriedades relativas à adição para a subtracção de duas quaisquer grandezas numéricas.

---

[89] Em (Hurwitz, 1878), pág. 28 — citado em (Dugac, 1973), pág. 110.

[90] Em (Hurwitz, 1878), pág. 28 — citado em (Dugac, 1973), pág. 110.

[91] Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 30 — citado em (Dugac, 1973), pág. 111.

#### 2.3.3.4 Reformulação de transformações sobre números

Para além das transformações definidas para números usuais mistos, as quais abordámos na secção 2.2.1 *Comparação de números usuais mistos*, Weierstrass considera ainda possíveis para elementos opostos as seguintes transformações[92]:

1) Quaisquer dois elementos opostos podem simplesmente omitir-se;

2) Pode juntar-se um elemento arbitrário a um número, mas simultaneamente é preciso acrescentar-se o elemento oposto.

#### 2.3.3.5 Reformulação do conceito de igualdade

A relação de igualdade entre dois números finitos, estabelecida através da definição 2.3.2, página 81, utilizava o conceito de *parte integrante* de um número. No entanto, tal conceito não é estendido a grandezas numéricas que contenham elementos opostos. Desta forma, a definição de igualdade entre dois quaisquer números terá de ser formulada noutros termos. A propriedade "igual adicionado a igual dá igual" é o ponto de partida para a dedução desta nova relação de igualdade[93].

Considerem-se então $a = a_1 + a'_2$ e $b = b_1 + b'_2$ duas grandezas quaisquer, onde $a_1$ e $b_1$ representam, respectivamente, os agregados dos elementos positivos de $a$ e $b$, e $a'_2$ e $b'_2$ os correspondentes agregados dos elementos negativos. De acordo com a propriedade "igual adicionado a igual dá igual" que deverá manter-se ainda válida, Weierstrass afirma:

> "Vamos portanto tomar $a = b$ quando, por ex.,
>
> $$a + a_2 + b_2 = b + a_2 + b_2 \text{ (...)"}^{94}$$

Repare-se que o outro caso possível para a igualdade entre dois números, seria quando se tivesse $a + a'_1 + b'_1 = b + a'_1 + b'_1$. Mas, neste caso, seríamos conduzidos a uma

[92]Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 28 — citado em (Dugac, 1973), pág. 110.

[93]Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 28 — citado em (Dugac, 1973), pág. 110.

[94]Em (Hurwitz, 1878), pág. 29 — citado em (Dugac, 1973), pág. 110. Note-se que os números $a_2$ e $b_2$ designam os elementos opostos de $a'_2$ e $b'_2$, respectivamente, sendo, por isso, constituídos por elementos positivos.

condição envolvendo uma igualdade entre agregados compostos apenas de elementos negativos, para a qual não foi ainda formulada nenhuma definição. Assim sendo, a noção de igualdade entre dois quaisquer números é verificada a partir da igualdade das somas dos respectivos agregados de elementos positivos com os correspondentes elementos opostos dos elementos negativos.

Atendendo às imediatas igualdades $a + a_2 + b_2 = a_1 + a_2' + a_2 + b_2 = a_1 + b_2$ e $b + a_2 + b_2 = b_1 + b_2' + a_2 + b_2 = b_1 + a_2$, Weierstrass formula então o conceito de igualdade entre dois quaisquer números.

**Definição 2.3.13** Dois números $a$ e $b$ dizem-se **iguais** se $a_1 + b_2 = b_1 + a_2$.

Repare-se que para definir a anterior relação de igualdade foi assumida a propriedade "igual adicionado a igual dá igual". No entanto, depois de definir tal relação, Weierstrass afirma que é necessário demonstrar o resultado que citamos de seguida, que mais não é do que a propriedade que inicialmente supôs ser verdadeira.

**Proposição 2.3.11** "(...) quando $\left.\begin{array}{r} a = b \\ c = d \end{array}\right\}$ também $a + c = b + d$."[95]

Tal abordagem será justificável apenas segundo a seguinte perspectiva: por forma a construir o conceito de *igualdade* entre dois números foi assumido que numa soma podemos substituir o igual pelo igual sem alterar o valor da soma; mas após termos formulado a definição de tal relação de igualdade, devemos verificar se essa definição cumpre ainda aquilo que achámos essencial, a saber, que é válida a propriedade "igual adicionado a igual dá igual".

Apesar de tal não ser notado na redacção de Hurwitz, repare-se que as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva desta relação de igualdade são ainda válidas, sendo imediatas as suas provas. Atendendo a que as grandezas numéricas são agora compostas também por números negativos, podemos interpretar os números reais como sendo os representantes das classes de equivalência para esta relação. Isto sucederá quando consideramos tal relação definida no conjunto de todas as grandezas numéricas cujos

[95]Em (Hurwitz, 1878), pág. 29 — citado em (Dugac, 1973), pág. 110.

elementos são a unidade e as suas partes exactas bem como os elementos opostos de todos estes elementos, grandezas estas que devem possuir um valor finito.

#### 2.3.3.6 Valor absoluto dum número

Vai ser somente agora, com a introdução do conceito de *valor absoluto* dum número, que serão introduzidas nesta teoria dos números irracionais as designações de *número positivo* e *número negativo*, bem como uma notação para o elemento zero, o que irá facilitar a linguagem usada daqui em diante.

**Definição 2.3.14** "Se se entender por valor absoluto dum número o número que surge do dado quando eu refiro todos os seus elementos a uma unidade, então pode:
1) o valor absoluto dos membros positivos dum número ser $>$ do que o valor absoluto dos números negativos; então o número diz-se positivo.
2) acontecer o contrário de 1); então o número diz-se negativo.
3) os dois valores absolutos podem ser iguais um ao outro."[96]

Desta definição é claro que para Weierstrass o contrário de $>$ é $<$. Isto porque, se assim não fosse, não haveria a necessidade de se incluir um terceiro caso.

As expressões *anular*, *destruir* ou ainda *suprimir*, utilizadas na abordagem do conceito de elemento oposto[97] indicam que Weierstrass considerava já a existência do número zero. No entanto, será apenas com a próxima observação que é introduzida uma notação para tal número.

> "As grandezas numéricas com as quais 3) acontece podem ser adicionadas a um número arbitrário sem que o número aumente pela sua junção. Denota-se por 0. Portanto, $0 + a = a$ é $= a$."[98]

A relação estabelecida entre as operações de adição e subtracção, em conjunto com a definição de valor absoluto, levam Weierstrass a adoptar[99] para o oposto de $a$ (isto é, o seu simétrico) a notação $-a$ que usualmente utilizamos.

Os resultados reunidos na proposição seguinte[100] permitem observar alguns pontos importantes acerca da operação de subtracção.

[96] Em (Hurwitz, 1878), pág. 29 — citado em (Dugac, 1973), pág. 111.
[97] Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 27 — citado em (Dugac, 1973), pág. 110.
[98] Em (Hurwitz, 1878), pág. 29, 30 — citado em (Dugac, 1973), pág. 111.
[99] Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 30 — citado em (Dugac, 1973), pág. 111.
[100] Veja-se (Hurwitz, 1878), págs. 30, 31 — citado em (Dugac, 1973), pág. 111.

**Proposição 2.3.12** *a*) Se $a = a_1 - a_2$ for um número positivo, pode transformar-se $a$ num número cuja parte negativa tenha um valor absoluto que pode ser tomado tão pequeno quanto se queira.
*b*) Seja $a$ uma grandeza composta de elementos positivos e elementos negativos. Se $a$ tiver um valor positivo, então existe sempre um número que lhe é igual e que apenas contém elementos positivos. Caso $a$ tenha um valor negativo, existe um número igual a $a$ que apenas contém elementos negativos.[101]

***Demonstração***:

*a*) Seja então $a = a_1 - a_2$ com $a_1 > a_2$. Se $n$ for um número inteiro positivo arbitrário, então na série $\frac{1}{n}, 2.\frac{1}{n}, 3.\frac{1}{n}, ...$, é certo existir um primeiro membro, digamos o $(\mu + 1)$-ésimo, que é maior ou igual a $a_2$, donde $\mu.\frac{1}{n} < a_2$.

Considerando $a_2 = a_3 + a_4$, se fizermos $a_3 = \mu.\frac{1}{n}$, vem que $a_4 \leq \frac{1}{n}$. Assim $a$ escreve-se na forma $a = (a_1 - a_3) - a_4$. Pode sempre transformar-se $a_1 - a_3$ num número com elementos positivos, pois $a_1$ pode ser transformado de modo a que $a_3$ seja sua parte integrante[102]. E o número $a_4$, valor absoluto dos elementos negativos de $a$, é tão pequeno quanto se queira, conforme pretendido.

*b*) Caso $a$ seja um número positivo, isto é, $a = b - c$, com $b > c$, Weierstrass apenas refere que o facto de $a$ poder ser transformado numa grandeza com elementos positivos decorre da demonstração da existência da diferença $b - c$, quando $b > c$. Vejamos a justificação para tal.

[101] Caso $a$ tenha um valor positivo esta proposição afirma que é possível obter uma grandeza que lhe é igual mas que é composta apenas de elementos positivos. Weierstrass refere-se a tal grandeza obtida como não sendo *directamente declarável* a $a$. Depreendemos que esta terminologia se refere ao facto de, sem efectuarmos as transformações definidas na secção 2.3.3.4 *Reformulação de transformações sobre números*, as duas grandezas não serem compostas de elementos iguais. O mesmo se aplica ao caso em que a grandeza $a$ possua um valor negativo — veja-se (Hurwitz, 1878), págs. 30, 31 (citado em (Dugac, 1973), pág. 111).

[102] Weierstrass refere-se a esta transformação como sendo $a_3$ parte integrante *directa* de $a_1$. Tal como já foi referido anteriormente, este conceito parece não significar nada mais do que uma mera parte integrante — veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 31 (citado em (Dugac, 1973), pág. 111).

Da proposição 2.3.7, página 105, ficou de facto provado que caso fosse $b > c$ a diferença $b - c$ era definida como sendo a soma $\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots$ *ad inf.* de elementos $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ cumprindo certas propriedades. Uma vez que, pela argumentação utilizada, estes elementos são todos positivos, a grandeza $a = b - c$ pode, como pretendido, ser escrita como uma soma de elementos positivos.

Relativamente ao caso de $a$ ser um número negativo, não é apresentado qualquer argumento que justifique o facto de $a$ poder ser escrito como contendo apenas elementos negativos. No entanto, note-se que basta considerar $a$ como sendo o elemento oposto do número positivo $c-b$, isto é, $a = -(c-b) = b-c$. Desta forma, existem igualmente certos elementos positivos $\beta, \beta', \beta'', \ldots$ tais que $b - c = -(\beta + \beta' + \beta'' + \ldots$ *ad inf.*$)$, e, portanto, $a = b - c = -\beta - \beta' - \beta'' - \ldots$ *ad inf.*

■

#### 2.3.3.7 Reformulação de soma por partes

O novo critério da soma por partes difere do estabelecido na secção 2.3.2.3.2 *Somas por partes* apenas pelo facto de considerar as grandezas numéricas também constituídas por elementos negativos.

**Proposição 2.3.13** "Se a soma das grandezas numéricas $a_1, a_2, a_3, ...$ (que têm elementos $+$ e $-$) for finita, e se decompuser esta soma em grupos e depois se formar para cada grupo a soma dos números $a_i$ nele contidos, então se se voltarem a unir por adição as somas obtidas o resultado é igual à soma de todos os $a_i$."[103]

A prova desta proposição decorre de imediato do facto de cada elemento $\alpha$ ocorrer na soma dos $a_i$ tantas vezes quantas na soma das somas dos grupos. Notemos, no entanto, que ainda não sabemos quando uma soma de infinitas grandezas numéricas compostas de elementos positivos e negativos tem um valor finito. Tal condição será estipulada apenas na secção seguinte, aquando da reformulação do critério de somabilidade. Por esta razão poderíamos apontar existir alguma incoerência na apresentação destes critérios. No entanto, esta ordem justifica-se pelo facto de a prova do novo critério de somabilidade necessitar da aplicação de uma soma por partes.

Para completar o critério da soma por partes, estendido agora a grandezas numéricas contendo elementos negativos, deveria seguir-se o recíproco da proposição anterior. Este afirmaria que se uma série $b_1, b_2, b_3, ...$ tivesse valor finito e se fosse possível escrever cada $b_i$ como uma soma de infinitos termos de uma série $a_1, a_2, a_3, ...$, isto é, se $b_i = a_i + a'_i + a''_i + ...$, então ter-se-ía $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$. A sua prova seria semelhante à prova anterior, atendendo a que todo o elemento de $\sum b_i$ ocorre aí um número finito de vezes, e este é igual ao número de ocorrências na soma $\sum a_j$. No entanto, devido à notação utilizada, o enunciado que encontramos na redacção de Hurwitz contém uma trivialidade. A proposição que se segue refere-se então ao resultado contido na redacção de Hurwitz.

[103]Em (Hurwitz, 1878), pág. 31 — citado em (Dugac, 1973), págs. 111, 112.

**Proposição 2.3.14** Se $b_1 + b_2 + b_3 + ...$ for finito e $b_i$ for igual a uma soma de outros números $b_i = a_1^i + a_2^i + a_3^i + ... = \sum \alpha_i - \sum \beta_i$, onde $\sum \alpha_i$ representa a soma de todos os elementos positivos que ocorrem em $a_1^i + a_2^i + a_3^i + ...$ e $\sum \beta_i$ o valor absoluto da soma dos elementos negativos, então

$$\sum_i b_i = \sum_i (a_1^i + a_2^i + a_3^i + ...).^{104}$$

Repare-se desde já que da prova da igualdade $\sum\limits_i b_i = \sum\limits_i (a_1^i + a_2^i + a_3^i + ...)$ apenas poderemos afirmar que $\sum b_i$ é igual à soma de todas as somas $a_1^i + a_2^i + a_3^i + ...$, e não, como mais geralmente se pretendia, igual à soma dos termos da série $a_1, a_2, a_3, ...$ .

A notação utilizada para enunciar esta proposição irá tornar incorrecta a sua demonstração. Na transcrição que se segue, entenda-se a referência à pág. 22 como sendo a página que contém o critério da soma por partes respeitante a grandezas compostas apenas de elementos positivos, isto é, às proposições 2.3.5 e 2.3.6, páginas 101 e 102, respectivamente.

***Demonstração***:

> "(...) então é $\sum\limits_i (b_i + \sum \beta_i) = \sum\limits_i (a_1^i + a_2^i + ...)$, porque é $b_i + \sum \beta_i = \sum \alpha_i$ e portanto, pela pág. 22, $\sum\limits_i (b_i + \sum \beta_i) = \sum\limits_i \sum \alpha_i$ ou $\sum\limits_i b_i = \sum\limits_i \left(\sum \alpha_i - \sum \beta_i\right) = \sum\limits_i (a_1^i + a_2^i + ...)$ ."[105]

■

Deve notar-se que a igualdade

$$\sum_i (b_i + \sum \beta_i) = \sum_i \sum \alpha_i \tag{2.2}$$

é uma consequência de $b_i + \sum \beta_i = \sum \alpha_i$, não por aplicação das proposições 2.3.5 e 2.3.6, tal como é afirmado na citação anterior, mas pela proposição 2.3.11, página 113.

[104] No original o número $\sum \beta_i$ é considerado como a *soma* dos elementos negativos, mas, em rigor, terá de ser o seu valor absoluto — veja-se (Hurwitz, 1878) pág. 31 (citado em (Dugac, 1973), pág. 112).

[105] Em (Hurwitz, 1878), pág. 31 — citado em (Dugac, 1973), pág. 112.

Apenas se aplicariam tais proposições 2.3.5 e 2.3.6 se, em vez da série $\sum_i \sum \alpha_i$ fosse considerada a série formada por todos os elementos positivos da série $a_1, a_2, a_3, ...$, que poderíamos denotar por $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^+$. Conforme nos é apresentada esta prova, poderemos apenas afirmar que para concluir (2.2) se usou a propriedade "igual adicionado a igual dá igual", isto é a proposição 2.3.11. Será por esta razão que a igualdade $\sum_i (b_i + \sum \beta_i) = \sum_i (a_1^i + a_2^i + ...)$ é uma trivialidade.

#### 2.3.3.8 Reformulação do critério de somabilidade

Para deduzir o critério de somabilidade de séries compostas de grandezas numéricas contendo todo o tipo de elementos, Weierstrass considera três casos: quando a soma destas grandezas é formada apenas por elementos positivos; quando tal soma contém apenas números negativos; ou, finalmente, quando a soma admita números dos dois tipos[106].

Admitamos inicialmente que a série $a_1, a_2, a_3, ...$ é composta apenas de membros positivos, os quais podem contudo conter elementos positivos e elementos negativos. Pela definição 2.3.11, página 111, sabemos que a soma $\sum a_i$ é finita se também o forem as somas dos elementos positivos e dos elementos negativos da série, considerados separadamente. Vejamos de seguida que a condição de $\sum a_i$ ser finita é também uma condição suficiente para que sejam finitas as somas dos seus elementos positivos e dos elementos negativos.

Pela alínea $b$) da proposição 2.3.12, página 116, a soma finita $\sum a_i$ pode transformar--se numa soma $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_i + ...$ de grandezas compostas apenas por elementos positivos. Por outro lado, cada $a_i$ tem valor positivo. Portanto, pela alínea $a$) da mesma proposição 2.3.12, $a_i$ pode transformar-se numa diferença cuja parte negativa tem um valor absoluto que pode ser tomado tão pequeno quanto se queira. Sendo então $a_i = b_i - c_i$, para cada $i$, poderemos, em particular, considerar $c_i < \alpha_i$. A soma $\sum c_i$ é finita, uma vez que $\sum \alpha_i$ também é finita. Mostremos que também $\sum b_i$ é finita. Para $x$ arbitrário, tem-se:

$$\sum_{\nu=1}^{x} b_\nu = \sum_{\nu=1}^{x}(a_\nu + c_\nu) = \sum_{\nu=1}^{x} a_\nu + \sum_{\nu=1}^{x} c_\nu.$$

Como $\sum a_i$ e $\sum c_i$ são grandezas finitas, existem números $g$ e $h$ tais que $\sum_1^\infty a_\nu < g$ e $\sum_1^\infty c_\nu < h$. Logo $\sum_1^\infty b_\nu < g + h$, o que significa, por definição que $\sum b_i$ tem valor finito.

Portanto, se existir um número $g$ maior do que a soma de quaisquer números escolhidos entre $a_1, a_2, a_3, ...$, isto é, se esta série for finita, é possível transformar

[106] Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 32 — citado em (Dugac, 1973), pág. 112.

$a_1 + a_2 + a_3 + ...$ de tal modo que tanto os membros positivos como os membros negativos, por si, tenham uma soma finita. O mesmo é válido se a série $a_1, a_2, a_3, ...$ for composta apenas por membros negativos. (Neste caso, bastaria aplicar o raciocínio anterior à série de membros positivos $a'_1, a'_2, a'_3, ...$, designando $a'_i$ o oposto de $a_i$.) E caso a série contenha membros positivos e negativos misturados, concluímos o mesmo já que os membros positivos e negativos, tomados por si, têm de dar uma soma finita.

Assim sendo, a condição de a soma de uma qualquer série ser finita é uma condição necessária e suficiente para que tanto os membros positivos como os membros negativos dessa série sejam finitos. Será utilizando o conceito de *valor absoluto* de um número que Weierstrass apresenta de um modo genérico o *critério de somabilidade*, o qual enunciamos na proposição que se segue.

**Proposição 2.3.15** "Para que uma soma de infinitas grandezas numéricas seja finita, é necessário e suficiente que exista uma dada grandeza finita $g$ que seja maior do que a soma formada de tantas das grandezas numéricas quantas se quiser, tomadas as grandezas no seu valor absoluto."[107]

[107]Em (Hurwitz, 1878), pág. 33 — citado em (Dugac, 1973), pág. 112.

#### 2.3.3.9 Séries condicionalmente convergentes e séries incondicionalmente convergentes

Este novo critério de somabilidade postula quando é que uma série de Weierstrass define um certo número. Mas, para que se obtenha um tal número (real), é necessário concretizar o valor dessas somas de infinitas parcelas. Esta é, portanto, segundo o matemático, a altura apropriada para distinguir as suas séries das séries que ele próprio designa de "usuais"[108]. O essencial desta diferença é que, enquanto as grandezas numéricas de Weierstrass podem ser adicionadas por uma qualquer ordem (e a comprová-lo estão todas as definições subjacentes ao conceito de série somável), a soma de uma série dita "usual" apenas pode ser obtida por uma ordem bem determinada. A saber, adicionando a $a_1$ o membro seguinte, $a_2$; a esta soma, $s_2$, o número $a_3$; ao número resultante, $s_3$, o número $a_4$, e assim por diante, obtendo a reduzida $s_n$ da série. Ora, obviamente que tal procedimento pressupõe uma ordenação dos termos da série, e se, à medida que $n$ cresce, $s_n$ convergir para um determinado número $a$, então diz-se que $a$ é a soma da série "usual".

Para esclarecer que esta independência na ordenação dos membros de uma série é verificada nas séries que designa por somáveis, mas não nas "usuais", Weierstrass apresenta o exemplo da série de elementos

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \, . \tag{2.3}$$

**Exemplo**: Invocando a definição 2.3.11 de *grandeza finita*, página 111, Weierstrass limita-se a afirmar que esta série não é somável, já que tanto a soma dos seus elementos positivos como a soma dos elementos negativos são grandezas infinitamente grandes. De facto, atendendo a que:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{6} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}} + \underbrace{\dots}_{\geq \frac{1}{4}} + \dots,$$

a soma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ dos elementos negativos da série é, por definição, infinitamente grande.

[108]Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 33 — citado em (Dugac, 1973), pág. 113.

O mesmo se conclui relativamente à soma dos elementos positivos, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$, uma vez que:

$$1 + \frac{1}{3} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{7}}_{\geq \frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}}_{\geq \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}} + \underbrace{\ldots}_{\geq \frac{1}{4}} + \ldots\ .$$

> “Não obstante, segundo a definição usual de soma como $\lim(s_n)$, a série possui uma soma; mas esta não é independente da ordenação dos membros; $\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right) + \ldots$ dá uma soma diferente da [dada por] $\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\right) + \ldots$ .”[109]

Apesar de Weierstrass não justificar que a série inicial (2.3) é convergente[110], pode provar-se que ela converge para $\log 2$. Tal valor obtém-se por desenvolvimento em série de Taylor da função $\log(x+1)$, tomando $x = 1$.

A razão pela qual as somas

$$\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right) + \ldots \tag{2.4}$$

e

$$\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\right) + \ldots \tag{2.5}$$

têm valores diferentes também não é apresentada por Weierstrass. Em todo o caso, vejamos uma justificação para que tal suceda. Com efeito, a primeira das somas representa o limite das somas reduzidas de ordem par, $s_{2n}$, da série inicial (2.3), que converge para $\log 2$. Portanto, também a soma (2.4) será igual a $\log 2$. Já a soma (2.5) pode obter-se através de operações aritméticas sobre a série inicial. Como a série inicial (2.3) é convergente, podemos multiplicar os seus termos por $\frac{1}{2}$. Sendo

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \ldots$$

a sua soma, $\frac{s}{2}$ pode ser escrita na forma $0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} \ldots$ . Adicionando as duas séries convergentes anteriores, de somas $s$ e $\frac{s}{2}$, obtém-se

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots\ . \tag{2.6}$$

[109]Em (Hurwitz, 1878), pág. 34 — citado em (Dugac, 1973), pág. 113.

[110]É de notar que Weierstrass não utiliza a designação de série *convergente*. Tais séries são para o matemático aquelas para as quais a soma $s_n$ (usualmente designada por soma parcial) se aproxima dum limite, para $n$ crescente.

Como a soma pretendida (2.5) é o limite das somas reduzidas $s_{3n}$ da série cuja soma, $\frac{3s}{2}$, é dada por (2.6), teremos:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+...\neq$$
$$\neq\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\right)+...,$$

conforme pretendido.

As justificações que acabámos de apresentar ilustram a possibilidade de ser aplicada a associatividade em séries usuais. O que distingue estas séries das de Weierstrass é o facto de já não se poder dizer o mesmo acerca da propriedade comutativa. Actualmente, designamos por *comutativamente convergente* toda a série cuja soma não se altera se efectuarmos uma qualquer reordenação nos seus termos[111]. Desta forma, poderemos identificar as séries somáveis de Weierstrass com as séries usuais ditas comutativamente convergentes.

Por estas razões se compreende que Weierstrass refira que a soma da série

$$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},...$$

se represente por

$$\sum_{v=1}^{\infty}\frac{(-1)^{v-1}}{v}$$

apenas convencionalmente, tendo em rigor de denotar-se por:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{v=1}^{n}\frac{(-1)^{v-1}}{v}\right].$$

As diferenças apresentadas justificam então que sejam definidas duas terminologias que distingam estes dois tipos de séries: as *incondicionalmente convergentes*, como sendo aquelas definidas por Weierstrass (cumprindo o critério de somabilidade), e as *condicionalmente convergentes*, dependentes da ordenação dos membros. E é exactamente para as séries incondicionalmente convergentes que Weierstrass afirma desenvolver a teoria que se segue, com a qual completa a construção do conjunto dos números reais.

[111] Uma série $\sum a_n$ é comutativamente convergente se para toda a bijecção $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, pondo-se $b_n=a_{\varphi(n)}$, a série $\sum b_n$ é convergente e $\sum a_n=\sum b_n$ — veja-se (Lima, 1992), pág. 118.

### 2.3.3.10 Reformulação da operação de multiplicação

Numa secção intitulada *Multiplicação de números que são compostos de elementos arbitrários*, da redacção de Hurwitz[112], Weierstrass atribui um significado aos diferentes produtos possíveis entre a unidade positiva e a unidade negativa, bem como à multiplicação entre partes exactas desta última unidade. Uma vez que as grandezas numéricas são combinações lineares (finitas ou infinitas) destas unidades e das suas partes exactas, veremos desta forma estendida a operação de multiplicação a todo o tipo de grandezas. Desta forma, a definição do produto de dois números constituídos de elementos arbitrários será enunciada como sendo uma simples extensão da definição 2.3.6, página 91, relativa a números finitos.

**Definição 2.3.15** O **produto** de dois números compostos de elementos arbitrários é dado pelo agregado de todos os produtos possíveis dos elementos de um pelos elementos do outro.

Para definir o produto entre a unidade negativa e a unidade positiva, Weierstrass parte do princípio que para números constituídos de elementos negativos é ainda válida a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, $(a+b)c = ac+bc$. Então $(a+b')c+bc = ac+b'c+bc = (a+b'+b)c$ ou, pelo facto de $a+b'+b = a$, $ac = ac+b+c+bc$. Mas isto significa que $b'c$ é o oposto de $bc$, ou seja,

$$(-b)c = -(bc).$$

Donde, o cálculo dos diferentes produtos $(-1)(+1)$, $1.(-1)$ e $(-1)(-1)$ seja imediato.

A argumentação utilizada para obter o produto de partes exactas da unidade negativa, envolve apenas o conceito de parte exacta desta unidade e o facto de $(-1).1 = -1$. Supõe-se que deva ainda verificar-se a comutatividade na operação multiplicação. Então, da igualdade:

$$\left(-\frac{1}{m}-\frac{1}{m}-\frac{1}{m}...\ m \text{ parcelas}\right)\left(+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}...\ n \text{ parcelas}\right) = (-1).1 = -1,$$

112 Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 34 — citado em (Dugac, 1973), pág. 113.

vem que $-1 = m.n\left(-\frac{1}{m}\right).\frac{1}{n}$, o que significa que $\left(-\frac{1}{m}\right).\frac{1}{n}$ é a $m.n$–ésima parte exacta da unidade negativa. Portanto

$$\left(-\frac{1}{m}\right).\frac{1}{n} = -\frac{1}{m.n}.$$

De uma forma semelhante se obtêm os produtos

$$\frac{1}{m}.\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{m.n} \quad \text{e} \quad \left(-\frac{1}{m}\right).\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{m.n}.$$

Para completar os resultados acerca da multiplicação de dois quaisquer números, é provado que o produto de dois números finitos (constituídos quer por quantidades positivas, quer por quantidades negativas) é ainda finito. Esta prova irá suprimir a falha de na secção 2.3.2.3.3 *Reformulação da operação multiplicação* tal não ter sido demonstrado para números finitos compostos apenas por elementos positivos.

**Proposição 2.3.16** Dados os números finitos $a - b = a + b'$ e $c - d = c + d'$, também o seu produto tem um valor finito.

***Demonstração***: Por aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, que se supôs ser válida, e da relação $(-b).c = -(b.c)$ cuja validade se deduziu, tem-se:

$$(a + b')(c + d') = ac + (ad)' + (bc)' + bd = ac - ad - bc + bd.$$

Sendo composto de membros positivos e negativos, este produto será, por definição, finito se também o for cada uma das parcelas da soma anterior. Ora, isto decorre de imediato das definições dos diferentes produtos entre a unidade positiva e a unidade negativa, e da hipótese de $a - b$ e $c - d$ serem finitos.

■

Estando então definida, na sua forma mais geral, a operação de multiplicação, justificar-se-ia que Weierstrass demonstrasse agora todas as propriedades desta operação aritmética. No entanto, limita-se a afirmar que, para este "domínio numérico ampliado", esta é ainda uma operação unívoca, sendo ainda válidas todas as propriedades abordadas ao longo do curso.

#### 2.3.3.11 Operação de divisão de números arbitrários

Até ao momento, a operação de divisão foi apenas considerada para números usuais e números complexos (definição 2.1.9, página 2.1.9). Dados arbitrários números usuais $a$ e $c$, para que o número $b = c/a$ desta definição fosse dotado de algum sentido, introduziram-se as *partes exactas da unidade*. À custa destes elementos formaram-se dois tipos de grandezas numéricas: aquelas constituídas por uma quantidade finita de elementos (os números usuais mistos) e aquelas formadas por infinitos elementos. E para todas estas grandezas, bem como mais recentemente para aquelas que igualmente contivessem elementos negativos, foi estendida sucessivamente a operação de multiplicação. Dada a proximidade entre as operações de divisão e multiplicação, podemos pois entender que a operação de divisão tenha sido implicitamente estendida a todo o tipo de grandezas. E, uma vez que na secção anterior acabámos por desenvolver toda a teoria acerca da operação de multiplicação, a teoria relativa à operação de divisão entre dois quaisquer números estará agora facilitada.

**Definição 2.3.16** Sejam $a$ e $b$ dois quaisquer números. O número $c$ que satisfaz a igualdade $c.b = a$, é denotado pelo símbolo $a : b$ ou $\frac{a}{b}$.

Curiosamente, nesta definição[113] não é excluído o caso em que $b$ toma o valor 0. E não encontramos na redacção de Hurwitz uma terminologia do tipo "$c$ é igual ao *quociente* entre $a$ e $b$".

Para que a operação de divisão fique completamente caracterizada, é necessário demonstrar que, quaisquer que sejam os números $a$ e $b$, o número $\frac{a}{b}$ existe e assume um valor finito. Da mesma forma, Weierstrass não exclui nesta prova o caso de o número $b$ ser 0.

**Proposição 2.3.17** "(...) existe sempre um número $c$ que, se $a$ e $b$ forem dois outros números dados, satisfaz a igualdade $c.b = a$."[114]

[113]Veja-se (Hurwitz, 1878), pág. 36 — citado em (Dugac, 1973), pág. 114.
[114]Em (Hurwitz, 1878), pág. 36 — citado em (Dugac, 1973), pág. 114.

***Demonstração***: Repare-se que a existência de $c$ depende da existência do número $\frac{1}{b}$. É que, sendo $\frac{1}{b}.b = 1$, tem-se $a.\frac{1}{b}.b = a$ e, portanto, $\frac{a}{b} = a.\frac{1}{b}$. Se tal número $\frac{1}{b}$ existir e for finito, podemos então aplicar a teoria da operação de multiplicação, e afirmar que a operação de divisão é igualmente uma operação unívoca, em que $\frac{a}{b}$ um número finito.

Inicialmente considera-se o caso em que $b$ é positivo. A existência do número $\frac{1}{b}$ é provada para ambos os casos em que $b$ seja composto de uma quantidade finita ou infinita de elementos. Finalmente, prova-se a existência de $\frac{1}{b}$ quando $b$ é negativo.

• Se $b$ for positivo e composto de finitos elementos, é imediato que, pelas transformações definidas na secção 2.2.1 *Comparação de números usuais mistos*, $b$ pode ser escrito na forma $\mu.\frac{1}{n}$, onde $\mu$ e $n$ são múltiplos da unidade. Então é imediato que $\frac{1}{b} = n.\frac{1}{\mu}$, já que $\frac{1}{b}.b = n.\frac{1}{\mu}.\mu.\frac{1}{n} = 1$.

• Se $b$ for composto de infinitos elementos, pode sempre encontrar-se um múltiplo da unidade $m$ de tal modo que $m \geq b, m-1 < b$. Como a igualdade $m = b$ conduz ao caso já considerado, supõe-se que $m > b, m-1 < b$. Assim, $b = m - b_1$, sendo $b_1 < 1$. A argumentação segue com a prova de que $\frac{1}{b} = \frac{1}{m-b_1}$. Ora, das desigualdades:

$$\frac{1}{m-b_1} = \frac{1}{m} + \frac{b_1}{m(m-b_1)},$$

$$\frac{b_1}{m(m-b_1)} = \frac{b_1}{m^2} + \frac{b_1^2}{m^2(m-b_1)},$$

$$\frac{b_1^2}{m^2(m-b_1)} = \frac{b_1^2}{m^3} + \frac{b_1^3}{m^3(m-b_1)}, \ \ldots$$

obtém-se

$$\frac{1}{m-b_1} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}.b_1 + \frac{1}{m^3}.b_1^2 + \ldots \, .$$

Sendo $\frac{1}{m-b_1}$ a soma de uma série, para provar que $\frac{1}{m-b_1} = \frac{1}{b}$, torna-se necessário demonstrar que este número tem um valor finito, além de que o seu produto por $b$ é igual a 1.

Como $b_1 < 1$, vale a desigualdade:

$$b_1^a.\frac{1}{m^{a+1}} < \frac{1}{m^{a+1}},$$

donde a soma de uma quantidade arbitrária de membros da série, $\sum_{r=1}^{v} b_1^{r-1}\frac{1}{m^r}$, é tal que:

$$\sum_{r=1}^{r=v} b_1^{r-1}\frac{1}{m^r} < \sum_{r=1}^{r=v} \frac{1}{m^r} < \frac{1}{m-1}.$$

Sendo então $\frac{1}{m-1}$ maior do que a soma de tantos membros da série quantos se quiser, $\frac{1}{m-b_1}$ terá, pela definição 2.3.4, página 2.3.4, um valor finito.

Resta apenas mostrar que $b.\frac{1}{m-b_1} = 1$. Esta igualdade decorre de imediato da aplicação, aos números $b$ e $m-b_1$, da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de grandezas compostas de elementos positivos, relação esta que abordámos na secção 2.3.2.3.3 *Extensão da operação multiplicação.* Com efeito,

$$b.\frac{1}{m-b_1} = (m-b_1)\left(\frac{1}{m} + b_1\frac{1}{m^2} + b_1^2\frac{1}{m^3} + ...\right) =$$

$$= 1 + b_1.\frac{1}{m} + b_1^2.\frac{1}{m^2} + ... - b_1.\frac{1}{m} - b_1^2.\frac{1}{m^2} - ... = 1$$

• Finalmente, se $b$ for um número negativo, atendendo ao que já mostrámos e à extensão da operação de multiplicação abordada na secção anterior, é imediato que $\frac{1}{b}$ existe. De facto, sendo $-b$ positivo, o número $\frac{1}{-b}$ existe e cumpre a igualdade $(-b)\left(\frac{1}{-b}\right) = 1$. Por outro lado,

$$\left(\frac{1}{-b}\right)(-b) = +\frac{1}{b}.b = 1.$$

Logo $\frac{1}{-b} = -\frac{1}{b}$, donde se conclui que o número $\frac{1}{b}$ é dado por:

$$\frac{1}{b} = -\left(\frac{1}{-b}\right).$$

Podemos afirmar então que o número $c = \frac{a}{b}$ existe para todos os casos possíveis das grandezas $a$ e $b$.

■

## 2.4 Considerações acerca da teoria dos números irracionais de Weierstrass

A possibilidade de se obterem grandezas comensuráveis cada vez mais próximas de uma grandeza incomensurável, sem que contudo a conseguissem atingir, é conhecida dos matemáticos já desde os Pitagóricos. E é também partilhando desta ideia que Weierstrass define os seus números irracionais.

> "Na vizinhança de qualquer grandeza numérica irracional há contudo uma quantidade arbitrária de grandezas numéricas racionais, que se lhe tornam arbitrariamente próximas. Deste modo, qualquer grandeza numérica irracional arbitrária é um limite de racionais, quer dizer, dos que neste caso estão definidos."[115]

Em todo o caso, Weierstrass reconhece que, partindo da existência de grandezas racionais, não tem sentido definir os irracionais como limites dessas grandezas, porque começamos por não poder saber se ainda haverá outras além das racionais. A forma como construiu a sua teoria dos números irracionais permitiu-lhe evitar este erro que alguns matemáticos, nomeadamente Cauchy, haviam cometido na obtenção de um número irracional[116]. Os seus números, que designa por *grandezas numéricas*, são definidos como conjuntos de certos elementos. Desta forma, para sabermos o "valor" que uma certa grandeza representa, teremos de adicionar os elementos que a compõem. E é exactamente esta ideia de que um número é um *conjunto* de elementos, e não a *soma* dos seus elementos constituintes que vai permitir a Weierstrass escapar da suposição da existência *a priori* dos números irracionais. Aquelas grandezas de Weierstrass compostas de uma infinidade de elementos que possuem um valor finito mas que, contudo, não são iguais a nenhum número usual misto (ou seja, número racional), identificam-se com os números irracionais. Portanto, um irracional é, segundo a teoria de Weierstrass, uma série de determinados termos, mas não a soma dessa série[117].

---

[115]Em (Thieme, 1886), pág. 60 — citado em (Dugac, 1973), pág. 134.

[116]Veja-se (Cauchy, 1821), pág. 19.

[117]Séries estas que, tendo em conta a sua formação, diferem das séries usuais por não pressuporem uma ordenação dos seus termos.

Assim, tal como é observado por Boyer[118], o irracional $\sqrt{2}$ não será definido como o limite da sucessão de números racionais 1; $1,4$; $1,41$; $1,412$; ..., até porque o conceito de *sucessão* não está presente na teoria de Weierstrass; $\sqrt{2}$ será antes o próprio agregado de vários elementos, a saber, a unidade positiva 1; 4 partes exactas $\frac{1}{10}$, 1 parte exacta $\frac{1}{100}$, 2 partes exactas $\frac{1}{1000}$, e assim por diante, considerados por uma qualquer ordem, agregado este sujeito à condição de que toda a soma de um número finito destes elementos seja inferior a um certo número racional.

Estendendo a todos os tipos de grandezas numéricas as operações aritméticas, Weierstrass construiu um domínio numérico que identificamos com o conjunto dos números reais. E porque podemos interpretar, tal como já fizemos, a relação de igualdade entre quaisquer grandezas numéricas como sendo uma relação de equivalência, o conjunto dos números reais será o conjunto dos representantes das classes de equivalência para esta relação. Isto sucederá quando consideramos tal relação definida no conjunto de todas as grandezas numéricas que possuam um valor finito.

O domínio das grandezas numéricas de Weierstrass compreende portanto tanto as grandezas racionais como também as irracionais. Razão pela qual Weierstrass afirma que pode agora considerar as grandezas numéricas irracionais como limites de grandezas racionais variáveis.

> "(...) de um número formado por uma quantidade infinita de elementos, podemos sempre destacar tantos elementos, que o resto seja menor do que uma grandeza arbitrariamente pequena $\delta$; portanto há uma quantidade infinita de números racionais que se aproximam do irracional considerado, tanto quanto se quiser."[119]

[118] Veja-se (Boyer, 1949), pág. 286.

[119] Em (Thieme, 1886), pág. 60 — citado em (Dugac, 1973), pág. 135.

# Capítulo 3

# Charles Méray

Apesar de ter sido o primeiro matemático a publicar no século XIX uma teoria dos números irracionais, no artigo intitulado "Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données"[1], Charles Méray viu a prioridade do seu feito ser atribuída, mesmo em França, a outros matemáticos. Tal como nos dá conta no prefácio da sua obra de 1894, *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses apllications géométriques*,

> "A teoria dos números incomensuráveis (...) foi atribuída ao Sr. Heine pela sua invenção, aos Sr. Lipschitz, du Bois-Reymond, G. Cantor pelas suas primeiras aplicações (...)" [2]

Heine havia publicado o seu artigo "Die Elemente du Functionenlehre"[3] em 1872, e a este respeito Méray argumenta:

> "(...) mas três anos antes eu tinha exposto a mesma teoria na sua totalidade, depois de a ter comunicado ao Congresso, na *Revue des Sociétés savantes* (*Sciences mathématiques, etc.*, t.IV, p.284; 1869)."[4]

Tendo publicado pela primeira vez a sua teoria dos números irracionais no ano de 1869, Méray voltou a apresentá-la em 1872, na obra *Nouveau Précis d'Analyse*

[1]Em *Revue des Sociétes savantes des departments, Section sciences mathématiques, physiques et naturelles*, (2) 4 (1869), 280–289.

[2]Em (Méray, 1894), pág. XXIII.

[3]Em *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 74 (1872), 172–188.

[4]Em (Méray, 1894), pág. XXIII.

*Infinitésimale*. Mas, por lhe parecer que estas publicações não clarificavam suficientemente toda a sua teoria, e também porque este tema havia constituído um papel acessório em tais obras, decidiu fazer um estudo mais aprofundado. Foi então com o único propósito de desenvolver um pouco mais minuciosamente este assunto, que publica em 1887 o artigo intitulado "Sur le sens qu'il convient d'attacher à l'expression nombre incommensurable et sur le critérium de l'existence d'une limite pour une quantité variable de nature donnée"[5]. Podemos encontrar ainda uma exposição final de tal teoria no primeiro dos quatro volumes da obra *Leçons sur l'analyse infinitesimale et ses applications géométriques*, que seria publicado no ano de 1894.

As seguintes palavras proferidas por Méray já no final da sua vida, resumem bem a linha orientadora de toda a sua obra:

> "(...) apercebi-me que a geometria não passa de um mito como ciência *pura*, que ela não é mais do que a *aplicação da análise ao estudo dos factos geométricos*, e eu ocupei-me mais da análise. Esta pareceu-me miserável pela sua falta de nexo, pelos seus procedimentos, pela sua falta absoluta de rigor, e os meus principais esforços foram no sentido de a tornar natural, clara e rigorosa tanto quanto a questão menor da álgebra elementar."[6]

Será pelo facto de considerar os raciocínios empregues na análise das funções pouco claros e rigorosos, ao contrário do que sucedia na álgebra e na geometria[7], que afirma ser fundamental eliminar das demonstrações da análise qualquer intuição geométrica. Determinado a acabar com "(...) a vaga de teorias que nenhum princípio simples parece dominar"[8], defende em todas as suas obras que a propriedade das funções poderem ser desenvolvidas em série de Taylor constitui um princípio simples sobre o qual a teoria das funções poderá ser construída. E será esta, de facto, a ideia base da análise de Méray, o instrumento unificador de toda a sua análise. Introduzido por Lagrange nos finais do século XVIII, numa perspectiva da algebrização da análise, o desenvolvimento

[5] Em *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, IV (3) (1887), 342–360.

[6] Em "Enquête sur la méthode de travail des mathématicien", *L'enseigment mathématique*, 8 (1906), págs. 46–47 — citado em (Dugac, 1970), pág. 334.

[7] Veja-se (Méray, 1872), pág. XI

[8] Em (Méray, 1872), pág. XI.

de funções em séries de Taylor foi pela primeira vez abordado por Méray em 1868, no seu artigo "Remarques nouvelles sur les points fondamentaux du calcul infinitésimal et sur la théorie de développement des fonctions en séries"[9].

Considerando o limite a noção de base da análise, podemos compreender a necessidade que Méray sentiu em definir correctamente os números irracionais, já que os teoremas sobre limites de sucessões deixavam de ter sentido assim que estas não tendessem para números racionais. Será por não concordar com as definições de número *incomensurável* que tinha à sua disposição, que se vê obrigado a elaborar uma teoria dos números irracionais. Este descontentamento manifesta-o em relação a definições que recorressem ao conceito de limite, uma vez que exigiam a existência *a priori* de um número incomensurável.

> "Dizemos ainda que *um número incomensurável é o limite dum número medindo uma quantidade variável que, sem parar de ter uma medida comum com a sua unidade, se aproxima indefinidamente de qualquer grandeza fixa que não a tem de modo algum.* Aqui, é a palavra *limite* que é ininteligível, uma vez que ela não corresponde a nada que o espírito possa conhecer no momento em que se estabelece esta definição (...)"[10]

São dois os princípios que, segundo Méray, constituem a base essencial de todas as partes da matemática onde intervém a noção de limite de uma sucessão. O primeiro é que uma sucessão crescente majorada (respectivamente, decrescente minorada) tende para um limite, e o segundo que toda a sucessão de Cauchy tende para um limite. Como nos dá conta na sua obra de 1869, se na época estas proposições eram tomadas como axiomas, seria apenas para escapar "(...) à necessidade de introduzir a concepção assaz obscura de número incomensurável."[11]. Tendo então em conta a natureza dos limites de sucessões de números racionais que não admitem nenhum racional por limite, Méray formula o seu conceito de número irracional. E será à custa dessa definição que, no

[9]Em *Revue des Sociétes savantes, Section sciences mathématiques, physiques et naturelles* (2) 3 (1868), 37, 133–138.

[10]Em (Méray, 1887), pág. 355.

[11]Em (Méray, 1869), pág. 280 — citado em (Dugac, 1970), pág. 339.

final das suas obras, apresenta o que considera serem provas perfeitamente correctas de tão importantes resultados.

A dificuldade na análise da teoria dos números irracionais de Méray reside no facto de o matemático a ter exposto em diferentes obras, datadas de 1869, 1872, 1887 e 1894. Se, à partida, poderíamos pensar que esta evolução permitiria aceder a uma exposição completa na última destas obras, o estudo simultâneo de todas elas exige que, de facto, se complementem todas as abordagens seguidas. É exactamente esta exigência que dificulta a criação de uma sequência lógica na apresentação desta teoria, uma vez que, o que à partida se pode assumir em certas abordagens, deixa de ter sentido noutras. Desta forma, tentaremos ver a teoria de Méray como um todo, complementando falhas de certas obras com observações que, eventualmente, se possam encontrar noutras exposições, quer do matemático, quer de autores que tenham igualmente abordado este assunto.

## 3.1 Conceitos gerais

Sendo o conceito de *variante* central e característico da teoria dos números irracionais de Méray, é compreensível que, em todas as obras onde apresenta a sua teoria, o matemático desenvolva inicialmente todo um conjunto de resultados relativos a esta entidade. E será mesmo por constituir a base da construção elaborada por Méray, que este conceito marcará a diferença entre uma teoria coerente e logicamente equivalente a outras suas contemporâneas, como por exemplo a de Weierstrass, e uma desprovida de qualquer sentido e repleta de imprecisões.

Veremos que uma variante poderá ser interpretada como uma função de diversas variáveis inteiras positivas, que toma valores no conjunto dos números racionais. Mas será logo a partir da secção 3.1.6 *Funções de diferentes tipos de variantes*, que nos daremos conta de que, por ser tão geral, tal conceito acarreta imprecisões nos resultados aí enunciados. Tal como nos é dito por Dugac, o gosto de Méray "(...) pelas generalidades está presente em todos os seus trabalhos"[12], sendo este um dos aspectos que dificultam a compreensão da sua teoria dos números irracionais. Será então a partir do momento que constrói a teoria das variantes convergentes, a qual abordamos na secção 3.2 *Variantes convergentes*, que nos daremos conta de que apenas terá sentido considerar variantes dependentes de um índice.

Se consultarmos um livro geral de história da matemática, ou mesmo algumas análises da teoria dos números irracionais de Méray, apercebemo-nos de que os seus autores reduzem o conceito de uma variante ao de uma sucessão de números racionais[13]. E veremos, no decorrer desta apresentação, que apenas esta interpretação dotará de algum sentido a teoria elaborada por Méray.

[12]Em (Dugac, 1970), pág. 335.

[13]Vejam-se, por exemplo, (Boyer, 1949), pág. 289; (Collette, 1973), pág. 216; (Dieudonné, 1978), pág. 368 e (Dugac, 1970), págs. 339–347.

### 3.1.1 Definição de variante

O carácter pouco coerente com que Méray redige as diferentes obras onde expõe a sua teoria dos números irracionais está desde logo patente na definição do conceito fundamental da sua teoria, o conceito de *variante*. É de referir que esta terminologia não seria adoptada na primeira obra, datada de 1869, utilizando-se aí a designação de *variável progressiva*[14].

Das diferentes definições que Méray apresenta deste conceito, aquela que se torna mais esclarecedora é a apresentada na obra de 1872, com a qual não restam dúvidas de que uma variante é uma função de múltiplas variáveis inteiras (podendo estas ser mesmo em número infinito), tomando valores no conjunto dos racionais.

**Definição 3.1.1** "Designaremos por *variante* um número variável (inteiro ou fraccionário, positivo ou negativo), $v_{m,n,...}$ cujo valor depende de números inteiros $m, n, ...$ que tomam todas as combinações de valores possíveis e que chamaremos seus *índices*."[15]

Os exemplos de variantes de um ou dois índices que dá de seguida,

$$v_m = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} \quad \text{e} \quad v_{m,n} = \frac{1}{mn},$$

comprovam que, de facto, que uma variante é uma função dependente de várias variáveis.

Vejamos agora o modo vago como Méray definiu este conceito nas restantes obras de 1869, 1887 e 1894. É de referir que em todas elas adopta inicialmente a terminologia de *número* ou *quantidade* para designar qualquer número inteiro ou fraccionário, positivo ou negativo, isto é, qualquer número racional.

Na primeira exposição, a de 1869, Méray nem sequer se refere aos *índices* de uma variante:

> "Chamarei *variável progressiva* a qualquer quantidade $v$ que toma sucessivamente os seus diversos valores em números ilimitados."[16]

[14] Veja-se (Méray, 1869), pág. 284 — citado em (Robinson, 1991), pág. 1698.
[15] Em (Méray, 1872), pág. 1.
[16] Veja-se (Méray, 1869), pág. 284 — citado em (Robinson, 1991), pág. 1698.

E a definição contida na obra de 1887 não será menos ambígua do que esta última.

> "Ao sair dos primeiros elementos, e em todas as partes das matemáticas, encontramos a todo o instante quantidades que tomam sucessivamente determinados valores numéricos formando uma sucessão indefinida. Contentamo-nos habitualmente em as designar por *quantidades variáveis*, mas isto pode resultar em alguma confusão com as [quantidades] indeterminadas designadas por *variáveis independentes*, e eu conservarei para elas [quantidades variáveis] a denominação de *variantes* (...) O valor actual de uma variante está ligado em geral, seja directamente, seja indirectamente, àqueles [valores] de um ou mais inteiros positivos que crescem sem parar, e, por conseguinte, indefinidamente e independentemente uns dos outros; designo estes inteiros os *índices* da variante."[17]

Segundo esta citação, as variantes são quantidades que tomam sucessivamente determinados valores numéricos, formando uma sucessão indefinida. Portanto, Méray identifica as variantes com sucessões de números (racionais). Assim, não fosse a parte seguinte de tal definição esclarecer que, de facto, uma variante depende de vários inteiros positivos, seríamos induzidos no erro de que este conceito coincidia mesmo com o de uma sucessão de racionais.

Por fim, na obra de 1894, encontramos a seguinte definição de variante:

> "Em Análise Infinitesimal somos obrigados, quase a todo o instante, a considerar quantidades que variam de maneira a tomar sucessivamente determinados valores numéricos em número ilimitado. Chamar-lhes-emos *variantes*.
>
> Cada valor de uma variante depende habitualmente de valores correspondentes de um ou mais inteiros positivos que crescem sem parar de um deles ao seguinte e, por conseguinte, indefinidamente: estes são os seus *índices*." [18]

Mas, mesmo na definição 3.1.1, página 138, que havíamos dito ser a mais clara definição de *variante* das diferentes obras de Méray, devemos considerar a existência de uma falha. É que aí os índices de uma variante são números inteiros, pelo que a

[17]Em (Méray, 1887), pág. 342.
[18]Em (Méray, 1894), pág. 23.

variante $\dfrac{1}{mn}$, dada como exemplo na obra de 1872, poderia, curiosamente, assumir o valor $\dfrac{1}{0}$. Esta imprecisão já não se nota nas definições contidas nas obras seguintes, uma vez que nessas é explícito que os índices de uma variante são *inteiros positivos* que crescem sem parar[19]. Atendendo a que é óbvio ter havido uma falha do matemático na definição que apresenta na obra de 1872, daqui em diante consideramos os índices de uma variante como sendo, efectivamente, números inteiros positivos.

Tal como já foi referido, o conceito de uma sucessão de números racionais não é mais do que o caso particular de uma variante quando esta depende de apenas um índice. Caso a variante dependa de $p$ índices distintos, estaremos então na presença de uma aplicação de $\mathbb{N}^p$ em $\mathbb{Q}$. E, uma vez que Méray não refere se o número destes índices é ou não finito[20], podemos considerar ainda o caso extremo de uma variante com uma infinidade (numerável e bem ordenada) de índices, ou seja, uma aplicação de domínio $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

---

[19] Vejam-se as citações anteriores das definições contidas nas obras de 1887 e 1894. Será de relembrar, no entanto, que na obra de 1869 não é sequer definido o conceito de *índice* de uma variante.

[20] Note-se que a notação $v_{m,n,\ldots}$ utilizada na obra de 1872 indica precisamente que o número de índices não será finito.

### 3.1.2 Ordenação dos termos de uma variante

Uma forma natural de ordenar os termos de variantes de apenas um índice seria, obviamente, por ordem crescente dos respectivos índices, até pelo facto de tais variantes se identificarem com sucessões de números racionais. Mas tal ordenação deixaria de ter sentido, assim que as variantes dependessem de mais do que um índice. Em tais casos, Méray estabelece um critério de ordenação tendo em conta a soma dos índices destes termos, se bem que apenas se refira a ele na obra de 1887.

> "É preciso, pelo pensamento, ordenar os diversos valores de uma variante numa ordem tal que a soma dos índices em cada um [dos valores] vá crescendo sem cessar, [ou] pelo menos nunca diminuindo."[21]

De tais palavras, podemos depreender qual o significado dado por Méray às terminologias de *valores anteriores* e *valores posteriores* a um certo valor arbitrário da variante, e a razão pela qual o número dos primeiros será limitado, e ilimitado aquele relativo aos últimos valores. Assim, os valores de uma variante $v_{m,n,\ldots}$ *anteriores* a $v_{2,2}$ são aqueles cuja soma dos índices é inferior a 4, isto é, igual a 2 ou 3 (já que, sendo $m$ e $n$ inteiros positivos, é impossível que a soma dos índices seja igual a um). Nestas condições, teremos a considerar os termos $v_{1,1},\ v_{1,2},\ v_{2,1}$. Já os termos *posteriores* a $v_{2,2}$ são aqueles cuja soma dos índices é superior a 4. Repare-se ainda que, segundo este critério, existem termos da variante $v_{m,n,\ldots}$ que ocupam o mesmo lugar. Por exemplo, a soma dos índices de ambos os termos $v_{1,2}, v_{2,1}$ é igual a 3. Portanto, segundo o critério apresentado, serão válidas as duas ordenações $v_{1,1},\ v_{1,2},\ v_{2,1}$ e $v_{1,1},\ v_{2,1},\ v_{1,2}$. Sendo esta particularidade generalizável a todas as variantes que dependam de dois ou mais índices, existe, evidentemente, um problema neste critério de ordenação. A este respeito, Méray faz apenas a seguinte observação, que de modo nenhum soluciona tal limitação:

> "Esta ordem de sucessão é múltipla quando existe mais do que um índice; mas, qualquer que ela seja, dois valores da variante, para os quais as somas dos índices sejam diferentes, sucedem-se sempre da mesma maneira."[22]

[21]Em (Méray, 1887), pág. 342.
[22]Em (Méray, 1887), pág. 342.

Começamos desde já a confrontar-nos com algumas imprecisões nas ideias expressas por Méray. E é de realçar estarem associadas ao facto de uma variante depender de mais do que um índice. Pela sua importância, estas imprecisões irão afectar a base de toda a teoria das variantes e, consequentemente, da teoria dos números irracionais de Méray.

A gravidade da falta de clareza no critério de ordenação apresentado poderá ser notada, por exemplo, ao tentarmos exprimir aritmeticamente o *crescimento* de uma variante. Obviamente que será apenas necessário saber qual o termo de uma variante imediatamente anterior a outro. Mas relativamente a uma variante $v_{m,n}$, qual será o termo anterior a $v_{1,3}$? Será $v_{2,1}$, ou $v_{1,2}$? E os termos anteriores a $v_{3,1}$, ou mesmo a $v_{2,2}$, serão os mesmos anteriores a $v_{1,3}$? Quando poderemos então afirmar que uma variante é crescente? Sendo uma variante uma função, seria previsível que, na elaboração da teoria das variantes, fosse inevitável para Méray considerar variantes crescentes ou decrescentes. Tal sucedeu na demonstração do teorema 3.2.1, que abordaremos na página 161. Mas, talvez por se ter apercebido da tamanha confusão que advém do facto de uma variante poder depender de mais do que um índice, o matemático reduziu essa demonstração ao caso de uma variante dependente de apenas um índice. Inclusivamente, a mesma simplificação foi assumida em muitas outras demonstrações que se complicariam bastante ao considerar o conceito mais geral de variante. Será, portanto, justificável afirmar que tais abordagens retiram, à partida, alguma credibilidade a uma teoria que se pretendia muito mais geral do que aquela referente a "simples" sucessões.

### 3.1.3 Exemplos de variantes

Nas diferentes exposições da sua teoria dos números irracionais, Méray apresenta exemplos bastante diversificados de variantes. Seguem-se alguns dos mais interessantes, se bem que num deles Méray tenha concluído erradamente a obtenção de uma variante.

Na obra de 1887, Méray apresenta inicialmente o caso do termo geral "(...) $u_m$ de uma série ordinária [isto é, usual], que tem naturalmente o inteiro $m$ como índice"[23], afirmando ainda que a soma e o produto dos $m$ primeiros termos de uma tal série são também variantes dependentes de $m$. Por analogia com este exemplo, introduz de seguida a designação de séries ditas de *dupla*, *tripla*, ... entrada, que coincidem com variantes dependentes de dois, três ou mais índices: $u_{m,n}$, $u_{m,n,p}, \ldots$ . Será relativamente a variantes de dupla entrada, $u_{p,q}$, que indica dois modos diferentes de adicionar os seus termos. Apesar de afirmar que em ambos os casos se obtêm novas variantes, veremos que apenas um deles é válido, pelo que nos confrontaremos com mais uma falha do matemático.

O primeiro exemplo refere-se à soma dos termos da variante $u_{p,q}$ cujos valores dos índices não ultrapassam, respectivamente, os inteiros $m, n$. Neste caso, Méray limita-se a afirmar que a variante assim obtida tem $m$ e $n$ por índices. Considerando $m$ e $n$ ambos iguais a um, obtemos apenas o termo $u_{1,1}$ da variante $u_{p,q}$; se $m = 1,\ n = 2$, obtemos a soma $u_{1,1} + u_{1,2}$; para $m = 2,\ n = 1$, $u_{1,1} + u_{2,1}$; para $m = 2,\ n = 2$, $u_{1,1} + u_{1,2} + u_{2,1} + u_{2,2}$; e assim por diante. Desta forma, podemos formar uma nova variante dependente dos índices $m$ e $n$, que denotamos por $v_{m,n}$, e cujos termos são $v_{1,1} = u_{1,1};\ v_{1,2} = u_{1,1} + u_{1,2};\ v_{2,1} = u_{1,1} + u_{2,1} + u_{2,2};\ v_{2,2} = u_{1,1} + u_{1,2} + u_{2,1}; \ldots$ . Repare-se que $m$ e $n$ podem tomar todos os valores inteiros positivos, o que está de acordo com a definição de índices de uma variante.

No segundo exemplo, Méray considera a soma dos termos da variante $u_{p,q}$ para os quais a soma dos valores dos índices não ultrapassa um dado número $M$. A nova variante assim obtida é então considerada como dependendo de um único índice, o

[23] Em (Méray, 1887), pág. 342.

número $M$, sem que seja dada qualquer justificação para tal facto. À semelhança do exemplo anterior, obtemos, para $M = 2$ o termo $u_{1,1}$ da variante $u_{p,q}$; para $M = 3$, a soma $u_{1,1} + u_{1,2} + u_{2,1}$; para $M = 4$, $u_{1,1} + u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,3} + u_{2,2} + u_{3,1}$; etc. E se desde já poderíamos pensar ter obtido uma nova variante dependente do índice $M$, repare-se que ao valor $M = 1$ não corresponde nenhum termo da variante $u_{p,q}$, uma vez que não existem inteiros positivos $p$ e $q$ que verifiquem a condição $p + q = 1 = M$. Assim, o índice $M$ não pode assumir todos os valores inteiros positivos, pelo que, ao contrário do que é afirmado por Méray, não se obtém desta forma uma nova variante.

Um outro exemplo interessante é abordado por Méray nas obras de 1887 e 1894, e refere-se a variantes cujos índices não são explicitamente dados. É, tal como afirma, o caso de uma variante para a qual cada valor se calcula tomando uma dada função dos valores anteriores, apresentando o exemplo de uma

> "(...) variante definida pelos seus dois primeiros valores e por esta condição que cada um dos subsequentes seja igual à soma dos dois precedentes (...)"[24]

Relativamente à variante cujos sucessivos valores são $5, 7, 12, 19, 31, 50, 81, ...$, não especificamos o índice do qual depende. No entanto, podemos, tal como refere Méray,

> "(...) considerar cada um destes valores como ligado à sua posição $m$ na sucessão indefinida que todos formam e, por conseguinte, a variante como tendo $m$ por índice."[25]

Assim, a variante anterior poderia denotar-se por $v_m$, e ser definida do seguinte modo: $v_1 = 5$; $v_2 = 7$; e $v_{j+2} = v_j + v_{j+1}$, para todo o inteiro positivo $j$.

[24] Em (Méray, 1894), pág. 23.
[25] Em (Méray, 1887), pág. 343.

### 3.1.4 Propriedades das variantes

Através da formulação de um critério segundo o qual se possa afirmar que uma variante verifica uma dada propriedade, Méray introduziu inúmeros tipos de variantes fundamentais para a sua teoria dos números irracionais. Tal critério é apenas abordado nas obras de 1887 e 1894, e é desenvolvido à custa do conceito de uma variante *gozar de uma dada propriedade a partir de certos valores dos seus índices.* No entanto, as diferentes interpretações exigidas pelas exposições de cada uma destas obras irão comprovar mais uma vez a imprecisão com que Méray redigiu ao longo dos anos a sua teoria dos números irracionais.

Na obra de 1887, Méray afirma:

> "Dizemos que a variante $v_{m,n,...}$ goza de certa propriedade dada *a partir dos valores* $\mu, \nu, ...$ dos seus índices quando essa propriedade é verificada por $v_{\mu,\nu,...}$ e por todos os valores posteriores (...)"[26]

Ora, conforme exposto na secção 3.1.2 *Ordenação dos termos de uma variante*, os valores posteriores ao valor $v_{\mu,\nu,...}$ da variante são aqueles cuja soma dos índices é superior a $\mu + \nu + ...$ . Assim, por exemplo, uma variante $v_{m,n}$ de dois índices verifica uma determinada propriedade a partir dos valores 2 e 3 dos respectivos índices, se essa propriedade for válida para o termo $v_{2,3}$ e para todos aqueles cuja soma dos índices seja igual ou superior a 6. Os termos que cumprem tais condições são então:

$$v_{1,5}, v_{2,4}, v_{3,3}, v_{4,2}, v_{5,1}; \;\; v_{1,6}, v_{2,5}, v_{3,4}, v_{4,3}, v_{5,2}, v_{6,1}; \; ... \; .$$

A abordagem da obra de 1894 para definir este mesmo conceito é um pouco diferente[27]. É que, não tendo aí introduzido as terminologias de *valores anteriores* e *valores posteriores* a um dado termo da variante, Méray é forçado a explicitar quais os valores dos índices da variante para os quais a propriedade deve ser válida. Assim, uma variante $v_{m,n,...}$ irá gozar de uma determinada propriedade *a partir dos valores* $\mu, \nu, ...$ dos seus índices quando a propriedade em questão for válida para todas as combinações

[26] Em (Méray, 1887), pág. 343.
[27] Veja-se (Méray, 1894), pág. 23.

dos valores dos índices verificando simultaneamente as relações $m \geqq \mu$, $n \geqq \nu$, ... . Considerando novamente uma variante $v_{m,n,...}$ de dois índices, diremos agora que ela verifica determinada propriedade a partir dos valores 2 e 3 dos respectivos índices, se a mesma propriedade for válida para os termos

$$v_{2,3}, v_{2,4}, v_{2,5}, v_{2,6}, ...; \ v_{3,3}, v_{3,4}, v_{3,5}, v_{3,6}, ...; \ v_{4,3}, v_{4,4}, v_{4,5}, v_{4,6}, ...; \ ...$$

da variante. Mas se todos estes termos estão contemplados na primeira das interpretações deste conceito, relativa à obra de 1887, já o recíproco não será válido. De facto, os termos $v_{m,n}$ para os quais $m+n \geq 6$, sendo $m < 2$ $(m = 1)$ ou $n < 3$ $(n = 1, 2)$, isto é, os termos $v_{1,5}, v_{4,2}, v_{5,1}$; $v_{1,6}, v_{5,2}, v_{6,1}$; ..., não são incluídos nesta última interpretação. Assim, a interpretação feita na obra de 1894 exclui à partida muitos termos da variante, muito embora tal só aconteça quando a variante depende de mais do que um índice. Inclusivamente, é imediato verificar que para uma variante com apenas um índice, os dois modos de interpretar este conceito são perfeitamente análogos.

Por forma a introduzir diferentes tipos de variantes, Méray apresenta ainda nas obras de 1887 e 1894 um conceito que não difere muito deste que acabámos de apresentar, de uma variante verificar uma dada propriedade a partir de certos valores dos seus índices. Mas, apesar do enunciado desta nova definição ser essencialmente o mesmo nas duas obras[28], pelas razões expostas anteriormente, seriam necessárias obrigatoriamente duas interpretações para cada uma delas.

**Definição 3.1.2** Uma variante $v_{m,n,...}$ **acaba por gozar de uma dada propriedade** se existirem valores $\mu, \nu, ...$ dos índices, a partir dos quais esta propriedade não pára de se verificar.

Certamente que a existência de diferentes modos de interpretar este conceito assumiria proporções verdadeiramente grandes, não fosse o matemático cometer mais uma contradição, que acabará por os tornar equivalentes. Esta questão será abordada com mais detalhe na secção 3.2.2 *Conceito de uma variante acabar por gozar de determinada propriedade*.

[28]Vejam-se (Méray, 1887), pág. 343 e (Méray, 1894), pág. 24.

### 3.1.5 Tipos de variantes

A introdução dos diferentes tipos de variantes *finita*, de *pequenez limitada*, *infinitamente pequena* e *infinita* é feita no sentido de simplificar toda a teoria das variantes convergentes, e, portanto, também a teoria dos números irracionais. Ao contrário do que faria nas obras seguintes, Méray não definiu na obra de 1869 estes tipos de variantes[29]. Desta forma, a exposição da teoria das variantes convergentes que podemos aí encontrar será completamente diferente daquela contida nas obras posteriores. Será pelo facto de conterem uma teoria dos números irracionais mais completa, que adoptaremos como definições destes conceitos aquelas contidas nas obras de 1887 e 1894. Em todo o caso, veremos também como este assunto foi abordado na obra de 1872.

**Definição 3.1.3** "Uma variante $v_{m,n,\ldots}$ é *finita* se existe alguma quantidade positiva invariável $L$ tal que acabamos por ter numericamente [isto é, em valor absoluto] $v_{m,n,\ldots} < L$."[30]

**Definição 3.1.4** Uma variante $v_{m,n,\ldots}$ diz-se de **pequenez limitada**[31] se existir uma quantidade positiva $l$ de tal forma que, em valor absoluto, a desigualdade $v_{m,n,\ldots} > l$ acaba por se verificar.

A respeito do próximo conceito, o de *quantidade infinitamente pequena*, Méray reforça que não se trata de uma *quantidade* propriamente dita, no sentido de ser invariável, mas que, pelo contrário, *varia* essencialmente[32]. É portanto estranho que, tendo reservado a terminologia de *quantidade* para todo o número racional[33], Méray utilize também este termo na denominação de um tipo de variante. Designando-a simplesmente por *variante infinitamente pequena* acabaria por manter o mesmo critério

[29] Vejam-se o excerto desta obra citado em (Robinson, 1991), pág. 1698, e a análise feita por Pierre Dugac à teoria dos números irracionais de Méray em (Dugac, 1970), pág. 339 e (Dieudonné, 1978), pág. 368.

[30] Em (Méray, 1894), pág. 24. Note-se que a classificação da quantidade positiva $L$ como sendo *invariável* revela-se desnecessária, já que Méray havia estabelecido que uma *quantidade* ou *número* era um qualquer número inteiro ou fraccionário, positivo ou negativo.

[31] "*de petitesse limitée*", segundo a terminologia original — veja-se (Méray, 1894), pág. 24.

[32] Veja-se (Méray, 1887), pág. 344.

[33] Veja-se página 138.

na denominação dos diferentes tipos de variantes, evitando ainda alguma confusão que advém do significado por si atribuído ao termo *quantidade* ou *número*. Em todo o caso, podemos encontrar as duas designações *quantidade* infinitamente pequena e *variante* infinitamente pequena nas várias exposições desta teoria das variantes convergentes.

**Definição 3.1.5** "Se, por mais pequena que seja a quantidade positiva $\varepsilon$ que possamos tomar, acabarmos por ter sempre numericamente $v_{m,n,...} < \varepsilon$, a variante $v_{m,n,...}$ designar-se-á uma *quantidade infinitamente pequena*."[34]

O conceito de variante *infinita* é abordado de modos diferentes nas duas obras de 1887 e 1894. Na primeira destas exposições, tal definição é enunciada da mesma forma do que para os restantes tipos de variantes, explicitando a propriedade que uma variante infinita deve verificar.

**Definição 3.1.6** "Se, por maior que seja a quantidade positiva $\varepsilon$, acabarmos por ter numericamente $v_{m,n,...} > \varepsilon$, a variante $v_{m,n,...}$ diz-se *infinita*."[35]

Já na obra de 1894, o matemático define uma variante infinita como sendo um caso particular de variantes *divergentes*. Assim, quando na secção 3.2.6 definirmos o conceito de variante *divergente*, apresentaremos essa formulação.

Vejamos agora de que forma as duas interpretações feitas nas obras de 1887 e 1894 do conceito de *uma variante acabar por gozar de determinada propriedade* conduziriam a dois modos diferentes de considerar os vários tipos de variantes definidos anteriormente. Analisemos, por exemplo, o conceito de variante infinitamente pequena. Recorrendo a uma notação simbólica actual, a interpretação feita em 1887 pode escrever-se do seguinte modo:

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \; \exists\, \mu, \nu, ... : \Big[ |v_{\mu,\nu,...}| < \varepsilon \wedge \forall\, m, n, ... \; (m+n+... > \mu+\nu+... \; \Rightarrow |v_{m,n,...}| < \varepsilon) \Big],$$

enquanto que, segundo a obra de 1894, devemos escrever:

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \; \exists\, \mu, \nu, ... : \Big[ \forall\, m, n, ... \; (m \geq \mu, n \geq \nu, ... \; \Rightarrow |v_{m,n,...}| < \varepsilon) \Big].$$

[34] Em (Méray, 1894), pág. 24.
[35] Em (Méray, 1887), pág. 343.

Em todo o caso, na secção 3.2.2 *Conceito de uma variante acabar por gozar de determinada propriedade*, veremos que também na obra de 1887 Méray interpretou este e os outros tipos de variantes de uma forma equivalente à interpretação relativa à última obra de 1894.

Resta-nos agora ver o modo como são introduzidos estes diferentes tipos de variantes na obra de 1872. Nesta obra apenas foram definidos os conceitos de variante finita, infinitamente pequena e variante infinita, se bem que de um modo diferente daquele efectuado nas restantes obras. E será por esta razão que a teoria das variantes convergentes será abordada de um outro modo, aspecto que iremos comentando ao longo desta apresentação. Para definir tais conceitos, é inicialmente esclarecido o que significa uma variante $v_{m,n,...}$ *tender* ou *convergir* para um *limite*, ou seja, para um número racional.

> "Se existir um número $V$ tal que podemos tomar $m, n, ...$ tão grandes que a diferença $V - v_{m,n,...}$ seja, em valor absoluto, inferior a uma quantidade tão pequena quanto se queira, para estes valores dos índices e todos os valores maiores, dizemos que a variante $v_{m,n,...}$ *tende* ou *converge* para o *limite* $V$. Quando $V = 0$, a variante $v_{m,n,...}$ diz-se uma quantidade *infinitamente pequena*(...)"[36]

Uma *quantidade infinitamente pequena* será, portanto, uma variante que converge para o limite zero, sendo os outros tipos de variantes definidos como um caso especial de variantes que não possuem limite.

> "Entre as variantes desprovidas de limites, devemos distinguir aquelas cujo valor absoluto pode tornar-se e permanecer maior do que todo o número dado; designamo-las por quantidades *infinitas*; e aquelas onde ao contrário o valor se mantém numericamente inferior a um certo número fixo, e que chamamos *finitas*."[37]

[36]Em (Méray, 1872), pág. 1. Veremos mais adiante que, ao invés da obra de 1872, nas obras de 1887 e 1894, o conceito de *limite* de uma variante será definido à custa de variantes infinitamente pequenas.

[37]Em (Méray, 1872), pág. 2.

### 3.1.6 Funções de diferentes tipos de variantes

Um dos pontos mais contraditórios da teoria das variantes de Méray é abordado nesta secção, e refere-se às operações aritméticas definidas entre os vários tipos de variantes. Apesar de não termos analisado a obra original de Méray de 1869, será natural que este assunto não tenha sido aí abordado, já que também não foram aí definidos os diferentes tipos de variantes. E na obra de 1872 podemos encontrar apenas alguns dos resultados que iremos enunciar[38]. Assim, esta secção será maioritariamente dedicada às abordagens efectuadas nas últimas obras de 1887 e 1894.

Sendo uma variante uma função de múltiplas variáveis inteiras, é óbvio que para determinar a soma, a diferença, o produto ou o quociente entre variantes seja necessário que os seus "domínios" tenham a mesma "dimensão", isto é, que dependam do mesmo número de índices. O estranho é que Méray, no resultado que se apresenta de seguida, reforça exactamente o facto de as diferentes variantes poderem ter um número distinto de índices. Será de notar, no entanto, que em nenhuma das obras onde foi enunciado, as obras de 1887 e 1894, podemos encontrar uma prova deste resultado.

**Proposição 3.1.1** "Uma dada função $f(u_m, v_{n,p}, w_{m,r,\ldots}, \ldots)$ de variantes tendo ou não índices em comum, é evidentemente uma nova variante tendo por índices aqueles inteiros $m; n, p; m, r; \ldots$ que são distintos uns dos outros."[39]

Ora, o que parece *evidente* para o matemático, será incompreensível à luz da teoria das funções. Primeiro, não se compreende como poderemos "operar" variantes com um número distinto de índices, e depois por que razão a função resultante depende dos índices que são distintos uns dos outros, não dependendo igualmente daqueles que lhes são comuns. Este aspecto vem reforçar o que já havíamos comentado acerca do gosto muito particular que Méray possui pelas generalidades. Será pois por tentar tornar bastante abrangentes os seus resultados acerca de variantes que tornará imprecisa a sua teoria dos números irracionais. O que podemos daqui depreender é que nesta altura a teoria dos conjuntos ainda não estava suficientemente divulgada na comunidade

---

[38]Veja-se (Méray, 1872), pág. 2.

[39]Em (Méray, 1894), pág. 24.

científica.

As proposições que se seguem, as quais Méray não demonstrou em nenhuma das suas obras[40], acabam por ser apenas casos particulares da anterior e, portanto, afectadas da mesma carga de incompreensão. No sentido de as tornar, de alguma forma, significativas, devemos entender que apenas é possível determinar uma função de variantes dependentes do mesmo número de índices, se bem que, à luz da teoria das variantes de Méray, esta seja uma restrição da tão abrangente proposição 3.1.1.

**Proposição 3.1.2** Uma função inteira[41] de variantes finitas e o quociente de uma variante finita por uma de pequenez limitada, são variantes finitas.

**Proposição 3.1.3** São infinitamente pequenas:
*a*) Uma função inteira de variantes finitas e infinitamente pequenas, se esta puder ser escrita na forma de um polinómio, onde cada termo contém como factor pelo menos uma das variantes infinitamente pequenas dadas.
*b*) O quociente de uma variante infinitamente pequena por uma variante de pequenez limitada.

[40]Vejam-se (Méray, 1887), pág. 344 e (Méray, 1894), pág. 24.

[41]Para Méray "(...) uma função é dita *inteira*, quando os cálculos a efectuar sobre as variáveis independentes, para obter o seu valor, são redutíveis a qualquer operação inteira." — em (Méray, 1894), pág. 20. Ainda na mesma página, pode ler-se que as operações consideradas *inteiras* são as operações elementares, isto é, a adição, a subtracção e a multiplicação (compreendendo a elevação a potências de expoente inteiro positivo).

## 3.2 Variantes convergentes

### 3.2.1 Definição de variante convergente

A noção de *variante convergente*, central na teoria dos números irracionais de Méray, é enunciada de diferentes modos nas várias obras que escreveu. Nas obras de 1869, 1872 e 1887 opta por introduzir inicialmente o conceito de *limite* de uma variante, sendo à custa dele que define uma variante *convergente*. Entre estas três exposições existe ainda a diferença de apenas nas duas últimas ter feito uso do conceito de *variante infinitamente pequena*. Já na obra de 1869 não o pôde fazer uma vez que não havia aí definido os diferentes tipos de variantes *finita*, *infinita*, *infinitamente pequena* e *de pequenez limitada*. Na última obra, a de 1894, a abordagem utilizada é um pouco diferente. Aí, o matemático enuncia em primeiro lugar o conceito de variante convergente, muito embora adopte posteriormente a definição de limite de uma variante das obras precedentes. Desta forma, nas três primeiras obras toda a teoria das variantes convergentes é desenvolvida à custa da teoria das variantes dotadas de limite, ao contrário do que acontece na última exposição de 1894.

Nesta secção adoptaremos como definição do conceito de *variante convergente* exactamente aquela que se pode encontrar na última obra de 1894. Assim, e uma vez que esta opção condiciona a apresentação da teoria dos números irracionais elaborada por Méray, entenda-se que daqui em diante será seguida a abordagem de tal obra. Em todo o caso, serão obviamente considerados os modos de exposição das outras obras, para que possamos entender a evolução desta teoria dos números irracionais.

***<u>Obra de 1869</u>***

Admitindo, tal como já foi notado, que a obra de 1869 se refere somente a variantes de um índice, podemos afirmar que a definição de *limite* de uma variante aí contida equivale à definição de limite de sucessões de números racionais.

> "Seja $v_n$ o valor de $v$ de ordem $n$: se à medida que $n$ aumenta para infinito existe um número $V$ tal que começando com um adequado valor de $n$, $V - v_n$ permanece [em valor absoluto] inferior a qualquer quantidade tão pequena quanto

> se possa supor, dizemos que $V$ é o limite de $v$ (...)"[42]

Por forma a relacionar os dois conceitos de *limite* e *convergência* de uma variante, Méray observa que, no caso de a variante $v_n$ admitir um limite $V$, $v_{n+p} - v_n$ tem zero por limite, quaisquer que sejam as leis de variação simultâneas impostas a $n$ e $p$.

A definição de *variante convergente* apresentada nesta obra, cujo enunciado citamos de seguida, poderá considerar-se como sendo equivalente à definição de uma *sucessão de Cauchy*. Se não existir um número $V$ para o qual $V - v_n$ permaneça em valor absoluto inferior a qualquer quantidade tão pequena quanto se queira, Méray afirma que

> "(...) já não é legítimo, em termos analíticos, afirmar que $v$ tem um limite; mas se, neste caso, a diferença $v_{n+p} - v_n$ ainda convergir para zero então a natureza de $v$ mostra uma extraordinária semelhança com aquela das variáveis que realmente possuem limites. Necessitamos de um termo especial por forma a expressar a notável diferenciação à qual nos referimos: direi que a variável progressiva é *convergente*, caso seja possível ou não atribuir-lhe um limite numérico."[43]

Podemos antever nestas palavras de Méray a estrutura da elaboração do conceito de número irracional. De acordo com a terminologia que se vulgarizou no século XX, uma sucessão que possua limite diz-se *convergente* para o seu limite; toda a sucessão que possua limite é uma *sucessão de Cauchy*; mas apenas podemos afirmar que toda a sucessão de Cauchy admite um limite se estivermos a considerar um espaço métrico completo, por exemplo, o conjunto dos números reais[44]. Tendo em conta que uma variante convergente de Méray (que dependa de apenas um índice) é uma sucessão de Cauchy, as ideias expostas pelo matemático estarão de acordo com estas que acabámos de referir: toda a variante que possua um limite é uma variante convergente; mas nem toda a variante convergente possui um limite. E será através deste último tipo de

[42]Em (Méray, 1869), pág. 284 — citado em (Robinson, 1991), pág. 1698. O termo *ordem* traduz a palavra inglesa *rank*; supomos que o original francês seja *rang*.

[43]Em (Méray, 1869), pág. 284 — citado em (Robinson, 1991), pág. 1698.

[44]Veja-se, por exemplo, (Lima, 1992), págs. 77–99.

variantes que Méray definirá o conceito de número *incomensurável*. Estendendo então o conjunto dos números, será mediante certas convenções que poderá finalmente afirmar que toda a variante convergente admite como limite algum número (comensurável ou incomensurável).

***Obra de 1872***

Como já foi citado na secção 3.1.5 *Tipos de variantes*, Méray começa por dar a seguinte definição de limite:

> "Se existir um número $V$ tal que podemos tomar $m, n, ...$ tão grandes para que a diferença $V - v_{m,n,...}$ seja, em valor absoluto, inferior a uma quantidade tão pequena quanto se queira, para esses valores dos índices e todos os valores maiores, dizemos que a variante $v_{m,n,...}$ *tende* ou *converge* para o *limite* $V$."[45]

Segue-se a definição de uma *quantidade infinitamente pequena*, como caso particular da anterior quando $V = 0$ sendo finalmente, à custa destes dois conceitos, enunciada a definição de variante convergente:

> "Chamamos *convergente* a toda a variante $v_{m,n,...}$ para a qual a diferença
>
> $$v_{m+p,n+q,...} - v_{m,n,...}$$
>
> seja, quaisquer que sejam $p, q, ...$, inferior a uma variante infinitamente pequena, de índices $m, n, ...$; ou ainda, mais simplesmente, tal que esta diferença tenda para zero para $m, n, ...$ infinitos quaisquer que sejam $p, q, ...$ ."[46]

***Obra de 1887***

Será só a partir da obra de 1887 que é introduzida uma notação simbólica para o limite de uma variante. Também se nota aí que Méray já não faz uso da expressão a *variante converge para o limite* $V$, afirmando apenas que ela *tende para o limite*

[45] Em (Méray, 1872), pág. 1. Repare-se que este enunciado já contempla o caso de variantes dependendo de mais do que um índice.

[46] Em (Méray, 1872), pág. 2.

$V$. Esta opção será, eventualmente, tida em conta para evitar alguma confusão que pudesse advir da posterior designação de *variante convergente*.

> "Sendo dada uma variante $v_{m,n,...}$, se existir uma quantidade (invariável) $V$, tal que a diferença $V - v_{m,n,...}$ seja uma variante infinitamente pequena, exprimiremos este facto dizendo que $v_{m,n,...}$ *tende* para $V$ ou ainda que tem $V$ por *limite*, e escreveremos
>
> $$\lim v_{m,n,...} = V\ ."^{47}$$

Repare-se que, enquanto que na obra de 1872 uma *variante infinitamente pequena* era definida à custa do conceito de *limite* de uma variante, nesta obra de 1887 (e na seguinte de 1894) acontece exactamente o contrário. Esta diferença de abordagens justifica-se pelo facto de, conforme exposto na secção 3.1.5 *Tipos de variantes*, nas duas últimas obras o conceito de *variante infinitamente pequena* ser definido à custa daquele relativo a uma variante *acabar por gozar de uma dada propriedade* (definição 3.1.2, página 146).

A justificação para que Méray tenha considerado uma classe de variantes ainda maior do que aquela que contém as variantes dotadas de limite, poderá ser entendida na citação que se segue. Tais variantes, designa-as por *convergentes*.

> "Quando uma dada variante $v_{m,n,...}$ tende para um certo limite $V$, a diferença variável de dois dos seus valores, cujas ordens aumentam indefinidamente e independentemente uma da outra na sucessão geral dos valores dessa variante, é uma quantidade infinitamente pequena, ou ainda, se quisermos empregar uma linguagem mais precisa, a diferença
>
> $$v_{m'',n'',...} - v_{m',n',...}$$
>
> é uma variante de índices $m', n', ..., m'', n'', ...$ que tende para zero (...)
>
> Mas poderá também ser assim para $v_{m,n,...}$, *mesmo que não exista o número para o qual tenda essa variante.* Exprimirei este facto em todos os casos, dizendo que a variante considerada é *convergente*, expressão esta que, entenda-se, deve ser considerada como não implicando em algum caso a existência de um limite."[48]

[47]Em (Méray, 1887), pág. 344.
[48]Em (Méray, 1887), pág. 347.

Das seguintes palavras de Méray, podemos perceber a razão pela qual nesta obra a teoria das variantes convergentes é desenvolvida à custa da teoria das variantes dotadas de limite.

> "As variantes desta espécie [convergentes], das quais nos iremos ocupar, encontram-se a cada instante e, de uma maneira geral, podemos dizer que *elas gozam de todas aquelas propriedades das variantes dotadas de limites, em cujos enunciados esses limites não intervêm.*"[49]

***Obra de 1894***

Tal como já foi referido, na obra de 1894, Méray não utilizou o conceito de limite de uma variante para definir uma variante convergente. Assim, e à semelhança do que fez na obra de 1887, refere-se inicialmente a uma qualquer diferença $v_{m'',n'',\ldots} - v_{m',n',\ldots}$, entre valores de uma variante.

> "Designando por
>
> $$(1) \qquad \begin{cases} m', & n', & \ldots \\ m'', & n'', & \ldots \end{cases}$$
>
> dois sistemas de valores arbitrários dos índices de uma variante dada $v_{m,n,\ldots}$, a diferença
>
> $$(2) \qquad v_{m'',n'',\ldots} - v_{m',n',\ldots}$$
>
> é uma nova variante (37) tendo todos os números (1) por índices."[50]

A referência "(37)" na citação anterior diz respeito à proposição 3.1.1, página 150, relativa a funções de variantes, e a sua aplicação justifica o facto da diferença $v_{m'',n'',\ldots} - v_{m',n',\ldots}$ ser uma variante cujos índices são os valores indicados em (1). Mas, segundo o que postula essa proposição, apenas poderiam ser considerados como índices da nova variante os valores em (1) que são distintos uns dos outros, o que, por hipótese não é garantido. Desta forma, confrontamo-nos mais uma vez com a imprecisão de tal proposição, tão genérica e ambígua. Repare-se ainda que a crítica feita na secção

[49] Em (Méray, 1887), pág. 347.
[50] Em (Méray, 1894), pág. 24.

3.1.6 *Funções de variantes* à mesma proposição 3.1.1, segundo a qual Méray calculava funções de variantes com um número diferente de índices, não se aplica neste caso. Isto porque, sendo $v_{m'',n'',...}$ e $v_{m',n',...}$ termos da mesma variante $v_{m,n,...}$, a diferença $v_{m'',n'',...} - v_{m',n',...}$ é pois uma função de variantes com o mesmo número de índices.

A partir desta observação, Méray introduz a definição de variante convergente, cujo enunciado adoptaremos então como sendo exactamente a definição deste conceito.

**Definição 3.2.1** Uma variante $v_{m,n,...}$ diz-se **convergente** se, para conjuntos de valores arbitrários $m', n', ...; m'', n'', ...$ dos índices da variante, a diferença $v_{m'',n'',...} - v_{m',n',...}$ for infinitamente pequena.

### 3.2.2 Conceito de uma variante *acabar por gozar de determinada propriedade*

Estamos agora em condições de esclarecer a questão da existência de duas definições diferentes do conceito de uma variante *gozar de uma dada propriedade a partir de certos valores dos seus índices*, definições estas relativas às obras de 1887 e 1894. Este assunto foi já abordado nas secções 3.1.4 *Propriedades de variantes* e 3.1.5 *Tipos de variantes*, sendo de recordar que uma das suas consequências era a de existirem duas interpretações possíveis dos vários tipos de variantes definidos na secção 3.1.5. Assim, e conforme foi aí referido, o conceito de *variante infinitamente pequena* podia, segundo a obra de 1887, interpretar-se da seguinte forma:

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \;\exists\, \mu, \nu, ... : \Big[ |v_{\mu,\nu,...}| < \varepsilon \wedge \forall\, m, n, ... \, (m{+}n{+}... > \mu{+}\nu{+}... \;\Rightarrow |v_{m,n,...}| < \varepsilon) \Big],$$

enquanto que na obra de 1894 seria interpretado através da expressão:

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \;\exists\, \mu, \nu, ... : \Big[ \forall\, m, n, \ldots \; (m \geq \mu, n \geq \nu, ... \;\Rightarrow |v_{m,n,...}| < \varepsilon) \Big].$$

Ora, uma vez que nestas duas obras o conceito de variante convergente é definido à custa de uma variante infinitamente pequena[51], existiriam também duas formas de expressar o facto de uma variante ser convergente. Segundo a definição contida na obra de 1887, e utilizando uma notação simbólica actual, uma variante $v_{m,n,...}$ diz-se convergente se:

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \;\exists\, \mu', \nu', ...; \mu'', \nu'', ... : \Big[ |v_{\mu'',\nu'',...} - v_{\mu',\nu',...}| < \varepsilon \;\wedge\; \forall\, m', n', ...; m'', n'', ...$$

$$(m' + n' + ... + m'' + n'' + ... > \mu' + \nu' + ... + \mu'' + \nu'' + ... \;\Rightarrow |v_{m'',n'',...} - v_{m',n',...}| < \varepsilon) \Big],$$

sendo, de acordo com a obra de 1894, o mesmo conceito equivalente à expressão:

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \;\exists\, \mu', \nu', ...; \mu'', \nu'', ... : \Big[ \forall\, m', n', ...; m'', n'', ...$$

$$(m' \geq \mu', n' \geq \nu', ...; m'' \geq \mu'', n'' \geq \nu'', ... \;\Rightarrow |v_{m'',n'',...} - v_{m',n',...}| < \varepsilon) \Big].$$

[51] Veja-se a secção anterior 3.2.1 *Definição do conceito de variante convergente.*

Em todo o caso, quando provava um determinado resultado[52] na obra de 1887, Méray interpretou o conceito de variante convergente do mesmo modo que estabeleceu na posterior obra de 1894. Vejamos as transcrições que nos permitem concluir tal facto. O resultado que se propõe provar é o seguinte:

> "Se uma variante $v_{m,n,...}$ é convergente, ela é necessariamente finita. Se além disso, ela não é infinitamente pequena, ela é de pequenez limitada e acaba por conservar um sinal constante."[53]

A falha de Méray pode encontrar-se logo no início da respectiva prova, quando explica o que significa a convergência de uma variante:

> "Por hipótese, existem inteiros $\mu', \nu', ..., \mu'', \nu'', ...$, tais que chamando $\varepsilon$ uma quantidade positiva escolhida arbitrariamente, temos numericamente
>
> $$v_{m'',n'',...} - v_{m',n',...} < \varepsilon,$$
>
> para $m' \geqq \mu', n' \geqq \nu', ...; m'' \geqq \mu'', n'' \geqq \nu'', ...$ (...)"[54]

Repare-se ainda que, quando comparada com a definição de variante convergente contida na obra de 1894, até mesmo esta citação contém um erro: a troca injustificável da ordem dos quantificadores relativos à quantidade $\varepsilon$ e aos valores inteiros $\mu', \nu', ..., \mu'', \nu'', ...$ dos índices da variante. Podemos, no entanto, considerar esta troca como uma pequena confusão de Méray, já que, a menos da interpretação do conceito de uma variante *gozar de determinada propriedade a partir de certos valores dos seus índices*, as duas definições de variante *infinitamente pequena* das obras de 1887 e 1894 são equivalentes.

Tendo em conta todos os aspectos expostos anteriormente, não restam dúvidas de que deveremos interpretar o conceito de *variante convergente* segundo o exposto na obra de 1894.

[52]Que será considerado na secção 3.2.5 *Alguns resultados de variantes convergentes* (proposição 3.2.5, página 167).

[53]Em (Méray, 1887), pág. 349.

[54]Em (Méray, 1887), pág. 349.

Torna-se oportuno apresentar agora, numa notação simbólica actual, as interpretações dos conceitos de variante *finita*, *de pequenez limitada*, *infinitamente pequena* e *infinita*, tendo em conta que já não restam dúvidas de como interpretar o conceito de uma variante *gozar de determinada propriedade a partir de certos valores dos seus índices*. Assim, uma variante $v_{m,n,...}$ diz-se:

*finita* se:

$$\exists\ L \in \mathbb{Q}^+\ \exists\ \mu, \nu, ... : \forall\ m, n, ...\ (m \geq \mu, n \geq \nu, ...\ \Rightarrow |v_{m,n,...}| < L)$$

*de pequenez limitada* se:

$$\exists\ l \in \mathbb{Q}^+\ \exists\ \mu, \nu, ... : \forall\ m, n, ...\ (m \geq \mu, n \geq \nu, ...\ \Rightarrow |v_{m,n,...}| > l)$$

*infinitamente pequena* se:

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{Q}^+\ \exists\ \mu, \nu, ... : \forall\ m, n, ...\ (m \geq \mu, n \geq \nu, ...\ \Rightarrow |v_{m,n,...}| < \varepsilon)$$

*infinita* se:

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{Q}^+\ \exists\ \mu, \nu, ... : \forall\ m, n, ...\ (m \geq \mu, n \geq \nu, ...\ \Rightarrow |v_{m,n,...}| > \varepsilon)\ .$$

### 3.2.3 Exemplos de variantes convergentes

São apenas dois os exemplos de variantes convergentes que Méray apresenta nas diferentes obras onde expõe a sua teoria dos números irracionais. O primeiro refere-se a uma variante infinitamente pequena, cuja verificação é bastante simples, e o segundo diz respeito a variantes finitas cumprindo determinada condição. Nas três obras onde apresentou estes exemplos, as de 1872, 1887 e 1894, Méray chegou mesmo a apresentar o último destes exemplos como uma proposição, muito embora a tenha provado apenas nas duas últimas obras[55]. Na exposição de 1872 afirma curiosamente "Verificamo-lo sem dificuldade."[56]. Vejamos então qual o seu enunciado.

**Proposição 3.2.1** Uma variante finita que, algebricamente[57], acabe por não poder decrescer ou por não poder crescer, é convergente.

À semelhança do que acontece na prova de outros resultados da teoria das variantes, também aqui Méray considerou apenas a demonstração desta proposição para variantes $v_m$ dependentes de um índice. E, tal como já notámos na secção 3.1.2 *Ordenação dos termos de uma variante*, esta abordagem parece ser justificável pelo facto de não ser nada óbvio como interpretar o crescimento de uma variante, caso ela dependa de mais do que um índice. Ora, como também já referimos, este procedimento irá retirar alguma da credibilidade à teoria das variantes de Méray. Isto porque, pretendendo esta teoria ser mais abrangente do que a teoria das sucessões, o matemático não terá sido capaz de provar um maior alcance para alguns resultados envolvendo variantes.

***Demonstração***: Façamos, à semelhança da abordagem seguida por Méray, uma prova por redução ao absurdo, e consideremos apenas o caso da variante $v_m$ acabar por não poder decrescer[58].

---

[55] Vejam-se (Méray, 1887), pág. 347 e (Méray, 1894), pág. 26.

[56] Em (Méray, 1872), pág. 3.

[57] Isto é, tendo em conta o seu sinal.

[58] O caso em que $v_m$ acaba por não poder crescer prova-se de uma forma perfeitamente análoga.

Suponhamos então que $v_m$ não é convergente, o que, numa notação simbólica actual, significa que:

$$\exists\, \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \ \forall\, \mu', \mu'' \ \exists\, m', m'' : (m' \geq \mu', m'' \geq \mu'' \ \wedge \ |v_{m''} - v_{m'}| \geq \varepsilon). \tag{3.1}$$

Méray estabelece então a existência de uma quantidade positiva $\alpha$, de uma primeira sucessão crescente ilimitada de inteiros

$$\mu'_1, \mu'_2, ..., \mu'_p, ...,$$

e de uma segunda sucessão de inteiros

$$\mu''_1, \mu''_2, ..., \mu''_p, ...,$$

respectivamente superiores aos precedentes, de tal forma que, por $v_m$ acabar por não poder decrescer, as seguintes desigualdades são válidas[59]

$$v_{\mu''_1} - v_{\mu'_1} > \alpha, v_{\mu''_2} - v_{\mu'_2} > \alpha, ..., v_{\mu''_p} - v_{\mu'_p} > \alpha\ . \tag{3.2}$$

Apesar de não o justificar, Méray afirma ainda que podemos supor $\mu'_p \geq \mu''_{p-1}$, para qualquer $p$. Desta forma, a sucessão de índices

$$\mu'_1, \mu''_1, \mu'_2, \mu''_2, ..., \mu'_p, \mu''_p, ...$$

obtida não será decrescente. Mas vejamos como poderemos obter tal sucessão de números.

Aplicando (3.1) ao caso em que $\mu' = \mu'' = 1$, obtemos $m', m''$ tais que $|v_{m''} - v_{m'}| \geq \alpha$; podemos chamar-lhes $\mu'_1$ e $\mu''_1$, com $\mu'_1 \leq \mu''_1$. Como a variante não decresce, será $v_{\mu''_1} - v_{\mu'_1} \geq \alpha$, daí que $v_{\mu''_1} \neq v_{\mu'_1}$ e, portanto $\mu''_1 \neq \mu'_1$. Logo, podemos mesmo garantir que $\mu'_1 < \mu''_1$. Se aplicarmos agora (3.1) ao caso em que $\mu' = \mu'' = 1 + \mu''_1$, obtemos $m', m''$, a que podemos chamar $\mu'_2$ e $\mu''_2$, com $\mu'_2 \leq \mu''_2$, de tal modo que teremos:

$$\mu'_1 < \mu''_1 < \mu'_2 \leq \mu''_2 \quad \text{e} \quad |v_{\mu''_2} - v_{\mu'_2}| \geq \alpha.$$

59 Tal como refere Méray, pelo facto de $v_m$ acabar por não poder decrescer, tais desigualdades são válidas quer numericamente, quer algebricamente — veja-se (Méray, 1887), pág. 347.

Como $\mu_2' \neq \mu_2''$ e a variante não decresce, temos mesmo:

$$\mu_1' < \mu_1'' < \mu_2' < \mu_2'' \qquad \text{e} \qquad v_{\mu_2''} - v_{\mu_2'} \geq \alpha.$$

Se já tivermos obtido

$$\mu_1' < \mu_1'' < \mu_2' \leq \mu_2'' < ... < \mu_p' < \mu_p'',$$

bastará aplicar (3.1) ao caso em que $\mu' = \mu'' = 1 + \mu_p''$ para obter $m', m''$, a que poderemos chamar $\mu_{p+1}', \mu_{p+1}''$, com $\mu_{p+1}' \leq \mu_{p+1}''$. $m$ e $m'$ serão ambos superiores a $\mu_p''$ e de tal modo que $|v_{\mu_{p+1}''} - v_{\mu_{p+1}'}| \geq \alpha$. Novamente por se ter necessariamente $\mu_{p+1}' \neq \mu_{p+1}''$ e por a variante não decrescer, teremos:

$$\mu_1' < \mu_1'' < \mu_2' \leq \mu_2'' < ... < \mu_p' < \mu_p'' < \mu_{p+1}' < \mu_{p+1}'' \qquad \text{e} \qquad v_{\mu_{p+1}''} - v_{\mu_{p+1}'} \geq \alpha.$$

Deste modo, as duas sucessões de índices são construídas na ordenação pretendida.

Méray prossegue a prova, afirmando que, pelo facto da sucessão de índices

$$\mu_1', \mu_1'', \mu_2', \mu_2'', ..., \mu_p', \mu_p'', ...$$

obtida não ser decrescente, e por a variante $v_m$ acabar por não poder decrescer, são válidas as $(p-1)$ desigualdades seguintes:

$$v_{\mu_2'} - v_{\mu_1''} \geq 0, v_{\mu_3'} - v_{\mu_2''} \geq 0, ..., v_{\mu_p'} - v_{\mu_{p-1}''} \geq 0$$

Adicionando membro a membro estas desigualdades com as primeiras $p$ desigualdades (3.2), página 162, obtém-se

$$v_{\mu_p''} > v_{\mu_1'} + p\alpha.$$

Tomando $p$, e consequentemente $m = \mu_p''$, tão grandes quanto se queira, $v_m$ irá ultrapassar toda a quantidade dada. Portanto, $v_m$ não será uma variante finita, o que é, por hipótese, um absurdo.

■

### 3.2.4 Variantes equivalentes

O conceito que se segue, de variantes *equivalentes*, será bastante importante na interpretação de um número irracional de Méray. Veremos, inclusivamente, que é possível relacionar um número comensurável ou incomensurável de Méray com uma determinada classe de equivalência definida no conjunto das variantes convergentes. Em todo o caso, mais uma vez iremos constatar que o carácter impreciso com que escreve a sua teoria dos números irracionais irá tornar pouco clara esta definição, bem como todos os resultados que com ela estão relacionados.

**Definição 3.2.2** Duas variantes convergentes, tendo ou não índices em comum, dizem--se **equivalentes** se a sua diferença, considerada como variante dependente dos seus índices distintos, é infinitamente pequena.

Ora, nesta definição que é apresentada nas obras de 1887 e 1894, não é referido se as variantes têm ou não de depender do mesmo número de índices[60]. No entanto, nos mesmos enunciados, podemos constatar que Méray afirma ter utilizado a proposição 3.1.1, página 150. Tal como já foi discutido na secção 3.1.6 *Funções de diferentes tipos de variantes*, o matemático permite que se determinem funções de variantes com um número distinto de índices, donde se pressupõe que, no seu entender, duas variantes deste tipo possam ser equivalentes. Mas, por forma a tornar claros os resultados que se seguem, devemos, à semelhança do que observámos na secção 3.1.6, entender duas variantes equivalentes como dependendo do mesmo número de índices.

Da anterior definição de *variantes equivalentes* e da proposição 3.1.3, página 151, decorrerá, de imediato, o resultado que se segue.

**Proposição 3.2.2** Duas variantes equivalentes a uma terceira são também equivalentes entre si.

É igualmente imediato deduzir que esta relação de "equivalência" entre duas variantes convergentes goza da propriedade transitiva.

[60]Vejam-se (Méray, 1887), pág. 348 e (Méray, 1894), pág. 26.

Uma vez que na obra de 1894, Méray apenas demonstra a proposição que se segue para o caso de variantes dependentes de um índice[61], o enunciado e respectiva prova seguintes estão de acordo com a obra de 1887.

**Proposição 3.2.3** "Sendo $v_{m,n,...}$ uma variante convergente, se atribuirmos aos seus índices uma sucessão indefinida de sistemas de valores particulares

$$(m_1, n_1, ...), (m_2, n_2, ...), ..., (m_k, n_k, ...), ...,$$

escolhidos arbitrariamente com a única condição de que os termos gerais das sucessões

$$\begin{array}{ccccc} m_1, & m_2, & ..., & m_k, & ... \\ n_1, & n_2, & ..., & n_k, & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{array}$$

sejam todos infinitos (6), o termo geral $u_k$ da sucessão

$$v_{m_1,n_1,...}, v_{m_2,n_2,...}, ..., v_{m_k,n_k,...}, ...$$

é uma variante que é convergente e equivalente à proposta."[62]

A referência "(6)" que surge no enunciado desta proposição diz respeito à definição 3.1.6 de *variante infinita*, página 148. Será interessante notar que Méray a utiliza para frisar o facto de os sucessivos índices a atribuir à variante $v_{m,n,...}$ serem eles próprios variantes dependentes de um índice, isto é, sucessões de números naturais.

***Demonstração***: Tal como refere Méray, quando $k$ cresce indefinidamente, todos os inteiros $m_k, n_k, ...$ crescem também sem limites, daí que o termo geral $u_k$ da sucessão $v_{m_1,n_1,...}, ..., v_{m_k,n_k,...}, ...$ seja, de facto, uma variante.

Mostremos inicialmente que a variante $u_k$ é convergente. Sendo $k'$ e $k''$ dois valores arbitrários do índice de $u_k$, temos que:

$$u_{k''} - u_{k'} = v_{m_{k''},n_{k''},...} - v_{m_{k'},n_{k'},...} \; .$$

[61]Veja-se (Méray, 1894), pág. 26.

[62]Em (Méray, 1887), pág. 348.

E como, por hipótese, $v_{m,n,\ldots}$ é convergente, a diferença $v_{m_{k''},n_{k''},\ldots} - v_{m_{k'},n_{k'},\ldots}$ é infinitamente pequena. Logo $u_{k''} - u_{k'}$ é uma variante infinitamente pequena e, portanto, $u_k$ é convergente.

Provemos agora que as variantes $u_k$ e $v_{m,n,\ldots}$ são equivalentes. Para $k', m', n', \ldots$ valores arbitrários dos índices das variantes $u_{k'}$ e $v_{m',n',\ldots}$, tem-se que:

$$u_{k'} - v_{m',n',\ldots} = v_{m_{k'},n_{k'},\ldots} - v_{m',n',\ldots} \ .$$

Como $v$ é uma variante convergente, a diferença $v_{m_{k'},n_{k'},\ldots} - v_{m',n',\ldots}$ é infinitamente pequena. Portanto, também $u_{k'} - v_{m',n',\ldots}$ será uma variante infinitamente pequena, pelo que $u_k$ e $v_{m,n,\ldots}$ são equivalentes.

■

O único exemplo que Méray apresenta de variantes equivalentes é o de duas variantes infinitamente pequenas, cuja verificação é bastante simples[63]. E relativamente a este exemplo, apresenta ainda o seguinte resultado.

**Proposição 3.2.4** Uma dada variante é infinitamente pequena se é equivalente a uma outra que seja infinitamente pequena.

[63]Veja-se (Méray, 1894), pág. 26.

### 3.2.5 Alguns resultados de variantes convergentes

Por forma a simplificar a teoria das variantes dotadas de limite introduzida na próxima secção 3.3 *Limites efectivos de variantes convergentes*, Méray apresenta um conjunto de resultados bastante variados relativos a variantes convergentes.

À semelhança do que aconteceu para a proposição 3.2.3, página 165, também o resultado que se segue apenas foi provado, na obra de 1894, para variantes de um índice. E será pelo facto de esta prova fazer uso da proposição 3.2.3, que, de igual modo, adoptaremos[64] a abordagem da obra de 1887.

**Proposição 3.2.5** Se a variante $v_{m,n,\ldots}$ é convergente, ela é necessariamente finita. Se, além disso, ela não for infinitamente pequena, é de pequenez limitada e acaba por conservar um sinal constante.

***Demonstração***: Provemos, num primeiro passo, que $v_{m,n,\ldots}$ é uma variante finita. Por hipótese, dada uma quantidade positiva arbitrária $\varepsilon$, existem conjuntos de inteiros $\mu', \nu', \ldots, \mu'', \nu'', \ldots$ tais que, para $m' \geq \mu', n' \geq \nu', \ldots, m'' \geq \mu'', n'' \geq \nu'', \ldots$, se tem:

$$|v_{m'',n'',\ldots} - v_{m',n',\ldots}| < \varepsilon \text{ }^{65}.$$

Desta forma, a partir dos valores $\mu'', \nu'', \ldots$ dos índices $m, n, \ldots$, tem-se constantemente:

$$|v_{m,n,\ldots} - v_{\mu',\nu',\ldots}| < \varepsilon \text{ }^{66}.$$

Seja $\varphi$ o valor absoluto de $v_{\mu',\nu',\ldots}$. Como

$$v_{m,n,\ldots} = v_{\mu',\nu',\ldots} + (v_{m,n,\ldots} - v_{\mu',\nu',\ldots}),$$

[64] Veja-se (Méray, 1887), pág. 349.

[65] A imprecisão no modo de Méray se exprimir está mais uma vez patente na troca da ordem dos quantificadores, quando diz "Por hipótese, existem inteiros $\mu', \nu', \ldots, \mu'', \nu'', \ldots$, tais que chamando $\varepsilon$ uma quantidade positiva escolhida arbitrariamente, temos numericamente $v_{m'',n'',\ldots} - v_{m',n',\ldots} < \varepsilon$, para $m' \geqq \mu', n' \geqq \nu', \ldots; m'' \geqq \mu'', n'' \geqq \nu'', \ldots$ (...)" — em (Méray, 1887), pág. 349.

[66] Relativamente a esta desigualdade Méray afirma: "A partir de $\mu'', \nu'', \ldots$, teremos então constantemente $v_{m,n,\ldots} - v_{\mu',\nu',\ldots} < \varepsilon$." — em (Méray, 1887), pág. 349. Mas repare-se que, decorrendo da definição de variante convergente, tal desigualdade deve considerar-se, obviamente, em valor absoluto.

a desigualdade

$$|v_{m,n,...}| < \varphi + \varepsilon.$$

acaba por se verificar[67]. Portanto, a variante $v_{m,n,...}$ é necessariamente finita[68].

Vejamos agora que, caso $v_{m,n,...}$ não seja infinitamente pequena, ela é de pequenez limitada. Suponhamos, por redução ao absurdo, que $v_{m,n,...}$ não é uma variante de pequenez limitada[69]. Considerem-se então $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_k, ...$ sucessivos valores de uma variante auxiliar positiva e infinitamente pequena. Para tais valores existem inteiros

$$m_1, m_2, ..., m_k, ...; n_1, n_2, ..., n_k, ...; ...$$

que em cada uma das sucessões crescem sem parar[70], e para os quais podemos satisfazer indefinidamente as desigualdades:

$$|v_{m_1,n_1,...}| < \varepsilon_1, |v_{m_2,n_2,...}| < \varepsilon_2, ..., |v_{m_k,n_k,...}| < \varepsilon_k, ... \, .$$

Assim, a variante $u_k = v_{m_k,n_k,...}$ será infinitamente pequena. Mas, pela proposição 3.2.3, página 165, as variantes $u$ e $v$ são equivalentes. Portanto, pela proposição 3.2.4, página 166, $v_{m,n,...}$ será infinitamente pequena, o que é um absurdo. Desta forma, se a variante $v_{m,n,...}$ não for infinitamente pequena, é de pequenez limitada, pelo que existe uma quantidade positiva $l$ para a qual a desigualdade $|v_{m,n,...}| > l$ acaba por se verificar.

Provemos finalmente que, caso $v_{m,n,...}$ seja uma variante de pequenez limitada, ela acaba por conservar um sinal constante. Se o sinal de $v_{m,n,...}$ não acabasse por ser constante, poderíamos formar sucessões crescentes de inteiros:

$$m_1, m_2, ..., m_k, ...; \; n_1, n_2, ..., n_k, ...; ... \, ,$$

---

[67] De facto, a desigualdade anterior verifica-se a partir dos valores $\mu'', \nu'', ...$ dos índices.

[68] Dada a arbitrariedade do parâmetro $\varepsilon$, podemos escolher, por exemplo, $L = \varphi + 1$ na definição de variante finita.

[69] O que, em notação simbólica actual, significa que

$$\forall \, l \in \mathbb{Q}^+ \; \forall \, \mu, \nu, ... \; \exists \, m, n, ... : \; (m \geq \mu, n \geq \nu, ... \; \wedge \; |v_{m,n,...}| \leq l).$$

[70] O que significa que o termo geral de cada uma das sucessões anteriores é uma variante infinita. É de notar, no entanto, que Méray não se referiu a este facto.

de tal modo que $v_{m_{k+1},n_{k+1},...}$ e $v_{m_k,n_k,...}$ tinham sempre sinais contrários. Desta forma, para $k$ infinito[71], ou, de forma semelhante, para os valores infinitos de todos os índices $m_k, n_k, ..., m_{k+1}, n_{k+1}, ...$, a desigualdade:

$$|v_{m_{k+1},n_{k+1},...} - v_{m_k,n_k,...}| > 2l,$$

acabaria por se verificar, o que contraria a hipótese de $v_{m,n,...}$ ser uma variante convergente.

■

O resultado que se segue ilustra mais uma vez o carácter generalista de Méray, que chega mesmo a tornar incompreensíveis alguns dos resultados da sua teoria das variantes.

**Teorema 3.2.1** Toda a função inteira de variantes convergentes é uma variante convergente. O mesmo se verifica para uma função racional fraccionária[72], desde que o seu denominador não seja infinitamente pequeno.

Apesar de Méray não introduzir, nem no enunciado, nem na prova deste teorema, uma notação que clarifiquemostre explicitamente se as variantes envolvidas dependem ou não do mesmo número de índices[73], podemos, através do exposto na secção 3.1.6 *Funções de diferentes tipos de variantes*, pressupor que, de facto, o resultado anterior se refere a variantes dependentes de um número diferente de índices. Em todo o caso, e tal como fizemos para a proposição 3.1.1, página 150, devemos supor que também este resultado se aplica apenas a variantes dependentes de um mesmo número de índices, por forma a que o seu conteúdo ganhe significado.

A estrutura da demonstração que se segue está de acordo com o original de 1894, incluindo a transcrição e respectiva prova de um resultado acessório.

---

[71] Isto é, sendo $k$ um valor arbitrariamente grande da variante infinita $k$.

[72] Méray considera que "Se, entre outras operações inteiras, o cálculo do valor de uma função compreende essencialmente a divisão, esta função diz-se *fraccionária*." — em (Méray, 1894), pág. 20.

[73] Vejam-se (Méray, 1887), pág. 350 e (Méray, 1894), pág. 27.

***Demonstração***: Provemos inicialmente que toda a função inteira de variantes convergentes é convergente. Seja então $f(u,v,w,...)$ uma função inteira das variantes convergentes $u,v,w,...$, cujos índices não denotaremos, à semelhança do que é feito na prova original. Atribuamos a estes índices dois conjuntos de valores, que faremos crescer indefinidamente e independentemente uns dos outros, e designemos genericamente por

$$u',v',w',...;u'',\ v'',w'',...$$

os dois grupos correspondentes de valores das variantes.

Pelo facto de $u,v,w,...$ serem variantes convergentes, as diferenças

$$u''-u'=\alpha,\ v''-v'=\beta,\ w''-w'=\gamma,\ ...,$$

são quantidades infinitamente pequenas. O polinómio $f(u'',v'',w'',...)$ poderá ainda ser escrito na forma $f(u'+\alpha,v'+\beta,w'+\gamma,...)$. E, por aplicação da fórmula de Taylor[74], Méray obtém a igualdade

$$f(u'',v'',w'',...)-f(u',v',w',...)=\Theta,$$

acerca da qual, curiosamente, afirma

> "(...) $\Theta$ é um polinómio inteiro com respeito às variantes $u',v',w',...$, $\alpha,\beta,\gamma,...$, em que cada termo contém como factor pelo menos uma destas últimas quantidades."[75]

Pela proposição 3.2.5, página 167, $u',v',w',...$ são variantes finitas. E uma vez que $\alpha,\beta,\gamma,...$ são quantidades infinitamente pequenas, podemos concluir, por aplicação da proposição 3.1.3, página 151, que a variante $\Theta$ é necessariamente infinitamente pequena. Portanto, $f(u,v,w,...)$ é uma variante convergente.

[74]Vejam-se as expressões da fórmula de Taylor utilizadas por Méray, por exemplo, nas páginas 160 e 161 de (Méray, 1894).

[75]Em (Méray, 1887), pág. 351. É de notar que apenas sabemos que Méray aplica tal fórmula pela prova incluída na obra de 1887, já que na obra de 1894 se limita a afirmar que a igualdade $f(u'',v'',w'',...)-f(u',v',w',...)=\Theta$ se pode obter duma maneira conveniente — vejam-se (Méray, 1887), pág. 351 e (Méray, 1894), pág. 28.

- Para provar a parte restante deste teorema, relativa a funções racionais fraccionárias, Méray considera o seguinte resultado acessório:

> "Se $p, q$ são duas variantes convergentes, a segunda não infinitamente pequena, a sua razão $\frac{p}{q}$ é também uma variante convergente."[76]

Sendo $p', q'$ e $p'', q''$ os valores de $p, q$ correspondentes a dois conjuntos de valores de índices indefinidamente crescentes, consideremos a expressão:

$$\frac{p''}{q''} - \frac{p'}{q'} = \frac{p''q' - p'q''}{q'q''}, \tag{3.3}$$

cujo numerador pode ser escrito na forma:

$$(p'' - p')q' - (q'' - q')p'. \tag{3.4}$$

Uma vez que $p$ e $q$ são convergentes, pela proposição 3.2.3, página 165, as variantes $p'$ e $q'$ também o são. E, por aplicação da proposição 3.2.5, $p'$ e $q'$ serão ainda variantes finitas. Por outro lado, as diferenças $p'' - p', q'' - q'$ são infinitamente pequenas, facto este que decorre da definição de variante convergente. Portanto, a expressão (3.4) é, pela proposição 3.1.3, uma variante infinitamente pequena.

Como $q$ é convergente, mas, por hipótese, não é infinitamente pequena, a proposição 3.2.5 garante que existe uma quantidade positiva $l$ para a qual acabaremos por ter $q > l$. Assim, teremos também $q'q'' > l^2$, donde se conclui que $q'q''$ é igualmente uma variante de pequenez limitada.

Finalmente, a proposição 3.1.3 permite concluir que a expressão (3.3) é infinitamente pequena, isto é, que $\frac{p}{q}$ é uma variante convergente.

Para provar que uma função racional fraccionária de variantes convergentes, com denominador não infinitamente pequeno, é uma variante convergente bastará agora considerar os dois pontos anteriores desta demonstração. Relativamente ao segundo ponto, $p$ e $q$ deverão representar, respectivamente, o numerador e denominador de tal função racional fraccionária.

■

[76]Em (Méray, 1894), pág. 28.

Repare-se que a prova anterior faz uso da fórmula de Taylor, e, portanto, da ideia base da análise de Méray: o facto de as funções poderem ser desenvolvidas em séries de Taylor.

Segue-se o último resultado sobre variantes convergentes apresentado por Méray[77].

**Proposição 3.2.6** Sendo $f$ uma função inteira ou uma função racional fraccionária de denominador não infinitamente pequeno, se $u', v', w', ...$ e $u'', v'', w'', ...$ designam dois grupos de variantes convergentes respectivamente equivalentes, as variantes

$$f(u', v', w', ...), f(u'', v'', w'', ...),$$

que pelo teorema 3.2.1 são convergentes, são também equivalentes.

***Demonstração***: Para provar esta proposição basta observar que as diferenças

$$u'' - u', v'' - v', w'' - w', \ ...$$

são variantes infinitamente pequenas, pelo que a sua demonstração será perfeitamente idêntica ao primeiro ponto da prova do teorema precedente. Concluindo-se, dessa forma, que $f(u', v', w', ...) - f(u'', v'', w'', ...)$ é infinitamente pequena, as variantes $f(u', v', w', ...)$ e $f(u'', v'', w'', ...)$ serão, por definição, variantes equivalentes, conforme pretendido.

■

[77]Vejam-se (Méray, 1887), pág. 350 e (Méray, 1894), pág. 29.

### 3.2.6 Variantes divergentes

Será apenas na obra de 1894 que Méray define o conceito de variante *divergente*, sendo aí utilizado para apresentar um outro conceito, o de variante *infinita*. Desta forma, e conforme referimos na secção 3.1.5 *Tipos de variantes*, a definição de variante infinita terá nesta obra um enunciado diferente daquele que podemos encontrar nas restantes exposições da teoria dos números irracionais de Méray.

**Definição 3.2.3** Uma variante diz-se **divergente** quando não é convergente.

Referindo-se à definição de *variante convergente*, página 157, Méray observa então que, caso a variante $v_{m,n,...}$ seja divergente, podemos estabelecer entre os inteiros $m', n', ...; m'', n'', ...$ relações tais que, crescendo indefinidamente e conjuntamente dessa maneira, o valor numérico da diferença $v_{m'',n'',...} - v_{m',n',...}$ seja superior a alguma quantidade positiva[78].

Como exemplo de uma variante divergente, Méray indica de seguida o caso da variante $v_m$ que, para $m$ ímpar, é igual a uma quantidade $a$, e para $m$ par toma o valor $b$ (sendo $a \neq b$). E justifica a apresentação deste exemplo mostrando da seguinte forma que $v_m$ não é convergente:

> "(...) tomando $m', m''$ sempre com paridades diferentes, a diferença $v''_m - v'_m$ reduz-se sem parar a $\pm(a-b)$ e por conseguinte $[v_m]$ não é infinitamente pequena." [79]

Vejamos agora qual a definição de *variante infinita* que Méray apresenta nesta obra:

> "Uma variante cujo valor numérico acaba por se manter superior a toda a quantidade positiva dada não é finita; por consequência de (42) ela é divergente. As variantes divergentes desta espécie devem ser particularmente distinguidas; designamo-las por *quantidades infinitas*." [80]

[78] Veja-se (Méray, 1894), pág. 29.
[79] Em (Méray, 1894), pág. 30.
[80] Em (Méray, 1894), pág. 30.

A referência "(42)" na transcrição anterior é relativa à proposição 3.2.5, página 167. É esta proposição que garante que, não sendo finita, a variante não é convergente. Daí que, pela definição 3.2.3, ela seja divergente. Repare-se ainda que, à semelhança do conceito de variante infinitamente pequena, as variantes infinitas foram definidas como sendo *quantidades* infinitas.

Relativamente a este tipo de variantes, Méray apresenta, sem prova, os resultados que se seguem[81]:

**Proposição 3.2.7** *a*) O produto de uma variante de pequenez limitada por uma quantidade infinita é também uma variante infinita.
*b*) Quando uma variante é infinitamente pequena ou infinita, o seu inverso aritmético é, respectivamente, infinito ou infinitamente pequeno.

A importância da teoria das variantes convergentes será notada assim que Méray introduz o conceito de *limite* de uma variante. É que o facto de existirem variantes convergentes que não admitem nenhum número comensurável como limite será, sem dúvida, um indicador da incompletude do conjunto dos números. Estando então criada a base para a definição do conceito de número *incomensurável*, a teoria dos limites assumirá agora um papel primordial na teoria dos números irracionais de Méray. Esta teoria será exposta nas próximas secções 3.3 *Limites efectivos de variantes convergentes* e 3.4 *Limites ideais de variantes convergentes.*

[81]Veja-se (Méray, 1894), pág. 30.

## 3.3 Limites efectivos de variantes convergentes

Conforme referimos na secção 3.2.1 *Definição de variante convergente*, foi apenas na obra de 1894 que Méray não fez uso do conceito de limite para definir uma variante convergente. Em todo o caso, esclarecemos também que, apesar disso, a definição de *limite* de uma variante manteve o mesmo enunciado em todas as obras.

**Definição 3.3.1** Dizemos que uma variante $v_{m,n,\ldots}$ tem por **limite** uma quantidade $V$, ou que $V$ **tende** para $V$, quando a diferença $V - v_{m,n,\ldots}$ é uma variante infinitamente pequena, e escrevemos

$$\lim v_{m,n,\ldots} = V.$$

Observe-se pois que, sendo uma *quantidade*, o limite de uma variante é um número racional. Portanto, segundo esta definição, apenas admitem limite as variantes que tendem para um racional. As terminologias utilizadas nas várias obras de Méray para denominar tais limites são três[82]: o termo "effective" na exposição de 1894, "véritable" em 1887, ou ainda "assignable" em 1872.

Como exemplo de variantes dotadas de limite, Méray apresenta em todas as obras apenas o caso de uma variante infinitamente pequena. A verificação de que uma tal variante $v_{m,n,\ldots}$ tende para zero é bastante simples, decorrendo do facto de $0 - v_{m,n,\ldots} = -v_{m,n,\ldots}$ ser também uma quantidade infinitamente pequena[83].

No entanto, o conceito de *variante convergente* abrange uma classe de variantes muito mais vasta do que a referente a variantes dotadas de limite. E será neste sentido que se enquadra o próximo resultado[84]. O seu recíproco não será válido pelas razões que acabámos de referir, facto este que, na secção seguinte *Limites ideais de variantes convergentes*, constituirá o ponto chave para a criação dos números *incomensuráveis*.

**Proposição 3.3.1** Toda a variante que admita um limite é convergente.

[82] Vejam-se, respectivamente, (Méray, 1894), pág. 30, (Méray, 1887), pág. 353 e (Méray, 1872), pág. 3.

[83] Veja-se (Méray, 1887), pág. 344.

[84] Veja-se (Méray, 1894), pág. 30.

***Demonstração***: Seja então $V$ o limite de uma variante $v_{m,n,...}$. Sendo $m'', n'', ...$ e $m', n', ...$ dois conjuntos de valores arbitrários dos índices de $v_{m,n,...}$, provemos que a diferença:

$$v_{m'',n'',...} - v_{m',n',...} \tag{3.5}$$

é uma variante infinitamente pequena. Esta diferença pode ser escrita na forma:

$$(V - v_{m',n',...}) - (V - v_{m'',n'',...}) \ . \tag{3.6}$$

Será pelo facto de $V$ ser o limite da variante $v_{m,n,...}$, que a expressão (3.6) é, tal como (3.5), infinitamente pequena, donde se conclui que a variante é convergente.

■

Méray estabelece ainda sem prova os seguintes resultados.

**Proposição 3.3.2** Duas variantes que tendam para o mesmo limite são equivalentes.

**Proposição 3.3.3** Toda a variante equivalente a uma dada variante, cujo limite exista, tende para o limite da variante inicial.

Sendo os limites efectivos de variantes números racionais, será através do teorema que se segue que poderemos definir quaisquer operações racionais entre tais números[85]. A importância deste resultado irá notar-se ainda na próxima secção. É que, sendo aí estendido a *limites ideais* de variantes convergentes, estaremos então em condições de definir operações entre números irracionais.

**Teorema 3.3.1** "Se as variantes $u, v, w, ...$ tenderem, respectivamente, para os limites $U, V, W, ...$, e se $f(u, v, w, ...)$ designar uma função dessas variantes, seja inteira, seja fraccionária, mas não tendo um denominador que tenda para zero, temos:

$$\lim f(u, v, w, ...) = f(U, V, W, ...)."^{86}$$

[85]Em todo o caso, deverá recordar-se toda a polémica em torno do cálculo não exequível de funções de variantes dependentes de diferentes índices. Este assunto foi abordado na secção 3.1.6 *Funções de diferentes variantes*.

[86]Em (Méray, 1894), pág. 31.

***Demonstração***: Seja $\upsilon$ uma variante cujos valores são todos iguais a $U$ e, da mesma forma, $\varphi, \psi, ...$ variantes que apenas tomem, respectivamente, os valores $V, W, ...$[87]. Por aplicação da proposição 3.3.2, página 176, $\upsilon, \varphi, \psi, ...$ são, respectivamente, equivalentes a $u, v, w, ...$ . Assim, a proposição 3.2.6, página 172, garante que $f(\upsilon, \varphi, \psi, ...)$ é equivalente a $f(u, v, w, ...)$, ou seja, que a diferença:

$$f(\upsilon, \varphi, \psi, ...) - f(u, v, w, ...)$$

é uma variante infinitamente pequena, dependente dos índices que são distintos nos dois grupos de variantes. Mas $\upsilon, \varphi, \psi, ...$ tomam os valores constantes $U, V, W, ...$, respectivamente. Portanto,

$$f(U, V, W, ...) - f(u, v, w, ...)$$

é infinitamente pequena, como pretendido.

■

[87] A este respeito, Méray faz a seguinte observação: "Em certos casos, existe interesse em considerar uma quantidade dada (invariável) como um tipo de variante que conserva sempre o mesmo valor, quaisquer que sejam os seus índices." — em (Méray, 1887), pág. 343.

## 3.4 Limites ideais de variantes convergentes

Conforme referimos na secção anterior, o recíproco da proposição 3.3.1, página 175, não é válido. E é exactamente através desta observação que Méray irá introduzir o importante conceito de limite *ideal*, com o qual se identificará um número *incomensurável*. Estamos pois a um passo da formalização do conceito de número irracional de Méray, para a qual se revela fundamental a teoria das variantes dotadas de limite.

A ideia chave de Méray é estender o estudo das variantes convergentes que tendem para um limite efectivo, isto é, para um número racional, àquelas que sejam desprovidas de limite.

> "(...) é efectivamente suficiente *conservar para as variantes convergentes desprovidas de limites*, MAS AGORA NO SENTIDO FIGURADO, *a linguagem que a consideração dos limites proporciona àquelas que deles são dotadas.*" [88]

Será, portanto, mediante um conjunto de *convenções* que é criada a teoria das variantes convergentes desprovidas de limite. E uma vez que um *número incomensurável* será definido como sendo o limite *ideal* de tais variantes, ficará, por comparação, elaborada a teoria dos números irracionais de Méray.

[88]Em (Méray, 1887), pág. 352.

### 3.4.1 Convenções

A explicitação das convenções necessárias à elaboração de uma teoria das variantes convergentes desprovidas de limite, apenas é considerada por Méray nas obras de 1887 e 1894, nas quais afirma apenas listar as principais[89]. Estas convenções, num total de seis, são apresentadas de seguida.

**I.** "Quando uma variante convergente não tende para qualquer limite, fazemos-lhe corresponder um [limite] *ideal* (...) que representamos pelo mesmo sinal [isto é, símbolo] como se ele existisse realmente." [90]

A terminologia "idéale" atribuída a este tipo de limites apenas foi utilizada na última obra de 1894, tendo sido usado nas restantes exposições o termo "fictive"[91]. Podem ainda encontrar-se na obra de 1887 algumas referências a estes limites *ideais* como sendo "pseudolimites"[92].

Esta primeira convenção vai permitir estabelecer a importante definição de *número incomensurável*, ou seja, de um número irracional. Iremos adoptar como definição o enunciado contido na obra de 1887, pela simples razão de que aí esta questão é abordada de um modo mais formal.

**Definição 3.4.1** "O que chamámos os *números incomensuráveis* são precisamente estes limites fictícios [fictives] de variantes convergentes não tendendo para números verdadeiros [véritables]. Quanto aos *números comensuráveis*, são naturalmente, por oposição, os números propriamente ditos, quer dizer os inteiros e as fracções tomadas positivamente ou negativamente."[93]

---

[89]Deve notar-se, em todo o caso, que na abordagem de 1872, Méray também considera serem necessárias tais extensões, se bem que se refira muito vagamente a elas — veja-se (Méray, 1872), págs. 3, 4.

[90]Em (Méray, 1894), pág. 31.

[91]Vejam-se (Méray, 1869), pág. 274 — citado em (Robinson, 1991), pág. 1698; (Méray, 1872), pág. 3 e (Méray, 1887), pág. 353.

[92]Veja-se (Méray, 1887), por exemplo, na página 353.

[93]Em (Méray, 1887), pág. 354.

Poderemos agora referir-nos de igual forma a toda a variante convergente, no que respeita à existência do seu limite. Isto porque, segundo a definição anterior, uma variante convergente irá admitir sempre um limite, quer ele seja efectivo ou ideal.

Muito embora Méray utilize o conceito de *limite* para definir um número incomensurável, deve notar-se não ser assumida *a priori* a existência de tal número. Para criar estes números, Méray começa por considerar variantes convergentes que não admitem nenhum limite efectivo. A estas variantes faz-lhes corresponder um limite *ideal* que será então o número incomensurável.

A convenção seguinte pretende que, com esta nova terminologia, ainda seja válido o teorema 3.3.3, página 176, da secção anterior.

**II.** "Quando duas variantes convergentes são equivalentes, dizemos que *os seus limites* (*comensuráveis ou incomensuráveis*) são *iguais*."[94]

**III.** Sendo os números incomensuráveis limites ideais de variantes convergentes, nesta convenção Méray generaliza, mediante as convenções anteriores, as proposições 3.2.1 e 3.2.6, páginas 169 e 172, respectivamente, por forma a que se refiram aos dois tipos possíveis de limites (efectivos e ideais). Desta forma, considera ainda possível a extensão do teorema 3.3.1, página 176, de modo a que este defina

> "(...) *em todos os casos uma função* $[f(U, V, W, ...)]$ *de quantidades comensuráveis ou incomensuráveis, seja inteira, seja racional fraccionária com denominador não infinitamente pequeno*, em particular *a soma, a diferença, o produto, as potências, o quociente, etc.* de tais quantidades."[95]

Para o caso particular em que a função é infinitamente pequena, Méray estabelece a próxima convenção.

[94] Em (Méray, 1894), pág. 31.
[95] Em (Méray, 1894), pág. 32.

**IV.** “Se uma tal função $f(u,v,w,...)$ de variantes convergentes $u,v,w,...$ for infinitamente pequena, diremos simplesmente que *entre os limites destas* (comensuráveis ou incomensuráveis) $U,V,W,...$, *existe a equação*

$$f(U,V,W,...)=0.\text{”}$$ [96]

A quinta convenção apresentada permite classificar um número incomensurável como sendo *positivo* ou *negativo*. Entenda-se a referência “(42)” na transcrição seguinte como sendo relativa à proposição 3.2.5, página 167.

**V.** “Quando uma variante convergente não é infinitamente pequena, ela acaba por conservar quer o sinal $+$, quer o sinal $-$ (42), o mesmo evidentemente que aquele do seu limite, se este existir efectivamente. Se ele não existir, dizemos que a quantidade incomensurável correspondente é *positiva no primeiro caso, negativa no segundo*.”[97]

A última convenção formulada por Méray pode ser entendida como sendo uma definição, a de número incomensurável *superior* ou *inferior* a qualquer outro número. Mas vejamos quais os conceitos que estão por detrás desta definição. Conforme é observado por Méray[98], o excesso de uma variante convergente sobre uma outra variante convergente é ele mesmo uma variante convergente. Tal facto conclui-se da extensão do teorema 3.2.1, já mencionada na *convenção* III. Sendo então $A$ e $B$ os limites de tais variantes convergentes distintas, a *convenção* V garante que $u-v$ acaba por conservar um sinal constante, o mesmo que o seu limite. E segundo a *convenção* III, este limite será igual a $A-B$. Caso $u-v$ conserve o sinal $+$, isto é, se $A-B$ for positivo, diremos que $A$ é *superior* a $B$; se $u-v$ conservar o sinal $-$, diremos que $A$ é *inferior* a $B$.

[96] Em (Méray, 1894), pág. 32.
[97] Em (Méray, 1894), pág. 32.
[98] Veja-se (Méray, 1887), pág. 353.

**VI.**

**Definição 3.4.2** "Uma quantidade incomensurável é dita *superior ou inferior* a uma outra quantidade, seja comensurável, seja incomensurável, conforme a sua diferença é positiva ou negativa."[99]

Podemos deste conjunto de convenções depreender qual o "estatuto" dos números incomensuráveis na teoria das variantes convergentes: o de entidades que permitem alargar a um campo mais vasto a linguagem utilizada para os números comensuráveis. E será esta mesma ideia que podemos depreender das seguintes palavras de Méray.

> "Tal é para nós a natureza dos números incomensuráveis; são as ficções que permitem enunciar duma maneira uniforme e mais pitoresca todas as proposições relativas às variantes convergentes."[100]

[99]Em (Méray, 1894), pág. 32.
[100]Em (Méray, 1872), pág. 4.

### 3.4.2 Valores aproximados de uma quantidade qualquer

**Definição 3.4.3** Dadas quantidades arbitrárias $A$ e $\delta$, sendo $\delta$ positiva, se a diferença $A - a$ é, em valor absoluto, inferior a $\delta$, dizemos que $a$ é um **valor aproximado de** $A$ **a menos de** $\delta$. Esse valor aproximado diz-se por **defeito** ou por **excesso**, consoante essa diferença seja positiva ou negativa.

A obtenção de valores aproximados de uma quantidade $A$ (comensurável ou incomensurável) é ainda explicada por Méray à custa da definição de variante convergente[101]. Em todo o caso, a sua exposição complica bastante o que, à partida, se pode obter do simples facto de $A$ ser o limite, efectivo ou ideal, de uma variante convergente. Ora, caso $A$ seja um número comensurável, pela definição 3.3.1, página 175, sabemos que:

$$\forall\ \delta > 0\ \exists\ \mu, \nu, ... : \forall\ m, n, ...\ \ (m \geq \mu, n \geq \nu, ...\ \Rightarrow |v_{m,n,...}| < \delta).$$

Portanto, de acordo com a anterior definição 3.4.3, todos os valores da variante $v_{m,n,...}$ para os quais $m \geq \mu, n \geq \nu, ...$, são valores aproximados de $A$ a menos de $\delta$.

E se $A$ for um número incomensurável, por definição, será igualmente o limite de uma variante convergente. Portanto, de um modo perfeitamente análogo ao descrito anteriormente, é possível obter os valores aproximados de $A$ a menos de $\delta$.

Até este ponto, Méray terá desenvolvido uma teoria geral acerca das variantes convergentes. E será pelo facto de a toda a variante convergente corresponder um determinado número, comensurável ou incomensurável, que o matemático estará agora em condições de, por comparação, elaborar uma teoria dos números incomensuráveis.

[101] Vejam-se (Méray, 1887), pág. 354 e (Méray, 1894), pág. 32.

## 3.5 Teoria dos números incomensuráveis

A teoria dos números irracionais elaborada por Méray não nos é apresentada de um modo explícito, pelo que devemos construí-la através da comparação com a teoria das variantes convergentes que não admitem um limite efectivo. E é exactamente neste sentido que Méray afirma que os princípios da teoria destes "pretensos" números, os números *incomensuráveis*, estão contidos implicitamente nas convenções estipuladas na secção 3.4.1 *Convenções* e na definição 3.4.3 de *valor aproximado de uma quantidade qualquer*[102]. Assim, saberemos o que entender, por exemplo, por igualdade entre dois números incomensuráveis, pela desigualdade num ou noutro sentido entre dois números comensuráveis ou incomensuráveis, por uma função racional destes dois tipos de números, ou por um valor aproximado dum número incomensurável.

Méray considera mesmo imediata a aproximação entre estas duas teorias das variantes e dos números incomensuráveis.

> "Examinando atentamente os diversos pontos desta teoria [dos números incomensuráveis], constataremos que não existe nenhuma propriedade dos números incomensuráveis *que não seja a tradução, numa outra linguagem, de qualquer propriedade interessante exclusivamente dos números propriamente ditos variáveis.*"[103]

É desta forma que Méray apresenta a sua teoria dos números irracionais, através de simples observações à custa das quais transfere o estudo das variantes que admitem limites ideais para os números incomensuráveis. Mas mesmo antes de nos pronunciarmos acerca da "correcção" da entidade *número incomensurável* na teoria dos números irracionais de Méray, vejamos, ainda nesta secção, as aplicações que o matemático faz da sua teoria à extracção de raízes aritméticas, bem como as suas considerações acerca de *funções não racionais*.

[102]Veja-se (Méray, 1887), pág. 354.
[103]Em (Méray, 1887), pág. 355.

### 3.5.1 Teoria de extracção de raízes aritméticas

Como uma aplicação directa da sua teoria dos números irracionais, e para que melhor se compreendam as relações estabelecidas entre os números incomensuráveis e as variantes convergentes, Méray aborda, nas obras de 1887 e 1894, a questão da extracção de raízes aritméticas. Esta escolha justifica-a por considerar a operação de radiciação como a mais elementar de todas aquelas que conduzem aos números incomensuráveis, ou ainda pelo uso incessante de "(...) extracção de raízes quadradas para formar os módulos de quantidades imaginárias (...)"[104]. Será por estas razões que Méray considera importante provar que toda a quantidade positiva admite uma e uma só raiz índice $m$ positiva. A estrutura da demonstração deste resultado é semelhante à original, compreendendo a prova de vários resultados acessórios, e que podemos consultar na última exposição de 1894[105].

**Teorema 3.5.1** Uma qualquer quantidade positiva $A$ tem sempre uma $m$–ésima raiz positiva e uma só.

Neste ponto da apresentação da teoria dos números irracionais de Méray, a terminologia *quantidade* é relativa apenas a números racionais. Portanto, a prova deste resultado será válida somente para números comensuráveis. No entanto, através das convenções estabelecidas na secção 3.4.1 *Convenções*, Méray irá estendê-la também a números incomensuráveis.

***Demonstração***: Inicialmente, é provado que, sendo $u$ uma quantidade positiva invariável e $k$ um inteiro infinito, a variante $u_k$ cresce ou decresce sem parar e indefinidamente, desde que $u$ seja, respectivamente, maior ou menor do que 1. Suponhamos então que $u$ é uma quantidade maior do que 1, isto é, $u = 1 + \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$. Ora, como

$$u^{k+1} = u^k(1+\varepsilon) = u^k + \varepsilon u^k,$$

[104]Em (Méray, 1894), pág. 33. A construção do conjunto dos números imaginários é considerada por Méray na secção III de (Méray, 1894).

[105]Veja-se (Méray, 1894), pág. 33

vem que $u^{k+1} > u^k$, ou seja, $u^k$ é crescente. Além disso, $u^k = (1+\varepsilon)^k > 1 + k\varepsilon$. Logo $u^k$ é, tal como $k$, uma variante infinita. Se, por outro lado, $u < 1$, então $\dfrac{1}{u} > 1$, e portanto a expressão $\left(\dfrac{1}{u}\right)^k = \dfrac{1}{u^k}$ cresce sem parar e indefinidamente. Finalmente, a proposição 3.2.7, página 174, garante que $u^k = 1 : \dfrac{1}{u^k}$ decresce sem parar tendendo para zero.

• De seguida, prova-se que existe alguma variante positiva cuja $m$–ésima potência tende para $A$. Consideremos o caso inicial $A > 1$, e representemos por $u$ uma quantidade positiva maior do que 1, relativamente à qual formamos a sucessão

$$1, u, u^2, \dots .$$

Como, pelo ponto anterior, os termos desta sucessão crescem sem parar e indefinidamente, existem certamente dois termos consecutivos $u^{k_u}, u^{k_u+1}$ relativamente aos quais

$$u^{k_u} < A \leqq u^{k_u+1}.$$

Desta forma teremos:

$$A - u^{k_u} \leqq u^{k_u+1} - u^{k_u} \leqq u^{k_u}(u-1) < A(u-1).$$

Portanto, quando $u$ tende para 1, tem-se:

$$\lim u^{k_u} = A.$$

Sendo $q_u, r_u$ o quociente e o resto da divisão de $k_u$ por $m$, façamos $u^{q_u} = v$. Como $k_u = mq_u + r_u$, teremos:

$$v^m = \frac{u^{k_u}}{u^{r_u}},$$

e $\lim u^{r_u} = 1$, já que $r_u < m$ e $\lim u = 1$. Por aplicação do teorema 3.3.1, página 176, vem

$$\lim v^m = \frac{\lim u^{k_u}}{1} = A,$$

donde se conclui que $v = u^{q_u}$ é a variante cuja $m$–ésima potência tende para $A$.

- Caso $A < 1$, o raciocínio a aplicar será o mesmo, sendo apenas necessário considerar $u < 1$. E se $A = 1$, basta tomar a variante cujos termos sejam sempre iguais a um[106].

- Na demonstração deste teorema é ainda provado que toda a variante positiva $v$ cuja $m$–ésima potência tende para $A$ é convergente. Existe evidentemente alguma quantidade positiva $\alpha$ tal que $\alpha^m < A$. E a variante $v$ acaba por ultrapassar esta quantidade $\alpha$, caso contrário $v^m$ não ultrapassaria $\alpha^m$ e, por conseguinte, não tenderia para $A$.

> "Posto isto, sejam $v', v''$ dois valores de $v$ cujos índices crescem indefinidamente. Chamando $\varepsilon', \varepsilon''$ duas certas quantidades infinitamente pequenas, temos, por hipótese,
>
> $$A - v'^{\ m} = \varepsilon', \quad A - v''^{\ m} = \varepsilon'' \ (...)\text{"}^{107}$$

Repare-se que a validade de tais igualdades decorre da proposição 3.2.3, página 165, segundo a qual $v', v''$ são convergentes e equivalentes à variante $v$. Desta forma, teremos:

$$v''^{\ m} - v'^{\ m} = -(\varepsilon'' - \varepsilon').$$

Pelo facto de

$$v'' - v' = -\frac{\varepsilon'' - \varepsilon'}{v''^{\ m-1} + v''^{\ m-2}v' + ... + v''v'^{\ m-2} + v'^{\ m-1}},$$

também

$$|v'' - v'| < \left|\frac{\varepsilon'' - \varepsilon'}{m\alpha^{m-1}}\right|.$$

Pela proposição 3.1.3, página 151, a expressão $\dfrac{\varepsilon'' - \varepsilon'}{m\alpha^{m-1}}$ é uma variante infinitamente pequena. Portanto, $\lim(v'' - v') = 0$, donde se conclui que a variante $v$ é convergente.

---

[106] Relativamente a esta prova, Méray considera ainda na obra de 1887 o caso em que $A = 0$ — veja-se (Méray, 1887), pág. 356. Obviamente que tal seria desnecessário, uma vez que o teorema 3.5.1 que demonstramos se refere apenas a quantidades positivas.

[107] Em (Méray, 1894), pág. 35.

• Finalmente é provado que duas variantes tais como $v$, isto é, duas variantes positivas cuja $m$-ésima potência tende para $A$, são sempre equivalentes. Bastará para tal mostrar que a diferença destas variantes é infinitamente pequena, por um raciocínio semelhante ao utilizado na prova do anterior resultado acessório.

Os três primeiros pontos desta demonstração garantem a existência da $m$–ésima raiz de uma quantidade $A$, e do último ponto concluímos a sua unicidade.

$\blacksquare$

Referindo-se a prova anterior ao caso em que $A$ é comensurável, Méray afirma de seguida:

> "Quando por acaso $A$ é a $m$–ésima potência de qualquer quantidade $a$, todas as variantes tais como $v$ tendem para $a$ e os factos acima oferecem pouco interesse. Mas, quando é de outra forma, estas variantes não podem tender para nenhum número verdadeiro. As condições do nº 50 [convenções da secção 3.4.1] intervêm agora, para fazer reentrar no nosso enunciado a afirmação dos factos em questão."[108]

Procedendo desta forma, o teorema que acabámos de provar torna-se válido para uma quantidade qualquer, comensurável ou incomensurável, daí que a notação $\sqrt[m]{A}$, ou $A^{\frac{1}{m}}$, seja estendida por Méray para números incomensuráveis $A$.

[108]Em (Méray, 1894), pág. 35.

### 3.5.2 Funções não racionais

Para finalizar a apresentação da sua teoria dos números irracionais, Méray considera, ainda nas obras de 1887 e 1894, uma generalização dos resultados relativos a funções *racionais* de quaisquer quantidades, por forma a que estes abranjam igualmente funções *não racionais*. Após ter atribuído um significado às quantidades incomensuráveis, Méray estendeu-lhes as diversas operações elementares, operações estas que estariam todas compreendidas na formação duma função racional. E terá sido por proceder de tal forma que considera ter realizado

> "(...) *implicitamente a mesma extensão para todas as outras operações da Análise*; uma vez que cada uma delas se reduz em definitivo a qualquer combinação mais ou menos complicada das quatro regras vulgares do cálculo."[109]

Uma vez que na obra de 1894 Méray ter-se-á limitado a apresentar conclusões acerca deste assunto, a abordagem que se segue está maioritariamente de acordo com a obra de 1887.

Através da *convenção* III, página 180, Méray estendeu às quantidades incomensuráveis as diversas operações elementares. Desta forma, considera terem sido implicitamente estendidas também às variantes que tomam valores sucessivos incomensuráveis todas as noções respeitantes às outras definições[110]. É, por exemplo, o caso da definição de convergência, de equivalência, e de limite de uma variante, quer ele seja efectivo ou ideal. E são estas mesmas extensões que, segundo ele, permitem

> "(...) definir exactamente *o valor de uma função não racional, para valores quaisquer, comensuráveis ou incomensuráveis, atribuídos às suas variáveis independentes*, pois uma tal função apresenta-se habitualmente como limite duma variante que é uma função conhecida das mesmas variáveis (...)"[111]

Como exemplo de uma tal função não racional, refere o caso de $e^x$, como sendo o limite do polinómio inteiro

$$1 + \frac{x}{1} + ... + \frac{x^m}{1.2...m},$$

[109]Em (Méray, 1894), pág. 35.

[110]Veja-se (Méray, 1894), pág. 35.

[111]Em (Méray, 1887), pág. 358.

que depende do índice infinito $m$ e cujo valor considera "(...) em geral, incomensurável quando o de $x$ também o é."[112].

Na obra de 1887, e somente nesta obra, é ainda considerado um resultado final acerca de variantes convergentes que tomam valores incomensuráveis[113].

**Proposição 3.5.1** Quando uma variante $v_{m,n,\ldots}$ que toma valores incomensuráveis é convergente, podemos sempre fazer-lhe corresponder uma outra variante convergente $u_{m,n,\ldots}$ que lhe é equivalente, mas cujos valores são comensuráveis.

***Demonstração***: Pela definição 3.4.3, página 183, é possível tomar para termos da variante $u_{m,n,\ldots}$ valores aproximados comensuráveis dos termos incomensuráveis de $v_{m,n,\ldots}$, a menos de $\varepsilon_{m,n,\ldots}$. Para tal, poderá tomar-se $\varepsilon_{m,n,\ldots}$ como sendo uma variante infinitamente pequena. Designando por $m', n', \ldots; m'', n'', \ldots$ conjuntos de índices infinitos, teremos então:

$$|v_{m',n',\ldots} - u_{m',n',\ldots}| < \varepsilon_{m',n',\ldots} \quad \text{e} \quad |v_{m'',n'',\ldots} - u_{m'',n'',\ldots}| < \varepsilon_{m'',n'',\ldots}.$$

E será ainda válida a desigualdade:

$$(v_{m'',n'',\ldots} - v_{m',n',\ldots}) - (u_{m'',n'',\ldots} - u_{m',n',\ldots}) < \varepsilon_{m',n',\ldots} + \varepsilon_{m'',n'',\ldots} \ .$$

Pela proposição 3.1.3, página 151, $\varepsilon_{m',n',\ldots} + \varepsilon_{m'',n'',\ldots}$ é infinitamente pequena. E, pelo facto de $v_{m,n,\ldots}$ ser uma variante convergente, podemos afirmar que a diferença $v_{m'',n'',\ldots} - v_{m',n',\ldots}$ é infinitamente pequena. Assim $u_{m'',n'',\ldots} - u_{m',n',\ldots}$ será também infinitamente pequena. Atendendo a que os conjuntos de índices $m', n', \ldots; m'', n'', \ldots$ serão arbitrários, tal significa que a variante $u_{m,n,\ldots}$ é convergente.

A equivalência das variantes $u_{m,n,\ldots}$ e $v_{m,n,\ldots}$ segue da própria definição da variante $u$.

■

[112]Em (Méray, 1887), pág. 358.
[113]Veja-se (Méray, 1887), pág. 358.

### 3.5.3 Considerações finais de Méray

Tendo a teoria das variantes de Méray permitido a criação de um novo conjunto de números, os *números incomensuráveis*, vejamos o modo como o matemático os considerou no universo dos números. Da transcrição seguinte, apenas considerada na última obra de 1894, depreendemos que o matemático terá dessa forma ampliado o conjunto dos números racionais.

> "Não temos portanto mais nenhuma razão para manter a restrição feita aqui tacitamente por nós sobre o sentido da palavra *quantidade*; daqui em diante aplicá-la-emos tanto aos limites ideais de variantes convergentes como às quantidades positivas e negativas que têm exclusivamente os números inteiros ou fraccionários por valores absolutos."[114]

Assim, Méray criou um novo conjunto de números, composto quer por quantidades comensuráveis, quer por quantidades incomensuráveis. No entanto, tal como Weierstrass, e ao contrário de Dedekind, por exemplo, não atribuiu uma nova terminologia a este conjunto, o conjunto dos *números reais*. Mas repare-se que também não o havia feito quando considerou o conjunto de todos os números inteiros ou fraccionários, positivos ou negativos, isto é, o conjunto dos *números racionais*. Estes, designou-os simplesmente por *quantidades*[115].

Além de considerar que a sua teoria dos números irracionais clarificava de um modo satisfatório o conceito de *número incomensurável*[116], Méray esclarece, no final das suas duas últimas obras, de que modo contribuiu para a prova de alguns dos teoremas que considera fundamentais na Análise. Concretamente, refere-se ao facto de toda a sucessão convergente (ou, como dizemos actualmente, toda a sucessão de Cauchy) tender para algum limite, e de toda a sucessão limitada e crescente (ou decrescente) tender para algum limite. Vejamos o modo como o matemático se refere ao primeiro destes resultados.

[114] Em (Méray, 1894), pág. 35.
[115] Veja-se página 138.
[116] Veja-se (Méray, 1887), pág. 355.

> "Formulamos habitualmente nestes termos a regra fundamental que serve para decidir se uma variante dada $v_{m,n,\ldots}$ tende ou não para algum limite:
> *Para que esta variante tenha um limite, é necessário e suficiente que a diferença*
>
> $$v_{m+p,n+q,\ldots} - v_{m,n,\ldots}$$
>
> *tenda para zero para $m, n, \ldots$ infinitos, quaisquer que sejam as relações que possamos estabelecer entre esses índices e os valores simultâneos dos inteiros adicionais $p, q, \ldots$ .*"[117]

O que será equivalente a afirmar, pela definição 3.2.1 de *variante convergente*, página 157, que a condição necessária e suficiente para que uma variante seja convergente é que ela tenda para algum limite. Certamente que tal resultado não seria "formulado habitualmente" para variantes dependentes de mais do que um índice, como é explícito na citação anterior. Será então que Méray pretendia identificar as suas variantes genéricas, dependentes de infinitos índices, com simples sucessões? Se assim fosse, qual teria sido a vantagem de introduzir um conceito tão genérico como o de *variante*? Ou será que, estando consciente da diferença entre uma *variante* e uma *sucessão*, Méray tentou simplesmente generalizar, à luz da sua teoria, os teoremas mais importantes da Análise, por forma a abrangerem o seu tão peculiar conceito?

Para tais questões, parece ser difícil obter uma resposta conclusiva, mas vejamos o que Méray tem a dizer acerca da demonstração de que, de facto, uma variante é convergente se, e apenas se, tender para algum limite. Será, provavelmente, tendo em conta as definições de números irracionais recorrendo ao conceito de limite que o matemático considera não ter sido ainda dada nenhuma demonstração satisfatória desta proposição, afirmando inclusivamente, que nenhuma o será jamais[118]. Isto porque, ao se assumir um número irracional como sendo o limite de uma sucessão de racionais, tal como sucedeu com Cauchy[119], se estabelece *a priori* a existência de tal número, o que conduz a um ciclo vicioso. Relativamente à obtenção de um número irracional, Méray considera mesmo que

[117]Em (Méray, 1887), pág. 358.
[118]Veja-se (Méray, 1887), pág. 359.
[119]Veja-se (Cauchy, 1821), pág. 19.

> "(...) toda a prova da existência duma quantidade comporta essencialmente a indicação de um processo à custa do qual podemos ao menos teoricamente calcular efectivamente o valor."[120]

E será em relação a esta questão que reivindica a vantagem da sua teoria dos números irracionais. Isto porque a proposição que pretende provar decorrerá da simples consideração dos conceitos e convenções aí estabelecidos. Senão vejamos. Pela proposição 3.3.1, página 175, toda a variante que tenda para um limite efectivo é convergente. Por outro lado, pela *convenção* I, página 179, a todas as variantes convergentes que não tendem para um limite efectivo, fizeram-se corresponder *limites ideais*. Portanto, a condição necessária e suficiente para que uma variante $v_{m,n,\ldots}$ tenda para algum limite comensurável ou incomensurável, será que ela seja convergente.

Vejamos agora o que Méray afirma relativamente ao facto de toda a sucessão limitada e crescente (ou decrescente) tender para algum limite. As suas palavras irão conduzir ao mesmo tipo de considerações acerca do conceito de variante.

> "Toda a gente admite como princípio fundamental evidente que *uma variante finita tende sempre para algum limite quando, algebricamente, ela acabe por não poder jamais decrescer ou por não poder jamais crescer.*"[121]

Não seria, mais uma vez, utilizando o conceito de variante que tal enunciado seria formulado. Mas considerando-o apenas para variantes de apenas um índice, isto é, para sucessões de números racionais, devemos reconhecer que, anteriormente à criação do conjunto dos números reais, os matemáticos o assumiam como verdadeiro. E terá sido, inclusivamente, a dificuldade na sua prova uma das razões que conduziu à elaboração de diferentes teorias dos números irracionais no século XIX. Mas também agora Méray afirma que a prova deste resultado decorre da simples consideração das definições e convenções da sua teoria. De facto, segundo a proposição 3.2.1, página 161, toda a variante finita, que algebricamente acabe por não poder decrescer ou por não poder crescer, é convergente. E acabámos de ver que toda a variante convergente admite um limite, comensurável ou incomensurável. Portanto, será imediato que toda a variante

[120] Em (Méray, 1887), pág. 359.
[121] Em (Méray, 1887), pág. 359.

finita, que algebricamente acabe por não poder crescer ou por não poder decrescer, admita um limite.

## 3.6 Considerações acerca da teoria dos números irracionais de Méray

Como pudemos entender ao longo de toda a exposição da teoria dos números irracionais de Méray, a ambiguidade do conceito de variante conduziu à imprecisão de bastantes resultados desta teoria. E se, à custa de certas observações pontuais, de alguma forma "contornámos" tais falhas, não poderemos deixar de as considerar ao apresentar uma crítica global de tal teoria.

Sendo os números incomensuráveis limites de variantes convergentes, para efectuarmos operações aritméticas sobre estes números, teremos, segundo a *convenção* III, de calcular o limite de uma determinada função racional de variantes deste tipo. Inclusivamente, vimos na secção 3.5.2 *Funções não racionais*, que Méray considerou possível o cálculo do valor de funções não racionais para valores quaisquer, comensuráveis ou incomensuráveis. Ora, o facto de Méray permitir o cálculo de funções de variantes dependentes de um número distinto de índices assume agora proporções bastante consideráveis. Uma vez que não será possível adicionar, subtrair, multiplicar ou efectuar outro qualquer tipo de operação entre variantes que não dependam do mesmo tipo de índices, não podemos entender o modo como o matemático efectua tais operações com os números incomensuráveis. Desta forma, toda a teoria dos números irracionais de Méray deixa de fazer sentido. Em todo o caso, tendo também em conta as perspectivas de alguns autores que estudaram a obra de Méray, tentaremos dotar de alguma coerência esta questão.

Se percorremos vários livros da história geral da matemática, verificamos que nas exposições feitas da teoria dos números irracionais de Méray, uma variante é identificada com uma sucessão[122]. Mas será no artigo "Charles Méray (1835–1911) et la notion de limite", de Pierre Dugac, que encontraremos uma análise bastante completa desta teoria. Vejamos o que afirma relativamente à primeira das obras, datada de 1869, onde o matemático aborda esta questão.

[122]Vejam-se, por exemplo, (Boyer, 1949), pág. 289, (Collette, 1973), pág. 215 ou (Dieudonné, 1978), pág. 368.

> "Ele começa por dar a definição de uma sucessão (Méray diz variável progressiva) de números $v = (v_n)$ que tende para um limite $V$ (...)"[123]

Talvez seja admissível supor que, de facto, a definição anterior de *variável progressiva* se refira a sucessões, até porque Méray utiliza nesta obra a notação $v_n$ para uma tal "variável"[124]. Mas será, no mínimo, curioso que Dugac não se tenha referido à maior generalidade das definições de *variante* contidas nas obras posteriores, particularmente a de 1872, onde é explicitamente introduzida[125] a notação $v_{m,n,\ldots}$. Podemos mesmo constatar que, ao referir-se às três últimas obras de Méray, Dugac supôs que as variantes dependem apenas de um índice. Pretendendo ser a teoria das variantes de Méray muito mais geral do que a teoria das sucessões, é estranho que Dugac tenha simplesmente ignorado todo este trabalho do matemático. A não ser que também encontrasse neste carácter generalista de Méray graves imprecisões que tornariam incongruente a sua teoria dos números irracionais. De qualquer forma, em todas as obras onde de alguma forma vimos exposta a teoria dos números irracionais de Méray, não encontrámos qualquer crítica feita neste sentido.

Apesar de um número incomensurável ser definido através de limites de variantes convergentes, será o conceito *variante equivalente* que irá esclarecer qual a entidade representada por um tal número. Ora, pela *convenção* II, página 180, se duas variantes convergentes são equivalentes, dizemos que os seus limites (comensuráveis ou incomensuráveis) são iguais. Por outro lado, a proposição 3.2.2, página 164, garante que duas variantes equivalentes a uma terceira são ainda equivalentes entre si, de onde poderemos deduzir facilmente a transitividade da relação de duas variantes serem equivalentes entre si. Notando ainda que toda a variante convergente será equivalente a si própria, encontramos na teoria de Méray todos os requisitos necessários para interpretar um número incomensurável à custa do conceito actual de relações de equivalência. Podemos, inclusivamente, afirmar que apenas faltariam ao matemático as terminologias actuais para que tal comparação pudesse ser entendida de um modo

[123] Em (Dugac, 1970), pág. 340.

[124] Veja-se um excerto de (Méray, 1869), citado em (Robinson, 1991), pág. 1698.

[125] Veja-se (Méray, 1872), pág. 1.

explícito. Consideremos no conjunto de todas as variantes convergentes a relação "$u$ é *equivalente* a $v$ se e só se $u$ e $v$ são variantes que tendem para o mesmo limite"; podemos encontrar nos resultados de Méray todas as justificações que permitem afirmar que tal relação é uma relação de equivalência. Desta forma, os números comensuráveis ou incomensuráveis serão os limites, respectivamente, efectivos ou ideais das variantes que são representantes de todas as classes de equivalência para tal relação.

Uma das razões que impediram uma maior difusão das ideias de Méray foi a linguagem bastante pessoal com a qual redigiu as suas obras, tornando por vezes os seus textos extremamente difíceis de serem compreendidos. E talvez tenha sido a incompreensão sentida entre a comunidade científica que transformou um jovem apaixonado pelas ciências matemáticas num matemático desencantado com os frutos da sua obra[126].

[126]Veja-se (Dugac, 1970), págs. 333 e 348.

# Capítulo 4

# Conclusão

Uma das mais importantes etapas do processo de aritmetização da análise, empreendido no século XIX, desenvolveu-se em torno do conceito de *número incomensurável*. A problemática com estas entidades não se prendia com a sua existência, já conhecida desde o século VI a.C. através dos trabalhos dos Pitagóricos, mas antes com a elaboração de uma definição que não recorresse a quaisquer intuições geométricas. Era também perfeitamente conhecida desde a Antiguidade Clássica a possibilidade de se obterem grandezas comensuráveis cada vez mais próximas de uma grandeza incomensurável, sem que contudo a conseguissem atingir. Justificadas pela própria descrição de tais processos de aproximação duma grandeza incomensurável, as abordagens aos números irracionais que surgiram até ao início do século XIX faziam uso da noção de um irracional como sendo o limite duma sucessão de números racionais. Tanto Dedekind, como Weierstrass, ou ainda Méray, cujas concepções de número irracional vimos expostas nos capítulos anteriores, identificavam neste tipo de abordagens a necessidade de estabelecer *a priori* a existência do próprio número a ser definido. Se bem que de formas distintas, todos estes matemáticos definiram um número irracional de modo a escapar a este ciclo vicioso: Dedekind através de divisões ou *cortes* no conjunto dos racionais; Weierstrass recorrendo a *grandezas numéricas* formadas de infinitos elementos, isto é, a séries de racionais; e Méray utilizando o ambíguo conceito de *variante*, do qual uma sucessão de racionais é um caso particular. Por forma a atribuir um significado ao conceito de número irracional e às propriedades que um tal número deve verificar, todas as construções partem do mesmo ponto: a suposição de que o conjunto dos números racionais existe. A este respeito, Morris Kline é da opinião de que:

> "Os vários contribuintes para a teoria dos números irracionais ou assumiram que os números racionais eram garantidamente conhecidos, e que nenhuma fundamentação seria necessária, ou davam algum esquema rápido e improvisado."[1]

Sem dúvida que esta crítica se aplica às teorias elaboradas por Dedekind e por Méray: Dedekind parte do conjunto dos racionais, que considera um domínio infinito totalmente ordenado[2] e a partir da noção de *corte* obtém novos números, os *irracionais*; na teoria de Méray, a própria designação de *número* refere-se inicialmente a qualquer racional, e é através do conceito de *variante* que considera a existência de outras quantidades para além das racionais. Mas já relativamente à teoria de Weierstrass a situação é um pouco diferente. Atendendo à própria natureza do seu conceito de número (um "agregado" de elementos[3]), Weierstrass é forçado a construir de raiz o conjunto dos números naturais, formando de seguida o conjunto dos racionais positivos. E será partindo de "agregados" destes números que obtém grandezas para além das racionais.

A própria designação de *irracional* (todo o número que não é racional) dá-nos conta de que é impossível dissociarmos a existência dos números irracionais com a dos racionais. E será por esta razão que, nas suas teorias, Dedekind, Weierstrass e Méray terão considerado, ao menos implicitamente, o conceito de número *real*. Agrupando os números que já existiam (racionais) com os que havia criado (irracionais), Dedekind formulou de facto uma definição de número real[4]. E fazendo uso da correspondência que estabeleceu entre cortes e números reais, provou que o conjunto dos números reais verificava, para além das propriedades dos racionais, a propriedade da *continuidade*. Já na teoria de Weierstrass é o conceito de grandeza numérica formada por uma infinidade de elementos e que tenha um valor finito que identificamos com um número real.

[1] Em (Kline, 1990), pág. 982.

[2] Veja-se (Dedekind, 1963), pág. 5.

[3] Veja-se secção 2.1 *Números usuais e números complexos.*

[4] Veja-se (Dedekind, 1963), pág. 15.

Segundo a sua construção, no conjunto dos números reais terão sido então definidas as operações aritméticas e provadas algumas das suas leis usuais. Finalmente, na teoria de Méray podemos apenas encontrar as terminologias de *número comensurável* e *número incomensurável*, a ideia de que estes números verificam as mesmas propriedades, mas nada que se refira à consideração de um domínio numérico que englobe estes dois tipos de entidades.

Vejamos como Dedekind, Weierstrass e Méray obtêm números irracionais através das suas construções. Dedekind mostra que existe uma infinidade de cortes que não são originados por números racionais[5]. E pela argumentação utilizada nessa prova podemos obter, por exemplo, o irracional $\sqrt{2}$, que será definido através do corte $(A_1, A_2)$ cujas classes são

$$A_1 = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\} \text{ e } A_2 = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\}^6.$$

Weierstrass apresenta o caso de uma grandeza numérica composta de infinitos elementos, a saber, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, ..., \frac{1}{n!}$, à qual não corresponde nenhuma grandeza numérica racional[7]. Através desta grandeza se obtém o irracional $e$. Na teoria de Méray, a obtenção de raízes incomensuráveis através de variantes é justificada pela prova da proposição: "Uma qualquer quantidade positiva (comensurável ou incomensurável) $A$ tem sempre uma $m$-ésima raiz positiva e uma só"[8]. Recordemos que os números incomensuráveis são, segundo esta teoria, limites (ideais) de variantes convergentes. Mas, atendendo até à própria demonstração de Méray do resultado anterior, a $m$-ésima raiz positiva de $A$ é obtida por consideração de variantes que dependem apenas de um índice. O obscuro conceito de *variante* parece ter sido mais uma vez reduzido pelo próprio Méray a uma sucessão de números racionais. Inclusivamente, a obtenção de números irracionais através de variantes parece ser exequível apenas segundo esta interpretação. Atendendo a que a *teoria de extracção de raízes aritméticas*

[5]Veja-se secção 1.4.1 *Cortes e números reais.*

[6]Este exemplo foi, inclusivamente, apresentado por Dedekind na primeira redacção inédita do seu livro *Continuidade e Números Irracionais*, conforme referimos na secção 1.4.1. *Cortes e números reais.*

[7]Veja-se secção 2.3 *Números com infinitos elementos.*

[8]Veja-se secção 3.5.1 *Teoria de extracção de raízes aritméticas.*

terá sido o único modo utilizado por Méray para se referir, em concreto, à obtenção de números irracionais, vemos mais uma vez justificada a redução drástica do conceito de variante ao de uma sucessão de números racionais.

Muito embora as situações que motivaram Dedekind, Weierstrass ou Méray a elaborar coerentes teorias dos números irracionais tenham sido diferentes, todos eles ansiavam o mesmo: fornecer à análise bases sólidas sem quaisquer "empréstimos" da geometria. Pelo menos num ponto as suas teorias são semelhantes. Em todas elas um número irracional é definido à custa de conjuntos de infinitos números racionais. E talvez seja nesta intervenção do *infinito* que se encontra a razão para que tivesse sido tão morosa uma formulação rigorosa do conceito de número irracional.

Na construção do "elementar" conceito de *número* temos forçosamente de atender às noções de *conjunto* e de *infinito*, ou mais genericamente, à de *conjunto infinito*. E se bem que "agregados" de elementos fossem, desde há muito tempo objecto de estudo dos matemáticos, seria apenas com Georg Cantor, ainda na segunda metade do século XIX, que surgiria uma teoria rigorosa dos conjuntos infinitos. O estudo da continuidade do conjunto dos números reais[9] foi a motivação para Cantor se debruçar, em colaboração com Dedekind, sobre o assunto da cardinalidade de conjuntos[10]. Inclusivamente, foi em torno deste tema que se iniciou uma troca de correspondência entre os dois matemáticos, prolongando-se durante cerca de 25 anos[11], considerada por Dieudonné como uma das mais "(...) instrutivas, entre matemáticos, para compreender as origens de uma teoria matemática (...)"[12]. A tão importante propriedade da *continuidade* verificada pelo conjunto dos números reais levou Cantor a questionar-se acerca da existência de uma "maior" quantidade de reais do que racionais. E seria em Dezembro de 1873, decorrido apenas um mês após ter pedido a colaboração de Dedekind para resolver

[9]Recorde-se que Cantor elaborou também uma teoria dos números irracionais, no ano de 1872, em "Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", *Mathematische Annalen*, (5), 123–132.

[10]Veja-se (Dauben, 1979), pág. 50. Para uma análise da obra completa de Cantor pode consultar-se este livro de Joseph Warren Dauben.

[11]Vejam-se as traduções destas cartas para francês em (Cavaillés, 1962), págs. 177–251, ou as cartas inéditas em (Dugac, 1976), apêndice XL.

[12]Em (Dieudonné, 1978), pág. 377.

esta questão, que Cantor provou que o conjunto dos números reais não poderia ser "contado". Esta prova publicou-a pela primeira vez no ano de 1874 no artigo "Acerca de uma Propriedade da Colecção de todos os Números Reais Algébricos. Extensão dum Teorema da Teoria das Séries trigonométricas"[13]. Além de mostrar que o conjunto dos números reais não era *numerável*, Cantor estabeleceu neste artigo uma "técnica" de contagem de conjuntos infinitos, identificando assim que o domínio *contínuo* dos reais não possui a mesma cardinalidade do conjunto dos números racionais, ou números algébricos. E foi ao tentar estabelecer as propriedades do "contínuo", que Cantor sentiu a necessidade de construir, nas duas décadas que se seguiram, uma detalhada teoria dos conjuntos infinitos. Com base no trabalho de Cantor, pôde finalmente fundamentar-se o uso da noção de infinito nas definições do conceito de número irracional que surgiram na segunda metade do século XIX[14].

Com a elaboração de coerentes teorias dos números irracionais, de uma rigorosa teoria dos conjuntos infinitos, e atendendo à pressuposta existência do conjunto dos números racionais, a fundamentação lógica da análise ficara, nos finais do século XIX, enfim reduzida à dos números naturais. Muito embora o nome de Giuseppe Peano se destaque no que se refere à construção de uma teoria logicamente consistente dos números naturais, a contribuição de Dedekind neste campo deve ser também referenciada. No livro *Was sind und was sollen die Zahlen*? (*O que são os números e o que significam*?)[15], publicado no ano de 1888, Dedekind começa por introduzir algumas noções básicas da teoria dos conjuntos, passando de seguida a uma caracterização dos números naturais em termos de conjuntos. A partir desta caracterização deduz o princípio de indução matemática, assim como a definição e propriedades da relação de ordem no conjunto dos naturais, além das operações de adição e multiplicação[16]. A criação de fundações rigorosas para o conjunto dos números naturais foi continuada ainda

---

[13]"Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reelen algebraischen Zahlen. Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", *Journal für die reine und angrwandte Mathematik*, 77, 258–262.

[14]Veja-se (Boyer, 1949) pág. 298.

[15]Existe uma tradução para inglês desta obra em (Dedekind, 1963).

[16]Veja-se (Dedekind, 1963), págs. 61–103.

nos finais do século XIX por Peano e Gottlob Frege. E se por um lado a obra de Frege não foi muito aceite na comunidade científica, em parte pela forma excessivamente filosófica como apresentava os seus resultados, já Peano, com a introdução de uma útil notação simbólica, fez vingar as suas ideias[17]. No Prefácio dos seus *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, de 1889, Peano reconhece a influência que o trabalho de Dedekind teve sobre a sua obra. Na sua opinião, em *Was sind und was sollen die Zahlen*?, Dedekind examina com extrema perspicácia as questões relativas aos fundamentos dos números[18]. Nos seus *Principia*, Peano expõe pela primeira vez um conjunto de resultados que fundamentam o conjunto dos números naturais e todos os domínios que dele dependem. Conhecidos por *axiomas de Peano*, eles representam, segundo Boyer, "(...) a mais notável tentativa do século de reduzir a aritmética comum, portanto no fim a maior parte da matemática, a puro simbolismo formal."[19].

Foi com o contributo de Peano, juntamente com os de Weierstrass, Dedekind e Cantor que finalmente a análise pôde ser colocada sobre uma base firme, começando com as noções básicas da teoria dos conjuntos. Mostrou-se assim que na análise não há necessidade de considerar algo mais do que números, ou conjuntos finitos ou infinitos de números. Citando Boyer

> "Quão surpreendente a propósito, em relação ao desenvolvimento do cálculo, o ditado Pitagórico: *Tudo é número*!"[20]

[17]Veja-se (Boyer, 1974), pág. 436.
[18]Veja-se (Collette, 1973), pág. 297.
[19]Em (Boyer, 1974), pág. 437.
[20]Em (Boyer, 1949), pág. 298.

# Referências


Bolzano, Bernhard. 1817. *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen jezwey Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine relle Wurzel der Gleichung liege.* Prague.

Boyer, Carl B. 1949. *The History of the calculus and its conceptual development.* New York: Springer-Verlag.

Boyer, Carl B. 1974. *História da Matemática.* São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda.

Cauchy, Louis. 1821. *Oeuvres Complètes.* II Série Tome III. Paris: Gauthier-Villars.

Cavaillés, Jean. 1962. *Philosophie mathématique.* Paris: Hermann.

Collette, Jean-Paul. 1973. *Histoire des mathématiques.* Vol. II. Ottawa, Canada: Éditions du Renouveau Pédagogique Inc.

Corry, Leo. 1994. La teoria de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind. *Mathesis*, **10**, 1–24.

Corry, Leo. 1996. *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures.* Basel: Birkhäuser Verlag.

Dantscher, Victor. 1908. *Vorlesung über die weierstrasssche Theorie der irrationalen Zahlen.* Leipzig: Teubner.

Dauben, Joseph Warren. 1979. *Georg Cantor - His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* Cambridge: Harvard University Press.

Dedekind, Richard. 1858. *Stetigkeit und irrationale Zahlen.*

Dedekind, Richard. 1963. *Essays on the theory of numbers.* New York: Dover.

Dieudonné, Jean. 1978. *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900.* Paris: Hermann.

Dugac, Pierre. 1970. Charles Méray (1835-1911) et la notion de limite. *Revue d'Histoire des Sciences*, **XXIII**(4), 333–350.

Dugac, Pierre. 1973. Eléments d'analyse de Karl Weierstrass. *Archive for History of Exact Sciences*, **10**, 41–176.

Dugac, Pierre. 1976. *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques.* Paris: Vrin.

Euclid. 1956. *The thirteen books of The Elements.* 2ª Edição. Vol. II. New York: Dover Publications, Inc.

Ewald, William. 1996. *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics.* Vol. II. Oxford: Clarendon Press.

Fraenkel, Abraham A. 1964. *Extension of the number concept.* New York: Scripta mathematica.

Frajese, Attilio. 1972. Il primo centenario del postulato della continuità. *Mathesis*, **3-4**, 123–128.

Freudenthal, H. 1971. Did Cauchy Plagiarize Bolzano? *Archive for History of Exact Sciences*, **7**, 375–392.

Gardies, Jean Louis. 1984. Eudoxe et Dedekind. *Revue d'Histoire des Sciences*, **XXXVII**(2), 111–125.

Grattan-Guiness, I. 1970. Bolzano, Cauchy and the "New Analysis" of the Early Nineteenth Century. *Archive for History of Exact Sciences*, **6**, 372–400.

Hermite, Émile. 1912. *Oeuvres de Charles Hermite*. Tome III. Paris: Gauthier-Villars.

Hettner. 1874. *Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen*.

Hurwitz, Adolf. 1878. *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen*.

Katz, Victor J. 1998. *A History of Mathematics - An Introduction*. 2ª Edição. New York: Addison-Wesley.

Kline, Morris. 1990. *Mathematical thought - From Ancient to modern times*. Vol. 3. Oxford: Oxford University Press.

Lima, Elon Lages. 1992. *Curso de Análise*. Vol. I. Impa - Instituto de Matemática Pura e Aplicada: Rio de Janeiro.

Méray, Charles. 1869. Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données. *Revue des Sociétes Savantes des departements, Section sciences mathématiques, physiques et naturelles*, 10, 280–289.

Méray, Charles. 1872. *Nouveau Précis d'Analyse Infinitésimale*. F. Savy, Libraire-Éditeur: Paris.

Méray, Charles. 1887. Sur le sens qu'il convient d'attacher à l'expression nombre incommensurable et sur le critérium de l'existence d'une limite pour une quantité variable de nature donnée. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **IV**(3), 342–360.

Méray, Charles. 1894. *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses apllications géométriques*. Prémière partie - Principes Généraux. Paris: Gauthier-Villars.

Rootselaar, B. van. 1962. Bolzano's Theory of Real Numbers. *Archive for History of Exact Sciences*, **2**, 168–180.

Rychlik, Karel. 1961. La théorie des nombres réels dans un ouvrage phostume manuscrit de Bernard Bolzano. *Revue d'histoire des sciences*, **XIV**(3-4), 313–327.

Schwarz. 1861. *Differentialrechnung, Ausarbeitung der Vorlesung an dem Königlichen.*

Sebestik, Jan. 1964. Bernard Bolzano et son Mémoire sur le théorème fondamental de l'Analyse. *Revue d'Histoire des Sciences*, **XVII**, 129–164.

Sinaceur, Mohamed A. 1979. La méthode mathématique de Dedekind. *Revue d'Histoire des Sciences*, **XXXII**(2), 107–142.

Stein, Howard. 1990. Eudoxus and Dedekind: on the ancient greek theory of ratios and its relation to modern mathematics. *Synthese*, **84**, 163–211.

Thieme. 1886. *Ausgewählte Kapitel aus der Funktioneblehre.*

Weierstrass, Karl. 1923. Briefe an Paul du Boi-Reymond. *Acta mathematica*, **39**, 199–225.

Weyl, Hermann. 1994. *The Continuum - A Critical Examination of the Foundation of Analysis.* New York: Dover Publications, Inc.