NÚMEROS: DESENVOLVIMENTO CURRICULAR E TECNOLOGIA

Luís Menezes

Escola Superior de Educação de Viseu e CI&DETS

menezes@esev.ipv.pt

Susana Carreira

FCT, Universidade do Algarve e CIEFCUL

scarrei@ualg.pt

Introdução

Os Números e as operações constituem um tema matemático que desde há muito tempo se tornou presente na matemática escolar. Essa forte presença reflecte-se no peso significativo que o tema tem no corpo de conhecimentos e experiências matemáticas dos alunos, bem como na sua visão da disciplina. A este propósito, Segurado e Ponte (1998) sublinham que os alunos associam a Matemática aos números, emergindo por vezes, deste facto, uma concepção redutora da disciplina como mero cálculo. Para esta análise é importante considerar três níveis de currículo: (i) Enunciado ou prescrito — o ponto de vista das autoridades educativas; (ii) Implementado ou ensinado — o ponto de vista do professor; (iii) Adquirido ou aprendido — o ponto de vista do aluno (Ponte, Matos & Abrantes, 1998). Para a nossa reflexão, interessam-nos sobretudo os dois primeiros, ou seja, debater a investigação que incide sobre os documentos curriculares oficiais e sobre a forma como o professor desenvolve esse currículo tendo em vista o ensino dos *Números*.

O tema *Números* nos currículos oficiais de Matemática

O tema *Números e operações* ocupa um lugar de destaque nos documentos curriculares da generalidade dos países, tanto na actualidade como historicamente. As preocupações com o desenvolvimento da capacidade para compreender informação em formato numérico, usando-a para a resolução de problemas, têm estado presentes, de forma diferenciada, na elaboração dos currículos de Matemática e também no seu desenvolvimento no contexto escolar. Brown, Millett e Askew (2008) descrevem essas preocupações no caso inglês, analisando o impacto da estratégia nacional de numeracia no ensino e aprendizagem da Matemática. No caso português, o conhecimento que temos dos *Números* nos currículos de Matemática ao longo do tempo, nomeadamente a forma como têm sido encarados, é bastante reduzido (Brocardo & Serrazina, 2008). Estas autoras, centrando-se no século XX, identificam alguns períodos marcantes e as preocupações do momento. Os anos 40 e 50 foram marcados pela ênfase na memorização e mecanização do cálculo. A partir dos anos 70, os currículos portugueses de Matemática sofrem a influência das ideias de Piaget e do movimento da “Matemática moderna”, embora continuem a revelar uma grande incidência no conhecimento dos factos e procedimentos (Brocardo & Serrazina, 2008). Os programas da década de 90 dão visibilidade ao desenvolvimento de capacidades, nomeadamente à resolução de problemas, valorizam uma visão mais integrada dos diversos temas (em especial dos Números e da Geometria) e o uso da tecnologia. No Programa de Matemática do 2.º Ciclo aponta-se, por exemplo, para que a “par do uso progressivo da calculadora, simultaneamente utilizada como auxiliar de cálculo e como instrumento de pesquisa, é da maior importância a prática do cálculo mental” (ME, 1991, p. 16). Já no Programa do 1.º Ciclo, Brocardo e Serrazina (2008) sublinham que continua a notar-se um currículo centrado no conhecimento de factos e na aquisição de técnicas rotineiras. Para além disso, asseveram que a apresentação dos tópicos relativos aos números é feita de forma muito espartilhada, não favorecendo a construção de conceitos.

Tendo em conta o exposto, é notório que esta é uma área em que subsistem muitas questões em aberto, que representam, portanto, amplas oportunidades para a investigação: Como tem evoluído o tema dos Números nos currículos portugueses de Matemática? Como tem sido construído o currículo enunciado no tema dos *Números* nos diversos níveis de ensino? O que tem influenciado a sua construção e que decisões têm sido tomadas? Qual o lugar que ocupam as tecnologias? Qual o impacto da investigação em educação matemática, e em outros domínios, na concepção do currículo? Que papel têm tido os professores neste processo de construção curricular? E os alunos?

Mudança curricular: o novo Programa de Matemática do ensino básico

A mudança curricular tem normalmente por base a convicção de que os currículos estão desadequados face às aprendizagens que se pretendem promover nos alunos, seja porque se alteraram finalidades e objectivos, temas e capacidades matemáticos, seja porque surgem novos métodos de ensino. O novo programa de Matemática do ensino básico aprovado em finais de 2007 (Ponte et al., 2007) propõe algumas mudanças face ao anterior, reformulando as finalidades e objectivos, bem como os temas, capacidades e métodos de ensino. Centrando-nos no tema deste Grupo de Discussão, observa-se que o novo programa propõe o seu tratamento dos *Números* ao longo dos três ciclos, variando em termos da extensão e profundidade dos conceitos numéricos trabalhados. A abordagem aos *Números e operações* tem por base três ideias fundamentais: “promover a compreensão dos números e operações, desenvolver o sentido de número e desenvolver a fluência no cálculo” (Ponte et al., 2007, p. 17). A ideia de sentido de número é central na abordagem do tema, ao longo dos três ciclos, à medida que os alunos avançam no conhecimento dos números e das operações. O sentido de número é concebido como a compreensão dos significados dos números, o desenvolvimento de múltiplas relações entre números, o reconhecimento da grandeza relativa dos números, o conhecimento do efeito relativo de operar com números e o desenvolvimento de padrões de medida de objectos comuns e de situações do meio ambiente (NCTM, 1991, 2000). Esta forma de conceber os números tem consequências na abordagem aos algoritmos das operações, que são introduzidos mais tarde e com mais compreensão. O cálculo mental ganha grande relevância, beneficiando da compreensão que os alunos têm dos números. Um outro aspecto a destacar no novo programa é a introdução em paralelo das representações fraccionária e decimal dos números racionais. Espera-se que os alunos sejam capazes de usar a representação mais adequada em cada situação, sendo também capazes de passar de uma representação a outra.

A aprendizagem da Matemática, e em particular dos números, inclui a utilização de diversos recursos. Ao longo dos diferentes ciclos, o novo programa de Matemática prevê que os alunos usem calculadoras e computadores na realização de cálculos complexos e na representação de informação. O seu uso é particularmente importante na resolução de problemas – uma das três capacidades a que se dá especial destaque, a par da comunicação e do raciocínio matemáticos – e na exploração de situações em que os cálculos são morosos e os procedimentos de rotina não são o objectivo principal. Dessa forma, os alunos ganham tempo para se centrarem nos aspectos estratégicos do pensamento matemático e na interpretação e avaliação dos resultados.

Em relação a este novo programa, algumas questões se podem colocar: Qual o apoio dado pela investigação, particularmente a realizada em Portugal, neste campo dos *Números*, a este novo Programa? Em que domínios parece ser mais premente a realização de investigação complementar?

Desenvolvimento curricular do tema *Números*

A passagem do currículo planeado ao currículo ensinado envolve um trabalho de diversos actores, uns locais e outros centrais. Ponte, Matos e Abrantes (1998) referem três tipos de desenvolvimento curricular: (i) o desenvolvimento em larga escala, que diz respeito a todo um país ou sistema; (ii) o desenvolvimento local, que respeita a projectos englobando grupos de escolas ou professores; (iii) o desenvolvimento individual, relativo a um professor ou um pequeno grupo de professores. Nos sistemas de ensino centralizados, a administração faz grande parte deste trabalho de desenvolvimento curricular, impondo a mudança de cima para baixo. Nos sistemas de ensino mais descentralizados, é às escolas e aos professores, num contexto local, que cabe grande parte deste trabalho de desenvolvimento do currículo. Em Portugal, na educação, como em muitas outras áreas, temos uma tradição de alguma centralização, que tem sido tanto imposta como desejada pelos diversos actores. O exercício da autonomia implica grandes desafios, que incluem necessariamente riscos e o assumir de responsabilidades. Estarão as escolas e os professores de Matemática portugueses preparados para esses desafios? Que papel podem ter as dinâmicas colaborativas entre professores e entre escolas neste processo? E a investigação, nomeadamente a investigação realizada por professores sobre a sua prática, que papel pode ter?

No desenvolvimento curricular deste tema há um conjunto de preocupações que resultam de novos desafios que emergem, grande parte deles colocados pelo novo programa de Matemática. Uns dizem respeito às ideias e processos matemáticos que se pretendem trabalhar e outros, claro que relacionados, à forma de os trabalhar em sala de aula. Nos primeiros sobressaem temas como a aprendizagem do sentido de número, as operações e suas propriedades, os algoritmos das operações, os números racionais, o cálculo mental e escrito com diferentes números e representações e as capacidades transversais. As outras preocupações são relativas ao modelo de aula que se pretende desenvolver, aos papéis a desempenhar pelo professor e pelos alunos, à natureza das tarefas a propor, aos recursos didácticos a que se vai recorrer e às dinâmicas comunicacionais que se vão criar. Estes aspectos estão presentes na cabeça dos professores em diversos momentos – quando analisam o currículo, ainda com algum distanciamento da aula, no momento da sua planificação, na execução e depois quando reflectem sobre ela.

O uso da tecnologia: Números e operações

Um dos grandes desafios que hoje se coloca ao currículo de Matemática, em todos os níveis de ensino, reside na forma como instrumentos de cálculo poderosos (tanto numérico como simbólico) se tornaram acessíveis e mesmo triviais nos nossos dias. Como sabemos, estão hoje incorporados num pequeno teclado uma enorme rapidez e poder de cálculo, que se resumem ao premir de duas ou três teclas. Por isso, como faz notar Amado (2007), "o tipo de actividade matemática que agora se pretende que os alunos sejam capazes de realizar mudou substancialmente em comparação com o que era privilegiado no passado" (p. 138). A mesma autora afirma – com base em exemplos de questões dos exames nacionais do ensino secundário, em que ilustra e discute as abordagens actualmente viabilizadas pelas tecnologias – que "a calculadora veio transformar de forma significativa o nível e a natureza das questões a apresentar ao aluno" (p. 138). É esta mudança do tipo e da qualidade das questões e dos conhecimentos relevantes a desenvolver com os alunos que é fortemente pressionada pela tecnologia, cada vez mais omnipresente:

> Qualquer problema que tenha ficado reduzido a um botão numa calculadora omnipresente – tal como uma raiz quadrada, o cálculo de um logaritmo, um máximo ou um mínimo, uma solução gráfica ou uma equação diferencial – já não pode ser considerado um problema difícil ou inacessível. (Smith, 2002, s/p).

Mas as reacções e as concepções fundamentais quanto ao uso das tecnologias, especialmente no que diz respeito à calculadora, continuam a ser antagónicas e a mostrar uma divisão entre matemáticos e educadores matemáticos, no seio dos professores de Matemática e entre os pais, e em geral na opinião pública, muito à mercê da influência dos meios de comunicação social (Ponte & Cebola, 2008; Amado, 2007). As posições dividem-se entre os efeitos perniciosos que se atribuem à calculadora, na diminuição da capacidade de cálculo dos alunos e da sua capacidade de raciocínio, e as vantagens do uso deste instrumento na resolução de problemas e na exploração de relações numéricas (Ponte & Cebola, 2008). Em suma, como sublinham Ponte e Cebola (2008), o uso da calculadora básica e científica no ensino da Matemática é uma questão que ainda está por resolver:

> Muitas são, portanto, as portas abertas à investigação, quer em relação à atitude dos alunos e dos professores no respeitante à utilização da calculadora, quer em relação às orientações curriculares e ao papel dos manuais escolares, quer ainda em relação ao ponto de vista da sociedade actual. (p. 96).

Apesar das divergências e das discordâncias assinaladas e das muitas questões em aberto, a verdade é que permanecem ignorados resultados criteriosos produzidos por estudos, experiências no terreno da aula de Matemática e meta-investigações, que permitem o desanuviamento de muitas das reservas actualmente acenadas sobre o uso da calculadora. Por exemplo, desde 1991, que o NCTM afirma, nas Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar: "Contrariamente aos receios de muitos, o acesso às calculadoras e computadores melhorou a capacidade dos alunos no cálculo. Não existem indícios de que o acesso às calculadoras torna os alunos dependentes delas para os cálculos simples". (NCTM, 1991, p. 10).

E, a par desta afirmação, temos igualmente a visão de matemáticos actuais sobre a forma como a Matemática, designadamente na resolução de problemas complexos, também está a mudar rapidamente de uma abordagem analítica, em busca de uma solução geral, para uma abordagem computacional que permite a análise de muitas soluções por via numérica:

> Antigamente escrevíamos uma equação, por exemplo, a equação de Schrödinger para o átomo de hidrogénio e sentávamo-nos a resolvê-la analiticamente, de uma forma fechada. Mas, actualmente, os sistemas físicos que se estudam são muito mais complicados, com um número infinito de partículas. Portanto, já não há equações simples. Em vez disso, fazemos simulações em computador para tentarmos ter uma ideia de como o sistema se comporta. É um novo tipo de física e as equações só podem ser resolvidas numericamente, nunca analiticamente. Nunca chegamos a uma expressão geral para uma solução. Limitamo-nos a olhar para muitos casos individuais, um a um, numericamente, para tentarmos ter uma ideia do que está a passar-se. (Chaitin, 2003, p. 115).

Quando o novo programa de Matemática para o ensino básico explicita claramente a importância de trabalhar o sentido do número e a compreensão dos números e das suas operações, está a traduzir efectivamente o facto de que aprender a operar e a trabalhar com números, a lidar com os algoritmos a partir da sua compreensão, a ter a noção de grandeza e do valor posicional dos algarismos e da sua estrutura multiplicativa, a perceber o que são aproximações razoáveis para a resposta a um problema, a saber interpretar criticamente resultados, é algo de significativamente diferente daquela que foi, durante muito tempo, a visão do papel do cálculo e dos algoritmos na aprendizagem da Matemática. Hoje parece amplamente suportada a afirmação de Cebola (referindo Ponte & Serrazina, 2000):

> Não tem qualquer nexo tentar ensinar um algoritmo de uma operação a um aluno que ainda não compreendeu o significado dessa operação. Os algoritmos não devem, portanto, ser o objectivo principal do cálculo aritmético.
>
> (...) Os algoritmos permitem tratar as operações de uma forma mecanizada, onde não é preciso pensar muito sobre o assunto, basta seguir os passos definidos à partida. No entanto, calcular com sentido do número significa que cada um deve olhar primeiramente para os números e depois decidir por uma estratégia que se coadune e seja eficiente, (Cebola, 2002, p. 237).

Que implicações traz esta mudança para a utilização de calculadoras e computadores numa perspectiva de desenvolvimento do sentido do número e da compreensão dos números?

O novo programa de Matemática do ensino básico dá um conjunto de indicações inequívocas sobre esta questão, destacando-se a seguinte: "Ao longo de todos os ciclos, os alunos devem usar calculadoras e computadores na realização de cálculos complexos, na representação de informação e na representação de objectos geométricos." (Ponte et al., 2007, p. 10).

Dois exemplos de tecnologias em *Números*

Um estudo apresentado por Moyer, Niezgoda e Stanley (2005), no 67.º *Yearbook* editado pelo NCTM, dedicado aos ambientes de aprendizagem suportados pela tecnologia, os autores exploram as potencialidades dos materiais manipulativos virtuais. Actualmente, estes encontram-se disponíveis em diversos formatos e acessíveis através da Internet, oferecendo uma variedade de representações matemáticas e, em especial, numéricas. A propósito do uso de uma ferramenta que faz uso dos blocos de base 10, com alunos do 2.º ano, os autores concluíram que "o modelo visual (blocos de base 10 virtuais) ajudou os alunos a «verem» o reagrupamento dos números durante o processo de adição, o que conferiu a este processo mais significado para os alunos" (p. 31). O mesmo trabalho aborda o valor posicional dos algarismos e cita a investigação existente para notar que muitos alunos até ao 3.º e ao 4.º ano têm uma compreensão deficiente do valor posicional, afirmando que o 1 no número 15 significa um. Com o projecto realizado por estes autores, foi apurado que "as imagens visuais das dezenas e das unidades ajudaram as crianças a desenvolver significado dos algarismos nas posições das unidades e das dezenas". Além disso, notaram que as crianças transferiram com facilidade essa compreensão para tarefas de adição não pictóricos.

A questão da grandeza de um número, do significado do valor posicional dos algarismos e da sua influência na grandeza do número pode ser um bom exemplo de uma actividade para a sala de aula, com a vantagem de poder funcionar como um jogo. Estamos a referir-nos a uma aplicação simples ou *applet*, designada por "Jogo do Valor Posicional" (em inglês), disponível em http://education.jlab.org/placevalue/index.html.

O objectivo do jogo é criar o maior número possível com os dígitos que o computador vai gerando aleatoriamente. O computador dá um dígito de cada vez, que o jogador tem de colocar numa posição do número, sem saber qual vai ser o dígito a sair na extracção seguinte. O jogador não tem permissão para alterar a ordem dos dígitos que já colocou, por isso, terá de pensar cuidadosamente antes de fazer a colocação de cada dígito. O jogo tem ainda algumas opções como escolher o número de dígitos que o número terá, decidir um número de dígitos que poderão ser recusados (0 a 3 dígitos) e estabelecer o valor máximo dos dígitos a utilizar. Por exemplo, para um número formado por quatro dígitos, as extracções consecutivas foram as seguintes:

1.ª extracção:	**2.ª extracção:**	**3.ª extracção:**	**4.ª extracção:**
1	1	0	6

O curioso do jogo está em saber "arriscar" e esperar que não saia um algarismo menor do que os já utilizados anteriormente. Por isso, vamos tentando colocá-los por ordem crescente, das unidades para os milhares, mas... nem sempre se acerta. Uma tentativa razoável, mas sem sucesso seria a seguinte:

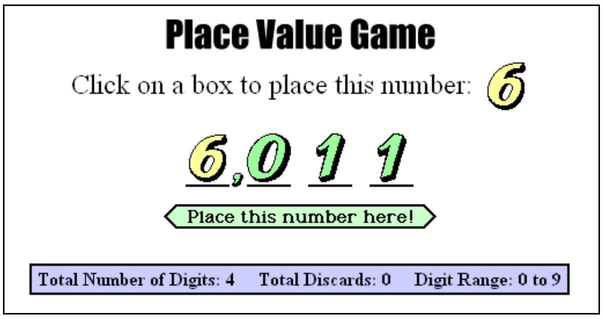


Figura 1. Uma tentativa falhada de obter o maior número possível

O computador é simpático (e diz-nos que foi uma boa tentativa!) mas mostra-nos depois qual seria o maior número possível com os dígitos extraídos, se tivéssemos conseguido "adivinhar" onde eles deveriam ser colocados.

Figura 2. A comparação entre o maior número possível e o número criado

Questões possíveis acerca desta breve experiência poderão ser:

- Se eu tivesse optado pela possibilidade de descartar um dígito, que dígito teria descartado?

- Se tivesse descartado um dos dígitos, conseguiria ganhar? Se sim, em que condições?
- Se, em vez de um 0 tivesse saído um 9, na 3ª extracção, o que deveríamos fazer? Nesse caso, se o 6 viesse na 4ª extracção, o que aconteceria? E como fazer, neste caso?

O primeiro 9 fica logo na posição dos milhares! A seguir sai um 6. Vai ter de ficar à direita

1.ª extracção:	**2.ª extracção:**	**3.ª extracção:**	**4.ª extracção:**
9	6	9	7

... Nas centenas ou nas dezenas? Ainda podem sair dígitos maiores ou iguais a 6: 9, 8, 7, 6. Mas também menores do que 6: 5, 4, 3, 2, 1, 0. A situação parece relativamente equilibrada. Arriscamos a colocar o 6 na casa das dezenas. Sai depois um 9. Claro que ficará nas centenas. Resta esperar que o último a sair seja menor que 6... Sai um 7... Tudo estragado!

Figura 3. Uma nova tentativa falhada

Finalmente, sempre chega uma sorte... os seguintes dígitos saíram muito bem “ordenados”.

1.ª extracção:	**2.ª extracção:**	**3.ª extracção:**	**4.ª extracção:**
9	8	6	1

Por que é que, neste caso, não foi difícil conseguir o maior número possível?

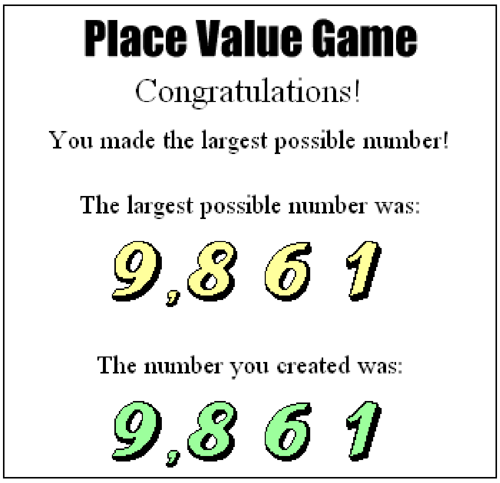


Figura 4. Uma experiência bem sucedida

Uma outra tarefa experimentada num estudo de Kieran e Guzmán (2005) revela-se muito interessante para o desenvolvimento de conceitos elementares de teoria de números, com recurso à calculadora. Estes autores consideram que os alunos dos níveis médios do ensino básico e também o desenvolvimento de conceitos elementares de teoria de números têm recebido, até ao momento, escassa atenção na literatura relativa à utilização das tecnologias. Apesar de recomendações, como as do NCTM (2000), que apontam para o envolvimento dos alunos em tarefas onde estejam presentes divisores, múltiplos, números primos e divisibilidade, parece haver falta de bom material para trabalhar sobre estes tópicos, quer nos livros de texto quer nos recursos profissionais. A actividade que esteve na base deste estudo, com alunos de 7.º, 8.º e 9.º anos, intitula-se "Cinco passos até ao zero" e foi adaptada de uma proposta de Williams e Stephens (1992):

> Escolhe um número inteiro de 1 a 1000 e tenta levá-lo até zero, em cinco passos ou menos, usando apenas os números inteiros de 1 a 9 e as quatro operações básicas: $+, -, \times, \div$. Podes usar o mesmo número mais do que uma vez nas operações a efectuar. (Kieran & Guzmán, 2005, p. 38).

O trabalho relatado incidiu na exploração da tarefa, descrevendo-se como os alunos passaram de estratégias de tentativa e erro para formas mais ponderadas de resolver o problema, identificando, no decurso da sua exploração, propriedades e relações numéricas relevantes. Por exemplo, um dos alunos apresentou a seguinte solução para o número 432:

$$432/2 = 216$$
$$216/2 = 108$$
$$108/2 = 54$$
$$54/3 = 18$$
$$18/3 = 6$$
$$6 - 6 = 0$$

A este aluno foram colocadas questões sobre a sua estratégia: Explica a tua estratégia. Achas que funcionará sempre? Porquê?

De acordo com os resultados obtidos nesta investigação, os alunos começaram por atender a critérios simples de divisibilidade (por 2 se o número era par ou por 5 se o número terminava em 0 ou 5). Progressivamente, a técnica foi evoluindo para a procura do maior divisor possível, de 1 a 9. Mais tarde, surgiu a hipótese de subtrair ou adicionar um número ao inicial, de modo a que o resultado fosse divisível por 9, pois esta seria uma forma de chegar mais rapidamente ao zero.

Outros alunos começaram a desenvolver aproximações ao número dado pela multiplicação de factores tão altos quanto possível (por exemplo, $9\times9\times9$ está perto do número 732, $9\times8\times6$ está perto do número 431), de forma a iniciarem o processo com a necessária adição ou subtracção e depois continuarem com as divisões correspondentes ao inverso dos produtos encontrados.

Acerca do papel da calculadora que esteve presente na actividade desenvolvida, os autores reconhecem que as teclas das operações $+,-,\times,\div$ permitiram aos alunos realizar as sucessivas operações num único andamento. Isto levou a que não tivessem de se fixar nos passos intermédios que tenderiam a captar a sua atenção numa resolução com papel e lápis. Assim, o foco da atenção foi dirigido para aspectos estruturais dos números e da sua decomposição, os quais se poderiam ter eclipsado de outra forma. Em particular, no caso das operações de multiplicação e divisão, os alunos ficaram livres para analisar os produtos e quocientes em relação aos números que os produziram. Em resumo, os autores concluíram que: "Num ambiente de papel e lápis é muito mais difícil para os alunos pensarem sobre a teoria matemática enquanto estão a tentar concentrar-se na obtenção do resultado numérico correcto de uma operação" (Kieran & Guzmán, 2005, p. 41).

Sequências e regularidades: Investigações numéricas

Tal como deriva das novas orientações curriculares e é defendido por diversos autores, as investigações numéricas constituem um ambiente propício ao desenvolvimento de um largo conjunto de capacidades e, ao mesmo tempo, favorecem o desenvolvimento de conhecimentos importantes acerca dos números (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003): "Desde muito cedo, podem ser propostas tarefas em que os alunos são convidados a analisar padrões e regularidades envolvendo números e operações elementares" (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003, p. 64).

Um exemplo de tecnologias em *Investigações Numéricas*

Uma tarefa cuja exploração foi feita por alunos de 14-16 anos é relatada por Lozano (2004) e intitula-se "O salto da rã". Esta situação pode ser trabalhada com materiais simples e manipuláveis, como moedas ou fichas de duas cores que simulam rãs sobre nenúfares. As rãs de uma mesma cor estão todas alinhadas do lado direito e as da outra cor estão todas alinhadas do lado esquerdo. O objectivo é passar as rãs de cada cor para o lado contrário. Cada rã pode saltar por cima de uma rã de outra cor ou deslizar para um nenúfar vazio que lhe seja contíguo. Não podem estar duas rãs sobre o mesmo nenúfar.

Uma outra hipótese de explorar este problema consiste na utilização de um *applet* como o que se encontra em http://www.mathsnet.net/puzzles/leapfrog/index.html. (de entre outros semelhantes disponíveis na Web).

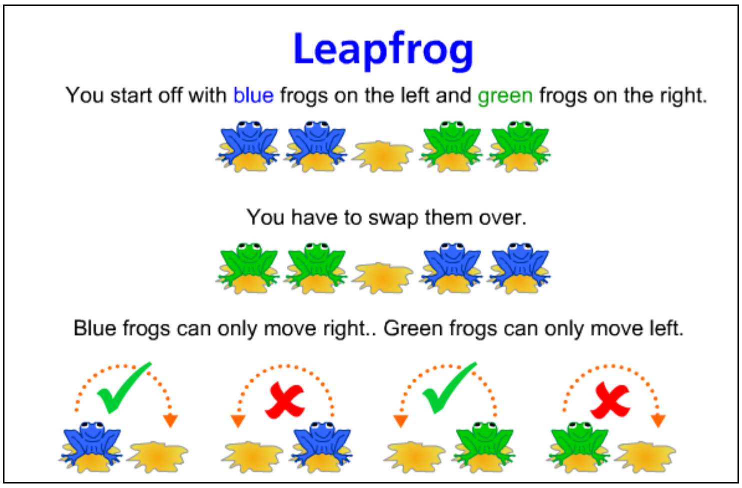


Figura 5. O jogo do salto da rã e as suas regras

Nesta aplicação, pode ser escolhido o número de rãs de cada cor e as rãs são transportadas com o movimento do ponteiro para as posições que pretendermos, de acordo com as regras estabelecidas. O objectivo essencial é o de saber qual o número mínimo de movimentos necessários para transferir as rãs para o lado contrário ao inicial. O próprio programa exibe o seguinte desafio: "És capaz de encontrar uma regra para o número de movimentos? Investiga...".

Segundo Lozano (2005), esta proposta é particularmente adequada para aplicar procedimentos indutivos, em que a consideração de casos particulares se torna na base para a obtenção de novos dados, em busca de regularidades que conduzam a resultados mais gerais. O autor refere que os alunos identificam regularidades no número de passos de cada configuração e que são igualmente interessantes as relações que estes estabelecem entre configurações "sucessivas" (duas rãs de cada cor, três rãs de cada cor, etc.).

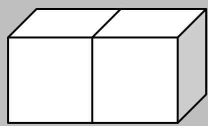
Com este tipo de problema, é muito natural surgirem diferentes formas de resolução por parte dos diversos alunos e é muito importante que o professor insista em verificar que os resultados obtidos são expressões equivalentes ou que constituem particularizações de expressões gerais que só têm em conta alguns dos casos possíveis. Por exemplo, para o mesmo número de rãs de cada cor, o número de movimentos é o quadrado do número de rãs de uma cor, mais o dobro do número de rãs de uma cor (p. ex. azuis), $A^2 + 2A$. Para diferentes números de rãs de cada cor, o número de movimentos é o produto dos números de rãs (azuis e verdes), mais a soma dos números de rãs, $AV + A + V$.

Do pensamento aritmético ao pensamento algébrico: O recurso à folha de cálculo

Ainda no domínio dos *Números*, a transição da Aritmética para a Álgebra tem sido objecto de interesse na investigação em educação matemática. A par deste tema, assoma um novo apelo à investigação sobre as potencialidades da folha de cálculo, que não sendo uma ferramenta desenhada para o trabalho em torno de conceitos matemáticos, manifesta potencialidades desde há muito reconhecidas como úteis na resolução de problemas em diversos domínios (Moreira, 1989; Carreira, 1992; Amorim, 1996) designadamente pela sua capacidade de colocar em interacção diferentes modos de representação (algébrica, numérica, gráfica, pictórica).

As actividades de criação de padrões numéricos e de descoberta de regras gerais em situações numéricas podem ser um dos meios de fazer a transição da Aritmética para a Álgebra formal (Lee, 1996, referido por Lannin, 2005). A actividade típica de construção de padrões numéricos oferece um contexto para levar os alunos a generalizar uma regra que pode ser usada para determinar outros casos particulares.

Conforme é afirmado por Lannin (2005), a investigação já produzida permite afirmar que a folha de cálculo pode ajudar os alunos a fazer conexões entre ideias informais e representações formais. "O acto de clicar numa célula, que representa um caso particular de uma generalização, para a construção de uma regra que relaciona uma ou mais quantidades, poderá auxiliar os alunos na compreensão do significado de variável ou de quantidade que varia" (Lannin, 2005, p. 236-237). No trabalho deste autor, a folha de cálculo funcionou como uma ferramenta flexível através da qual alunos do 6.º ano puderam construir regras recursivas ou explícitas perante diversos problemas. Uma das tarefas colocadas durante este estudo tem a designação de "Autocolantes nos cubos" e oferece o seguinte enunciado:

> Uma empresa produz barras coloridas, unindo cubos em filas e juntando-lhes autocolantes com «sorrisos», por meio de uma máquina, que cola exactamente um autocolante em cada face descoberta de cada cubo. Em cada face descoberta de qualquer dos cubos tem de ser colado um autocolante, por isso, esta barra de 2 unidades precisa de levar 10 autocolantes.
>
> 
>
> 1. Quantos autocolantes são necessários para barras de comprimentos desde 1 até 10? Explica como determinaste esses valores.
>
> (...)
>
> 4. Explica como podes determinar o número de autocolantes necessários para uma barra de qualquer tamanho. Escreve uma fórmula que possas usar para determinar esse número. (Lannin, 2005, p. 256).

Neste problema, que representa uma situação de variação linear, os alunos tinham a possibilidade de enveredarem por uma relação recursiva ou pela procura de um termo geral. Os alunos foram capazes de propor generalizações (recursivas ou explícitas) que representavam adequadamente a situação. Em ambos os casos, os esquemas geométricos foram importantes incorporações das características gerais dos argumentos usados para apoiar a generalização:

- $4n+2$, porque cada cubo fica com 4 faces destapadas, excepto os dois cubos das pontas que ainda têm, cada um, mais uma face destapada.
- Seguinte = Anterior -1 + 5, porque é como se retirássemos um autocolante ao extremo da barra e aí colássemos outro cubo com 5 autocolantes, pois a face do novo cubo que vai ser colada à barra anterior não leva autocolante.
- $6n-2(n-1)$, porque cada cubo tem 6 faces, e temos de subtrair as faces que estão unidas nas junções dos cubos. Em cada junção estão duas faces unidas e o número de junções é igual a o número de cubos da barra, menos um.

Acerca da folha de cálculo como ferramenta pedagógica, Lannin (2005) refere que uma das razões para a utilização da tecnologia, naquele estudo, consistia em retirar a necessidade de executar cálculos fastidiosos e em aumentar o foco sobre o processo de generalização. No entanto, para muitos dos alunos, a folha de cálculo serviu como um meio de implementar rapidamente uma estratégia de tentativa e erro, sem terem feito uma reflexão suficiente acerca do processo utilizado e sem saberem explicar porque é que uma determinada generalização era válida. Deste modo, a utilização da folha de cálculo foi condicionada pela atitude dos alunos face a esse recurso. E sublinha, a este propósito, uma das ideias-chave relativamente ao uso de qualquer instrumento como ferramenta pedagógica: uma ferramenta torna-se pedagógica, na medida em que for capaz de promover a reflexão e o raciocínio subjacentes ao seu uso (Lannin, 2005; Kokol-Voljc, 2003).

Desafios colocados pelas tecnologias no tratamento dos *Números*

Alguns dos desafios que se colocam aos professores no ensino do tema *Números* envolvem seguramente uma nova maneira de encarar o cálculo, incluindo o cálculo mental, a aprendizagem das operações e o desenvolvimento do sentido do número. Mas esses desafios, como é salientado por Matos (2008), incluem também a criação de uma cultura de aprendizagem que ofereça "oportunidades para que os alunos entrem em espaços de participação nos quais a competência esteja presente mas de forma aberta à sua acção" (p. 78). Tais oportunidades passam, em muito, por formas específicas de apresentar e partilhar ideias e de abordar e usar as TIC, colocando a ênfase nos problemas, nas questões e nos desafios. Trata-se de introduzir e de acentuar a dimensão da comunicação e da construção colaborativa dos saberes (Matos, 2008).

- No momento presente, em que as TIC se trivializam, em que as tecnologias são cada vez mais "domésticas" e os jovens transportam para a escola as "culturas tecno-populares" do uso que fazem das TIC em casa (Kent & Facer, 2004), que papel pode e deve assumir a utilização pedagógica das tecnologias no ensino da Matemática?

- Em particular, como enfrentar a presença ubíqua da calculadora de bolso (ou de telemóvel) nos jovens (e adultos) de hoje e como transformá-la em mais do que um mero dispositivo de cálculo, desinteressante e banal? Que estratégias se apresentam para resolver o problema (ainda não resolvido) da integração da calculadora básica e científica na aprendizagem, numa perspectiva de desenvolvimento do sentido do número?

- Como transformar recursos cada vez mais disseminados e profusos, como *applets* e outros materiais virtuais, com francas potencialidades no uso de representações para o trabalho com *Números*, em ferramentas pedagógicas para a aula de Matemática?

- O que podemos ganhar com o recurso às tecnologias em actividades de investigação numéricas ou em resolução de problemas? Por exemplo, como trabalhar a procura de regularidades e a construção de modelos algébricos ou como passar das relações numéricas às funções, envolvendo o uso da folha de cálculo?

- Como poderão as tecnologias favorecer as conexões matemáticas, o raciocínio matemático e a comunicação, em torno de problemas com *Números*?

Referências bibliográficas

Amado, N. (2007). O professor estagiário de Matemática e a integração das tecnologias na sala de aula: Relações de mentoring numa constelação de práticas. Tese de Doutoramento, Universidade do Algarve. Lisboa: APM.

Amorim, I. (1996). *Jogar na bolsa com uma folha de cálculo*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Brocardo, J. & Serrazina, L. (2008). O sentido de número no currículo de Matemática. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Ogs.), *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 97-115). Lisboa: Escolar Editora.

Brown, M, Millett, A.. & Askew, M. (2008). O impacto da estratégia nacional de numeracia no ensino e na aprendizagem em Inglaterra. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Ogs.), *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 61-92). Lisboa: Escolar Editora.

Carreira, S. (1992). A aprendizagem da trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa: Lisboa: APM.

Cebola, G. (2002). Do número ao sentido do número. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp. 223-239). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Chaitin, G. J. (2003). *Conversas com um matemático – Matemática, arte, ciência e os limites da razão*. Lisboa: Gradiva.

Kent, N. & Facer, K. (2004). Different worlds? A comparison of young people's home and school ICT use. *Journal of Computer Assisted Learning,* 20, pp. 440-455.

Kieran, C. & Guzmán, J. (2005). Five Steps to Zero: Students Developing Elementary Number Theory Concepts When Using Calculators. In W. J. Masalski & P. C. Elliott (Eds.), *Technology-Supported Mathematics Learning Environments* (pp. 35-50). Reston, VA: NCTM.

Kokol-Voljc, V. (2003). What makes a tool a pedagogical tool? In T. Triandafillidis & K. Hatzikiriakou (Eds.), *Proceedings of the 6th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 92-96). Athens: New Technologies Publications.

Lannin, J. K. (2005). Generalizations and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), pp. 231-258.

Lee, L. (1996). Initiation into algebraic culture: generalization. In L. Lee (Ed.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp.87-106). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Lozano, P. C. (2004). Experiencias sobre enseñanza de resolución de problemas de matemáticas. In J. Giménez, L. Santos & J. P. Ponte (Coords.), *La actividad matemática en el aula: Homenaje a Paulo Abrantes* (pp.127-136). Barcelona: Editorial GRAÓ.

Matos, J. F. (2008). Mediação e colaboração na aprendizagem em Matemática com as TIC. In A. P. Canavarro, D. Moreira e M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 76-88). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática do 2.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Moreira, M. L. (1989). A Folha de Cálculo na Educação Matemática. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa. Projecto MINERVA, Departamento de Educação, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Moyer, P. S., Niezgoda, D. & Stanley, J. (2005). Young Children's Use of Virtual Manipulatives and Other Forms of Mathematical Representations. In W. J. Masalski & P. C. Elliott (Eds.), *Technology-Supported Mathematics Learning Environments* (pp. 17-34). Reston, VA: NCTM.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: APM e IIE. (Tradução portuguesa da edição original de 1989).

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P. & Cebola, G. (2008). O uso da calculadora básica e científica no ensino da Matemática: uma questão ainda por resolver. In A. P. Canavarro, D. Moreira e M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 91-97). Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Ponte, J. P. & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da matemática do 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Ponte, J. P., Matos, JM & Abrantes, P. (1998). *Investigação em Educação Matemática: Implicações Curriculares*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Segurado, I., & Ponte, J. P. (1998). *Concepções sobre a Matemática e trabalho investigativo*. Quadrante, 7(2), pp. 5-40.

Smith, D. A. (2002). How People Learn... Mathematics. In Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level. University of Crete, Greece. Disponível em http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/invSmi.pdf.

Williams, D. & Stephens, M. (1992). Activity 1: Five Steps to Zero. In J. T. Fey (Ed.), *Calculators in Mathematics Education* (pp. 233-234). Reston, VA: NCTM.