A UTILIZAÇÃO DE CALCULADORAS FINANCEIRAS NO ENSINO DO CÁLCULO FINANCEIRO

UMA APLICAÇÃO PRÁTICA, O "LEASING"

Rogério Paulo Garcia dos Santos Portas Matias [1]

Ilídio Lopes e Silva[2]

RESUMO:

A resolução de problemas de Cálculo Financeiro envolve, por vezes, cálculos matemáticos demorados e trabalhosos. A utilização de calculadoras financeiras pode, assim, desempenhar um importante papel neste contexto, na medida em que permite poupar tempo e trabalho na resolução de tais problemas. Sabe-se que muitos docentes não são favoráveis à utilização de calculadoras financeiras no ensino desta disciplina. Pela nossa parte, assumimos uma posição contrária, entendendo que, mais do que simplesmente autorizar o seu uso, devemos incentivá-lo. Neste artigo expomos a nossa posição sobre este assunto, referimos sucintamente os princípios básicos de funcionamento das calculadoras financeiras e recorremos a um exemplo concreto (operação de "leasing") que julgamos interessante, porque ilustra não só a rapidez e a comodidade de cálculo conseguidas, mas também a necessidade de dominar solidamente os conceitos teóricos por forma a tirar partido das capacidades específicas das calculadoras financeiras.

PALAVRAS-CHAVE:

Cálculo Financeiro, calculadoras financeiras, "leasing".

[1] Professor Adjunto, Departamento de Gestão, Escola Superior de Tecnologia – Instituto Politécnico de Viseu; e-mail: rpmatias@dgest.estv.ipv.pt

[2] Equiparado a Assistente do 2º Triénio, Departamento de Gestão, Escola Superior de Tecnologia – Instituto Politécnico de Viseu; e-mail: isilva@dgest.estv.ipv.pt

1. INTRODUÇÃO

A resolução de problemas no âmbito do Cálculo Financeiro envolve, por vezes, alguns cálculos matemáticos que poderão revelar-se demorados e trabalhosos se forem resolvidos com recurso a uma calculadora que não disponha de capacidades especificamente financeiras[1]. Isto não significa que esses problemas não possam ser resolvidos através das capacidades actualmente disponibilizadas por (praticamente) qualquer calculadora[2], mas apenas que a utilização de calculadoras financeiras permite resolver muitos problemas típicos de Cálculo Financeiro de forma mais rápida e cómoda.

A nossa opinião acerca da utilização de uma calculadora financeira é que ela constitui um poderoso meio auxiliar na resolução dos cálculos, mas não (nunca!) um substituto dos necessários conhecimentos teóricos inerentes ao Cálculo Financeiro. De um modo geral, podemos considerar que existem quatro fases a ultrapassar na resolução de um problema típico de Cálculo Financeiro[3]:

1. Identificar (interpretar) o problema e representá-lo correctamente na recta do tempo.
2. Equacionar o problema (escrevê-lo em linguagem matemática, isto é, construir correctamente a equação (ou equações) de valor que traduz(em) esse problema).
3. Resolver essa equação (ou equações).
4. Uma vez obtida a solução, esta deverá ser analisada criticamente (o valor obtido apresenta sentido financeiro? Não é duvidoso ou manifestamente impossível?)

Neste sentido, a calculadora financeira apenas poderá ser útil na terceira destas quatro fases. Um indivíduo pode conhecer perfeitamente o funcionamento de uma calculadora financeira, pode "saber o que as suas teclas fazem", mas se não souber identificar e equacionar correctamente o problema (e para isso é indispensável o domínio de conceitos teóricos do Cálculo Financeiro), de pouco ou nada lhe serve a sua grande habilidade em manejar a calculadora financeira.

A utilização de calculadoras financeiras no ensino do Cálculo Financeiro está longe, tanto quanto sabemos, de ser uma prática corrente. Pelo contrário. Muitos docentes consideram-na mesmo perniciosa, não a autorizando sequer. A nossa opinião a este respeito é que, mais do que simplesmente autorizar o seu uso, devemos incentivá-lo. Não encontramos argumentos para que seja de outra forma.

---

[1] Por exemplo, elaboração de quadros de amortização de empréstimos, avaliação de investimentos, a "simples" determinação da taxa de juro (ou da TAEG) associada a um financiamento, etc..

[2] Até porque muitos problemas de Cálculo Financeiro não são especialmente exigentes a este nível.

[3] Inclusivamente, podemos falar na existência de mais uma fase, prévia a estas quatro, que consiste na própria formulação do problema. Efectivamente, em grande parte das situações do quotidiano, ao contrário do que normalmente sucede na sala de aula, o problema nem sequer está formulado, isto é, não nos aparece "estruturado e escrito", com a informação devidamente filtrada, etc...

Da nossa experiência, um aluno que não domine os conceitos teóricos necessários à resolução de determinado problema, não consegue resolvê-lo correctamente apenas porque utiliza uma calculadora financeira. Pensamos que o exemplo que a seguir se descreve ilustra isto mesmo. E muitos outros exemplos poderiam ser dados. Pensamos que, enquanto docentes, deve preocupar-nos o facto de colocarmos no mercado diplomados “tecnologicamente iletrados”[1]. Na nossa opinião, é preferível que um diplomado, no desempenho da sua actividade profissional, utilize correctamente (e daí tire partido) as ferramentas mais adequadas que existem para a resolução de determinado problema, do que revele desconhecimento a esse nível ou, pior ainda, da existência dessas ferramentas[2].

Clarificada a nossa posição acerca da utilização de calculadoras financeiras, passamos a uma descrição breve das suas características de funcionamento, em termos genéricos[3] e, por fim, a um exemplo concreto de aplicação.

2. BREVE DESCRIÇÃO DAS PRINCIPAIS VARIÁVEIS E FUNÇÕES ESPECÍFICAS DAS CALCULADORAS FINANCEIRAS

As principais variáveis específicas de uma calculadora financeira são: N, I%, PV, PMT, FV, P/Y e C/Y, cujos significados são os seguintes[4]:

Variável nas calculadoras financeiras	Significado
N (“Number of Payments”)	Número de períodos ou número de pagamentos
I% (“Interest Rate”)	Taxa de juro (sob a forma de percentagem)
PV (“Present Value”)	Valor actual (ou valor presente)
PMT (“Payment”)	Valor de cada pagamento (termo constante da renda)
FV (“Future Value”)	Valor acumulado (ou valor futuro)

1 Sobretudo, porque somos docentes do ensino politécnico, embora pensemos que esta ideia é válida também para o ensino universitário.

2 É preferível para todas as partes: aluno, docente, escola e entidade empregadora.

3 Para aprofundamento acerca das características gerais de funcionamento de calculadoras financeiras e das especificidades dos modelos mais divulgados entre nós, sugerimos a consulta do sítio www.calculofinanceiro.com.

4 Algumas variáveis podem ter significados diferentes, consoante o tipo de problema que se pretende resolver. Por exemplo, N representa o número de períodos de capitalização ou actualização se em causa estiver um problema em que apenas se pretenda obter o valor acumulado ou o valor actual de um capital único, mas representa o número de termos, se o problema consistir numa renda.

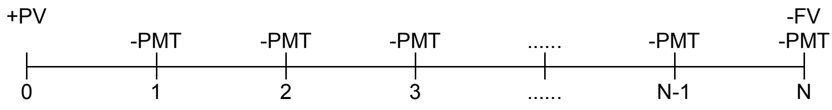
Variável nas calculadoras financeiras	Significado
P/Y[1] (“Payments per Year”)	Número de pagamentos por período a que a taxa (I%) está reportada
C/Y[2] (“Compounding Periods per Year”)	Número de capitalizações por período a que a taxa (I%) está reportada

As variáveis PV, PMT e FV são variáveis “monetárias”, isto é, que representam capitais. Num qualquer problema financeiro, pelo menos duas delas terão que estar presentes, tendo que apresentar necessariamente sinais contrários (uma representará um *inflow* e a outra um *outflow*[3]). Em situações em que estas três variáveis estejam presentes em simultâneo (como é o caso do “leasing”), uma delas tem que apresentar necessariamente sinal contrário ao das outras duas[4].

Duas outras variáveis importantes são P/Y e C/Y, que representam, respectivamente, o número de pagamentos e o número de capitalizações por período a que está reportada a taxa de juro[5].

No caso específico de uma renda, é importante definir se a mesma é postecipada ou antecipada, o que é indicado nas calculadoras financeiras através do ajustamento para modo END ou BEGIN, respectivamente. A este respeito, as calculadoras financeiras assumem que os fluxos de capitais ocorrem do seguinte modo:

- <u>Modo END (rendas postecipadas)</u>[6]:



---

[1] Deve entender-se que “per Year” não significa necessariamente “por ano”, mas sim “por período da taxa”.

[2] Deve entender-se que “per Year” não significa necessariamente “por ano”, mas sim “por período da taxa”.

[3] Sugere-se que o utilizador se coloque na posição de uma das partes, mutuário ou mutuante, e atribua os sinais em função da mesma.

[4] No caso que vamos tratar (“leasing”), se o utilizador se colocar na posição do locatário, deve atribuir o sinal + ao fluxo PV (representa o valor do bem locado, no fundo, um *inflow*) e o sinal – aos fluxos PMT e FV (termos da renda e valor residual, respectivamente, ou seja, *outflows*). Deve referir-se, contudo, que em certas situações, pode ser necessário atribuir a PV o sinal + (mesmo que o utilizador se coloque na posição do locatário).

[5] Alguns modelos de calculadoras financeiras não permitem a introdução de valores diferentes em P/Y e C/Y, ou seja, assumem que a periodicidade da capitalização da taxa de juro coincide com a periodicidade dos pagamentos. Outros, nem mesmo isso – é necessário introduzir a taxa periódica devidamente expressa na mesma unidade de tempo a que são efectuados os pagamentos.

[6] Os sinais atribuídos às variáveis PV, PMT e FV são meramente indicativos. O que é fundamental é que elas não tenham o mesmo sinal e que os sinais sejam atribuídos correctamente em função do problema a resolver.

- Modo BEGIN (rendas antecipadas):

+PV						-FV
-PMT	-PMT	-PMT	-PMT	......	-PMT	
0	1	2	3	......	N-1	N

No caso específico da amortização de empréstimos, as calculadoras financeiras são especialmente úteis quando os mesmos são amortizados através do chamado Sistema Francês, ou seja, através de prestações constantes[1]. Neste contexto, as variáveis e funções específicas são normalmente as seguintes:

Variável/função nas calculadoras financeiras	Significado
PM1 (ou P1) (“Payment 1”)	Prestação inicial do intervalo (para efeitos de determinação de juros e amortizações de capital contidos nesse intervalo)
PM2 (ou P2) (“Payment 2”)	Prestação final do intervalo (para efeitos de determinação de juros e amortizações de capital contidos nesse intervalo)
BAL (“Balance”)	Capital em dívida imediatamente após o pagamento da prestação PM2 (ou P2)
INT (“Interest”)	Juro contido na prestação PM1 (ou P1)
PRN (“Principal”)	Amortização de capital contida na prestação PM1 (ou P1)
Σ INT	Total dos juros contidos nas prestações entre PM1 e PM2 (ambas inclusive)
Σ PRN	Total das amortizações de capital contidas nas prestações entre PM1 e PM2 (ambas inclusive)

3. APLICAÇÃO PRÁTICA: O “LEASING”[2]

Referidos os conceitos essenciais sobre as calculadoras financeiras, vejamos agora a sua aplicação no caso concreto de uma operação de “leasing”. Analisaremos três cenários, admitindo sempre que o locatário exercerá a opção de compra no final do prazo:

[1] Como é o caso do “leasing”, ainda que podendo apresentar um pagamento inicial e um pagamento final de valor diferente dos restantes.

[2] Recomenda-se, antes da análise desta aplicação, a consulta do Anexo.

- ***Cenário I**: Os n termos da renda do "leasing" são constantes e postecipados.*

- ***Cenário II**: Os n termos da renda do "leasing" são constantes e antecipados.*

- ***Cenário III**: O primeiro termo da renda do "leasing" ocorre no próprio momento do contrato e é de valor diferente dos restantes (n-1) termos, estes de valor constante entre si.*

Admitamos um contrato com as seguintes características:

- Valor do bem locado: 60.000 euros;
  - Duração do contrato: 4 anos;
  - Valor residual: 4% (do valor do bem locado).
  - Pagamento:
    - Cenários I e II: através de 48 prestações mensais no valor de 1.416,38 euros cada;
    - Cenário III: através de um pagamento inicial no montante correspondente a 20% do valor do bem locado (primeiro termo da renda), seguido de 47 prestações mensais no valor de 1.416,38 euros cada.

Para cada um dos cenários (I, II e III), pretende-se

a) *Calcular a taxa anual nominal (com capitalizações mensais) associada a este contrato de "leasing".*

b) *Elaborar as duas primeiras, a 28ª e as duas últimas linhas do Quadro de Amortização.*

c) *Supondo que, imediatamente após o pagamento da 28ª prestação, a taxa anual nominal (com capitalizações mensais) passava a ser de 8,4%, recalcular todos os valores relativos às duas linhas imediatamente seguintes e às duas últimas linhas do Quadro de Amortização.*

***Cenário I**:*

Os 48 termos da renda do "leasing" são constantes e postecipados.
Neste caso, o valor residual ocorre conjuntamente com o último termo.

a) *Calcular a taxa anual nominal (com capitalizações mensais) associada a este contrato de "leasing".*

O diagrama temporal que representa este contrato de "leasing" é o seguinte[1]:

+60.000						-2.400
	-1.416,38	-1.416,38	-1.416,38	......	-1.416,38	-1.416,38
0	1	2	3	......	47	48 (meses)

A equação de valor que traduz esta situação é a seguinte:

$$\underbrace{60.000}_{\substack{\text{Valor do bem locado}\\ \text{(momento 0)}}} = \underbrace{1.416{,}38a_{48\rceil i_{12}}}_{\substack{\text{Valor das 48 prestações mensais,}\\ \text{reportado ao momento 0}}} + \underbrace{2.400\left(1+i_{12}\right)^{-48}}_{\substack{\text{Valor residual, reportado}\\ \text{ao momento 0}}}$$

Resolução sem recurso a uma calculadora financeira

A resolução desta equação sem recurso a uma calculadora financeira[2] é demorada e dificilmente permite a obtenção do valor exacto da incógnita. Dispondo apenas de uma calculadora básica, o valor da incógnita pode ser obtido por tentativas. Se, adicionalmente, dispusermos de tabelas financeiras, podemos começar por desprezar a última parcela do segundo membro da equação (relativa à actualização do valor residual), por forma a isolar o factor $a_{48\rceil i_{12}}$, consultando então as tabelas financeiras; de seguida, se necessário, pode obter-se um valor aproximado da incógnita através de uma interpolação linear. Assim, teríamos:

$$60.000 = 1.416{,}38a_{48\rceil i_{12}} \Leftrightarrow 42{,}361513 = a_{48\rceil i_{12}}$$

Pesquisando nas tabelas financeiras, verificamos que:

$\rightarrow$ para i_{12} = 0,5% $\Rightarrow$ $a_{48\rceil i_{12}} = 42{,}580318$

$\rightarrow$ para i_{12} = 1% $\Rightarrow$ $a_{48\rceil i_{12}} = 37{,}973959$

Deste modo, concluímos que se não houvesse lugar ao pagamento do valor residual, $i_{12} \in \left]0{,}5\%;1\%\right[$ (próxima de 0,5%).

O facto de, na realidade, existir o pagamento do valor residual onera a operação, pelo que a taxa mensal efectivamente subjacente a este contrato será superior. Assim, parece sensato testar na equação de valor completa a taxa de 1%:

$$1.416{,}38a_{48\rceil 0{,}01} + 2.400\left(1+0{,}01\right)^{-48} = 55.274{,}18172 \quad \text{(inferior ao valor desejado, 60.000)}$$

---

[1] Os sinais foram atribuídos na óptica do mutuário.

[2] Ou programável.

Por outro lado, à taxa mensal de 0,5%[1] o valor actual resulta em:

$1.416,38a_{48\rceil 0,005}+2.400\left(1+0,005\right)^{-48}$ =62.198,94669 (superior ao valor desejado, 60.000)

Para obter um valor aproximado da taxa mensal podemos agora efectuar uma interpolação linear[2]. Fica:

$$\frac{0,01-0,005}{i_{12}-0,005}=\frac{55.274,18172-62.198,94669}{60.000-62.198,94669}$$

Resolvendo esta equação, vem $i_{12}=0,006588 \quad (0,6588\%)$.

Assim, dir-se-ia que a taxa anual nominal com capitalizações mensais é (aproximadamente) $i_{(12)}=12x0,006588 \Leftrightarrow i_{(12)}=0,079056 \quad (7,9056\%)$

Resolução através de uma calculadora financeira

Recorrendo a uma calculadora financeira, a obtenção da taxa associada a este contrato de "leasing" é muito mais simples, cómoda, rápida e exacta. Esta situação "encaixa" exactamente naquilo que a calculadora assume de acordo com o modo END: o valor do bem locado corresponde a PV, as 48 prestações correspondem a PMT e o valor residual corresponde a FV. Assim, as instruções seriam as seguintes[3]:

$$\begin{array}{l}
\text{Modo End}\\
N=48\\
I\%=0 \Rightarrow I\%=0,649991\approx 0,65\%\\
PV=60.000\\
PMT=-1.416,38\\
FV=-2.400\\
P/Y=1\\
C/Y=1
\end{array}$$

Tendo sido inseridos P/Y=1 e C/Y=1 (um pagamento por período da taxa e uma capitalização por período da taxa), a taxa devolvida pela calculadora é a taxa mensal, uma vez que a renda é mensal. Contudo, bastaria indicar P/Y=12 e

---

1 Que é, garantidamente, inferior à taxa subjacente ao contrato.

2 O valor é apenas aproximado porque a função $a_{n\rceil i}$ não é linear. Com a interpolação linear estamos a admitir que naquele intervalo (entre 0,5% e 1%) a função é linear. O erro cometido é pouco significativo.

3 Indica-se a incógnita através da uma seta, seguida do valor devolvido pela calculadora após a introdução de todos os valores.

C/Y=12 (doze pagamentos por período da taxa e doze capitalizações por período da taxa) para que a calculadora financeira devolvesse directamente a taxa anual nominal (com capitalizações mensais):

$$\begin{array}{l} \text{Modo End} \\ N = 48 \\ I\% = 0 \Rightarrow I\% = 7{,}799894 \approx 7{,}8\% \\ PV = 60.000 \\ PMT = -1.416{,}38 \\ FV = -2.400 \\ P/Y = 12 \\ C/Y = 12 \end{array}$$

Se, em vez da taxa anual nominal (com capitalizações mensais), quiséssemos obter o valor da taxa anual efectiva subjacente, bastaria introduzir P/Y=12 e C/Y=1 (doze pagamentos por período da taxa e uma capitalização por período da taxa)[1].

$$\begin{array}{l} \text{Modo End} \\ N = 48 \\ I\% = 0 \Rightarrow I\% = 8{,}084867 \\ PV = 60.000 \\ PMT = -1.416{,}38 \\ FV = -2.400 \\ P/Y = 12 \\ C/Y = 1 \end{array}$$

b) *Elaborar as duas primeiras, a 28ª e as duas últimas linhas do Quadro de Amortização.*

Resolução sem recurso a uma calculadora financeira

Para elaborar estas linhas do Quadro de Amortização vamos utilizar a taxa mensal efectiva de 0,65%. O Quadro de Amortização fica:

---

1 Não recorrendo a uma calculadora financeira, esta taxa seria obtida através de uma relação de equivalência: $(1+i)^1 = (1+0{,}0065)^{12} \Leftrightarrow i = 0{,}080850 \quad (8{,}0850\%)$

Momento	*Prest. nº*	*Capital em dívida (no início do período)*	*Juro*	*Amortização*	*Prestação*
1	1	D_0 = 60.000	j_1 = 390	m_1 = 1.026,38	p = 1.416,38
2	2	D_1 = 58.973,62	j_2 = 383,33	m_2 = 1.033,05	p = 1.416,38
......	......	......	......	......	......
28	28	D_{27} = 29.813,85	j_{28} = 193,79	m_{28} = 1.222,59	p = 1.416,38
......	......	......	......	......	......
48	48	D_{47} = 3.791,73	j_{48} = 24,65	m_{48} = 1.391,73	p = 1.416,38
48	Vr	D_{48} = 2.400	j_{Vr} = 0	m_{Vr} = 2.400	p_{Vr} = 2.400

<u>Explicação dos valores</u>:

<u>1ª linha do Quadro:</u>

. As primeiras 48 prestações são constantes (1.416,38 euros cada) e a última respeita ao valor residual (2.400 euros) pelo que é possível preencher toda a última coluna do Quadro.

. O capital em dívida no início do primeiro período (D_0) é o valor do bem locado (D_0=60.000 euros).

. O juro contido na 1ª prestação (j_1) é obtido aplicando a taxa de juro (mensal) ao capital em dívida no início do primeiro período ($j_1=D_0 x i_{12}$=60.000x0,0065=390 euros).

. A amortização de capital contida na 1ª prestação é a diferença entre o valor dessa prestação e o juro nela contido ($m_1=p–j_1$=1.416,38–390=1.026,38 euros).

<u>2ª linha do Quadro:</u>

. O capital em dívida no início do segundo período (D_1) é a diferença entre o capital em dívida no início do primeiro período e a amortização de capital contida na primeira prestação ($D_1=D_0-m_1$=60.000–1.026,38=58.973,62 euros).

. O juro contido na 2ª prestação (j_2) é obtido aplicando a taxa de juro ao capital em dívida no início do segundo período ($j_2= D_1 x i_{12}$=58.973,62x0,0065=383,33 euros).

. A amortização de capital contida na 2ª prestação é a diferença entre o valor dessa prestação e o juro nela contido ($m_2=p–j_2$=1.416,38–383,33=1.033,05 euros).

28ª linha do Quadro:

Uma possibilidade para obter os valores relativos a esta linha é a seguinte:

. Como as prestações são constantes (à excepção daquela que diz respeito ao valor residual), as amortizações de capital seguem uma Progressão Geométrica de razão igual a (1+i), pelo que podemos dizer que

$$m_{28} = m_1\left(1+i_{12}\right)^{28\text{-}1} = 1.026{,}38\left(1+0{,}0065\right)^{27} = 1.222{,}59 \text{ euros}$$

. O juro contido na 28ª prestação (j_{28}) é obtido por diferença entre os valores dessa prestação e da amortização de capital nela contida (j_{28}=p-m_{28}=1.416,38–1.222,59=193,79 euros).

. O capital em dívida no início do 28º período (D_{27}) pode ser obtido fazendo

$$j_{28} = D_{27} x i_{12} \Rightarrow 193{,}79 = D_{27} x 0{,}0065 \Leftrightarrow D_{27} = 29.813{,}85 \text{ euros}$$

Uma outra possibilidade de preencher a 28ª linha do Quadro de Amortização seria começando exactamente pelo capital em dívida imediatamente após o pagamento da 27ª prestação (D_{27}). Para calcular este valor podemos fazer:

$$D_{27} = \underbrace{1.416{,}38 a_{21\rceil 0{,}0065}}_{\text{Valor das 21 prestações vincendas (reportado ao momento 27)}} + \underbrace{2.400\left(1+0{,}0065\right)^{-21}}_{\text{Valor residual (reportado ao momento 27)}} \Leftrightarrow D_{27} = 29.813{,}96 \text{ euros}$$

ou

$$D_{27} = \underbrace{60.000\left(1+0{,}0065\right)^{27}}_{\text{Valor da dívida inicial (reportado ao momento 27)}} - \underbrace{1.416{,}38 s_{27\rceil 0{,}0065}}_{\text{Valor das 27 prestações já pagas (reportado ao momento 27)}} \Leftrightarrow D_{27} = 29.814{,}11 \text{ euros}$$

. O juro contido na 28ª prestação (j_{28}) é obtido aplicando a taxa de juro (mensal) ao capital em dívida no início do 28º período (j_{28}=D_{27}xi_{12}=29.813,96x0,0065=193,79 euros).

. A amortização de capital contida na 28ª prestação é a diferença entre o valor dessa prestação e o juro nela contido (m_{28}=p–j_{28}=1.416,38–193,79=1.222,59 euros).

Penúltima linha do Quadro:

Uma possibilidade para obter os valores relativos a esta linha é a seguinte:

. O capital em dívida imediatamente após o pagamento da 47ª prestação (D_{47}) pode ser calculado actualizando para esse momento todos os fluxos vincendos:

$$D_{47} = \underbrace{1.416,38\left(1+0,0065\right)^{-1}}_{\substack{\text{Valor do último termo da renda,} \\ \text{reportado ao momento 47}}} + \underbrace{2.400\left(1+0,0065\right)^{-1}}_{\text{Valor residual, reportado ao momento 47}} \Leftrightarrow D_{47} = 3.791,73 \text{ euros}$$

. O juro contido na 48ª prestação (j_{48}) é obtido aplicando a taxa de juro (mensal) ao capital em dívida no início do 48º período ($j_{48}=D_{47} x i_{12}=3.791,73x0,0065=24,65$ euros).

. A amortização de capital contida na 48ª prestação é a diferença entre o valor dessa prestação e o juro nela contido ($m_{48}=p–j_{48}=1.416,38–24,65=1.391,73$ euros).

Última linha do Quadro:

. O capital em dívida imediatamente após o pagamento da 48ª prestação (D_{48}) é o valor residual (D_{48} = 2.400 euros).

. Estes 2.400 euros são, na sua totalidade, amortização de capital, uma vez que o juro relativo ao último período foi pago na última (48ª) prestação de 1.416,38 euros.

Resolução através de uma calculadora financeira

Vejamos, agora, como poderíamos calcular os valores relativos às duas primeiras, à 28ª e às duas últimas linhas do Quadro de Amortização deste contrato de "leasing" se utilizássemos uma calculadora financeira.

Recordemos as instruções já inseridas (na resolução da alínea a)):

$$\begin{array}{l}
\text{Modo End} \\
N = 48 \\
I\% = 0 \Rightarrow I\% = 0,649991 \approx 0,65\% \\
PV = 60.000 \\
PMT = -1.416,38 \\
FV = -2.400 \\
P/Y = 1 \\
C/Y = 1
\end{array}$$

Para obter os valores agora pretendidos, faríamos:

$$\begin{aligned}
&PM1 = 1\\
&PM2 = 1\\
&BAL = ? \Rightarrow BAL = 58.973{,}61468 \quad (D_1)\\
&PRN = ? \Rightarrow PRN = -1.026{,}385322 \quad (m_1)\\
&INT = ? \Rightarrow INT = -389{,}994678 \quad (j_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&PM1 = 2\\
&PM2 = 2\\
&PRN = ? \Rightarrow PRN = -1.033{,}056735 \quad (m_2)\\
&INT = ? \Rightarrow INT = -383{,}323265 \quad (j_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&PM1 = 27\\
&PM2 = 27\\
&BAL = ? \Rightarrow BAL = 29.813{,}99350 \quad (D_{27})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&PM1 = 28\\
&PM2 = 28\\
&PRN = ? \Rightarrow PRN = -1.222{,}591687 \quad (m_{28})\\
&INT = ? \Rightarrow INT = -193{,}788313 \quad (j_{28})
\end{aligned}$$

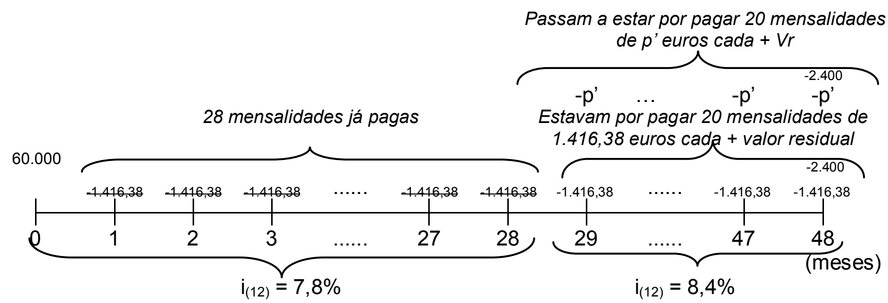
$$\begin{aligned}
&PM1 = 47\\
&PM2 = 47\\
&BAL = ? \Rightarrow BAL = 3.791{,}734062 \quad (D_{47})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&PM1 = 48\\
&PM2 = 48\\
&BAL = ? \Rightarrow BAL = 2.399{,}999997 \quad (D_{48})\\
&PRN = ? \Rightarrow PRN = -1.391{,}734065 \quad (m_{48})\\
&INT = ? \Rightarrow INT = -24{,}645935 \quad (j_{48})
\end{aligned}$$

Deve notar-se que, devido às características do problema em causa, $j_{vr} = 0$, $m_{vr} = 2.400$ e $p_{vr} = 2.400$.

c) *Supondo que imediatamente após o pagamento da 28ª prestação a taxa anual nominal (com capitalizações mensais) passava a ser de 8,4%, recalcular todos os valores relativos às duas linhas imediatamente seguintes e às duas últimas linhas do Quadro de Amortização.*

A situação descrita é a seguinte:



Resolução sem recurso a uma calculadora financeira

O Quadro de Amortização passaria a ser o seguinte:

Mom.	*Prest. nº*	*Capital em dívida (no início do período)*	*Juro*	*Amortização*	*Prestação*
29	29	D_{28} = 28.591,26	j'_{29} = 200,14	m'_{29} = 1.224,60	p' = 1.424,74
30	30	D'_{29} = 27.366,66	j'_{30} = 191,57	m'_{30} = 1.233,17	p' = 1.424,74
......	......	......	......	......	......
48	48	D'_{47} = 3.798,15	j'_{48} = 26,59	m'_{48} = 1.398,15	p' = 1.424,74
48	Vr	D'_{48} = 2.400	j'_{Vr} = 0	m'_{Vr} = 2.400	Vr = 2.400

Explicação dos valores:

O capital em dívida imediatamente após o pagamento da 28ª prestação (D_{28}) é a diferença entre o capital em dívida imediatamente após o pagamento da 27ª prestação (D_{27}) e a amortização de capital contida na 28ª prestação (m_{28}):

$$D_{28} = D_{27} - m_{28} = 29.813,85 - 1.222,59 = 28.591,26 \text{ euros}$$

Alternativamente, poderíamos fazer:

$$D_{28} = \underbrace{1.416,38 a_{20\rceil 0,0065}}_{\substack{\text{Valor das 20 prestações vincendas,} \\ \text{reportado ao momento 28}}} + \underbrace{2.400(1+0,0065)^{-20}}_{\text{Valor residual, reportado ao momento 28}} \Leftrightarrow D_{28} = 28.591,37 \text{ euros}$$

ou

$$D_{28} = \underbrace{60.000(1+0,0065)^{28}}_{\text{Valor da dívida, reportado ao momento 28}} - \underbrace{1.416,38 s_{28\rceil 0,0065}}_{\substack{\text{Valor das 28 prestações já pagas,} \\ \text{reportado ao momento 28}}} \Leftrightarrow D_{28} = 28.591,53 \text{ euros}$$

A partir daqui, todos os cálculos serão efectuados à "nova" taxa mensal, que é

$$i'_{12} = \frac{0,084}{12} \Leftrightarrow i'_{12} = 0,007 \quad (0,7\%)$$

O cálculo da “nova” prestação é, pois, efectuado do seguinte modo:

$$\underbrace{28.591,26}_{\substack{\text{Capital em dívida}\\\text{no momento 28}}} = \underbrace{p'.a_{20\rceil 0,007}}_{\substack{\text{Valor das 20 "novas"}\\\text{prestações, reportado}\\\text{ao momento 28}}} + \underbrace{2.400\left(1+0,007\right)^{-20}}_{\text{Valor residual, reportado ao momento 28}} \Leftrightarrow p' = 1.424,74 \text{ euros}$$

Compreende-se que o valor da prestação seja agora superior, uma vez que a taxa de juro aumentou.

Tendo em conta a nova taxa mensal e o novo valor para a mensalidade, fica:

29ª linha do Quadro:

$$j'_{29} = D_{28} x i'_{12} = 28.591,26x0,007 = 200,14 \text{ euros}$$
$$m'_{29} = p' - j'_{29} = 1.424,74 - 200,14 = 1.224,60 \text{ euros}$$

30ª linha do Quadro:

$$D'_{29} = D_{28} - m'_{29} = 28.591,26 - 1.224,60 = 27.366,66 \text{ euros}$$
$$j'_{30} = D'_{29} x i'_{12} = 27.366,66x0,007 = 191,57 \text{ euros}$$
$$m'_{30} = p' - j'_{30} = 1.424,74 - 191,57 = 1.233,17 \text{ euros}$$

48ª linha do Quadro:

$$D'_{47} = 1.424,74\left(1+0,007\right)^{-1} + 2.400\left(1+0,007\right)^{-1} = 3.798,15 \text{ euros}$$
$$j'_{48} = D'_{47} x i'_{12} = 3.798,15x0,007 = 26,59 \text{ euros}$$
$$m'_{48} = p' - j'_{48} = 1.424,74 - 26,59 = 1.398,15 \text{ euros}$$

Valor residual:

$$D'_{48} = D'_{47} - m'_{48} = 3.798,15 - 1.398,15 = 2.400 \text{ euros}$$
$$m'_{Vr} = D'_{48} = 2.400 \text{ euros}$$
$$j'_{Vr} = 0$$

Resolução através de uma calculadora financeira

Recordemos as instruções já inseridas anteriormente:

Modo End
$N = 48$
$I\% = 0 \Rightarrow I\% = 0,649991 \approx 0,65\%$
$PV = 60.000$
$PMT = -1.416,38$
$FV = -2.400$
$P/Y = 1$
$C/Y = 1$

Para obter os valores agora pretendidos, faríamos:

$$\begin{array}{l} PM1 = 28 \\ PM2 = 28 \\ BAL = ? \Rightarrow BAL = 28.591{,}40181 \quad (D_{28}) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Modo End} \\ N = 20 \\ I\% = 8{,}4 \\ PV = 28.591{,}40181 \\ PMT = 0 \Rightarrow PMT = \text{-}1.424{,}748985 \quad (p') \\ FV = -2.400 \\ P/Y = 12 \\ C/Y = 12 \end{array}$$

Note-se a introdução de I% = 8,4, P/Y = 12 e C/Y =12. O período considerado é o ano. Alternativamente, poder-se-ia introduzir I% = 0,7, P/Y = 1 e C/Y = 1. Neste caso o período seria o mês.

$$\begin{array}{l} PM1 = 1 \\ PM2 = 1 \\ BAL = ? \Rightarrow BAL = 27.366{,}79264 \quad (D'_{29}) \\ PRN = ? \Rightarrow PRN = -1.224{,}609172 \quad (m'_{29}) \\ INT = ? \Rightarrow INT = -200{,}139813 \quad (j'_{29}) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} PM1 = 2 \\ PM2 = 2 \\ PRN = ? \Rightarrow PRN = -1.233{,}181437 \quad (m'_{30}) \\ INT = ? \Rightarrow INT = -191{,}567548 \quad (j'_{30}) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} PM1 = 19 \\ PM2 = 19 \\ BAL = ? \Rightarrow BAL = 3.798{,}161855 \quad (D'_{47}) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} PM1 = 20 \\ PM2 = 20 \\ BAL = ? \Rightarrow BAL = 2.400 \quad (D'_{48}) \\ PRN = ? \Rightarrow PRN = -1.398{,}161852 \quad (m'_{48}) \\ INT = ? \Rightarrow INT = -26{,}587133 \quad (j'_{48}) \end{array}$$

Deve notar-se que, devido às características do problema em causa, j_{vr} = 0, m_{vr} = 2.400 e p_{vr} = 2.400.

<u>Cenário II</u>: Os 48 termos da renda do "leasing" são constantes e antecipados. Neste caso, apenas o valor residual ocorre no final do prazo (ou seja, ocorre um período após o vencimento do último termo).

a) *Calcular a taxa anual nominal (com capitalizações mensais) associada a este contrato de "leasing".*

O diagrama temporal que representa esta situação é o seguinte:

+60.000 -1.416,38	-1.416,38	-1.416,38	-1.416,38	......	-1.416,38	-2.400
0	1	2	3	......	47	48 (meses)

A equação de valor subjacente é:

$$\underbrace{60.000}_{\text{Momento 0}} = \underbrace{1.416,38\ddot{a}_{48\rceil i_{12}}}_{\text{Momento 0}} + \underbrace{\underbrace{2.400}_{\text{Momento 0}}\ (1+i_{12})^{-48}}_{\text{Momento 0}}$$

ou seja,

$$\underbrace{60.000}_{\text{Momento 0}} = \underbrace{\underbrace{1.416,38a_{48\rceil i_{12}}}_{\text{Momento -1}}.(1+i_{12})}_{\text{Momento 0}} + \underbrace{\underbrace{2.400}_{\text{Momento 48}}\ (1+i_{12})^{-48}}_{\text{Momento 0}}$$

<u>*Resolução sem recurso a uma calculadora financeira*</u>

A resolução matemática desta equação de valor não é directa. Contudo, podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$\underbrace{60.000}_{\text{Momento 0}} = \underbrace{1.416,38}_{\text{Momento 0}} + \underbrace{1.416,38a_{47\rceil i_{12}}}_{\text{Momento 0}} + \underbrace{\underbrace{2.400}_{\text{Momento 48}}\ (1+i_{12})^{-48}}_{\text{Momento 0}}$$

Ignorando, numa 1ª fase, o valor residual, isto permite isolar o factor $a_{\overline{47|}\, i_{12}}$: $60.000 = 1.416,38 + 1.416,38a_{47\rceil i_{12}} \Leftrightarrow 41,361513 = a_{47\rceil i_{12}}$. A partir daqui, a resolução é semelhante à do Cenário I.

Conclui-se que, não considerando o valor residual, a taxa mensal deverá estar entre 0,5% e 1%. Testando cada uma destas taxas na equação de valor completa, obtêm-se os valores de 62.500,49624 (com i_{12}=0,5%) e 55.812,03729 (com i_{12}=1%), o que permite concluir que a taxa realmente subjacente ao empréstimo se situa neste intervalo. Um valor aproximado poderia ser obtido através de uma interpolação linear, o que iria resultar em i_{12}=0,006869 (0,6869%), ou seja, $i_{(12)} = 0,6869\%\text{x}12 \Leftrightarrow i_{(12)} = 8,2428\%$ (taxa anual nominal com capitalizações mensais).

Resolução através de uma calculadora financeira

Utilizando uma calculadora financeira, a obtenção da taxa associada a esta proposta de contrato de "leasing" seria muito cómoda, rápida e exacta. Esta situação "encaixa" exactamente naquilo que a calculadora assume de acordo com o modo BEGIN: o valor do bem locado corresponde a PV, as 48 prestações correspondem a PMT e o valor residual corresponde a FV. Assim, as instruções seriam as seguintes:

Modo Begin
$N = 48$
$I\% = 0 \Rightarrow I\% = 8{,}130506$
$PV = 60.000$
$PMT = -1.416{,}38$
$FV = -2.400$
$P/Y = 12$
$C/Y = 12$

A taxa devolvida pela calculadora é a taxa anual nominal, composta mensalmente, uma vez que se introduziu P/Y=12 e C/Y=12[1].

b) *Elaborar as duas primeiras, a 28ª e as duas últimas linhas do Quadro de Amortização.*

Resolução sem recurso a uma calculadora financeira

Utilizando a taxa mensal efectiva obtida via calculadora financeira (aproximadamente 0,677542%), o Quadro de Amortização ficaria:

Momento	***Prest. nº***	***Capital em dívida (no início do período)***	***Juro***	***Amortização***	***Prestação***
0	1	D_0 = 60.000	j_1 = 0	m_1 = 1.416,38	p = 1.416,38
1	2	D_1 = 58.583,62	j_2 = 396,93	m_2 = 1.019,45	p = 1.416,38
......	......	......	......	......	......
27	28	D_{27} = 29.707,38	j_{28} = 201,28	m_{28} = 1.215,10	p = 1.416,38
......	......	......	......	......	......
47	48	D_{47} = 3.774,65	j_{48} = 25,57	m_{48} = 1.390,81	p = 1.416,38
48	Vr	D_{48} = 2.383,84	j_{Vr} = 16,15	m_{Vr} = 2.383,84	p_{Vr} = 2.400

[1] Se tivéssemos inserido P/Y=1 e C/Y=1, a taxa devolvida teria sido a taxa mensal efectiva (0,677542%); se tivéssemos inserido P/Y=12 e C/Y=1, a taxa devolvida teria sido a taxa anual efectiva (8,440436%).

Explicação dos valores:

1ª linha do Quadro:

Como a 1ª prestação mensal é antecipada (paga no próprio momento do contrato, momento 0), ela não contém juro ou seja, é totalmente composta por amortização de capital. Assim, o seu valor abate, na totalidade, à dívida inicial. Daí que j_1=0 e m_1=1.416,38 euros.

2ª linha do Quadro:

$$D_1 = D_0 - m_1 = 60.000 - 1.416,38 = 58.583,62 \text{ euros}$$
$$j_2 = D_1 x i_{12} = 58.583,62x0,00677542 = 396,93 \text{ euros}$$
$$m_2 = p - j_2 = 1.416,38 - 396,93 = 1.019,45 \text{ euros}$$

28ª linha do Quadro:

Podemos começar, por exemplo, por calcular a 28ª amortização de capital (m_{28}), mas não com base na 1ª amortização de capital, uma vez que se trata de uma amortização atípica (em virtude de a 1ª prestação não conter juro, sendo totalmente composta por essa amortização de capital). Assim, essa 1ª amortização não pode servir de base para o cálculo das restantes amortizações; as amortizações de capital apenas seguem uma Progressão Geométrica de razão igual a (1+i_{12}) a partir da 2ª amortização (m_2), inclusive. Desta forma, m_{28} pode ser calculada do seguinte modo:

$$m_{28} = m_2 \left(1 + i_{12}\right)^{28-2} = 1.019,45\left(1 + 0,00677542\right)^{26} = 1.215,10 \text{ euros}$$

A partir daqui:

$$j_{28} = p - m_{28} = 1.416,38 - 1.215,10 = 201,28 \text{ euros}$$
$$j_{28} = D_{27} x i_{12} \Rightarrow 201,28 = D_{27} x 0,00677542 \Leftrightarrow D_{27} = 29.707,38 \text{ euros}$$

Alternativamente, poderíamos começar por calcular o capital em dívida imediatamente após o pagamento da 27ª prestação (D_{27}). Ficaria:

$$D_{27} = \underbrace{1.416,38 a_{21\rceil 0,00677542}}_{\text{Momento 26}} + \underbrace{\underbrace{2.400}_{\text{Momento 48}} \left(1 + 0,00677542\right)^{-22}}_{\text{Momento 26}} = 29.706,48 \text{ euros}$$

ou

$$D_{27} = \underbrace{\underbrace{60.000}_{\text{Momento 0}} \left(1 + 0,00677542\right)^{26}}_{\text{Momento 26}} - \underbrace{1.416,38 s_{27\rceil 0,00677542}}_{\text{Momento 26}} = 29.706,48 \text{ euros}$$

A partir daqui,

$$j_{28} = D_{27} x i_{12} = 29.706{,}48x0{,}00677542 = 201{,}27 \text{ euros}$$
$$m_{28} = p - j_{28} = 1.416{,}38 - 201{,}27 = 1.215{,}11 \text{ euros}$$

Duas últimas linhas do Quadro:

$$D_{47} = 1.416{,}38\left(1+0{,}00677542\right)^{-1} + 2.400\left(1+0{,}00677542\right)^{-2} = 3.774{,}65 \text{ euros}$$
$$j_{48} = D_{47} x i_{12} = 3.774{,}65x0{,}00677542 = 25{,}57 \text{ euros}$$
$$m_{48} = p - j_{48} = 1.416{,}38 - 25{,}57 = 1.390{,}81 \text{ euros}$$
$$D_{48} = D_{47} - m_{48} = 3.774{,}65 - 1.390{,}81 = 2.383{,}84 \text{ euros}$$
$$j_{Vr} = D_{48} x i_{12} = 2.383{,}84x0{,}00677542 = 16{,}15 \text{ euros}$$
$$m_{Vr} = D_{48} = 2.383{,}84 \text{ euros}$$
$$j_{Vr} + m_{Vr} = 16{,}15 + 2.383{,}84 = 2.399{,}99 \quad \left(\approx 2.400 \text{ euros}\right)$$

Resolução através de uma calculadora financeira

Tendo em conta as instruções anteriormente introduzidas, ficaria:

Modo Begin
$N = 48$
$I\% = 0 \Rightarrow I\% = 0{,}677542$
$PV = 60.000$
$PMT = -1.416{,}38$
$FV = -2.400$
$P/Y = 1$
$C/Y = 1$

$PM1 = 1$
$PM2 = 1$
$BAL = ? \Rightarrow BAL = 58.583{,}62000 \quad (D_1)$
$PRN = ? \Rightarrow PRN = -1.416{,}38 \quad (m_1)$
$INT = ? \Rightarrow INT = 0 \quad (j_1)$

$PM1 = 2$
$PM2 = 2$
$PRN = ? \Rightarrow PRN = -1.019{,}451274 \quad (m_2)$
$INT = ? \Rightarrow INT = -396{,}928726 \quad (j_2)$

$PM1 = 27$
$PM2 = 27$
$BAL = ? \Rightarrow BAL = 29.706{,}47963 \quad (D_{27})$

$PM1 = 28$
$PM2 = 28$
$PRN = ? \Rightarrow PRN = -1.215{,}106076 \quad (m_{28})$
$INT = ? \Rightarrow INT = -201{,}273924 \quad (j_{28})$

$$\begin{aligned}&PM1 = 47\\&PM2 = 47\\&BAL = ? \Rightarrow BAL = 3.774{,}653549 \quad (D_{47})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&PM1 = 48\\&PM2 = 48\\&BAL = ? \Rightarrow BAL = 2.383{,}848418 \quad (D_{48})\\&PRN = ? \Rightarrow PRN = -1.390{,}805131 \quad (m_{48})\\&INT = ? \Rightarrow INT = -25{,}574869 \quad (j_{48})\end{aligned}$$

Deve notar-se que, devido às características do problema em causa, m_{vr} = 2.383,848418 (isto é, $m_{vr} = D_{48}$). Se fizermos PM1 = 49 e PM2 = 49, a calculadora devolve

BAL = 983,619996

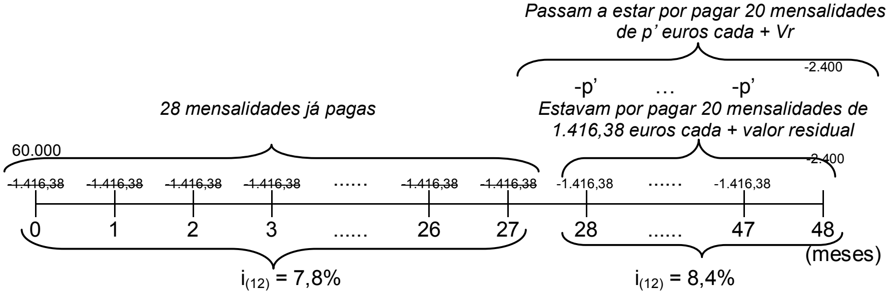
PRN = - 1.400,228422

INT = - 16,151578

O valor relativo ao juro é correcto, mas o valor da amortização de capital é
- 1.400,228422 – 983,62 = - 2.383,848422

c) *Supondo que imediatamente após o pagamento da 28ª prestação a taxa anual nominal (com capitalizações mensais) passava a ser de 8,4%, recalcular todos os valores relativos às duas linhas imediatamente seguintes e às duas últimas linhas do Quadro de Amortização.*

Neste caso, a situação descrita traduz-se no seguinte:



Resolução sem recurso a uma calculadora financeira

O Quadro de Amortização passa a ser o seguinte:

Momento	***Prest. nº***	***Capital em dívida (no início do período)***	***Juro***	***Amortização***	***Prestação***
28	29	D_{28} = 28.492,28	j'_{29} = 199,45	m'_{29} = 1.220,75	p' = 1.420,20
29	30	D'_{29} = 27.271,53	j'_{30} = 190,90	m'_{30} = 1.229,30	p' = 1.420,20
......	......	......	......	......	......
47	48	D'_{47} = 3.777,08	j'_{48} = 26,44	m'_{48} = 1.393,76	p' = 1.420,20
48	Vr	D'_{48} = 2.383,32	j'_{Vr} = 16,68	m'_{Vr} = 2.383,32	Vr = 2.400

Explicação dos valores:

$$D_{28} = D_{27} - m_{28} = 29.707{,}38 - 1.215{,}10 = 28.492{,}28 \text{ euros}$$

ou

$$D_{28} = \underbrace{1.416{,}38 a_{20\rceil 0{,}00677542}}_{\text{Momento 27}} + \underbrace{\underbrace{2.400}_{\text{Momento 48}} \left(1+0{,}00677542\right)^{-21}}_{\text{Momento 27}} = 28.491{,}37 \text{ euros}$$

ou

$$D_{28} = \underbrace{\underbrace{60.000}_{\text{Momento 0}} \left(1+0{,}00677542\right)^{27}}_{\text{Momento 27}} - \underbrace{1.416{,}38 s_{28\rceil 0{,}00677542}}_{\text{Momento 27}} = 28.491{,}37 \text{ euros}$$

A partir daqui os cálculos serão efectuados com a "nova" taxa mensal, $i'_{12} = \dfrac{0{,}084}{12} \Leftrightarrow i'_{12} = 0{,}007$.

. Cálculo da "nova" prestação:

$$\underbrace{28.492{,}28}_{\text{Momento 27}} = \underbrace{p' a_{20\rceil 0{,}007}}_{\text{Momento 27}} + \underbrace{\underbrace{2.400}_{\text{Momento 48}} \left(1+0{,}007\right)^{-21}}_{\text{Momento 27}} \Leftrightarrow p' = 1.420{,}20 \text{ euros}$$

29ª linha do Quadro:

$$j'_{29} = D_{28} x i'_{12} = 28.492,28x0,007 = 199,45 \text{ euros}$$
$$m'_{29} = p' - j'_{29} = 1.420,20 - 199,45 = 1.220,75 \text{ euros}$$

30ª linha do Quadro:

$$D'_{29} = D_{28} - m'_{29} = 28.492,28 - 1.220,75 = 27.271,53 \text{ euros}$$
$$j'_{30} = D'_{29} x i'_{12} = 27.271,53x0,007 = 190,90 \text{ euros}$$
$$m'_{30} = p' - j'_{30} = 1.420,20 - 190,90 = 1.229,30 \text{ euros}$$

48ª linha do Quadro:

$$D'_{47} = 1.420,20\left(1+0,007\right)^{-1} + 2.400\left(1+0,007\right)^{-2} = 3.777,08 \text{ euros}$$
$$j'_{48} = D'_{47} x i'_{12} = 3.777,08x0,007 = 26,44 \text{ euros}$$
$$m'_{48} = p' - j'_{48} = 1.420,20 - 26,44 = 1.393,76 \text{ euros}$$

Valor residual:

$$D'_{48} = D'_{47} - m'_{48} = 3.777,08 - 1.393,76 = 2.383,32 \text{ euros}$$
$$m_{Vr} = D'_{48} = 2.383,32 \text{ euros}$$
$$j'_{Vr} = D'_{48} x i'_{12} = 2.383,32x0,007 = 16,68 \text{ euros}$$
$$p'_{Vr} = j'_{Vr} + m'_{Vr} = 16,68 + 2.383,32 = 2.400 \text{ euros}$$

Resolução através de uma calculadora financeira

Aproveitando alguns cálculos efectuados nas alíneas anteriores, ficaria:

Modo Begin
$N = 48$
$I\% = 0 \Rightarrow I\% = 0,677542$
$PV = 60.000$
$PMT = -1.416,38$
$FV = -2.400$
$P/Y = 1$
$C/Y = 1$

$PM1 = 28$
$PM2 = 28$
$BAL = ? \Rightarrow BAL = 28.491,37355 \quad (D_{28})$

Utilizando uma calculadora financeira não é possível obter directamente o valor da nova prestação mensal. De facto, esta é uma situação que não corresponde, exactamente, nem ao modo END (pois apesar de a primeira das novas prestações mensais ser postecipada, o valor residual ocorre um período após a última prestação mensal[1]), nem ao modo BEGIN (pois apesar de o valor residual ocorrer

[1] E o modo END pressupõe que FV (que corresponde ao valor residual em problemas de "leasing") ocorre no mesmo momento da última prestação.

um mês após a última prestação mensal, a primeira das novas prestações mensais não ocorre no momento ao qual está reportado PV[1]). Contudo, é possível contornar este (aparente) problema, simplificando a equação de valor:

$$28.491,37355 = p'a_{\overline{20}|0,007} + 2.400\left(1+0,007\right)^{-21} \Leftrightarrow 26.418,40669 = p'a_{\overline{20}|0,007}$$

A partir daqui as instruções seriam as seguintes:

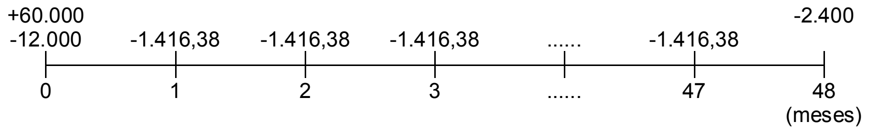
$$\begin{array}{l} \text{Modo End} \\ N = 20 \\ I\% = 8,4 \\ PV = 26.418,40669 \\ PMT = 0 \Rightarrow PMT = -1.420,151894 \\ FV = 0 \\ P/Y = 12 \\ C/Y = 12 \end{array}$$

A obtenção das novas linhas do Quadro de Amortização implica a reformulação das instruções a inserir na calculadora. Porém veremos uma situação deste tipo já a seguir, no Cenário III, pelo que não a trataremos agora.

<u>Cenário III</u>*: *O 1º termo da renda do "leasing" ocorre no próprio momento do contrato e é de valor diferente de todos os restantes 47 termos. Neste caso, apenas o valor residual ocorre no final do prazo (ou seja, ocorre um período após o vencimento do último termo).

a) Calcular a taxa anual nominal (com capitalizações mensais) associada a este contrato de "leasing".

O diagrama temporal que representa esta situação é o seguinte:



---

[1] E o modo BGN pressupõe que o primeiro PMT (prestação) ocorre conjuntamente com PV.

A equação de valor subjacente é:

$$\underbrace{60.000}_{\text{Momento 0}} = \underbrace{12.000}_{\text{Momento 0}} + \underbrace{1.416,38\, a_{\overline{47|}i_{12}}}_{\text{Momento 0}} + \underbrace{\underbrace{2.400}_{\text{Momento 48}} \left(1+i_{12}\right)^{-48}}_{\text{Momento 0}}$$

Resolução sem recurso a uma calculadora financeira

Não dispondo de uma calculadora financeira, a resolução é, na essência, semelhante às anteriores, pelo que nos parece desnecessário efectuá-la.

Resolução através de uma calculadora financeira

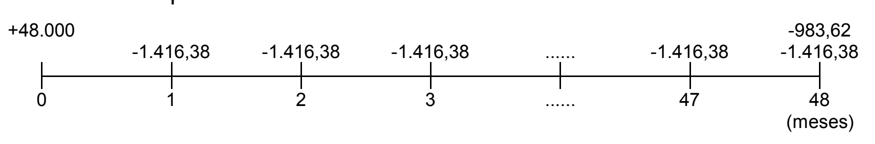
A utilização de uma calculadora financeira para o cálculo da taxa de juro subjacente a este contrato de "leasing" requer, nesta situação, algumas cautelas. De facto, como podemos verificar no diagrama temporal, esta situação não corresponde exactamente ao modo BEGIN (pois apesar de a 1ª prestação ocorrer no momento 0 e o valor residual ocorrer um período após a última prestação, a 1ª prestação não é de valor igual às restantes), nem ao modo END (pois a 1ª prestação não ocorre um período após a data do contrato, nem o valor residual coincide com a última prestação). Neste tipo de situações, pode contornar-se o problema do seguinte modo:

- Considera-se PV = 60.000 - 12.000 = 48.000;
- Deste modo, a primeira das 47 prestações constantes ocorre no final do primeiro período, pelo que consideraremos o modo END;

Porém, permanece um pequeno problema: o valor residual ocorre um mês após a última prestação. Então:

- Consideramos mais um pagamento de 1.416,38 euros (ou seja, introduzimos N=48);
- Inserimos em FV um valor tal que, adicionado algebricamente com o valor da prestação, totalize o montante realmente pretendido para o último pagamento, relativo ao valor residual. Assim, o valor a inserir em FV deve ser -983,62 euros (valor que resulta de -2.400-(-1.416,38)). De facto, -1.416,38 + (-983,62) = -2.400 (montante pretendido para o último pagamento).

Assim, a situação pode ser representada através do seguinte diagrama temporal, absolutamente equivalente ao anterior:



Em suma, as instruções para calcular a taxa anual nominal, composta mensalmente, associada a este contrato de "leasing" seriam:

Modo End
$N = 48$
$I\% = 0 \Rightarrow I\% = 18{,}805152$
$PV = 48.000$
$PMT = -1.416{,}38$
$FV = -983{,}62$
$P/Y = 12$
$C/Y = 12$

Trata-se da taxa anual nominal, composta mensalmente, porque inserimos P/Y=12 e C/Y=12[1].

b) *Elaborar as duas primeiras, a 28ª e as duas últimas linhas do Quadro de Amortização.*

Resolução sem recurso a uma calculadora financeira

Para elaborar as linhas pretendidas para o Quadro de Amortização vamos utilizar a taxa mensal efectiva de 1,5671% (obtida via calculadora financeira). O Quadro de Amortização é o seguinte:

Momento	***Prest. nº***	***Capital em dívida (no início do período)***	***Juro***	***Amortização***	***Prestação***
0	1	D_0 = 60.000	j_1 = 0	m_1 = 12.000	p = 12.000
1	2	D_1 = 48.000	j_2 = 752,21	m_2 = 664,17	p = 1.416,38
......	......	......	......	......	......
27	28	D_{27} = 26.884,05	j_{28} = 421,03	m_{28} = 995,08	p = 1.416,38
......	......	......	......	......	......
47	48	D_{47} = 3.721,04	j_{48} = 58,31	m_{48} = 1.358,07	p = 1.416,38
48	Vr	D_{48} = 2.362,97	j_{Vr} = 37,03	m_{Vr} = 2.362,97	p_{Vr} = 2.400

Explicação dos valores:

Sem recurso a uma calculadora financeira, o preenchimento do Quadro de Amortização seria efectuado a partir dos seguintes cálculos auxiliares[2]:

---

[1] Como era razoável esperar, a taxa associada a este cenário é superior à taxa associada aos dois cenários anteriores, na medida em que a primeira prestação é agora de valor significativamente superior. Para obter a taxa mensal efectiva, inserir-se-ia P/Y=1 e C/Y=1 (1,567096%); para obter a taxa anual efectiva, inserir-se-ia P/Y=12 e C/Y=1 (20,513701).

[2] Dada a semelhança de raciocínio com as situações anteriores (principalmente com o Cenário II), apresentamos os cálculos matemáticos de forma sintética, minimizando o mais possível os respectivos comentários.

1ª linha do Quadro:

$$D_0 = VBL = 60.000 \text{ euros}$$
$$m_1 = p = 12.000 \text{ euros, pois a renda é antecipada (e, como tal, } j_1 = 0 \text{ euros)}$$

2ª linha do Quadro:

$$D_1 = D_0 - m_1 = 60.000 - 12.000 = 48.000 \text{ euros}$$
$$j_2 = D_1 x i_{12} = 48.000x0,015671 = 752,21 \text{ euros}$$
$$m_2 = p - j_2 = 1.416,38 - 752,21 = 664,17 \text{ euros}$$

28ª linha do Quadro:

$$m_{28} = m_2 \left(1 + i_{12}\right)^{28-2} = 664,17\left(1 + 0,015671\right)^{26} = 995,08 \text{ euros}$$
$$j_{28} = p - m_{28} = 1.416,38 - 995,08 = 421,30 \text{ euros}$$
$$j_{28} = D_{27} x i_{12} \Rightarrow 421,30 = D_{27} x 0,015671 \Leftrightarrow D_{27} = 26.884,05 \text{ euros}$$

ou

$$D_{27} = \underbrace{1.416,38 a_{21\rceil 0,015671}}_{\text{Momento 26}} + \underbrace{\underbrace{2.400}_{\text{Momento 48}} \left(1 + 0,015671\right)^{-22}}_{\text{Momento 26}} = 26.883,71 \text{ euros}$$

ou

$$D_{27} = \underbrace{\underbrace{(60.000 - 12.000)}_{\text{Momento 0}}(1 + 0,015671)^{26}}_{\text{Momento 26}} - \underbrace{1.416,38 s_{26\rceil 0,015671}}_{\text{Momento 26}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow D_{27} = 26.883,77 \text{ euros}$$

48ª linha do Quadro:

$$D_{47} = 1.416,38\left(1 + 0,015671\right)^{-1} + 2.400\left(1 + 0,015671\right)^{-2} = 3.721,04 \text{ euros}$$
$$j_{48} = D_{47} x i_{12} = 3.721,04x0,015671 = 58,31 \text{ euros}$$
$$m_{48} = p - j_{48} = 1.416,38 - 58,31 = 1.358,07 \text{ euros}$$

Valor residual:

$$D_{48} = D_{47} - m_{48} = 3.721,04 - 1.358,07 = 2.362,97 \text{ euros}$$
$$j_{Vr} = D_{48} x i_{12} = 2.362,97x0,015671 = 37,03 \text{ euros}$$
$$m_{Vr} = D_{48} = 2.362,97 \text{ euros}$$
$$p_{Vr} = j_{Vr} + m_{Vr} = 37,03 + 2.362,97 = 2.400 \text{ euros}$$

Resolução através de uma calculadora financeira

Tendo em conta as instruções anteriormente introduzidas, temos:

$$\begin{aligned}&\text{Modo End}\\&N = 48\\&I\% = 0 \Rightarrow I\% = 1{,}567096\\&PV = 48.000\\&PMT = -1.416{,}38\\&FV = -983{,}62\\&P/Y = 1\\&C/Y = 1\end{aligned}$$

Note-se que, como considerámos em PV o valor da dívida deduzido do valor do primeiro pagamento, quando indicamos PM1=1, por exemplo, a calculadora devolve os valores relativos à segunda prestação (ou seja, a primeira de 1.416,38 euros):

$$\begin{aligned}&PM1 = 1\\&PM2 = 1\\&PRN = ? \Rightarrow PRN = -664{,}173915 \quad (m_2)\\&INT = ? \Rightarrow INT = -752{,}206085 \quad (j_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&PM1 = 26\\&PM2 = 26\\&BAL = ? \Rightarrow BAL = 26.883{,}72166 \quad (D_{27})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&PM1 = 27\\&PM2 = 27\\&PRN = ? \Rightarrow PRN = -995{,}086270 \quad (m_{28})\\&INT = ? \Rightarrow INT = -421{,}293730 \quad (j_{28})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&PM1 = 46\\&PM2 = 46\\&BAL = ? \Rightarrow BAL = 3.721{,}037760 \quad (D_{47})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&PM1 = 47\\&PM2 = 47\\&BAL = ? \Rightarrow BAL = 2.362{,}969994 \quad (D_{48})\\&PRN = ? \Rightarrow PRN = -1.358{,}067766 \quad (m_{48})\\&INT = ? \Rightarrow INT = -58{,}312234 \quad (j_{48})\end{aligned}$$

Deve notar-se que, atendendo às características do problema em causa, m_{vr} = 2.362,969994 ($m_{vr} = D_{48}$). Se fizermos PM1 = 48 e PM2 = 48, a calculadora devolve

BAL = 983,620003

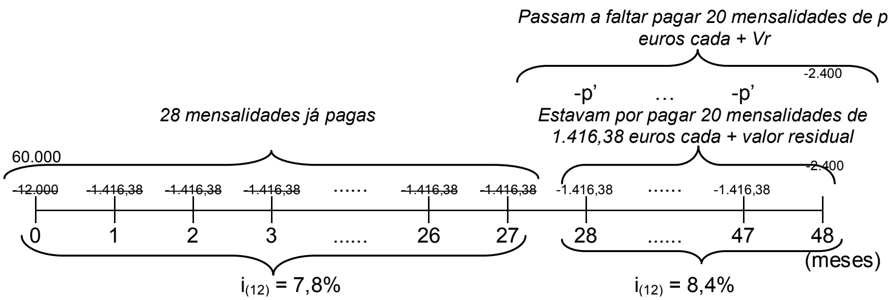
PRN = - 1.379,349991

INT = - 37,030009

O valor relativo ao juro (INT = - 37,030009) é correcto, mas o valor da amortização de capital é (-1.379,349991 – 983,62 = - 2.362,969991).

c) *Supondo que, imediatamente após o pagamento da 28ª prestação, a taxa anual nominal (com capitalizações mensais) passava a ser de 8,4%, recalcular todos os valores relativos às duas linhas imediatamente seguintes e às duas últimas linhas do Quadro de Amortização.*

Neste caso, a situação descrita traduz-se no seguinte:



Resolução sem recurso a uma calculadora financeira

O Quadro de Amortização passa a ser o seguinte:

Momento	***Prest. nº***	***Capital em dívida (no início do período)***	***Juro***	***Amortização***	***Prestação***
28	29	D_{28} = 25.888,97	j'_{29} = 181,22	m'_{29} = 1.099,04	p' = 1.280,26
29	30	D'_{29} = 24.789,93	j'_{30} = 173,53	m'_{30} = 1.106,73	p' = 1.280,26
......	......	......	......	......	......
47	48	D'_{47} = 3.638,11	j'_{48} = 25,47	m'_{48} = 1.254,79	p' = 1.280,26
48	Vr	D'_{48} = 2.383,32	j'_{Vr} = 16,68	m'_{Vr} = 2.383,32	p_{Vr} = 2.400

Explicação dos valores:

Comecemos por calcular o capital em dívida imediatamente após o pagamento da 28ª prestação (D_{28}):

$$D_{28} = D_{27} - m_{28} \Rightarrow D_{28} = 26.884{,}05 - 995{,}08 \Leftrightarrow D_{28} = 25.888{,}97 \text{ euros}$$

ou

$$D_{28} = \underbrace{1.416{,}38 a_{\overline{20}|0{,}015671}}_{\text{Momento } 27} + \underbrace{\underbrace{2.400}_{\text{Momento } 48} \left(1+0{,}015671\right)^{-21}}_{\text{Momento } 27} \Leftrightarrow D_{28} = 25.888{,}62 \text{ euros}$$

ou

$$D_{28} = \underbrace{\underbrace{(60.000 - 12.000)}_{\text{Momento } 0}\left(1+0{,}015671\right)^{27}}_{\text{Momento } 27} - \underbrace{1.416{,}38 s_{\overline{27}|0{,}015671}}_{\text{Momento } 27} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D_{28} = 25.888{,}69 \text{ euros}$$

Com base na nova taxa mensal, podemos calcular a nova prestação mensal e todos os restantes dados:

$$i'_{12} = \frac{0{,}084}{12} \Leftrightarrow i'_{12} = 0{,}007 \ (0{,}7\%)$$

$$\underbrace{25.888{,}97}_{\text{Momento } 27} = \underbrace{p' a_{\overline{20}|0{,}007}}_{\text{Momento } 27} + \underbrace{\underbrace{2.400}_{\text{Momento } 48} \left(1+0{,}007\right)^{-21}}_{\text{Momento } 27} \Leftrightarrow p' = 1.280{,}26 \text{ euros}$$

29ª linha do Quadro:

$$j'_{29} = D_{28} x i'_{12} = 25.888{,}97x0{,}007 = 181{,}22 \text{ euros}$$
$$m'_{29} = p' - j'_{29} = 1.280{,}26 - 181{,}22 = 1.099{,}04 \text{ euros}$$

30ª linha do Quadro:

$$D'_{29} = D_{28} - m'_{29} = 25.888{,}97 - 1.099{,}04 = 24.789{,}93 \text{ euros}$$
$$j'_{30} = D'_{29} x i'_{12} = 24.789{,}93x0{,}007 = 173{,}53 \text{ euros}$$
$$m'_{30} = p' - j'_{30} = 1.280{,}26 - 173{,}53 = 1.106{,}73 \text{ euros}$$

48ª linha do Quadro:

$$D'_{47} = 1.280{,}26\left(1+0{,}007\right)^{-1} + 2.400\left(1+0{,}007\right)^{-2} = 3.638{,}11 \text{ euros}$$
$$j'_{48} = D'_{47} x i'_{12} = 3.638{,}11x0{,}007 = 25{,}47 \text{ euros}$$
$$m'_{48} = p' - j'_{48} = 1.280{,}26 - 25{,}47 = 1.254{,}79 \text{ euros}$$

Valor residual:

$$D'_{48} = D'_{47} - m'_{48} = 3.638{,}11 - 1.254{,}79 = 2.383{,}32 \text{ euros}$$
$$m'_{Vr} = D'_{48} = 2.383{,}32 \text{ euros}$$
$$j'_{Vr} = D'_{48} x i_{12} = 2.383{,}32x0{,}007 = 16{,}68 \text{ euros}$$
$$p_{Vr} = j'_{Vr} + m'_{Vr} = 16{,}68 + 2.383{,}32 = 2.400 \text{ euros}$$

Resolução através de uma calculadora financeira

Aproveitando alguns cálculos efectuados nas alíneas anteriores, ficaria:

$$
\begin{aligned}
&\text{Modo End}\\
&N = 48\\
&I\% = 0 \Rightarrow I\% = 1{,}567096\\
&PV = 48.000\\
&PMT = -1.416{,}38\\
&FV = -983{,}62\\
&P/Y = 1\\
&C/Y = 1\\
&PM1 = 27\\
&PM2 = 27\\
&BAL = ? \Rightarrow BAL = 25.888{,}63539 \quad (D_{28})
\end{aligned}
$$

Como referimos na alínea c) do Cenário II, o cálculo da nova prestação mensal não é possível (pelo menos de uma forma directa). De facto, esta é também uma situação que não corresponde exactamente ao modo END, nem ao modo BEGIN. Nestas situações, e uma vez que a incógnita é precisamente o novo valor da prestação, não conseguimos calcular directamente através da calculadora financeira os valores pretendidos para o Quadro de Amortização (pois não temos possibilidade de introduzir correctamente o valor para FV). Porém, conseguimos fazê-lo de forma indirecta. Vejamos: partindo da equação de valor relevante e operando matematicamente, passamos a ter:

$$\underbrace{25.888{,}63539}_{\text{Momento 27}} = \underbrace{p'a_{20\rceil 0{,}007}}_{\text{Momento 27}} + \underbrace{\underbrace{2.400}_{\text{Momento 48}}\left(1+0{,}007\right)^{-21}}_{\text{Momento 27}} \Leftrightarrow 23.815{,}66853 = p'a_{20\rceil 0{,}007}$$

A partir daqui as instruções serão:

$$
\begin{aligned}
&\text{Modo End}\\
&N = 20\\
&I\% = 0{,}7\\
&PV = 23.815{,}66853\\
&PMT = 0 \Rightarrow PMT = -1.280{,}238705\\
&FV = 0\\
&P/Y = 1\\
&C/Y = 1
\end{aligned}
$$

Todavia, operando desta maneira, deixamos de estar perante um problema de “leasing” e passamos a ter um problema de rendas de termos constantes (pois FV=0), pelo que com estas instruções no modo Financeiro não seria possível encontrar os valores correctos para as linhas pretendidas do Quadro de Amortização.

A situação pode ser representada através do seguinte diagrama temporal:

…	27	28	29	......	47	48 (meses)
…	25.888,63539	-1.280,238705	-1.280,238705	......	-1.280,238705	-1.119,761295 -1.280,238705

Assim, as instruções para a calculadora seriam as seguintes:

Modo End
$N = 21$
$I\% = 0{,}7$
$PV = 25.888{,}63539$
$PMT = -1.280{,}238705$
$FV = -1.119{,}761295$ $\left[\text{resulta de: } -2.400-\left(-1.280{,}238705\right)\right]$
$P/Y = 1$
$C/Y = 1$

$PM1 = 1$
$PM2 = 1$
$BAL = ? \Rightarrow BAL = 24.789{,}61713 \quad (D'_{29})$
$PRN = ? \Rightarrow PRN = -1.099{,}018257 \quad (m'_{29})$
$INT = ? \Rightarrow INT = -181{,}220448 \quad (j'_{29})$

$PM1 = 2$
$PM2 = 2$
$PRN = ? \Rightarrow PRN = -1.106{,}711385 \quad (m'_{30})$
$INT = ? \Rightarrow INT = -173{,}527320 \quad (j'_{30})$

$PM1 = 19$
$PM2 = 19$
$BAL = ? \Rightarrow BAL = 3.638{,}088863 \quad (D'_{47})$

$PM1 = 20$
$PM2 = 20$
$BAL = ? \Rightarrow BAL = 2.383{,}316780 \quad (D'_{48})$
$PRN = ? \Rightarrow PRN = -1.254{,}772083 \quad (m'_{48})$
$INT = ? \Rightarrow INT = -25{,}466622 \quad (j'_{48})$

$PM1 = 21$
$PM2 = 21$
$BAL = ? \Rightarrow BAL = 1.119{,}761292$
$INT = ? \Rightarrow INT = -16{,}683217 \quad (j'_{vr})$
$PRN = ? \Rightarrow PRN = -1.263{,}555488 \quad (m'_{vr})$

Deve perceber-se que a amortização de capital contida na prestação relativa ao valor residual é de (1.263,555488 + 1.119,761291), ou seja, 2.383,316779 euros ($m'_{vr} = D'_{48}$, como aliás não podia deixar de ser).

4. CONCLUSÕES

Com este artigo procurámos realçar, por um lado, as vantagens da utilização de calculadoras financeiras no ensino do Cálculo Financeiro e, por outro, a necessidade de possuir sólidos conhecimentos teóricos que isso implica. A aplicação prática aqui apresentada – o "leasing" – traduz apenas um dos muitos problemas típicos do Cálculo Financeiro nos quais as calculadoras financeiras poderão constituir uma preciosa ajuda, na medida em que permitem poupar tempo e trabalho. Porém, elas não conseguem, por si só, equacionar problemas. Apenas com a intervenção humana, e recorrendo aos conceitos teóricos próprios do Cálculo Financeiro, é que isso se torna possível. Uma calculadora financeira é um aparelho dotado de uma enorme capacidade de cálculo, mas sem qualquer ponta de inteligência e capacidade de raciocínio. Limita-se a fazer aquilo que se lhe diz para fazer – ainda que sejam coisas incorrectas. Relativamente a algumas destas, a calculadora ainda consegue emitir uma mensagem de erro (situações que sejam manifestamente impossíveis), mas relativamente a muitas outras, nem pensar. Não esqueçamos que as calculadoras financeiras resolvem os problemas a partir de fórmulas que, por sua vez, se baseiam em hipóteses, pressupostos. Compreende-se, pois, que a sua correcta utilização exija sólidos conhecimentos teóricos de Cálculo Financeiro. Em síntese, as calculadoras financeiras são um bom complemento, mas nunca um substituto da intervenção humana na resolução dos problemas de Cálculo Financeiro.

Somos, pois, favoráveis à utilização de calculadoras financeiras no ensino do Cálculo Financeiro, incentivando (mais do que autorizando) os alunos a fazê-lo. Sentimo-nos confortáveis quando um empresário nos diz que um nosso antigo aluno revela bons conhecimentos teóricos e, simultaneamente, utiliza correctamente as ferramentas mais adequadas para resolver problemas do dia-a-dia (sejam calculadoras financeiras, sejam outras, como folhas de cálculo).

BIBLIOGRAFIA

- MATIAS, ROGÉRIO (2004), "Cálculo Financeiro – Teoria e Prática", Escolar Editora
- MATIAS, ROGÉRIO e SILVA, ILÍDIO (2004), "Cálculo Financeiro – Casos Práticos Resolvidos e Explicados", Edição dos autores
- www.calculofinanceiro.com

5. ANEXO

SIMBOLOGIA ADOPTADA

Símbolo	Descrição
$i_{(k)}$	Taxa de juro anual nominal, composta k vezes por ano
i_k	Taxa de juro periódica efectiva (relativa ao período k vezes inferior ao ano)
i	Taxa anual efectiva
D_k	Capital em dívida no início do período a que respeita a prestação (k+1)
p	Prestação (composta por amortização e juro)
j_k	Juro contido na prestação k
m_k	Amortização de capital contida na prestação k
Vr	Valor residual
j_{Vr}	Juro contido na prestação relativa ao valor residual
m_{Vr}	Amortização de capital contida na prestação relativa ao valor residual

NOTAS RELATIVAS AOS EXEMPLOS QUE ENVOLVEM A UTILIZAÇÃO DE CALCULADORAS FINANCEIRAS

- A incógnita é representada começando por lhe atribuir o valor "0", seguido de "=>" e o valor obtido. Por exemplo, se a incógnita é a taxa de juro, aparece I% = 0 => I% = (valor obtido). Isto significa que devem ser introduzidos os valores de todas as outras variáveis.

- A simbologia adoptada para representar as diferentes variáveis difere ligeiramente de marca para marca e até entre modelos da mesma marca. Por outro lado, a forma de introduzir e obter valores também varia entre marcas e modelos. Para uma explicação mais detalhada, recomenda-se a consulta do sítio www.calculofinanceiro.com (área de *Downloads*).

- Alguns resultados para a mesma incógnita diferem ligeiramente apenas devido a arredondamentos.

ALGUNS MODELOS DE CALCULADORAS FINANCEIRAS

Marca	Modelo
Casio	FC-100; FC-200; 9850 GB Plus
Hewlett-Packard	10B; 17B; 19B-II
Texas Instruments	TI-BA II/BA II Plus/BA II Plus Professional; TI-83/83 Plus/83 Silver; TI-84