

Millenium **educação, ciência e tecnologia**

CAOS E MÉTODOS NÃO LINEARES NOS MERCADOS FINANCEIROS

FRANCISCO JOSÉ SANCHES TOMÉ*

1 – Introdução

O mercado financeiro desempenha um papel preponderante na afectação dos recursos de qualquer economia, ao constituir um ponto de encontro entre os agentes exedentários de liquidez e aqueles que apresentam necessidades de capital. Daí a importância em estudar e compreender o seu funcionamento. A partir dos anos 70, numerosas investigações foram elaboradas com o intuito de verificar se os mercados de capitais são eficientes. Ultimamente, as flutuações generalizadas e a instabilidade dos mercados têm questionado a investigação económica, pondo em causa os processos e métodos tradicionais de o estudar.

Neste artigo pretende-se discutir a importância de alguns dos novos desenvolvimentos metodológicos susceptíveis de iluminar a investigação sobre os mercados financeiros.

2 - Os Primórdios: comportamento aleatório ou não aleatório?

Bachelier (1900) e Poincaré (1952) estão na origem de duas correntes de opinião que, nos nossos dias, dominam o pensamento económico sobre a forma de funcionamento dos mercados financeiros. O primeiro defendeu que os rendimentos dos activos financeiros seguem um percurso aleatório, “random walk”, dado estar dependente da ocorrência de múltiplas variáveis tipicamente imprevisíveis. As ideias deste autor viriam a ter desenvolvimentos múltiplos que deram origem, ao modelo

* Equiparado a Professor Adjunto da Escola Superior de Tecnologia e Gestão da Guarda.

CAPM e à análise de portfólio de Markowitz. Poicaré (1952) fez pesquisa na área das equações diferenciais tendo mostrado que a ocorrência de processos não-lineares impossibilitaria uma única solução para um dado sistema. Além disso, segundo este autor, nos sistemas não lineares a ocorrência de erros nas condições iniciais do sistema seriam ampliados pela existência de um “feedback” no processo. Desta forma, mesmo em sistemas relativamente simples de modelizar, a previsão a longo prazo era impossível devido à existência de “sensível dependência da situação inicial”, estando na origem daquilo que se designa hoje por “Teoria do Caos”. A existência de dependência não-linear e a conseqüente rejeição do facto dos rendimentos das acções e índices de acções seguirem um processo “random walk” geraram a necessidade de encontrar explicações para a ocorrência deste tipo de processos. Duas correntes distintas de análise surgiram:

- a corrente que defende que os mercados são eficientes, sendo os processos estocásticos; e

- a corrente que advoga que os mercados são ineficientes, caracterizados por uma dependência não-linear que deriva do facto dos mercados obedecerem a uma lei de comportamento caracterizável por um sistema caótico e portanto previsível a curto, mas não a longo prazo.

3 - Modelos ARMA e GARCH

Até ao início dos anos 80 a maior parte dos estudos de séries financeiras utilizava especificações lineares com média condicionada, do tipo autorregressivo com média móvel (ARMA), cuja metodologia, proposta por Box-Jenkins, procura modelizar a dependência linear existente nos rendimentos de séries financeiras:

$$R_{t(p,q)} = a_0 + a_1 R_{t-1} + a_2 R_{t-2} + \dots + a_n R_{t-p} + e_t + b_0 + b_1 V_{t-1} + b_2 V_{t-2} + \dots + b_n V_{t-q} + kt \quad (1)$$

Onde :

R_{t-i} => Taxa de rendimento com um desfasamento temporal “i”

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ => coeficientes estimados para cada uma das variáveis ,

V_t = resíduo ou perturbações do processo com desfasamento temporal “t”,

e_t, K_t => resíduo do processo na observação “t”.

Estes modelos assumem que a volatilidade é constante ao longo do tempo. Todavia, esta hipótese raramente se verifica na prática, pois os períodos de instabilidade sucedem-se entre si, isto é, um período de variação elevada de rendimentos tende a ser seguido por um período de amplitude idêntica, mas no sentido contrário. Por conseguinte o risco está correlacionado ao longo do tempo.

Em 1982, Engle considerou que era possível construir um modelo paramétrico no qual a variância seria condicionada por uma equação algébrica, modelizando não só a média como também a variância condicionada. Estes modelos procuram captar a volatilidade de autocorrelações, onde o risco de hoje está dependente do risco observado no passado, contrariamente ao modelos autorregressivos de média móvel (ARMA). A este modelo se designou Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (ARCH). nova forma de modelizar o comportamento dos rendimentos dos activos financeiros, que se baseava na existência de heterocedasticidade (variância flutuante ao longo do tempo) condicional à verificada no passado imediato.

Um modelo mais abrangente, no qual a variância condicional depende não só do passado da variável em causa como também do próprio passado desta e foi apelidado de ‘GARCH’ (Generalized Autoregressive Conditional Heterokedastic). Quer o modelo ARCH quer o modelo GARCH são processos estocásticos em que a volatilidade condiciona os rendimentos no futuro próximo. O modelo GARCH proposto consiste num modelo que incorpora na equação da média as autocorrelações significativas encontradas e a variância estimada para o período. O modelo pode ser representado por:

$$R_t = a_1 + a_2 \sigma_t^2 + b_1 R_{t-1} + b_2 R_{t-2} + b_3 R_{t-3} + \dots + b_n R_{t-n} + \varepsilon_t \quad (2)$$

Com:

$$\sigma_t^2 = c_1 + c_2 \sigma_{t-1}^2 + c_3 \varepsilon_{t-1}^2 \quad (3)$$

Onde :

R_{t-i} => Taxa de rendimento com um desfasamento temporal ‘i’

$a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_n, c_1, c_2, c_3$ => coeficientes estimados para cada uma das variáveis

$\sigma^2 t$ => Variância do resíduo “ ε ”

εt => Resíduo do processo na observação ‘t’.

Há que realçar a diferença fundamental entre modelo ARMA e GARCH. No modelo ARMA os rendimentos estão dependentes apenas dos rendimentos de períodos anteriores, enquanto nos modelos ARCH/GARCH, dependem também da Variância/volatibilidade observada no passado bem como dos erros associados ao processo anterior. Assim, enquanto o modelo ARMA parte da existência de dependência linear dos rendimentos, o modelo GARCH parte de que a dependência dos rendimentos é não linear. Em comum têm o facto de ambos assumirem que os mercados são eficientes e os rendimentos das acções seguem processos estocásticos e logo imprevisíveis a médio e longo prazo. Para além disso ambos os modelos estocásticos simples pressupõem que os rendimentos não estão correlacionados e cuja média é zero, isto é, as autocorrelações dos rendimentos são nulas:

$$E(\varphi_t|\varphi_{t-1}) = 0. \quad (4)$$

A comprovação empírica da utilidade deste tipo de modelos encontra uma forte base de sustentação. Com efeito, Sewell e al. (1993) concluíram que os comportamentos não-lineares das taxas de rendimento semanais de seis índices de acções de vários países, nomeadamente do Japão, EUA, Korea, Hong-Kong, Singapura e Taiwan, eram passíveis de serem explicados por um modelo GARCH(1,1). De entre a multiplicidade de estudos que usam este tipo de metodologia, French e al. (1987), Brock e al. (1987) também comprovaram que o comportamento não-linear das taxas de rendimento diárias dos mercados Norte-americanos podiam ser explicado por um modelo GARCH-M.. Soares (1994), Afonso e Teixeira (1998) efectuaram um estudo muito completo sobre esta temática ao mercado Português.

4 - Correlação de longo e de curto prazo

De uma maneira geral, a correlação de longo prazo difere da de curto prazo essencialmente porque a influência dos acontecimentos perdura por muito mais tempo no sistema quando se verifica este tipo de dependência, decaindo esta muito lentamente, isto é, caracterizam-se por um "**Long Memory Processes**". Sendo assim, no caso de existir dependência a longo prazo, os acontecimentos num dado momento t , irão arrastar a sua influência durante vários períodos de tempo (ciclo orbital) ou mesmo indefinidamente.

Recorrendo à análise estatística R/S proposta por Mandelbrot (1972) ou Modified R/S, proposta por Lo (1991), é possível afirmar se existe ou não dependência a Longo Prazo.

Efectivamente, esta "memória" ou persistência do sistema, indica que a influência do passado é preponderante para fazer previsões no futuro, pois existe um efeito *feedback*. Este efeito dinâmico poderá ser captado através de um sistema não-linear. Neste sentido a "teoria do Caos", como "novo ramo da Matemática", funciona como ferramenta útil que permitiu estudar os sistemas dinâmicos não-lineares. Estes sistemas caracterizam-se pela existência de um *feedback* não linear; que apenas é susceptível de existir nos processos de dependência a longo prazo. É óbvio que assim temos que abandonar a hipótese de eficiência dos mercados, bem como o facto dos rendimentos das acções seguirem um percurso aleatório ou "*random walk*".

Apesar de normalmente existir dependência a longo prazo, a existência de sensível dependência às condições iniciais torna impossível a previsão a longo prazo. Os erros de medição iniciais acabam por ser ampliados pelos processos lineares, gerando para períodos de longo prazo comportamentos bastantes dispares. Todavia, assumido que os mercados são ineficientes o seu conhecimento permite efectuar previsões a curto prazo e assim obter rendimentos extraordinários aos do mercado, face ao risco assumido. A existência de correlação não linear nas taxas de rendimento das acções deve-se quer à não estacionaridade da série, quer a processos caóticos, quer a processos estocásticos não lineares. Neste último caso, a dependência não linear pode decorrer do facto de as taxas de rendimento esperadas variarem ao longo do tempo de acordo com a variação do prémio de risco, isto é, da variância condicional (processos com heterocedastecidade condicional).

A dependência não linear pode ser facilmente detectada através da estatística BDS (Brock, Dechert e Scheinkman).

5 - Sistema caótico ou sistema aleatório: como detectá-los?

O Caos é um processo determinístico não linear, que teve a sua origem, em Poincaré, nas ciências da Física. Segundo este autor, qualquer evolução de um processo caótico num dado espaço caracteriza-se pela sensibilidade às condições iniciais e pela existência de atractores.

Quais os procedimentos que nos permitem afirmar estar perante um sistema caótico?

A primeira etapa para detectar um processo caótico consiste no teste de Brock, Dechert e Scheinkman (estatística BDS), de forma a rejeitar a hipótese de que a rendibilidade do mercado é independente e identicamente distribuída.

De seguida, um sistema caótico difere dum sistema aleatório pelo facto destes últimos possuírem dimensão infinita. No caso de existir uma "Dimensão de Correlação" finita, à medida que se aumenta a dimensão do espaço de inserção, e dado que as observações não estão correlacionadas, estes processos tendem a preencher completamente o espaço onde estão inseridos. Todavia, a existência de dimensão finita não garante que estejamos perante um processo caótico. Para que um sistema seja caótico é também necessário que exista uma sensível dependência às condições iniciais para além da existência de uma baixa dimensão *Fractal*. A dimensão *Fractal* é medida no espaço de fase com o objectivo de determinar a complexidade do sistema gerador, estimando o número de variáveis que afectam a evolução futura do sistema.

a) Quando estas variáveis são desconhecidas e apenas conhecemos a evolução de uma delas -a rendibilidade-, um método possível de detectar fenómenos caóticos é através da estimação da "**Dimensão de Correlação**" de Grassberger e Procacia (1983). Segundo Taramasco (1997), estamos perante um dado sistema dinâmico e de natureza determinístico-caótica, se existe um *atractor* de dimensão finita (ex.º Borboleta de Lorenz), caso contrário estamos perante um processo aleatório. Etapas metodológicas:

- A medida da dimensão de um dado sistema pode ser feito através do "Espaço de Fase", representando num gráfico de n-dimensões (mais de três) as relações existentes entre as variáveis desfasadas e observar como é preenchido esse espaço.
- Por seu lado a construção do *atractor* (utilizando o teorema de Takens) é traduzido pela auto-semelhança estatística, designada por "Dimensão fractal". A função distribuição associada a este tipo de comportamento é a de Pareto ou "Stable Distribution de Levy".
- A existencia de Dimensão fractal pode ser analisada socorrendo-nos do coef. de Hurst:

$D = 1/H$ (indica-nos a persistência da série); e assim determinar o coeficiente de Correlação:

$$C = 2^{(2H-1)} - 1. \quad (5)$$

- Para a construção do *Atractor* é necessário conhecer o Ciclo Médio Orbital (indica o ponto de viragem do mercado) o qual é dado por : $Q = m*t$, onde m é a dimensão de inserção e t o desfasamento da série.
- Finalmente o cálculo do Integral de Correlação.

— A dimensão de correlação deve ser testada pelo "Scrambled Test". A estrutura obtida tem de ser robusta à destruição dos processo ARMA e GARCH.

b) Quando **as equações do sistema são conhecidas** a aferição de sensível dependência das condições iniciais pode ser feita através do calculo dos **Exponentes de Lyapunov¹** e da **Dimensão do Atractor medida pela Dimensão de Correlação**. Um expoente de Lyapunov positivo é necessário para a existência de um sistema caótico, pois é este que nos garante a existência de sensibilidade às condições iniciais. Esta estatística mede a sensibilidade de variação face ao estado inicial do sistema, indicando as taxas médias de convergência e divergência das trajectórias. O inverso do expoente de Lyapunov dá-nos a capacidade de previsão existente.

Sensível dependência às condições e Dimensão Fractal finita (estimada pelo valor da dimensão de correlação) são duas condições essenciais para averiguar a existência de um sistema caótico. Daí advém o facto da previsão a longo prazo ser praticamente impossível dadas as "bifurcações" e efeitos *feed-back* existentes num sistema caótico. A metodologia ARMA e GARCH podem também aqui ser utilizadas na filtragem de séries da dependência linear e não-linear e assim proceder ao cálculo da "Dimensão de Correlação" bem como do Coeficiente de entropia de Kolmogorov.

6- Alguns estudos que indicaram a existência de sintomas de Caos

No quadro da dinâmica não linear e da teoria do caos, apesar de reduzidos, alguns estudos sobre índices de acções indicam a existência de sintomas de Caos. Scheinkman e LeBaron (1989) documentaram a existência de um sistema de dimensão fractal entre 5 e 6 para as taxas de rendimento do índice de acções CRSP². Com base nestes resultados, estes autores concluíram que os rendimentos do índice em questão apresentavam sintomas de determinismo não-linear ou Caos. Por outro lado Mayfield e Mizrach (1996) vieram mais tarde confirmar que a existência de baixa dimensão de correlação no índice Standard & Poors não era susceptível de ser explicada por processos ARMA ou GARCH. Peters (1991) observou a existência de Caos nas cotações dos índices MSCI representativos dos mercados Japonês, Inglês, Alemão e do

¹ O expoente de Lyapunov (λ) caracteriza o crescimento logarítmico médio do erro relativo por iteração. Um pequeno erro inicial aumentará de 2^λ em média por cada iteração.

Standard & Poors dos Estados Unidos. Brock (1987), Scheinkman e LeBaron (1989), Willey (1992), obtêm resultados semelhantes. Este autor obteve resultados para a dimensão fractal e para o maior expoente de Lyaponov consistentes com a existência de Chaos.

Em Portugal, Soares (1997) constata que os rendimentos do índice PSI-20 apresentavam, no período em estudo, o típico aspecto leptocúrtico, caracterizado por elevados níveis de Kurtosis. Analogamente a estudos empíricos realizados a nível internacional, afirma que "este aspecto deriva da existência de dependência não-linear, uma vez que os modelos lineares são incapazes de explicar esta estranha forma das distribuições empíricas dos rendimentos das acções e dos índices". Os testes à existência de dependência não-linear mostraram a existência significativa deste fenómeno. Brito (1998) atesta a dimensão fractal do índice BVL de 1988 a 1997.

CONCLUSÃO

Grande parte dos modelos dos mercados financeiros assentam sob a hipótese de que a rendibilidade dos mercados financeiros segue um processo aleatório. Todavia a existência de um processo determinístico acaba por deitar por terra um dos pilares fundamentais dos modelos de avaliação de activos financeiros mais utilizados.

Os resultados mais recentes sobre a investigação parecem ser pouco probatórios. Há casos em que se prova a existência de caos enquanto noutros não. A ambiguidade destes resultados deve servir para motivar os investigadores a desenvolver novos testes e modelos de forma a que se chegue a resultados mais consistentes. Estudar se os mercados financeiros são determinados por processos aleatórios ou determinísticos continua ainda uma questão em aberto.

REFERÊNCIAS

Afonso, A e Teixeira J. (1998) , "Non-linear of Weakly Efficient Markets: Evidence from Portugal, 1 CIEF Workshop on Financial Economics, ISEG, Lisbon.

Bachelier,L (1900), " Théorie de la Speculation", Annales de Lécole Normale Supérieure(1900), pp. 21-86.

Brito (1998), " A Wavelet Exploration of the BVL Index", 1 CIEF Workshop on Financial Economics, ISEG, Lisbon.

Brock,W.(1987), " Distinguishing Random and Deterministic Systems: Abridged Version", Journal of Economic Theory 40, pp.168-195.

Engle, R.F.(1982), “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity With Estimates of The Variance of U.K. Inflation”, *Econometrica* 50, pp. 987-1008.

Engle,R.F. e T. Bollerslev(1986), “Modelling The Persistence of Conditional Variances”, *Econometric Reviews* 5, pp

Fama, E. F. (1965), “The Behaviour of Stock Market Prices”, *Journal of Business* 38,pp.34-105.

French,R.J., G.W.Schwert e R.F. Stambaugh(1987),” Expected Stock Returns and Volatility”, *Journal of Financial Economics* 19, pp. 3-29.

Gasberger e Procacia (1983), "Mesuring The Strangeness of Strange Attractors", *Physica* 9D, pp. 189-208.

Lo, A.W. e A. Mackinlay(1991), “Stock Market Prices do Not Follow Random Walks:Evidence From a Simple Specification Test”, *The Review of Financial Studies* 1, pp.41-66.

Mandelbrot, B. (1963), “The Variation of Certain Speculative Prices”, *Journal of Business* 36,pp.394-416.

Mayfield e al (1996), "On Determining The Dimension of Real-Time Stock-Price Data"*Journal of business & Economic Statistics* 10, pp.367-374.

Markowitz, H. M.(1959) . *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. New York: John Wiley & Sons eds.

Peters E. (1991), "Chaos and Order in the Capital Markets" A Willey Finance, ed.

Poincaré, H. (1952), *Science and Method*, New York: Dover Press.,(Originally published in 1908).

Sewell, S.P., S.R. Stansell,I.Lee e M.-S. Pan(1993), “Nonlinearities in Emerging Foreign Capital Markets”, *Journal of Business Finance & Accounting* 20, pp.237-248.

Sheinkmen, J. e Le Baron (1989), "Nonlinear Dinamics and Stock Returns", *Journal of Business* 62, pp.331-337.

Soares, V.J.S. (1994). *Análise da “Weak Efficient Market Hypothesis” nos Mercados Bolsistas de Acções: Estudo do Caso Português: (1977-1994)*. Dissertação de Mestrado em Finanças, Universidade Portucalense Infante D. Henrique.

Toramasco O et Isabelle J-P. (1997), "Les rentabilités à la Bourse de Paris sont-elles chaotiques?", *Revue Economique*, nº2 mai 98, pp 215-238.

Willey, T.(1992), “Testing For Nonlinear Dependence in Daily Stock Indices”, *Journal of Economics and Business* 44, pp.63-74.