ESCOAMENTO ANUAL: DISTRIBUIÇÃO ESTATÍSTICA

HÉLIO BERNARDO LOPES*

O escoamento anual numa secção de um rio tem, essencialmente, uma natureza aleatória, não sendo, portanto, possível prever, deterministicamente, os seus valores futuros a partir do conhecimento de uma amostra de valores já ocorridos. Pode, pois, ser considerado uma variável aleatória.

Tem-se considerado que os valores do escoamento anual são independentes no tempo, uma vez que a influência do escoamento do ano anterior sobre o do ano seguinte é, para o clima português, praticamente eliminada através da adopção do ano hidrológico e a existência de ciclos plurianuais não foi demonstrada de modo irrefutável, (QUINTELA,1967).

Assim, os valores assumidos pelo escoamento anual numa sequência de anos hidrológicos constituem um vector de amostragem aleatório, sendo, portanto, as suas componentes independentes entre si.

Sendo o escoamento anual uma variável aleatória, importa estudar a lei de distribuição respectiva. O método seguido consiste em adoptar o tipo de lei estatística que promova o melhor ajustamento entre as frequências dos valores observados e as correspondentes probabilidades, determinadas pela referida lei estatística.

Uma análise superficial, poderia levar a considerar como lei de distribuição possível, a lei normal, já que o valor do escoamento anual, sendo a soma dos valores do escoamento diário, tenderia, segundo o Teorema do Limite Central, a seguir aquela lei.

Isto pressuporia, contudo, que os valores do escoamento diário fossem independentes entre si, o que, na realidade, não acontece. A sua dependência (QUINTELA, 1967), é tanto menor quanto menores forem as reservas subterrâneas das bacias hidrográficas.

A adopção da lei normal, considerando como domínio da respectiva variável aleatória o corpo dos reais, leva a que, para valores baixos da probabilidade correspondam valores negativos do escoamento anual, o que é fisicamente inaceitável. Além disso, parece verificar-se a tendência para a lei normal fornecer, nas zonas das baixas e das altas probabilidades, valores do escoamento anual inferiores aos observados, o que leva a não aceitar a lei normal, pelo menos, para a determinação de

---

* Jornalista.

valores do escoamento anual com baixas probabilidades de não serem atingidos, (QUINTELA, 1967).

Estes factos e a constatação de que as variáveis hidrológicas apresentam, em geral, uma assimetria positiva, que parece ser tanto maior quanto menor for o intervalo de tempo a que se refere a variável hidrológica, levaram a considerar a aplicação de leis estatísticas assimétricas no estudo da distribuição do escoamento anual.

Uma das leis consideradas, com bons resultados, é a lei Gama, com três parâmetros, também por vezes designada de Lei III de Pearson.

A aplicação ao estudo da distribuição do escoamento anual da Lei Gama, com três parâmetros, começou por ser realizada por FOSTER, 1924.

Seja, pois, X , a variável aleatória **escoamento anual**. Se x_p for o valor do escoamento anual, cuja probabilidade de não ser atingido é $F_X(x_p)$, Foster mostrou que se tem:

$$x_p = \mu_X + K\sigma_X$$

onde μ_X e σ_X são, por esta ordem, o valor médio e o desvio-padrão da variável aleatória X , e K é um factor tabelado por Foster, função de $F_X(x_p)$ e do coeficiente de assimetria, $\gamma_{1,X}$:

$$K = K\left\lfloor F_X(x_p), \gamma_{1,X} \right\rfloor$$

designado por **factor de probabilidade** (CHOW, 1954).

A tabela dos valores de K a que se recorre na vida prática é a que se vê no Quadro 1, ao final (QUINTELA, 1967, LINSLEY, 1949, SUPINO, 1938).

No sentido de ampliar a tabela referida, determina-se, para a Lei Gama, com três parâmetros, a expressão que permite determinar os valores de K .

Seja, então, X a variável aleatória **escoamento anual** e admita-se que a respectiva lei de distribuição é do tipo Gama, com três parâmetros. Nestas condições, a função densidade de probabilidade de X é:

$$f_X(x;\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} \dfrac{(x-\alpha)^{\gamma-1} e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}}}{\beta^{\gamma}\Gamma(\gamma)} & \Leftarrow \quad x \geq \alpha \\ 0 & \Leftarrow \quad x < \alpha \end{cases}$$

onde $\beta,\gamma \in \left]0,\infty\right[$ e α é um parâmetro real.

Como pode facilmente deduzir-se, o valor médio, o desvio-padrão e o coeficiente de assimetria valem, respectivamente:

$$\begin{aligned} \mu_X &= \alpha + \beta.\gamma \\ \sigma_X &= \beta\sqrt{\gamma} \\ \gamma_{1,X} &= \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \end{aligned}$$

Se x_p for o quantil de probabilidade p de X, tem-se:

$$P(X \leq x_p) = p$$

expressão que pode assumir a forma:

$$P(X \leq x_p) = P\left(\frac{X-\alpha}{\beta} \leq \frac{x_p-\alpha}{\beta}\right) = p.$$

Considerando a mudança de variável:

$$Y = \frac{X-\alpha}{\beta}$$

virá:

$$P\left(Y \le \frac{x_p - \alpha}{\beta}\right) = p$$

sendo Y uma variável aleatória com distribuição Gama, com um parâmetro, γ.
Desta expressão tira-se que:

$$x_p = \alpha + \beta . y_{\gamma,p}$$

onde $y_{\gamma,p}$ é um valor de Y tal que:

$$\frac{\int_0^{y_{\gamma,p}} e^{-Y} Y^{\gamma-1} dY}{\Gamma(\gamma)} = p$$

Para a nova variável Y pode facilmente deduzir-se que:

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \gamma \\ \sigma_Y &= \sqrt{\gamma} \\ \gamma_{1,Y} &= \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \end{aligned}$$

pelo que se tem:

$$\begin{aligned} x_p &= (\mu_X - \beta \cdot \gamma) + \frac{\sigma_X}{\sqrt{\gamma}} \cdot y_{\gamma,p} \\ &= \left(\mu_X - \frac{\sigma_X}{\sqrt{\gamma}} \cdot \gamma\right) + \frac{\sigma_X}{\sqrt{\gamma}} \cdot y_{\gamma,p} \\ &= \mu_X + \left[y_{\gamma,p} \cdot \gamma^{-0,5} - \gamma^{0,5}\right] \cdot \sigma_X \\ &= \mu_X + \left[y_{\gamma,p} \cdot \frac{\gamma_{1,X}}{2} - \frac{2}{\gamma_{1,X}}\right] \cdot \sigma_X \end{aligned}$$

ou seja:

$$x_p = \mu_X + K(\mu_{1,X}, p) \cdot \sigma_X$$

sendo: .

$$K(\gamma_{1,X}, p) = y_{\gamma,p} \cdot \frac{\gamma_{1,X}}{2} - \frac{2}{\gamma_{1,X}} \quad (1)$$

Para efectuar o cálculo dos valores de K, basta reparar que, se uma variável aleatória Y tem distribuição Gama, com um parâmetro, γ, a variável $2Y$ tem uma distribuição Qui-Quadrado, com 2γ graus de liberdade. Assim, a expressão (1) toma a forma:

$$\begin{aligned} K(\gamma_{1,X}, p) &= 2y_{\gamma,p} \frac{\gamma_{1,X}}{4} - \frac{2}{\gamma_{1,X}} \\ &= \chi^2_{\frac{8}{\gamma_{1,X}^2},p} \cdot \frac{\gamma_{1,X}}{4} - \frac{2}{\gamma_{1,X}} \end{aligned}$$

sendo:

$$\chi^2_{\frac{8}{\gamma_{1,X}^2},p} = A$$

um valor tal que:

$$\frac{\int_0^A e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{0,5\left(\frac{8}{\gamma_{1,X}^2}\right)-1} d(\chi^2)}{2^{0,5\left(\frac{8}{\gamma_{1,X}^2}\right)} \cdot \Gamma\left[0,5\left(\frac{4}{\gamma_{1,X}^2}\right)\right]} = p$$

e que pode ser obtido nas tabelas do Qui-Quadrado, em função do número de graus de liberdade, B, e de p, sendo B dado pela expressão:

$$B = \frac{8}{\gamma_{1,X}^2} \cdot$$

BIBLIOGRAFIA

CHOW, Ven Te - The log-probability law and its engineering applications - Proc. ASCE, Hyd. Div., Vol. 80, Paper nº 536. New York, 1954.

FOSTER, H. A. - Theoretical Frequency Curves - Trans. ASCE, Vol. 87, pp. 142-173, 1924.

LINSLEY, Ray et al. - Applied Hydrology - Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1949.

QUINTELA, António - Recursos de Águas Superficiais em Portugal Continental - Lisboa, 1967.

SUPINO, Giulio - Le Retti Idrauliche - Nicola Zanichelli Edittore, Bologna, 1938.

Quadro 1

TABELA DE VALORES DO FACTOR DE PROBABILIDADE

p

$\gamma_{1,X}$	0,01	0,05	0,20	0,50	0,80	0,95	0,99	0,999	0,9999	0,99999	0,999999
0,0	− 2,33	−1,64	− 0,84	0,00	0,84	1,64	2,33	3,09	3,73	4,27	4,76
0,2	− 2,18	−1,58	− 0,85	− 0,03	0,83	1,69	2,48	3,38	4,16	4,84	5,48
0,4	− 2,03	−1,51	− 0,85	− 0,06	0,82	1,74	2,62	3,67	4,60	5,42	6,24
0,6	−1,88	−1,45	− 0,86	− 0,09	0,80	1,79	2,77	3,96	5,04	6,01	7,02
0,8	−1,74	−1,38	− 0,86	− 0,13	0,78	1,83	2,90	4,25	5,48	6,61	7,82
1,0	−1,59	−1,31	− 0,86	− 0,16	0,76	1,87	3,03	4,54	5,92	7,22	8,63
1,2	−1,45	−1,25	− 0,85	− 0,19	0,74	1,90	3,15	4,82	6,37	7,85	9,45
1,4	−1,32	−1,18	− 0,84	− 0,22	0,71	1,93	3,28	5,11	6,82	8,50	10,28
1,6	−1,19	−1,11	− 0,82	− 0,25	0,68	1,96	3,40	5,39	7,28	9,17	11,12
1,8	−1,08	−1,03	− 0,80	− 0,28	0,64	1,98	3,50	5,66	7,75	9,84	11,96
2,0	− 0,99	− 0,95	− 0,78	− 0,31	0,61	2,00	3,60	5,91	8,21	10,51	12,81
2,2	− 0,90	− 0,89	− 0,75	− 0,33	0,58	2,01	3,70	6,20			
2,4	− 0,83	− 0,82	− 0,71	− 0,35	0,54	2,01	3,78	6,47			
2,6	− 0,77	− 0,76	− 0,68	− 0,37	0,51	2,01	3,87	6,73			
2,8	− 0,71	− 0,71	− 0,65	− 0,38	0,47	2,02	3,95	6,99			
3,0	− 0,67	− 0,66	− 0,62	− 0,40		2,02	4,02	7,25			