ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE VISEU

Mestrado em Didática da Matemática

Um modelo de ensino para o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática em alunos do 5.ºano do Ensino Básico

Glória da Graça Costa Castanheira da Silva

Viseu, 2014

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE VISEU

Um modelo de ensino para o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática em alunos do 5.ºano do Ensino Básico

Estudo realizado na Escola Básica e Secundária Abel Botelho de Tabuaço

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Didática da Matemática sob a orientação do Professor Doutor Luís Menezes e coorientação da Professora Doutora Véronique Delplancq

Glória da Graça Costa Castanheira da Silva

Viseu, 2014

Resumo

Este trabalho teve como objetivo principal conceber e estudar o impacto na aprendizagem dos alunos do 5.º ano do Ensino Básico de um modelo de ensino exploratório da Matemática promotor do desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática, tanto ao nível da organização e apresentação de ideias matemáticas como da discussão de ideias e procedimentos e da utilização de linguagem apropriada. Para atingir este objetivo foi realizada uma experiência de ensino em que se implementou um modelo de ensino em torno de quatro momentos da aula: (1) apresentação da tarefa; (2) realização da tarefa; (3) galeria de tarefas, (4) discussão coletiva e sistematização das aprendizagens. O estudo qualitativo, de cunho interpretativo, desenrola-se em três fases: (i) diagnóstico; (ii) implementação; e (iii) avaliação. A recolha de dados fez-se através de gravações áudio das aulas, documentos produzidos pelos alunos e notas realizadas pela professora. Os dados recolhidos foram submetidos a uma análise de conteúdo procurando avaliar o impacto do modelo na promoção da capacidade de comunicação matemática e na repercussão do mesmo na aprendizagem dos alunos. Os resultados obtidos apontam para a eficácia deste modelo de ensino, o que se verifica não só no desenvolvimento da comunicação matemática, mas também no desenvolvimento de outras capacidades transversais como a resolução de problemas e o raciocínio matemático e ainda a sua repercussão positiva na aprendizagem dos temas matemáticos pelos alunos. O estudo permitiu também concluir sobre aspetos do modelo de ensino que contribuíram de forma significativa para a sua eficácia, destacando-se: o tipo de tarefa usada, uma vez que esta funciona como motor para fazer pensar; a galeria de tarefas, que se revelou importante como fator motivacional e promotor da discussão matemática; a discussão coletiva, como impulsionador para a comunicação de ideias e processos matemáticas, essencial para negociação de significados e consolidação de aprendizagens e a aplicação, por parte da professora, do modelo de comunicação interpessoal utilizado em outras áreas, que permitiu estabelecer uma boa comunicação durante toda a experiência.

Palavras-Chave: Ensino exploratório da Matemática. Comunicação matemática. Ensino-aprendizagem da Matemática.

Abstract

The main objective of this work was to conceive and study the impact of an inquiry-based mathematics teaching model promoting the development of the ability to communicate mathematics on 5th grade students learning, as much at the level of organization and presentation of mathematical ideas as at the discussion of these ideas and procedures and the use of appropriate language. To achieve this objective a teaching experience was done in which a teaching model was implemented through four class moments: (1) task presentation; (2) development of the task; (3) gallery of tasks; (4) collective discussion and systematization of learning.

The qualitative study, of interpretive nature, was carried out in three phases: (i) diagnosis; (ii) implementation; and (iii) evaluation. Data collection was done through audio recordings of classes, documents produced by students and field notes made by the teacher. The data was subjected to content analysis, seeking to assess the impact of the model in the promotion of the mathematical communication ability and in the students learning of mathematical knowledge. The results point to the effectiveness of this teaching model, as can be seen not only in the development of mathematical communication, but also in the development of other transversal skills (such as the problem solving and the mathematical reasoning) and in mathematical contents learning by students. The study also leads to conclude about aspects of the inquiry-based mathematics teaching which contributed in a significant way to its efficiency, emphasizing: the type of task used, since it functions as a motor to make think; the gallery of tasks, which is essential as a motivational factor, promoter of collective discussion; collective discussion, as inductor of communication of mathematical ideas and processes, essential for meaning negotiating and consolidation of learning; and implementation by the teacher, of the interpersonal communication model used in in other areas, which permitted a good communication during the whole experience.

Key-words: Inquiry-based mathematics teaching. Mathematical communication. Teaching and learning of mathematics.

Agradecimentos

Aos meus orientadores, Professor Dr. Luís Menezes e Professora Dra. Véronique Delplancq, pela incansável colaboração, compreensão, disponibilidade e apoio.

À minha família, principalmente aos meus filhos, pela compreensão, carinho e incentivo na realização deste trabalho.

A todos os outros…

Índice geral

Índice de quadros

Índice de gráficos

Índice de figuras

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Uma das grandes limitações que, enquanto professora de Matemática, tenho identificado nos alunos do 2.º ciclo do ensino básico (EB), ano após ano, prende-se com a sua capacidade de comunicação matemática que, na minha perspetiva, prejudica o seu desempenho global a Matemática. Algumas das dificuldades encontradas passam por: (i) limitações em expressar os seus pensamentos de forma clara, (ii) insuficiências no seu poder de argumentação, (iii) deficiências na capacidade de justificação das suas ideias, (iv) no défice de utilização de linguagem da Matemática apropriada e ainda nas (v) falhas de interpretação oral e escrita de enunciados matemáticos. Estas dificuldades são também apresentadas em relatórios e em estudos realizados neste âmbito, tanto em Portugal como no estrangeiro (APM, 1998; D'Ambrósio, Kastberg & Lambdin, 2007; Viali & Silva, 2006). Num estudo realizado sobre as questões de avaliação do exame *National Assessment of Educational Progress* (NAEP), usado nos EUA, D'Ambrósio e Kastberg e Lambdin (2007) concluíram que os alunos erraram mais nas questões onde se usava mais a simbologia matemática do que nas questões onde se utilizava palavras em linguagem natural. Também Viali e Silva (2006), num estudo sobre a utilização da linguagem matemática por alunos do ensino básico, mostram que grande parte dos alunos evidencia falta de domínio de linguagem matemática e dos diferentes significados dos símbolos matemáticos. A linguagem é um aspeto determinante na comunicação que ocorre numa sala de aula de Matemática.

A comunicação matemática constitui um processo social complexo onde os intervenientes interagem, utilizando uma diversidade de linguagens, trocando informações e influenciando-se reciprocamente na construção de significados (Belchior, 2003; Martinho & Ponte, 2005). Contingentemente, a comunicação funciona, para os aprendentes, como um catalisador da reflexão e para o estabelecimento de conexões, possibilitando a discussão em torno do que é realizado nas aulas permitindo aos alunos explicar o porquê de determinadas opções, aumentando a oportunidade de acontecerem compreensões (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012; Guerreiro, 2011; Ponte, 2005). A comunicação matemática é incontornavelmente um processo estruturante da aprendizagem da Matemática, um instrumento para a aprendizagem de significados mas é também uma componente da aprendizagem que os alunos devem fazer. Esta posição pode ser sintetizada na asserção: Comunicar para aprender e aprender a comunicar são duas faces da mesma moeda, que se desenvolvem de forma integrada (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008; Guerreiro, 2011; Sfard, 2008).

O Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB[1]) de 2007 (Ministério da Educação (ME), 2007) em vigor, quando este estudo foi implementado, nos 2.º, 4.º, 6.º, 8.º e 9.º anos de escolaridade, (o programa encontra-se em ação no 9. ºano) salienta a comunicação matemática como uma capacidade transversal a "merecer uma atenção permanente" (p.3). Um dos objetivos gerais do PMEB (2007) é o de que os alunos "devem ser capazes de comunicar as suas ideias e interpretar as ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático" (p. 75). O programa clarifica este objetivo afirmando que os alunos devem ser capazes de: (i) interpretar enunciados, (ii) usar linguagem matemática com precisão, (iii) descrever e explicar, e (iv) argumentar e discutir.

No PMEB (2007), a comunicação e aprendizagem estão intimamente relacionadas. Este documento curricular, para além de apontar a comunicação matemática como um objetivo de aprendizagem dos alunos (e, portanto, como capacidade transversal), salienta, ao nível das orientações metodológicas, o seu papel importante como instrumento de ensino do professor:

> A comunicação deve ter também um lugar destacado na prática letiva do professor. Através da discussão oral na aula, os alunos confrontam as suas estratégias de resolução de problemas e identificam os raciocínios produzidos pelos seus colegas. Através da escrita de textos, os alunos têm oportunidade de clarificar e elaborar de modo mais profundo as suas estratégias e os seus argumentos, desenvolvendo a sua sensibilidade para a importância do rigor do uso da linguagem matemática (PMEB, 2007, p. 9).

O professor tem, indubitavelmente, um papel preponderante na promoção das dinâmicas comunicativas (Martinho, 2007; Menezes, 1996, 2004). Cabe ao professor promover a comunicação na sala de aula, participando como exemplo na comunicação, orientando, reforçando e focando a atenção dos alunos nos aspetos matemáticos importantes (Moreira & Fonseca, 2009).

Nesta forma de conceber a comunicação e o seu papel no ensino e na aprendizagem da Matemática, nos últimos anos tem-se vindo a afirmar um modelo de ensino de natureza

[1] Neste trabalho PMEB refere-se ao Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 e não à proposta curricular de 2013.

bastante interativa: o ensino exploratório da Matemática (EEM). Este modelo de ensino, que valoriza a comunicação interpessoal (Freixo, 2011; Guerreiro, 2011; Menezes, Guerreiro, Martinho & Ferreira, 2013), corresponde a um modelo em que a aprendizagem resulta do trabalho dos alunos na resolução e discussão de tarefas matemática (Stein et al., 2008; Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012). Para Canavarro, Oliveira e Menezes (2012), uma marca que distingue este tipo de ensino do ensino direto, centrado no professor, é a natureza interativa de ensino que envolve alunos e professor. Este tipo de ensino assenta na resolução de tarefas matematicamente ricas, de caracter exploratório, e na discussão gerada à volta dos seus resultados e procedimentos, envolvendo a partilha de ideias, a argumentação e a negociação de significados.

O ensino exploratório pressupõe um modelo de ensino em três ou quatro fases, podendo a última fase desdobrar-se ou não: "lançamento da tarefa", "exploração pelos alunos", "discussão e sistematização" (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012; Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013; Stein et al., 2008). Na primeira fase, o professor propõe aos alunos a resolução, individual ou em grupo, de uma tarefa de caráter exploratório. Cabe ao professor assegurar-se de que a tarefa é compreendida pelos alunos e, ainda, que estes se sintam desafiados e possuam o ambiente e os recursos necessários para a sua realização (Anghileri, 2006; Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012; Canavarro, 2011; Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013; Stein et al., 2008). Na segunda fase, o professor acompanha os alunos durante a resolução autónoma da tarefa e, ao mesmo tempo, seleciona e sequencia as resoluções mais interessantes do ponto de vista da promoção da discussão coletiva e da realização das aprendizagens previstas. A terceira fase, "discussão e sistematização", é particularmente exigente uma vez que o professor tem que gerir as interações comunicativas ocorrentes entre todos os protagonistas, de forma a orquestrar a discussão no sentido de promover a qualidade matemática das explicações e argumentações apresentadas, com vista à realização de conexões matemáticas e aprendizagens com compreensão (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012; Guerreiro, 2011; Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013; Ponte, 2005; Yakckel & Cobb, 1996). Nesta fase, o professor pode ao mesmo tempo, e em colaboração com os alunos, realizar a sistematização das aprendizagens emergentes da discussão ou então orientar para que tal seja realizado numa fase seguinte, demarcada da anterior (Canavarro, 2011; Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013).

Embora tenha refletido inúmeras vezes sobre esta problemática, procurado desenvolver estratégias para ultrapassar as dificuldades diagnosticadas nos meus alunos, estas não surtiram o efeito desejável. Assim este trabalho pode traduzir-se numa oportunidade de, através de um estudo centrado na minha prática de sala de aula, vir a desenvolver um modelo de ensino de natureza exploratória, valorizando a comunicação interpessoal, assente num conjunto de estratégias didáticas que conduza ao desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática e se venha a refletir na realização de aprendizagens matemáticas mais significativas, por parte dos alunos.

A razão principal para trabalhar com alunos do 5.º ano de escolaridade é de ordem prática, uma vez que, sendo eu simultaneamente professora e investigadora, estava, na altura da implementação deste trabalho, a lecionar turmas deste ano de escolaridade.

Neste enquadramento, o objetivo geral deste estudo é conceber e estudar o impacto na aprendizagem de alunos do 5.º ano do ensino básico de um modelo de ensino promotor da capacidade de comunicação matemática. Para orientar e delimitar o estudo que pretendemos, defini os seguintes objetivos específicos no sentido de clarificar o objetivo geral:

I. Refletir sobre as minhas práticas letivas antes do início deste estudo, em particular sobre aquelas que são promotoras do desenvolvimento das competências comunicativas matemáticas.
II. Avaliar a capacidade de comunicação matemática dos meus alunos do 5.ºano do ensino básico, no início deste estudo: identificando limitações, nomeadamente na forma de expressar ideias, no poder de argumentação e na capacidade de justificação;
III. Conceber e aplicar um modelo de ensino promotor do desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática, nos alunos do 5ºano de ensino básico.
IV. Avaliar a repercussão do modelo de ensino promotor do desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática na aprendizagem da matemática dos alunos do 5.º ano do ensino básico.

Embora se encontrem em Portugal estudos sobre o tema da comunicação matemática, eles estão sobretudo centrados em aspetos específicos das práticas dos professores ou então são muito limitados no período de incidência e recolha de dados (Guerreiro, 2011; Martinho, 2007, Menezes, 2004), não havendo investigações sobre a promoção de modelos de ensino da Matemática, de natureza exploratória, para o desenvolvimento de capacidades comunicativas em Matemática de alunos do ensino básico (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012; Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013).

A relevância deste trabalho resulta, pois, da oportunidade de desenvolver e avaliar, no quadro da aplicação de um novo programa curricular de Matemática (ME, 2007), um modelo de ensino de natureza exploratória, consubstanciando numa experiência de ensino que se desenvolve ao longo de um ano letivo, que valoriza a comunicação interpessoal e envolve um conjunto de estratégias que levam os alunos a trabalharem com tarefas matemáticas ricas, que conduz à melhoria das capacidades comunicativas dos alunos e que, por consequência, leve à melhoria de aprendizagens matemáticas em geral. Este estudo pode, também e em simultâneo, contribuir para reflexão sobre a forma como se pode desenvolver a capacidade da comunicação matemática nos alunos do 5.º ano do ensino básico. O estudo pode, ainda, contribuir para a melhoria das aprendizagens da matemática com compreensão, indo ao encontro do que apontam diversos organizações, como o NCTM (2007), que tem como lema "Matemática com compreensão, Matemática para todos".

O estudo está organizado em seis capítulos. Depois da introdução, o segundo capítulo, fundamentação teórica, apresenta as principais ideias e autores essenciais à compreensão das questões relacionadas com a comunicação em geral e com a comunicação matemática, em particular. O terceiro capítulo, metodologia do estudo, expõe as opções metodológicas, os participantes no estudo, o plano de intervenção, os instrumentos de recolha e a análise de dados. No quarto capítulo é apresentado o modelo de ensino que foi implementado na experiência de ensino, bem como a sua fundamentação teórica. O quinto capítulo, o mais longo, diz respeito à análise do impacto do modelo de ensino exploratório da Matemática, ao longo das diversas fases da aula, no desenvolvimento da comunicação matemática e nas aprendizagens realizadas pelos alunos. O sexto capítulo é dedicado às conclusões e recomendações mostra a análise transversal e o sétimo, as considerações finais. Para finalizar, apresenta-se a bibliografia referenciada e os anexos.

CAPÍTULO 2

COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA NA SALA DE AULA

Neste capítulo são discutidos os conceitos relativos à temática do estudo (comunicação, comunicação matemática, modelos de comunicação e desenvolvimento da comunicação matemática) e apresentados estudos neste âmbito.

2.1 – O conceito de comunicação humana e sua importância social

Não é possível imaginar a vida em comunidade, sem a comunicação. Se, por um lado, as complexidades da vida em sociedade, em permanente ebulição, levam à necessidade de utilizar a comunicação, com sistemas cada vez mais eficazes, por outro lado, é a comunicação que promove e facilita o permanente desenvolvimento social (Guerreiro, 2011). Este é um ciclo que se influencia permanentemente numa correlação em espiral sem fim.

Mas afinal, em que consiste a comunicação? Segundo Belo (2005), o termo "comunicação" é polissémico, possuindo diversos significados que têm vindo a aumentar com o incremento de publicações sobre este tema. Para este autor, referindo-se à comunicação didática, trata-se de uma disciplina teórico-prática que procura estudar a "origem, a natureza e função da comunicação humana para fins didáticos" (p. 305). Por seu turno, Menezes (1996) entende que "comunicação" tem dois sentidos. O sentido etimológico corresponde a "tornar comum", "por comum" ou, ainda, "estabelecer comunidade", estando relacionado com partilhar. No outro sentido, comunicar significa transmitir, "transferir ao outro", correspondendo à aceção mais corrente do termo, estando assim relacionado com transacionar. Este mesmo autor, entende que a comunicação é um elemento essencial à vida dos seres humanos em comunidade, estando a necessidade de comunicar ligada com a dimensão social e gregária.

Para Sfard (2008), a comunicação está intimamente interligada com o pensar e com a cognição do indivíduo, pois comunicamos mesmo quando simplesmente pensamos e não verbalizamos, isto é, quando estamos sozinhos, imersos em pensamentos, também estamos envolvidos em "conversas" com os outros. Para Anna Sfard, o discurso é uma forma bem definida de comunicação e linguagem, embora não sendo o único meio de comunicação, Esta autora sublinha que os conceitos são assimilados através do discurso e da participação em discursos, assinalando que as crianças entendem palavras como *número*, *mesmo*, *maior*, na sua ligação aos respetivos conceitos, não através de etapas lógicas e mentais de aquisição de conhecimento mas através de um processo discursivo social, implicando, por isso, a comunicação entre pessoas, aluno/aluno e aluno/professor.

De forma diferente da autora israelita Anna Sfard, o psicólogo russo Vygotsky (2007) relaciona a comunicação essencialmente com a linguagem. Para este autor, a função primordial da linguagem é a comunicação, ou seja, o intercâmbio social. O autor refere que a comunicação é tanto maior e mais alargada quanto maior for o sistema de signos linguísticos à disposição de um falante: as palavras. Assim, cada palavra é já por si só uma generalização que tem associado um significado que é também um ato de pensamento. Os pensamentos têm que passar primeiro pelos significados e depois pelas palavras. Temos, pois, uma comunicação que repousa sobre o significado das palavras.

Tal como para Vygotsky (2007), também para Menezes (1996), linguagem e comunicação são dois conceitos que estão interligados, estando a comunicação intimamente relacionada com as diversas dimensões da linguagem. Fonseca (1994) aponta as dimensões representativa e acional. Representativa no sentido de a linguagem poder representar o mundo, por isso sujeita a falsidade ou veracidade. A dimensão acional está, como o próprio termo o sugere, ligada ao facto de a linguagem poder constituir ela própria uma forma de ação.

A comunicação está, pois, muito associada aos conceitos de discurso e linguagem. Carvalho, Oliveira, Freitas, Carvalho e Barros (2009) rompem com a ideia da divisão conhecimento/linguagem e, tal como Sfard (2008) estes autores argumentam com a inseparabilidade entre linguagem e comunicação e acrescentam que a racionalidade comunicativa, logo também cognitiva e conceptual, vale-se do discurso.

O conceito de comunicação é retomado na secção seguinte olhando-o numa perspetiva acional, ou seja, focando os modelos de comunicação apresentados por vários autores.

2.2 - Modelos de comunicação

No universo escolar, a comunicação constitui uma ferramenta indispensável para o professor desempenhar as suas funções de promotor da aquisição de conhecimentos e do desenvolvimento de capacidades. Entende-se, neste contexto escolar, comunicação como um processo (e não como um produto, como acontece com a informação) que permite a interatividade, dado ao seu caráter relacional. Torna-se, nesta medida, imperativo interrogarmo-nos qual o modelo de comunicação mais apropriado ao contexto escolar, de modo a servir os objetivos de aprendizagem.

Como se viu atrás, comunicar é um processo de troca de ideias, envolvendo palavras, expressões, símbolos, através do qual os indivíduos interagem, relacionando-se e influenciando-se mutuamente e é tanto melhor quanto mais eficaz for (Belo, 2005; Menezes, 1996; Menezes, Guerreiro, Martinho & Ferreira, 2013; Sfard, 2008). Comunicar implica um processo onde intervém um emissor, um recetor e, necessariamente uma mensagem. A comunicação acontece quando o emissor emite uma mensagem, ou sinal, através de um canal ou meio. O recetor interpretará a mensagem, que eventualmente lhe pode ter chegado com algum tipo de ruído, um bloqueio, isto é, algo acrescentado à mensagem ou sinal que não é pretendido pela fonte (e até ruído pode estar relacionado com as competências comunicativas do emissor, com as características do canal, com diferenças culturais, com o estado emocional dos interlocutores, com, por exemplo, o ranger de uma cadeira, uma cadeira desconfortável que desvia a atenção do recetor, com a pronúncia, com a capacidade comunicativas do recetor, etc.). A partir daí, o recetor dará resposta, completando o processo de comunicação (Martins, 2009).

Os modelos de comunicação são "representações simbólicas e esquemáticas que, a despeito da dinâmica do processo de comunicação, o param no tempo permitindo o seu estudo" (Freixo, 2011, p.16). Cada modelo de comunicação procura identificar os principais elementos da estrutura ou processo e as relações entre esses elementos (Macquail & Windahl, 2003).

Nos estudos dos modelos de comunicação, distinguem-se duas correntes de investigação: uma que entende a comunicação como fluxo de informações e a outra entende-a como uma produção e troca de sentido, numa interação social (Fiske, 1982; Guerreiro, 2011; Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014). A primeira não passa de uma extensão de um modelo de engenharia de telecomunicações, que vem do tempo da 2.ª Guerra Mundial (Guerreiro, 2011): levar uma mensagem de A para B, partindo-se do pressuposto de que as mensagens estão já determinadas no seu significado. Nesta linha insere-se o modelo de base linear, ou de informação ou, ainda, de seta, uma vez que a mensagem é transmitida num só sentido. Neste tipo de modelo, o emissor assume um papel ativo e o recetor assume um papel passivo (Fiske, 1982; Guerreiro, 2011). Os seus papéis são isolados independentemente das relações sociais, culturais e situacionais em que se realiza o ato comunicativo (Ventura, 2010). Nesta perspetiva macro, os modelos apresentam especificidades:

- **Modelo de base linear de Lasswel** (1948). O Norte-Americano Harolde Lasswel, num artigo publicado nos finais da primeira metade do século XX, apresenta a descrição deste modelo de comunicação respondendo às seguintes questões: quem? (emissor), Diz o quê? (mensagem), Por que canal? (meio- pessoais ou de massas), A quem? (audiência), Com que efeito? (impacto da mensagem sobre a audiência).
- **Modelo linear de Shannon e Weaver** (1948). Estes autores, influenciados por Lasswel, apresentam, nos seus estudos, um modelo de comunicação constituído por seis elementos, inicialmente concebidos para resolver aspetos técnicos das telecomunicações e mais tarde alargados às ciências sociais e humanas. Neste modelo unidirecional surge, em comparação com o anterior, um novo conceito: ruído. Para estes autores, o ruído é tudo o que interfere com a comunicação reduzindo a sua fidelidade: por exemplo, som desarmonioso, falta de atenção, problemas semânticos, diferenças culturais, falta de empatia (Guerreiro, 2011).

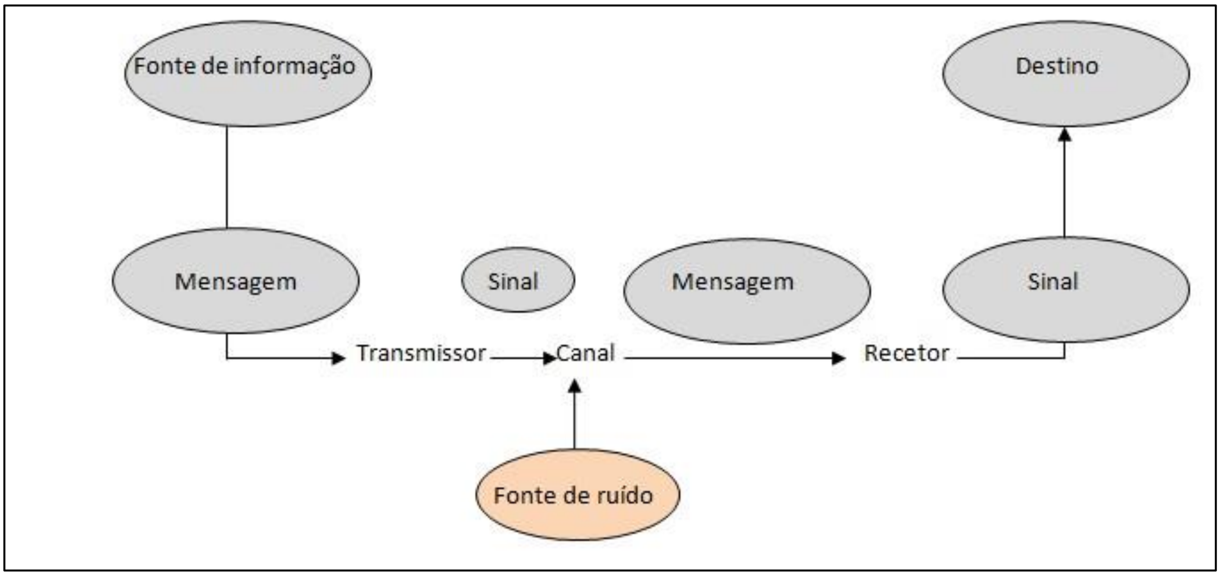


Figura 1- Modelo linear de comunicação de Shannon e Weaver (1948).

É difícil transportar o conceito de modelo linear de Shannon e Weaver para o contexto da comunicação entre pessoas, em particular numa sala de aula. Neste modelo, a forma de anular o ruído passa pela utilização da redundância como forma de chamar à atenção, repetindo a frase e a informação mais pertinente. No contexto de ensino/aprendizagem de Matemática, há a considerar: (1) quem está a comunicar? (professor-aluno, aluno-aluno); (2) que linguagem (natural ou simbólica) é usada de forma a fazer perceber a informação?; (3) qual é o canal de comunicação? (falado, escrito, etc.); (4) como é o conteúdo da comunicação? (relevante ou irrelevante, familiar ou estranho); (5) quais as características interpessoais? (como é a relação entre o emissor e o recetor); e (6) o contexto em que a comunicação ocorre. No modelo de comunicação linear, uma vez que a comunicação ocorre num único sentido, não há necessidade de *feedback*, isto é, um conjunto de sinais que permitem conhecer o resultado da mensagem, pelo que a utilização deste modelo numa de sala de aula deve ser evitado pois não permite o diálogo e, consequentemente, a aquisição de conhecimentos com compreensão.

- **Modelo de base cibernética ou circular** (Freixo, 2011). Para este autor, os modelos assim classificados são todos aqueles que integram a retroação ou *feedback* como elemento regulador da circularidade da informação, num processo que envolve a interação dinâmica entre emissor e recetor. É suposto que o emissor ouça o recetor ou recetores, que os compreenda e adapte as suas mensagens ao recetor. A base da comunicação eficaz centra-se na compreensão entre o emissor e o recetor (Freixo, 2011). Os modelos de comunicação interpessoal emergem do novo paradigma apresentado pelo modelo de comunicação de base cibernética ou circular, em que os conceitos de entropia, redundância e ruído assumem um papel preponderante (Shannon & Weaver, 1948). Neste paradigma, a mensagem não se dissocia do ruído; a redundância não acrescenta nenhuma informação: apenas serve para neutralizar o ruído, já a entropia surge como forma de medir a informação. Os modelos de comunicação interpessoal são mais complexos pois “traduzem uma comunicação numa situação de interação face a face” (Freixo, 2011, p.450). Sendo um modelo de comunicação humana, está sujeito a barreiras, segundo o mesmo autor, de natureza semântica, físicas, percetíveis e culturais. Para que a comunicação ocorra de forma satisfatória, os ruídos devem ser identificados para serem eliminados ou neutralizados (Figura 2). Se a redundância é uma forma de combater ruídos, facilitando a descodificação, o *feedback* (ou retroação) é um conjunto de sinais que permitem conhecer o resultado da mensagem (inflexão de voz, mímica, postura corporal, gestos, etc) (Freixo, 2011).

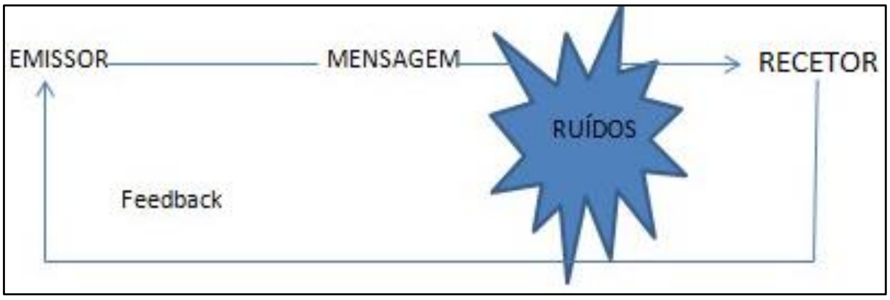


Figura 2 - Modelo de comunicação interpessoal.

No grupo dos modelos de comunicação interpessoal podemos encontrar:

- **Modelo de comunicação interpessoal de Schramm** (1963): Wilbur Schramm dá uma nova dimensão aos modelos de comunicação lineares (Freixo, 2011). O seu modelo de comunicação faz a transição do modelo linear para o modelo cibernético: para ele o processo de comunicação é interminável, não havendo evidência de que este processo tenha um início e um fim determinado, uma vez que através da retroação se proporciona uma troca de influência de cada um em relação ao outro. Segundo Freixo (2011), para Schramm, o emissor e o recetor são, ambos, capazes de interpretar as mensagens. Nesta perspetiva, a noção de *feedback* equivale à reação uma vez que o recetor reage e codifica a mensagem. Neste processo de descodificação e codificação da mensagem, a pessoa tem à sua disposição o meio para construir signos (Freixo, 2011).

- **Modelo circular de Jean Cloutier** (1975). No modelo circular de Jean Cloutier descrito na sua obra " A era do EMEREC", a comunicação encontra-se alternada entre o emissor e o recetor num processo de comunicação concêntrico, onde a expressão corporal e verbal constitui o único modo de comunicação (Freixo, 2011). A palavra Emerec "pretende significar o indivíduo" (Freixo, 2011, p. 454) e "reflete bem toda a natureza cibernética do pensamento deste autor pois indica-nos que o *homo communicans* situa-se alternadamente em cada um dos polos da comunicação e, até mesmo, em ambos os polos simultaneamente" (Silva, 1998). Para Freixo (2011), neste modelo de comunicação, mensagem e linguagem são indissociáveis uma vez que a linguagem permite encarnar a mensagem. Um outro conceito importante deste modelo é o de *médium*, como sendo um intermediário que reproduz a mensagem, transportando-a no espaço e no tempo, o canal que torna possível a comunicação.

O modelo de comunicação interpessoal pressupõe uma interação dinâmica entre emissor e recetor. Para isso, o emissor tem que estar atento ao *feedback* e realizar uma escuta ativa, isto é, escutar o recetor, ou recetores, de forma aberta, sem preconceitos, procurando compreendê-los, estando atento aos gestos e emoções demonstradas e adaptando as mensagens às suas características. É necessário ter em conta que a comunicação nunca acontece de forma "pura"; muitas vezes, a linguagem é ambígua, seja ela verbal ou não verbal, dando aso a várias interpretações. A mensagem pode estar contida numa acontecimento, objeto, olhar, silêncio, expressão corporal, tom de voz, modo de vestir, etc. A escolha do código deve ter em conta a idade, contexto e cultura, por exemplo, do recetor, uma vez que as mesmas palavras ou gestos podem ter significados distintos para grupos de falantes diferentes. Estar atento ao *feedback* permite ao emissor avaliar a interpretação da mensagem pelo recetor e reagir da melhor forma. Segundo Clampitt (2005), há quatro elementos básicos da comunicação a ter em conta: (i) objetivos do emissor (educar, motivar/incentivar, chamar a atenção, persuadir, confundir, negociar, fomentar a confiança); (ii) atributos da mensagem; (iii) escolha do canal; e (iv) características do recetor. O recetor interpreta a mensagem e essa interpretação depende de muitos fatores inerentes ao recetor: (1) acesso ao canal; (2) cultura; (3) perfil de personalidade; (4) estado de espírito; (5) atenção; (6) crenças; (7) valores; (8) idade; e (9) sexo (Clampitt, 2005). O recetor reage de acordo com o significado que atribui à mensagem que pode não corresponder ao significado atribuído pelo emissor. O *feedback* possui, pois, um papel crucial uma vez que ajuda o emissor a adaptar as mensagens ao recetor e a promover o envolvimento na comunicação facilitando a sua eficácia, de acordo com o objetivo pretendido. Outro aspeto a ter em conta neste tipo de comunicação é a forma como se escuta: escuta ativa. Quando a mensagem é transmitida através de palavras, a sua compreensão depende mais do modo como são escutadas do que como são proferidas. Escutar é o processo de descodificar e interpretar as mensagens verbais que implica, ao contrário do ouvir, atenção cognitiva e processamento de informação (Clampitt, 2005: Menezes et al, 2013). Para promover uma escuta ativa, para Clampitt (2005), deve-se demonstrar interesse e concentração na mensagem assim como pela pessoa e as suas ideias, deve-se atuar com empatia, evitar os silêncios desconfortáveis, ser-se cuidadoso com a semântica, evitar os preconceitos, procurar ter uma mente aberta, colocar questões adequadas e assertivas e focalizar a atenção no mais importante. Para Newstrom e Davis (1997), a comunicação interpessoal estabelece-se através de oito passos: (a) o emissor elabora uma ideia da mensagem que quer enviar; (b) codifica-a; (c) transmite a mensagem e o recetor recebe-a, (d) descodifica-a, (e) aceita ou rejeita a mensagem, (f) faz ou não uso da informação recebida e responde, dando o *feedback*. Na comunicação interpessoal, as mensagens não-verbais adquirem um papel muito relevante, pois para além de facilitarem o conhecimento de vários aspetos relativos ao interlocutor, podem completar a informação tornando-a mais eficaz, tanto no sentido emissor-recetor como no sentido contrário, através do *feedback*.

Na comunicação interpessoal, encontram-se vários estilos pessoais de comunicação, em linha com o pensamento de Freixo (2011), Newstrom e Davis (1997) e Schramm (1963):

- **Estilo passivo**. Como o nome sugere, as pessoas tendem a comportar-se de forma tímida e retraída, revelando dificuldade em defender os seus interesses ou pontos de vista, evitando discordar dos outros. Desta forma, não se estabelece uma comunicação produtiva uma vez que o comunicador não se afirma nem dá a conhecer o que pensa, os seus desejos ou os seus interesses (*feedback*).
- **Estilo manipulador**. O comunicador é calculista e apresenta um discurso diferente consoante o interlocutor.
- **Estilo agressivo**. O emissor normalmente fala forte, perturba os outros interlocutores, utiliza linguagem não-verbal e mímica, onde manifesta desprezo ou desaprovação pelo interlocutor.

- **Estilo assertivo**. As pessoas que utilizam o estilo assertivo sabem escutar os outros, não pressionam, não manipulam nem culpabilizam e sabem dar um *feedback* positivo.

No estilo de comunicação assertivo, o emissor estabelece uma relação de confiança com o recetor negociando com este de forma direta e clara. Este estilo traz, de uma forma geral, vantagens, particularmente na comunicação que se estabelece na sala de aula. É um estilo de comunicação honesto e saudável, evita conflitos, embaraços, desgastes e promove a negociação, promotora de aquisição de conhecimentos e desenvolvimento de capacidades (Guerreiro, 2011; Menezes, 1996; Menezes et al., 2013; Pimm, 1987; Sfard, 2008; Stein, Engle, Smith e Hughes, 2008). O *feedback,* a escuta ativa, a empatia e a assertividade são aspetos essenciais para o estabelecimento de uma boa comunicação.

Na secção seguinte continua a abordar-se o conceito de comunicação mas agora focado no contexto sala de aula e no processo de ensino/aprendizagem.

2.3 - Comunicação matemática na sala de aula

Nos últimos anos, o paradigma da educação, em geral, e da educação matemática, em particular, tem vindo a sofrer alterações acompanhando assim o novo paradigma de uma sociedade em permanente mutação. A mudança social interligada com uma alucinante evolução tecnológica obrigou, também, à reflexão e a novos olhares sobre a necessidade de dotar as gerações vindouras de capacidades que lhes permitam integrar-se socialmente de forma ativa, reflexiva e criativa. O desenvolvimento dessas capacidades passa pelas capacidades matemáticas que estão inerentemente associadas à ideia de aprender com compreensão.

O conceito da "Matemática com compreensão, Matemática para todos", proposto pelo *National Council of Teachers of Mathematics* no início deste milénio, é o lema que norteia os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, enunciados por este organismo norteamericano (NCTM, 2007). Neste documento, os *princípios* descrevem características de uma educação matemática de qualidade e as *normas* descrevem conteúdos e processos matemáticos que os alunos deverão aprender. As normas de conteúdo descrevem explicitamente aquilo que os alunos devem aprender, enquanto as normas de processo realçam a maneira de adquirir e utilizar os conhecimentos sobre os conteúdos.

De entre as normas de processo, destaca-se a comunicação matemática. Neste documento, temos assim a comunicação como parte essencial da Matemática e da Educação Matemática que "contribui para a construção de significados e para a consolidação de ideias e, ainda, para a sua divulgação" (NCTM, 2007, p.66). A comunicação é apresentada como uma das principais ferramentas para a compreensão matemática pois "os alunos que têm oportunidade, encorajamento e apoio para falar, escrever, ler e ouvir, nas aulas de Matemática, beneficiam duplamente: comunicam para aprender e aprendem a comunicar matematicamente" (p.66). Naturalmente, daqui decorre a importância do professor e do papel que este tem que desempenhar para o cumprimento desta norma. O professor é responsável pelo desenvolvimento da comunicação ao criar ambientes de aula ricos em "riscos intelectuais" (NCTM, 2007, p.229) e atribuições de significados, ao propor problemas promotores de discussão, pois "é necessário que os alunos trabalhem em tarefas matemáticas que constituam assuntos relevantes de discussão" (p.66). Esta é uma forma eficaz de ajudar os alunos a desenvolverem continuamente a sua capacidade de comunicação, pelo desenvolvimento de técnicas como, por exemplo, escutar, questionar e parafrasear.

A comunicação também "constitui um instrumento de regulação direta do processo de ensino-aprendizagem por parte do professor de matemática" (Ponte et al., 2007). Na mesma linha, Menezes (2004) sustenta que a comunicação matemática, que ocorre na sala de aula e que envolve professores e alunos, é estruturante da relação didática, pois através da comunicação partilham-se ideias. Esta partilha concretiza-se através de diversos modos ou formas de comunicação. A literatura tem identificado as seguintes unidirecional, contributiva, reflexiva e instrutiva (Brendefur & Frykholm, 2000; Guerreiro, 2011; Menezes 2004), que se inscrevem, sobretudo as duas últimas, nos modelos de comunicação interpessoal.

A comunicação instrutiva é um tipo de comunicação matemática a que o professor recorre para monitorizar a sua aula. Já na comunicação unidirecional e na comunicação contributiva, o papel do aluno é mais passivo do que o do professor, uma vez que neste tipo de comunicação é o professor que domina o discurso (especialmente na primeira), a participação do aluno é esporádica e limitada na partilha de ideias, estratégias ou soluções. Na comunicação reflexiva, pelo contrário, os alunos participam ativamente na discussão, partilhando as suas ideias, estratégias e soluções. (Brendefur & Frykholm, 2000; Menezes, 2004). Esta comunicação implica ativamente os alunos no seu processo de aprendizagem, levando-os a pensar sobre o que é dito na aula. Este tipo de comunicação é defendido pela perspetiva interacionista da aprendizagem pois facilita a negociação de significados matemáticos entre professor e alunos (Guerreiro, 2011; Sierpinska, 1998).

Num estudo sobre desenvolvimento profissional de professores, no âmbito de um projeto colaborativo focado na comunicação matemática, Menezes (2004) concluiu que os professores envolvidos evoluíram na sua visão da comunicação matemática, que teve reflexos nas suas práticas letivas: “os professores passam a adotar novos padrões de interação e também novos modos de comunicação” sendo que “a comunicação reflexiva passa a ser a predominante, quando antes, e principalmente nos professores mais jovens, imperava unidirecional e a contributiva”.

As interações comunicativas durante a aula de Matemática podem gerar diversos padrões. A literatura tem identificado diversos padrões de interação: discussão, extrativo, funil, focalização e recitação (Guerreiro, 2011; Menezes, 2004). Destes padrões de interação, o de discussão é aquele que exige mais do professor em termos de interação com o aluno. Já o padrão de recitação é aquele que exige menos porque se torna muito previsível: o professor expõe e o aluno recita. Este padrão está muito associado ao momento da aula em que o professor realiza a avaliação depois da exposição dos tópicos matemáticos (Godino & Llinares, 2000; Guerreiro, 2011; Menezes, 2004).

Os padrões de interação na aula dependem essencialmente do modo como o professor conduz as interações verbais e não-verbais ocorridas nesse espaço. O professor deve evitar um tipo de discurso dominante, isto é, um tipo de discurso em que ele se manifeste marcadamente líder pois os alunos tendem a considera-lo o “expert”, a fonte única da autoridade sobre o saber, e não compreendem que podem pensar, formulando as suas próprias perguntas e apresentando as suas próprias ideias (Ministère de L’Éducation de L’Ontario, 2011; Spierpinka, 1998). Para além disso, os alunos associam, normalmente, a comunicação matemática à linguagem simbólica da mesma, não reconhecendo a importância da comunicação oral e escrita (recorrendo à sua língua materna) para expressar as suas ideias, e, por essa razão, não tomam habitualmente a iniciativa de encetar as discussões (Cobb, Wood & Yackel, 1993). Terão, pois, de ser os professores a alterar esta forma de pensar, criando oportunidades de forma a ensinar os alunos como fazer, como comunicar matemática de forma oral e escrita usando a linguagem corrente e a linguagem específica da Matemática, ou seja, devem promover normas sociomatemáticas muito diferentes das de uma aula tradicional (Godino & Llinares, 2000; Guerreiro, 2011; Menezes, 2004). Dessa maneira, a comunicação torna-se essencial no processo de aprendizagem porque, por um lado, permite à criança interagir com outra pessoa, partilhando ideias, discutir, refletir e rever as suas próprias ideias, negociar significados viáveis e realizar a sua apropriação (Gomes & Nacarato, 2007; Menezes, 2004; Ministère de L'Éducation de Ontario, 2011; Ponte et al., 2007; Spierpinska, 1998) e, por outro lado, essa comunicação é a forma de construir essas normas (Godino & Llinares, 2000; Guerreiro, 2011).

Em suma, a comunicação matemática que ocorre na sala de aula constitui um dos alicerces do processo ensino-aprendizagem da Matemática, sendo simultaneamente um instrumento e objetivo deste processo.

2.4 – Desenvolvimento da comunicação matemática

Assumindo a importância da comunicação na aprendizagem da Matemática, como garantir que os alunos melhoram a sua comunicação? O *Ministère de L'Éducation de L'Ontario* (2011), no documento *La communication en classe de mathématiques*, apresenta-nos uma professora que se depara com esta questão, na sequência do diagnóstico de dificuldades sérias dos seus alunos e também após uma tentativa de promover a comunicação, através da discussão. Uma das dificuldades com que se deparou no desenvolvimento da capacidade de comunicação, através do fomento das interações verbais, foi a diminuição da atenção dos alunos durante as intervenções dos colegas. Este trabalho mostra que não basta, pois, simplesmente, promover a comunicação de ideias solicitando a discussão das resoluções das tarefas. É necessário assegurar que a comunicação seja eficaz, garantindo o envolvimento de todos os alunos na discussão, na partilha de ideias e na reflexão (estimulando a comunicação reflexiva). Desta forma, a capacidade de comunicação matemática dos alunos evolui em clareza e complexidade na apresentação das ideias ao longo da escolaridade (Ministère de L'Éducation de L'Ontario, 2011). Este trabalho mostra que é primordial desenvolver essa capacidade comunicativa dos alunos, especialmente na forma como são apresentadas, explicadas e discutidas as suas ideias, e como são negociados os significados. É também importante que não só haja benefício próprio de cada aluno para a sua aprendizagem mas também é fundamental que a discussão ocorra de forma aliciante e satisfatória para os alunos.

Vários autores, como Pimm (1987), Lappan e Schram (1989), Barrody (1993), Menezes (1995, 1996, 2004), Guerreiro (2011) e Martinho (2007), apresentam o professor como tendo um papel determinante no fomento de oportunidades que promovam dinâmicas comunicativas na sala de aula, tanto no lançamento destas como no seu aprofundamento. Cabe ao professor gerir uma série de aspetos que influenciam a dinâmica da comunicação matemática.

Um dos primeiros passos a dar é o de criar um ambiente de sala de aula onde cada aluno se sinta bem, à vontade para intervir, confortável o suficiente para explicar o seu raciocínio matemático, uma vez que este ambiente é decisivo para que se crie um contexto apropriado para dar lugar à comunicação matemática e à aprendizagem (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012; Martinho, 2009; Ministère de L'Éducation de L'Ontario, 2011).

O ambiente da sala de aula é um aspeto a ter em conta para o sucesso do ensino-aprendizagem mas ao professor colocam-se outros desafios. É necessário também que crie oportunidades para estimular o interesse dos alunos, proporcionando situações e experiências desafiantes e incentivando os alunos a verbalizá-las (Barrody, 1993; Martinho, 2009; Martinho & Ponte, 2005).

As tarefas são uma das ferramentas que o professor dispõe para desafiar os alunos. Existem vários tipos de tarefas matemáticas: exercícios, problemas, investigações, explorações e modelação. Estas podem variar em relação ao seu grau de desafio (reduzido ou elevado), quanto à estrutura (aberta ou fechada) e quanto ao contexto (real ou puramente matemático) (Ponte, 2005). Muitos autores defendem que as tarefas que são usadas em sala de aula têm grande influência na promoção do raciocínio, da resolução de problemas e da comunicação, facilitando as discussões e impactando a aprendizagem do aluno (Boavida & Menezes, 2012; Doyle, 1983; Hierbert & Wearne, 1993; Martinho, 2009; Menezes, 1996; Stein et al., 2008; Stein, Grover & Henningsen, 1996). O PMEB (2007) dá orientações metodológicas para o professor propor aos alunos diferentes tipos de tarefas, nomeadamente tarefas que promovam o "confronto de resultados, discussão de estratégias e institucionalização de conceitos e representações matemáticas" (p. 8).

As tarefas assentes na resolução de problemas e na investigação têm grande influência nos mecanismos e processos mentais dos alunos criando oportunidades de desenvolvimento da comunicação matemática (Martinho & Ponte, 2005). Para Menezes (1996), as tarefas rotineiras (exercícios) não potenciam a comunicação matemática uma vez que não são geradoras de discussão. No entanto, o autor adverte que as tarefas demasiado difíceis em que os alunos não se sintam capazes de as resolver podem ter efeito desmotivador, criar o sentimento de insegurança e, consequentemente, inibir a comunicação e a aprendizagem. Por isso, o professor tem que ter o cuidado de encontrar tarefas que sejam adequadas ao nível e capacidades dos alunos, aprazíveis para eles e ao mesmo tempo desafiadoras em termos cognitivos, que favoreçam a construção de ideias matemáticas poderosas e que incentivem o raciocínio e o pensamento reflexivo, permitindo assim que os alunos aprendam Matemática com compreensão.

A escolha das tarefas matemáticas é muito importante. Contudo, a qualidade do trabalho dos alunos depende também, e muito, da forma como o professor organiza e orienta o trabalho com as tarefas (Boavida & Menezes 2012; Menezes 1996), ou seja, é enganador pensar-se que bastam boas tarefas para se ter boas aprendizagens. Depois da escolha das tarefas, o maior desafio que se coloca ao professor é o de levar os alunos a partilhar e a discutir as suas ideias matemáticas, com qualidade e de negociar conceitos matemáticos para que estes realizem aprendizagens com compreensão (Canavarro, 2011; Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012; Stein et al., 2008). Em termos das dinâmicas comunicativas, o professor tem que controlar neste contexto dois aspetos fundamentais: a sua forma de ouvir e a sua forma de questionar de os alunos. Uma vez que o professor é o principal responsável pela organização do discurso na aula (Menezes, 2004), fomentando a participação, modelando, questionando, e orquestrando as interações de forma a proporcionar situações que favoreçam a ligação da Matemática à realidade, a partilha de ideias matemáticas e a negociação de significados (Menezes, 2000; Ponte et al., 2007), a forma como ouve e como questiona é determinante em todo este processo. Pepin (2011), num estudo realizado com 12 professores de diferentes países, para, entre outros objetivos, saber como os professores ouvem os alunos, defende que os professores têm que verdadeiramente "ouvir" (este ouvir é ativo e requer ação) para poderem ensinar de forma produtiva, tendo em conta a forma como os alunos estão a evoluir nas suas aprendizagens. Pepin (2011) descreve três modos de ouvir os alunos consoante os objetivos que procura alcançar: (i) o professor ouve os alunos para os *avaliar* e *corrigir* a sua compreensão; (ii) o professor ouve os alunos para *saber como pensam*; e (iii) o professor ouve os alunos para os *envolver no processo de negociação de significados*. Para o autor, a escuta ativa implica que o professor: (i) crie oportunidades para os alunos expressarem livremente as suas ideias matemáticas; (ii) questione os alunos a fim de descobrir a essência e a fonte das suas ideias; (iii) analise o que ouve e faça um esforço intelectual para compreender e aceitar a perspetiva do aluno; e, (iv) decida de que forma pode integrar as ideias dos alunos no processo de aprendizagem.

O estudo anterior tem diversos pontos de contacto com o desenvolvido por Nicol (1999). Esta autora norteamericana, num estudo sobre práticas pedagógicas na formação de professores, aponta tensões que se geram nos futuros professores, durante os seus esforços para questionar, escutar e também responder aos seus alunos, nomeadamente: o tipo de perguntas a colocar, a forma como ouvem e a forma como respondem. O questionamento exige que se façam as perguntas certas, na hora certa e escutar envolve mais do que simples atenção às palavras: implica compreender as *nuances* e implicações da contribuição de cada participante, com empatia e respeito (Nicol, 1999). As tensões, no que respeita ao questionamento, estão relacionadas com o tipo de perguntas para saber o que os alunos pensam, perguntas com a finalidade de obter respostas e perguntas para testar o raciocínio dos alunos. Para a escuta ativa, os professores têm que estar muito seguros em relação ao domínio do conhecimento matemático para conseguirem ouvir e compreender o que o aluno quer dizer e as perguntas a colocar devem ser abertas, isto é, perguntas que incitem os alunos a investigar, a explicar as suas ideias, a discutir resultados e realizar conexões (Porquê? Concordas? Explica? Mostra?).

Para Nicol (1999), outra tensão gera-se quando os futuros professores são confrontados com uma variedade de estratégias e às vezes de soluções (quando as tarefas são cognitivamente exigentes) dos alunos. A questão coloca-se: como fazer para as usar para que todos os alunos realizem aprendizagens com significado? Esta questão é também abordada por Oliveira, Menezes e Canavarro (2013) quando, no âmbito do estudo do ensino exploratório, procuram compreender como professores experientes preparam a discussão coletiva a partir das resoluções dos alunos.

Ainda neste domínio, Stein et al. (2008) apontam cinco formas (ações ou práticas) para o professor usar mais eficazmente as estratégias e soluções dos alunos, na resolução de tarefas, de forma a contribuir para enriquecer a discussão coletiva: (i) *anticipating* (antecipação das respostas dos alunos para as tarefas cognitivamente exigentes; (ii) *monitoring* (acompanhar e monitorar as respostas dos alunos, durante a fase de exploração; (iii) *selecting* (selecionar as resoluções e os alunos, para a apresentação na fase da discussão); (iv) *sequencing* (sequenciar propositadamente as resoluções a apresentar durante a discussão); e, (v) *making connections* (ajudar os alunos a fazer conexões entre as várias ideias-chave apresentadas nas suas respostas).

De modo a promover a comunicação matemática antes da discussão coletiva, e de modo a facilitar a resolução das tarefas pelos alunos, o trabalho de grupo tem vindo a afirmar-se na sala de aulas. O trabalho colaborativo é indicado para a resolução das tarefas, uma vez que há evidências de que ele potencia o sucesso dos alunos, reduzindo as desigualdades entre eles (Mayo, 2007; Martinho & Ponte, 2005; Moreira & Fonseca, 2009; Ponte et al., 2007). Para Mayo (2007), o trabalho em pequenos grupos proporciona a discussão de estratégias e assuntos matemáticos, melhorando a sua compreensão, clarificando significados, permitindo a resolução de tarefas mais exigentes em termos cognitivos que individualmente os alunos teriam muito mais dificuldade. As discussões que se geram na resolução das tarefas em pequeno grupo têm vantagens equivalentes às discussões coletivas (Mayo, 2007). Para além disso, os trabalhos em grupo potenciam interações geradoras de mais ideias e até estratégias mais criativas, contribuindo para o desenvolvimento progressivo da comunicação matemática, no que respeita às diferentes formas de comunicação.

D'Ambrosio (2009), num artigo onde coloca algumas ideias sobre o uso da comunicação nas aulas de Matemática, sugere que os alunos exponham os seus trabalhos para serem apreciados pelos colegas após o seu trabalho autónomo em grupo. O autor apresenta assim a ideia de galeria como uma estratégia promotora da comunicação dos alunos:

> A produção escrita pode ainda ser apresentada aos colegas através de uma "galeria de apresentações". Simulando uma galeria de arte ou sessão de posters de um congresso, os trabalhos são apreciados pelos colegas. Cada aluno visita cada produção com um bloquinho de post-its e deixa perguntas ou comentários para o(s) autor(es) da produção exibida. Esta atividade resulta em mais um momento de desenvolvimento da leitura matemática e crítica. (D'Ambrosio, 2009, p.2)

Para a autora, a produção escrita fornece dados ao professor sobre os conhecimentos dos alunos e aos colegas sobre ideias matemáticas, pois a produção escrita que resulta dos seus trabalhos serve para os alunos esclarecerem as suas ideias ao mesmo tempo que exige que as representem de forma a comunicar claramente o seu pensamento. Também, o *Ministère de L'Éducation de L'Ontario* (2011), refletindo sobre como ajudar alunos a comunicar mais eficazmente no campo da Matemática, apresenta a "galeria de estratégias" como uma estratégia de ensino potenciadora da construção de uma comunicação matemática eficiente, a par de outras estratégias, como a resolução de tarefas motivadoras e desafiadoras em grupo e a sua discussão coletiva. Um dos objetivos da galeria é levar os alunos, e até os professores, a pensar sobre uma série de estratégias além de dar a possibilidade aos grupos de corrigir a sua resolução com a ajuda dos seus colegas. Em suma, o desenvolvimento da capacidade de comunicação dos alunos depende muito da forma como o professor conduz a aula, do clima que cria, das tarefas matemáticas que seleciona, da maneira como promove as discussões e, de modo mais transversal, das ações comunicativas de que toma parte e convidam o aluno à participação, como o ouvir, o questionar e o responder.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

Neste capítulo faz-se a apresentação do tipo de abordagem metodológica utlizada neste estudo, dos participantes, do plano de intervenção, dos instrumentos de recolha de dados e da análise dos dados.

3.1 - Opções metodológicas

Tendo em conta os objetivos do estudo, este enquadra-se numa abordagem de investigação fundamentalmente qualitativa, adotando uma perspetiva interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994). Recorde-se que esta investigação visa conceber e estudar o impacto na aprendizagem de alunos do 5.º ano do ensino básico, de um modelo de ensino promotor da capacidade de comunicação matemática. A escolha da metodologia qualitativa está relacionada com os objetivos do estudo, com a natureza dos dados que se recolhem (qualitativos), com a análise realizada e com o conhecimento que se produz. Este tipo de metodologia tem como base a interpretação de uma dada realidade, que neste caso é a comunicação numa aula de Matemática, envolvendo ações e intenções da professora e alunos e cujos dados serão recolhidos fundamentalmente através do contato direto da investigadora com essa realidade, sendo analisados de forma indutiva e interpretados de acordo com a singularidade do contexto (Bogdan & Biklen, 1994). De acordo com Ponte (1994), trata-se igualmente de uma investigação sobre a própria prática, na medida que sou simultaneamente professora neste estudo, de forma a experimentar metodologias de trabalho que levem os alunos a obter resultados no plano da comunicação e da aprendizagem da Matemática, tendo como ponto de partida o reconhecimento de um problema relacionado com a aprendizagem dos alunos. Na medida em que se reconhece um problema e se procura, à custa da implementação de um modelo de ensino, alterar a situação, o estudo assume igualmente uma dimensão crítico-reflexiva.

3.2 – Participantes

No estudo, realizado com um grupo de alunos de uma turma do 5.º ano do ensino básico, a investigadora desempenha simultaneamente o papel de professora. O grupo de alunos foi escolhido tendo em conta os seguintes critérios:

a) Alunos do 5º ano do ensino básico;

b) Alunos de uma turma lecionada pela professora-investigadora;

c) Diferente automotivação para a aprendizagem da Matemática.

Dadas as características do estudo, impunha-se que este se realizasse sobre a minha prática letiva numa turma que me estivesse atribuída. Tendo a meu cargo duas turmas do 5.º ano do ensino básico, ambas correspondendo aos critérios definidos para o estudo, optei por escolher a turma onde, durante a caracterização efetuada no primeiro conselho de turma, realizado no início do ano letivo, se apresentava como a mais heterogénea no que respeitava à automotivação para a aprendizagem de Matemática. Esta caracterização teve como base a informação facultada pelo professor do 1.º ciclo do ensino básico desta turma, relativa às dificuldades manifestadas a esta disciplina, e os resultados obtidos na prova final do 4.º ano do ensino básico, em que apenas dois dos alunos obtiveram menção satisfatória.

No ano letivo em que se realizou o estudo (2012/2013), a escola, situada numa pequena vila do interior de Portugal, cuja principal atividade económica é a agricultura, era frequentada por cerca de 400 alunos do 5.º ao 12.º anos, com curso CEF e também curso profissional (10º e 11º). O 2.º ciclo tinha 102 alunos distribuídos por três turmas do 5.º ano (com 17, 18 e 16 alunos) e por três turmas do 6.º ano (com 17, 18 e 16 alunos). O número de alunos da escola tem vindo a diminuir ao longo dos últimos anos, pois uma grande parte dos jovens opta por ir estudar para o concelho vizinho mais próximo, com maior densidade populacional e com maior oferta escolar.

A turma onde foi realizado o estudo é constituída por 17 alunos, 9 raparigas e 8 rapazes com idades compreendidas entre os 10 e os 11 anos. Uma aluna é avaliada ao abrigo do Dec. Lei 3/2008, de 7 de janeiro (decreto-lei que define medidas educativas visando a promoção da aprendizagem de alunos com necessidades educativas especiais e que, no caso desta aluna, concretizam-se por adequações curriculares individuais e adequações no processo de avaliação) e um aluno possui um diagnóstico de hiperatividade. Oito dos alunos da turma ficaram retidos um ano, sete no 1.ºciclo e um no 5.ºano. Na ficha biográfica, a maioria dos alunos refere qua a Matemática é a disciplina em que sentem mais dificuldades. Em relação aos tempos livres, a maioria ocupa-se a ver televisão, sendo a novela o tipo de programa mais visto. Oito alunos vivem na vila, onde se situa a escola. Os restantes distribuem-se por seis freguesias circundantes. Os alunos, para se deslocarem para a escola, utilizam o autocarro escolar. Nenhum deles mora a mais de meia hora (de autocarro) da escola. Só 10 dos alunos têm irmãos. A idade dos encarregados de educação varia entre os 29 e os 50 anos. A maioria (nove) dos encarregados de educação possui apenas a 4.ª classe, um possui o 6.º ano, cinco possuem o 9.º ano, um o 12.º ano e um, uma licenciatura. Em relação às atividades laborais, a maioria dos encarregados de educação (11) é doméstica, uma é florista, uma é empregada fabril, uma é auxiliar num lar, uma é funcionária do município e uma é professora.

3.3 - Plano de intervenção

Este estudo assenta numa experiência de ensino que incorpora um modelo de ensino (apresentado no capítulo 4) cujo principal propósito é desenvolver a capacidade de comunicação matemática dos alunos de uma turma do 5.º ano do ensino básico, ao mesmo tempo que procura o desenvolvimento de outras capacidades (como a resolução de problemas e o raciocínio matemático) e a apropriação de conhecimentos relacionados com os tópicos matemáticos constantes no currículo. Esta intervenção educativa decorreu ao longo do ano letivo (2012/1013), envolvendo genericamente um conjunto de ações:

- **Reflexão sobre a minha prática letiva**. Esta reflexão inclui a análise e reflexão sobre o meu estilo de comunicação, diagnosticando problemas e encontrando soluções.

- **Avaliação da capacidade de comunicação matemática dos alunos**, antes, durante e depois da implementação do modelo de ensino. Para avaliar a capacidade de comunicação matemática dos alunos, foram utilizados:

  i. Testes de diagnóstico;
  ii. Produções escritas nos trabalhos de grupo;
  iii. Registos das suas intervenções orais durante a discussão em grupo e a discussão coletiva.

Para a análise das capacidades comunicativas nas intervenções orais, foram elaboradas e utilizadas grelhas de avaliação da capacidade de comunicação matemática no que respeita a:

(i) Organização da apresentação (Anexo1); (ii) Expressão de ideias (Anexo 2); e (iii) Escuta e responde (Anexo 3).

- **Conceção e aplicação de um modelo de ensino** promotor do desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática e restantes aprendizagens matemáticas dos alunos.

- **Avaliação da eficácia do modelo de ensino** na promoção do desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática a par do desenvolvimento de outras capacidades e da realização de aprendizagens matemáticas com significado.

3.4 - Instrumentos de recolha de dados

Os instrumentos de recolha de dados mais usuais em investigação em educação matemática, que implica a presença em sala de aula, são a observação participante (normalmente acompanhada por gravações áudio e vídeo e também por grelhas de observação), o inquérito, por questionários e/ou por entrevistas, análise documental e notas de campo (Ponte, 1994). O professor, para aumentar a sua compreensão da atividade dos alunos, como a atenção, o interesse e o envolvimento, pode recorrer a "indicadores", entendidos como dados medido por um instrumento que coloca a descoberto algumas características não diretamente observáveis (Sousa, 2005). Em educação, os testes constituem um instrumento de avaliação de conhecimentos e capacidades dos alunos, sendo importantes para a recolha de dados de um número elevado de alunos.

Assim, neste estudo, a recolha de dados foi baseada nos instrumentos seguintes:

1. **Observação participante com registo áudio**. Foram observadas e gravadas diversas aulas ao longo do ano letivo, das quais se selecionaram cinco: duas no primeiro período, duas no segundo período e uma no terceiro período, de acordo com o quadro:

Quadro 1- Tarefas e data de implementação.

Tarefa/Aula	Data
Instituição de solidariedade	14 de novembro de 2012
O terreno do João e da Ana	22 de novembro de 2012
Ovos e mais ovos	17 de janeiro de 2013
Vamos lá a pôr a cruz	24 de 29 de janeiro de 2013
Descontos na Bit-@-byte	12 de junho de 2013

2. **Grelhas de avaliação da capacidade de comunicação matemática**. Foram elaboradas três grelhas, já referidas, para apoiar a observação da capacidade de comunicação dos alunos (em Anexos 1, 2, e 3).

Estas grelhas foram também usadas para apoiar a análise dos testes de diagnóstico de capacidade de comunicação matemática, na resolução das tarefas em grupo e na discussão coletiva das mesmas tarefas. Nos testes de diagnóstico e resolução das tarefas em grupo foram usadas as grelhas *Organização da apresentação* e *Expressão de ideias.* Na discussão coletiva foram utilizadas as grelhas *Expressão de ideias* e *Escuta e responde*. As grelhas foram concebidas de forma a permitirem analisar o desempenho de cada aluno. Na análise dos testes de diagnóstico, as grelhas foram preenchidas de acordo com o desempenho individual de cada aluno. Para a análise da produção resultante da resolução das tarefas em grupo, as grelhas foram preenchidas individualmente, contudo foi tido em conta o facto de esse desempenho ser em grupo e registado nas observações (coluna existente para o efeito na grelha). Na discussão coletiva, a grelha foi utilizada após a transcrição do registo áudio. Nesta grelha, a análise era feita individualmente para os alunos que participavam.

3. **Documentos produzidos pelos alunos nas aulas.** Durante as aulas foram recolhidos documentos relativos à resolução das tarefas em grupo, depois de expostos na *galeria de tarefas* (incluindo comentários dos colegas).

4. **Testes de avaliação.** Foram aplicados três testes, dois no início do estudo e um no final. O primeiro teste de diagnóstico foi aplicado a todas as turmas do 5.º ano, no dia 19 de setembro de 2012. Este teste foi elaborado pelo grupo disciplinar de Matemática

e tinha como principal objetivo avaliar os conhecimentos relativos aos diversos tópicos matemáticos trabalhados no 1º ciclo. O segundo teste de diagnóstico, aplicado no dia 10 de outubro de 2012 unicamente à turma onde se realizou o estudo, pretendia diagnosticar, de forma mais específica, as capacidades de comunicação matemática dos alunos. Para este teste utilizei dois problemas da prova de aferição nacional aplicada em 2002/2003 e uma tarefa sobre sequências e regularidades, adaptada de um manual escolar. No dia 5 de junho de 2013, passados nove meses, foi aplicado novamente à turma o mesmo teste de diagnóstico inicial.

5. **Notas de campo.** Foram utilizadas notas realizadas pela professora, durante e logo após as aulas. Nessas notas, a professora registava alguns acontecimentos e impressões relacionados com o comportamento dos alunos perante determinada situação, nomeadamente as suas reações perante a *galeria de tarefas*. Nas notas, a professora registava também as suas impressões acerca do modelo de ensino que faz parte da experiência, no que concerne à sua ação na apresentação da tarefa, na condução da realização do trabalho autónomo dos alunos e na forma como desempenhava o seu papel durante a discussão (estilo de comunicação, tipo de perguntas, reação ao *feedback*, reação e controlo de ruídos e filtros usados no controlo de ruídos).

3.5 - Análise dos dados

Tendo em conta os objetivos do estudo, a análise de dados apresentou dois focos interrelacionados: (i) aprendizagem dos alunos e (ii) modelo de ensino. No caso das aprendizagens dos alunos, o estudo focou fundamentalmente o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática dos alunos, no enquadramento da aquisição dos conhecimentos matemáticos. Para isso, foram utilizadas as grelhas de avaliação da capacidade de comunicação matemática, que a seguir de explicitam:

-

a. ***Grelha 1***: Organização da apresentação.

Esta grelha procura avaliar de que forma os alunos (individualmente ou em grupo) organizam e apoiam as suas ideias matemáticas por escrito no que respeita às diferentes formas de comunicação (diagramas, tabelas, desenhos, esquemas, etc.). Definiram-se três critérios de avaliação: clareza, lógica e eficácia e respetivos descritores. Para cada critério foram, definidos três níveis de desempenho: (1) Baixo, (2) Médio e (3) Elevado.

Para *Clareza*, considerou-se o seguinte: O aluno expressa de forma nítida as suas ideias, com recurso a vocabulário e esquemas apropriados, sendo compreendido por professor e colegas. Considera-se nível baixo (1) sempre que a organização e apresentação é confusa e utiliza termos incorretos, não sendo compreendido. Considera-se médio (2), sempre que apesar de apresentar ideias corretas, utiliza vocabulário impreciso ou errado e a apresentação não é de fácil interpretação ou/e é pouco clara. Considera-se elevado (3), sempre que apresenta ideias corretas, é utilizado vocabulário adequado e os esquemas são apropriados facilitando a interpretação das ideias.

Para *Lógica*, considerou-se o seguinte: Os esquemas/desenhos/ registos revelam raciocínio, coerência, isto é, conexão entre as ideias discutidas. Considera-se nível baixo (1) quando os esquemas/desenhos/registos revelam pouco raciocínio e pouca conexão entre as ideias, não manifestando lógica. Nível médio (2) quando os esquemas/desenhos/registos revelam raciocínio e conexão entre as ideias, embora manifeste alguma confusão. Nível alto (3) quando os esquemas/desenhos/registos revelam raciocínio, coerência e conexão entre as ideias.

b. ***Grelha 2***: Expressão de ideias.

Esta grelha procura avaliar se os alunos, por iniciativa própria, exprimem oralmente as ideias e processos matemáticos usando vocabulário apropriado com clareza, pertinência e profundidade. Para esclarecimento dos critérios foi definido o seguinte:

Para *Clareza*: Exprime com nitidez as suas ideias, recorrendo a vocabulário próprio, sendo compreendido por colegas e professor. Considera-se nível baixo (1) sempre que é confuso e utiliza termos incorretos, não sendo compreendido. Considera-se médio (2), sempre que apesar de apresentar ideias corretas, utiliza vocabulário impreciso ou errado. Considera-se elevado (3), sempre que apresenta ideias corretas e utiliza vocabulário adequado.

Para *Pertinência*: Revela lógica de ligação entre os assuntos. Considera-se nível baixo (1) sempre que não estabelece ligação com outros assuntos. Considera-se médio (2), sempre que estabelece pouca ligação com outros assuntos e elevado (3), sempre que estabelece diversas ligações com outros assuntos.

Para *Profundidade*: Revela dominar aspetos mais complexos dos assuntos. Considera-se nível baixo (1) sempre que não revela. Considera-se nível médio (2) sempre que revela algumas vezes. Considera-se elevado (3) sempre que revela muitas vezes.

c. ***Grelha 3***: Escuta e responde.

Esta grelha procura avaliar a forma como os alunos, na sequência do que ouvem, discutem resultados, processos e ideias matemáticos. Definiram-se, a semelhança das anteriores, três critérios: eficácia, lógica e pertinência e para cada um deles, três níveis de desempenho (1) baixo, (2) médio e (3) elevado.

Para *Eficácia*: O aluno responde com qualidade aos argumentos e ideias dos colegas, enriquecendo a discussão. Considera-se nível Baixo (1) sempre responde com alguma qualidade mas não enriquece a discussão, nível médio (2) sempre que responde com alguma qualidade a alguns argumentos e ideias e enriquece, embora pouco, a discussão e considera-se nível elevado (3) sempre que responde com qualidade e enriquece a discussão.

Para *Lógica*: O aluno apresenta argumento/resposta que revela raciocínio, coerência, isto é, conexão entre as ideias discutidas. Considera-se nível baixo (1) sempre que a resposta do aluno revela um raciocínio confuso, não sendo compreendido, pouco coerente e pouca conexão entre as ideias. Nível médio (2) sempre que, embora apresente raciocínio, revele pouca ligação entre as ideias e nível alto (3) sempre qua apresente raciocínio, coerência e conexão entre as ideias.

Para *Pertinência*: O aluno apresenta argumentos/respostas que revelam lógica de ligação entre os assuntos a ser discutidos, respondendo com elementos que provam o que pretende manifestar. Considera-se nível baixo (1) quando não dá resposta pertinente, sem elementos que provem a lógica de ligação entre as ideias. Nível médio (2) quando manifesta alguma pertinência e nível alto (3) quando apresenta muitas vezes elementos que provam a lógica entre as ideias/assuntos.

Na análise dos testes de diagnóstico, realizados nos dias 10 de outubro de 2012 e 5 de junho de 2013, foram utilizadas duas grelhas de avaliação de capacidade de comunicação matemática: (1) Organização da apresentação e (2) Expressão de ideias. As grelhas foram aplicadas para cada uma das três tarefas que compunham o teste. Para cada aluno preencheu-se os níveis 1. Baixo, 2. Médio e 3. Elevado, tendo em conta os descritores (Radforde &

Demers, 2004) definidos para cada critério (Capítulo 3.4). Após o preenchimento das grelhas, as mesmas eram analisadas para verificar quantos alunos eram avaliados nos níveis 1.Baixo, 2.Medio e 3. Elevado, nos respetivos critérios de acordo com os descritores definidos. Se, por exemplo, na aplicação da grelha (1) organização da apresentação numa determinada tarefa, a maioria dos alunos obtiver nível 1 (baixo) no parâmetro " Clareza", considera-se que a forma como a maioria dos alunos organiza a apresentação das suas ideias matemáticas, no que respeita a vocabulário próprio, esquemas, diagramas, tabelas, etc., é confusa, com vocabulário incorreto, não sendo compreendida pelos colegas e pelo professor, revelando assim, grandes dificuldades na comunicação matemática no que diz respeito à organização e apresentação com recurso a diferentes formas de comunicação. Se, por exemplo, a maioria dos alunos, obtiver nível 2. (médio) no parâmetro "Pertinência", no que diz respeito à forma como exprimem ideias e processos matemáticos, considera-se que a maioria dos alunos estabelece alguma ligação com outros assuntos ou entre assuntos. A análise das grelhas utilizadas nos testes de diagnóstico, aplicados antes e depois da utilização do modelo de ensino (Capítulo 4), permitiu inferir sobre a evolução dos alunos, no que respeita à comunicação matemática, ao fazer-se a comparação entre elas.

Para a análise das produções resultantes da resolução das seis tarefas realizadas pelos alunos nas aulas onde se ocorreu o estudo, utilizaram-se as grelhas (1) organização da apresentação e (2) expressão de ideias. O preenchimento destas foi semelhante ao descrito para a análise das tarefas constantes nos testes de diagnóstico (parágrafo anterior), contudo foi tido em conta o facto de os alunos trabalharem em grupo, pelo que foi atribuído o mesmo nível a todos os membros de cada grupo, sendo este aspeto colocado nas observações existentes em cada grelha. A análise das grelhas permitiu inferir sobre a capacidade de comunicação dos alunos demonstrada na resolução de cada tarefa e ainda sobre o desenvolvimento ocorrido ao longo da aplicação do modelo, fazendo a comparação entre as grelhas preenchidas para as seis tarefas.

Para a análise da discussão coletiva das tarefas, que aconteceu em todas as aulas onde se utilizou modelo de ensino e onde ocorreu o estudo, foram utilizadas as grelhas (2) expressão de ideias e (3) escuta e responde. Para o preenchimento das grelhas, recorreu-se às gravações áudio. O preenchimento foi semelhante ao descrito anteriormente (parágrafo anterior). Nestas grelhas não eram preenchidos todos os campos respeitantes aos alunos uma vez que nem sempre as intervenções tinham cabimento na grelha usada. Esta grelha permitiu inferir sobre a forma como os alunos discutem processos e ideias matemáticas em cada aula, mas também a o desenvolvimento/evolução ou não, desse aspeto, ao comparar as grelhas utilizadas ao longo das seis aulas observando a incidência nos níveis de desempenho.

Relativamente aos conhecimentos matemáticos demonstrados pelos alunos, utilizaram-se os testes de avaliação e questões aula e os respetivos critérios de avaliação elaborados em grupo disciplinar (aplicados a todas as turmas do 5.ºano). A análise realizada a estes testes e questões aula permitiu inferir sobre os conhecimentos matemáticos revelados pelos alunos.

A análise das notas de campo e das gravações áudio, realizadas ao longo das aulas em que ocorreu o estudo, permitiu recolher evidências sobre: (i) a aprendizagem dos alunos e (ii) o modelo de ensino. A transcrição dos diálogos das conversas entre os alunos, entre estes e a professora e os seus registos na resposta às tarefas matemáticas permitiram recolher dados qualitativos que foram sujeitos a análise de conteúdo que aumentou a compreensão da forma como os alunos evoluíram em termos das suas capacidades comunicativas (aprendizagens) nas diversas fases da aula. Estes mesmos dados, especialmente as transcrições dos diálogos, permitiram focar a ação da professora, no que respeita ao seu estilo de comunicação, permitindo realizar ajustamentos na forma como controlava os ruídos, escutava os alunos e realizava o *feedback*, formulava perguntas, utilizava a linguagem no sentido de melhorar o modelo de ensino e torná-lo mais eficaz. As notas de campo permitiram também recolher impressões sobre o comportamento comunicativo dos alunos na *galeria de tarefas.* Esses registos em conjunto com outras análises (discussão coletiva das tarefas) permitiram inferir sobre o papel deste momento da aula, no desenvolvimento da capacidade de comunicação nos alunos.

CAPÍTULO 4

INTERVENÇÃO EM SALA DE AULA: APRESENTAÇÃO DO MODELO DE ENSINO

Neste capítulo faz-se a apresentação do modelo de ensino que visa promover a capacidade de comunicação matemática em alunos participantes no estudo. Começa-se por explicar em que princípios assenta o modelo e em seguida especifica-se a sua aplicação nos vários momentos da aula de Matemática de natureza exploratória: apresentação da tarefa, resolução da tarefa, galeria de tarefas, discussão da tarefa e sistematização das aprendizagens.

4.1 - Princípios gerais

O modelo de ensino que foi implementado neste estudo tem como objetivo principal desenvolver a capacidade de comunicação matemática dos alunos, no quadro mais global da aprendizagem da disciplina de Matemática, ou seja, pretende-se que os alunos aprendam a comunicar e usem a comunicação para aprender Matemática. Este modelo assenta nas teorias de comunicação interpessoal circular (Freixo, 2011; Guerreiro, 2011), pressupondo uma interação dinâmica entre o professor e o aluno que assumem ativamente, à vez, os papéis de emissores e recetores (interlocutores). Apesar de ambos assumirem esse duplo papel, cabe ao professor a dinamização e controlo da comunicação estabelecida na aula, orientada por objetivos a que se propõe atingir, doseando as suas intervenções com as intervenções dos alunos, fomentando o entendimento através da negociação de significados, procurando realizar uma escuta ativa (ouvir e perceber o que pensam os alunos, com disponibilidade, com interesse tendo em atenção os gestos e emoções demonstradas), dando especial atenção ao *feedback* e adaptando a sua mensagem em função do desenrolar da aula, reduzindo possíveis ruídos (tom de voz, falta de atenção, linguagem inadaptada, incompreensão da mensagem, empatia, autoestima, barulhos, desconfortos) (Guerreiro, 2011; Menezes, 1996, 2004; Menezes et al., 2013; Pimm, 1987; Sfard, 2008; Spierpinska, 1998; Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

O ambiente de sala de aula de Matemática subjacente a este modelo de ensino assenta, pois, na atividade, reflexão e comunicação dos alunos, induzidas pelo professor através da proposta, realização e acompanhamento de tarefas com carácter problemático que possibilitem a aprendizagem da Matemática. O tipo de aula que suporta este modelo de ensino pressupõe da professora um estilo assertivo de comunicação, baseado na confiança, empatia e no desafio proposto aos alunos. Para isso, a professora procura detetar e evitar ou contornar todos os ruídos que possam perturbar a mensagem que pretende transmitir, certificando-se, antes, de que estão reunidas as condições favoráveis para a realização do trabalho (bom clima de aula, alunos devidamente instalados, com todo o material necessário, boa luminosidade, sem conversas paralelas). Não sendo o sucesso dos processos de codificação e descodificação de informação condição suficiente para a compreensão matemática, são contudo condições necessárias para a aprendizagem, pois é necessário que cada um possa receber a informação enviada por outros (Guerreiro, 2011; Menezes, Delplancq & Castanheira, 2014; Pimm, 1996).

Neste tipo de aula é suposto que a professora realize uma escuta ativa, desde a apresentação da tarefa (certificando-se de que todos a compreenderam) até à sistematização dos conceitos, ou seja, durante todos os momentos da aula. O aluno dá o *feedback* que o professor necessita para adaptar a mensagem e/ou para questionar (Clampitt, 2005; Newstrom & Davis, 1997) ao mesmo tempo que desenvolve a sua capacidade de comunicação matemática no que respeita à expressão de ideias, discussão de resultados e processos com utilização de linguagem apropriada da Matemática. Para além disso, o professor ouve, coloca questões de modo a fazer o aluno pensar e falar (Nicol, 1999).

Esta visão geral da comunicação matemática, enquanto instrumento de ensino do professor e instrumento e objetivo de aprendizagem dos alunos, enquadra-se naquilo que é designado em português de ensino exploratório (uma tradução do *inquiry-based teaching*) (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013; Stein et.al., 2008). Este ensino caracteriza-se pela dinâmica que se estabelece durante a aula em torno de uma tarefa matemática rica, sendo o papel desempenhado pelo professor e pelo aluno assim como a forma como a tarefa é gerida e a comunicação estabelecida, aspetos fundamentais para a referida dinâmica (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013).

Habitualmente o modelo de ensino exploratório organiza-se em três ou quatro fases: lançamento da tarefa, exploração pelos alunos, discussão e sistematização, podendo desdobra-se ou não esta última fase (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013). Neste estudo, adotamos este modelo mas introduzimos, imediatamente antes da discussão coletiva, a galeria de tarefas (D'Ambrósio, 2009; Fosnot & Dolk, 2002; Ministère de L'Education de L'Ontario, 2011). A *galeria de tarefas* consiste na exposição do trabalho dos alunos, resultante da resolução da tarefa, à semelhança de uma galeria de arte (D'Ambrósio, 2009), sendo os alunos convidados a observar e comentar os trabalhos expostos.

4.2 – Organização e funcionamento das aulas

Durante o ano letivo, a generalidade das aulas seguiu uma estrutura que se organizou em torno das fases seguintes: (i) Apresentação da tarefa; (ii) Realização da tarefa; (iii) Galeria de tarefas; (iv) Discussão e sistematização.

4.2.1 – Apresentação da tarefa

Antes da apresentação da tarefa, o professor dá início à aula recordando os conceitos prévios, considerados fundamentais para as aprendizagens da aula. Neste momento da aula, necessariamente breve, a professora questiona os alunos, ouvindo atentamente as suas respostas para avaliar os seus conhecimentos prévios (Canavarro, 2011; Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013; Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

Em seguida, o professor apresenta a tarefa realizando a sua leitura (eventualmente com o apoio de um aluno). Para se certificar de que todos os alunos a compreendem, pede o seu reconto prestando atenção ao *feedback* dos alunos (tanto oral como nas suas expressões faciais ou mimicas). Oliveira, Menezes e Canavarro (2013) sistematizam as ações a desenvolver pelo professor nesta fase da aula, em torno de três intenções fundamentais:

1. *Garantir a apropriação da tarefa pelos alunos*.
    a. Familiarizar com o contexto da tarefa;
    b. Esclarecer a interpretação da tarefa;
    c. Estabelecer objetivos.
2. *Promover a adesão dos alunos à tarefa.*
    a. Estabelecer conexões com experiência anterior;
    b. Desafiar para o trabalho.
3. *Organizar o trabalho dos alunos.*
    a. Estipular tempos para o trabalho a desenvolver em cada uma das fases da aula;

b. Definir formas de organização do trabalho (individual, pares, pequenos grupos, …)
c. Organizar materiais da aula. (p.33)

4.2.2 – Realização da tarefa

Depois da apresentação da tarefa, a professora desafia os alunos a trabalhar em pequenos grupos. Os alunos são convidados a registarem por escrito as suas resoluções numa folha A3, numa cartolina, ou no ecrã do computador (se este for utilizado como recurso). O professor circula pela sala registando as observações realizadas, avaliando o nível de compreensão, a simbologia e vocabulário utilizados, dissipando dúvidas e mal entendidos e estimulando-os a continuarem o seu trabalho. Os alunos organizam a sua apresentação e apoiam os seus resultados em diferentes formas de representação (diagramas, esquemas, tabelas desenhos, etc.) (Canavarro, 2011; Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013; Stein et al., 2008).

O professor, a partir da sua observação, escolhe algumas resoluções para serem apresentadas, tendo em conta o facto de permitirem realizar aprendizagens matemáticas previstas para a aula e a sua pertinência para a discussão. Nesta fase da aula, o professor procura, também, sequenciar a apresentação dos alunos tendo como objetivo a confrontação e a discussão de soluções e estratégias, o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática e a negociação de significados matemáticos. Oliveira, Menezes e Canavarro (2013) sistematizam as ações a desenvolver pelo professor, nesta fase da aula, em torno de cinco intenções fundamentais:

1. Garantir o desenvolvimento da tarefa pelos alunos:
    a. Colocar questões e dar pistas;
    b. Sugerir apresentações;
    c. Focar ideias produtivas;
    d. Pedir clarificações e justificações.
2. Manter o desafio cognitivo e autonomia dos alunos:
    a. Cuidar de promover o raciocínio dos alunos;
    b. Cuidar de não validar a correção matemática das respostas dos alunos.
3. Promover o trabalho de pares/grupos:
    a. Regular a interação dos alunos;

    b. Providenciar materiais para o grupo.
4. Garantir a produção de materiais para a apresentação pelos alunos:
    a. Pedir registos escritos;
    b. Fornecer materiais a usar;
    c. Dar tempo para preparar a apresentação.
5. Organizar a discussão a fazer:
    a. Identificar e selecionar resoluções variadas (com erro a explorar, mais ou menos completas, com representações relevantes)
    b. Sequenciar as resoluções selecionadas (p.33)

4.2.3 - Galeria de tarefas

Após a resolução, os grupos são convidados a expor os seus trabalhos numa *galeria de tarefas* (D'Ambrósio, 2009; Fosnot & Dolk, 2002) e em seguida são também desafiados a observar e criticar (realizando registos escritos nas folhas de resolução expostas) os trabalhos dos colegas. Um dos objetivos desta estratégia de ensino, no âmbito do modelo desenhado, é fazer os alunos "pensar" sobre as soluções encontradas e processos utilizados pelos colegas de forma a realizarem aprendizagens com os seus pares. Outro objetivo é que as observações e registos contribuam para enriquecer a discussão coletiva.

4.2.4 - Discussão coletiva e sistematização das aprendizagens

Neste momento da aula, o professor convida alguns alunos (pequenos grupos), tendo em conta a sua resolução e o contributo que esta possa dar para a realização de aprendizagens matemáticas previstas para a aula, a expor e explicar as soluções e processos**.** Ao mesmo tempo, procura envolver todos os alunos na discussão de ideias, soluções e processos de forma a promover o desenvolvimento da comunicação matemática e a negociação de conceitos matemáticos para que se realizem aprendizagens com significado (Canavarro, 2011; Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013; Rodrigues, Menezes & Ponte, 2014; Stein, et al., 2008).

Na discussão, compete ao professor:

i. Analisar as soluções e resoluções dos alunos;

ii. Colocar questões estimulando os alunos a raciocinar e a falar, durante a resolução da tarefa e durante a sua discussão: explica, porquê? Como pensaste?;
iii. Animar a discussão, colocando perguntas que incentivem e apresentação e confrontação de ideias matemáticas, promovendo a comunicação matemática e a negociação de significados;
iv. Reagir ao *feedback* dos alunos colocando novas perguntas e adaptando o seu discurso para fazer pensar e fazer falar;
v. Controlar os ruídos que podem dificultar a comunicação: expressão corporal, linguagem, atenção dos alunos, indisciplina, etc;
vi. Desenvolver a escuta ativa (ouvir com ação), ouvir com disponibilidade e interesse, procurando compreender e interpretar com prudência o que os alunos dizem.

Em estreita ligação com a discussão da tarefa, o professor, em colaboração com os alunos, sistematiza as ideias dos alunos registando no quadro as aprendizagens realizadas usando simbologia e vocabulário matemático adequado (Rodrigues, Menezes & Ponte, 2014; Stein et al., 2008). Embora este momento possa acontecer ao mesmo tempo que ocorre a discussão, Oliveira, Menezes e Canavarro (2013) desdobram estes dois momentos da aula. Para a discussão, definem as seguintes intenções para o professor: (i) Promover a qualidade matemática das apresentações dos alunos; (ii) Regular as interações entre os alunos na discussão; (iii) Criar ambiente propício à apresentação e discussão; e (iv) Gerir relações entre os alunos (p. 33). Para a sistematização das aprendizagens, definem as seguintes intenções para o professor: (i) Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a tópicos matemáticos suscitados pela exploração da tarefa; (ii) Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a capacidades transversais suscitadas pela exploração da tarefa; (iii) Estabelecer conexões com aprendizagens anteriores; (iv) Criar ambiente adequado à sistematização; e (v) Garantir o registo escrito das ideias resultantes da sistematização.

A figura 3 apresenta esquematicamente o modelo de aula seguido neste estudo, em que se evidenciam as diferentes fases, o uso da *galeria de tarefas* e se enfatiza o papel da comunicação ao longo de todas elas.

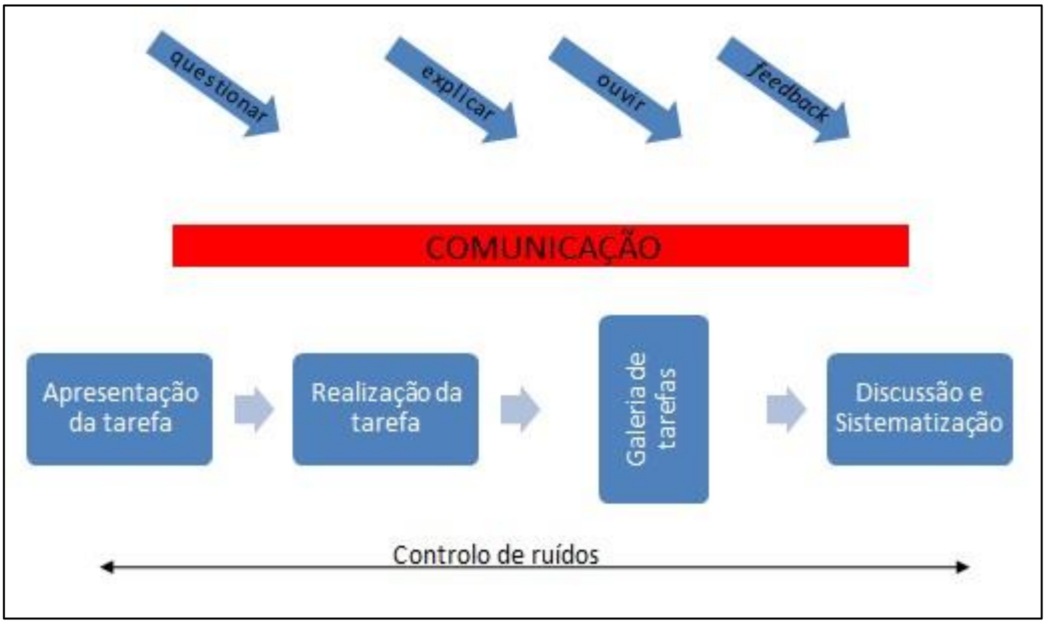


Figura 3 – Esquema do modelo de ensino aplicado nesta experimentação.

Para que ocorram aprendizagens matemáticas, o professor tem que assegurar condições de base relativamente ao estabelecimento do trabalho e à minimização dos ruídos (tudo o que possa interferir com a comunicação de professor e alunos). Na atividade comunicativa da aula, a comunicação é meio de aprendizagem (destacando-se as ações comunicativas do professor de questionar, ouvir, informar e explicar) – note-se que embora estas ações também sejam desempenhadas pelos alunos, o professor tem naturalmente, fruto da sua função, responsabilidades muito próprias. Porque se aprende a comunicar, comunicando, este modelo de ensino reúne boas condições para o permitir, ao mesmo tempo que os alunos aprendem a raciocinar, resolver problemas e a adquirir conhecimento matemático – esta é a hipótese que guia a experiência de ensino que foi desenvolvida neste estudo.

No capítulo seguinte analisa-se a aplicação do modelo de ensino ao longo do ano letivo, tendo para isso selecionado cinco aulas.

CAPÍTULO 5

INTERVENÇÃO EM SALA DE AULA: A COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA EM AÇÃO

Neste capítulo, apresento e analiso os dados de modo a contribuir para o objetivo geral deste estudo, ou seja, conceber e estudar o impacto na aprendizagem de alunos do 5.º ano do ensino básico, de um modelo de ensino promotor da capacidade de comunicação matemática. O capítulo está organizado do seguinte modo: primeiro é apresentado a avaliação diagnóstica realizada aos alunos participantes no estudo, seguindo-se uma breve autorreflexão sobre a minha prática, terminando-se com a apresentação da intervenção em sala de aula e, por fim, a avaliação final.

5.1 – Avaliação diagnóstica dos alunos

A conceção e a aplicação de um modelo de ensino promotor da comunicação matemática, dos alunos, pressupunham a elaboração do diagnóstico para avaliar a situação à partida. Essa avaliação incidiu sobre a competência escrita e oral dos alunos, tendo sido utilizado: (i) testes diagnósticos da capacidade de comunicação matemática escrita; e (ii) grelhas de avaliação da capacidade de comunicação matemática oral (Anexo 2).

Testes diagnóstico. Na primeira semana de aulas, todos os alunos do 5.º ano da escola realizaram um teste de diagnóstico a Matemática. Na turma do estudo, 10 dos 17 alunos obtiveram classificação positiva. A média dos resultados da turma foi de 55,5% e a moda de 67%. O teste diagnóstico pretendeu avaliar sobretudo o conhecimento de conteúdos matemáticos. Em termos de capacidades transversais, particularmente a comunicação matemática, esteve presente sobretudo nas questões, 10 e 11 do teste (Anexo 4), em que, no contexto de situação problemática, se pedia aos alunos para explicarem e justificarem o seu raciocínio.

A questão 10, de um nível de dificuldade baixo, envolve o conceito de perímetro de uma figura geométrica no contexto que não sendo da realidade, poderia sê-lo:

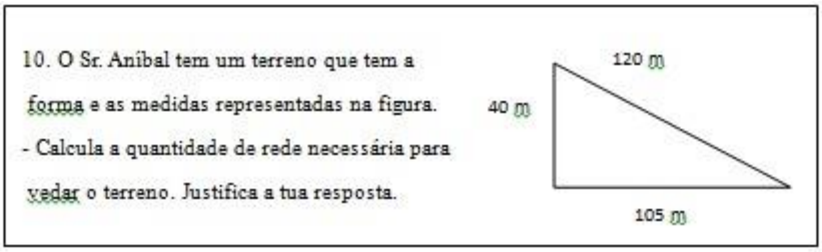

10. O Sr. Aníbal tem um terreno que tem a forma e as medidas representadas na figura.
- Calcula a quantidade de rede necessária para vedar o terreno. Justifica a tua resposta.

Figura 4- Questão10 do teste diagnóstico.

A maioria dos alunos deu a resposta correta, mas nenhum deles justificou o seu raciocínio por escrito e quando questionados oralmente, continuaram a manifestar grandes dificuldades de expressão, evidenciando imprecisões, fraco recurso ao vocabulário específico da matemática: "Juntei os lados e deu-me…" em vez de "Adicionei as medidas dos comprimentos dos lados…". Para muitos alunos, "calcula" e "justifica", parecem não ser diferentes, uma vez que a maioria deles se limita a apresentar o algoritmo da adição.

A questão 11 diz respeito a uma situação do dia-a-dia de entrada e saída de passageiros de um comboio. Pretendia-se que os alunos, para além da sua resolução, apresentassem por escrito a sua justificação:

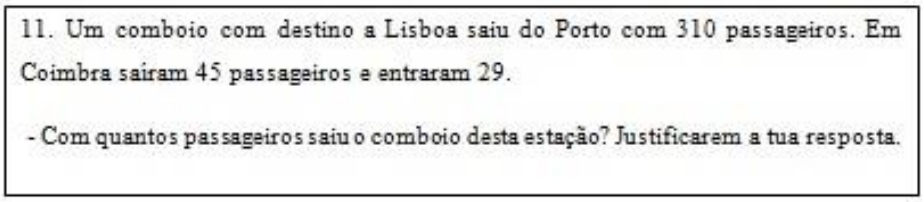

11. Um comboio com destino a Lisboa saiu do Porto com 310 passageiros. Em Coimbra saíram 45 passageiros e entraram 29.
- Com quantos passageiros saiu o comboio desta estação? Justificarem a tua resposta.

Figura 5 – Questão 11 do teste diagnóstico.

Esta questão obteve piores resultados do que a anterior porque para além das dificuldades de expressão, os alunos revelaram dificuldades de resolução. Apenas 4 dos 17 alunos da turma (23,5%) determinou o número correto de passageiros e destes apenas 2 apresentou a resposta. De forma muito preocupante em termos de capacidade de expressão, nenhum dos alunos da turma apresentou qualquer justificação (correta ou incorreta) para os procedimentos. Na resolução apresentada na figura 6, o aluno apresenta apenas dois algoritmos, que não foram apresentados pela ordem em que foram feitos, e a resposta:

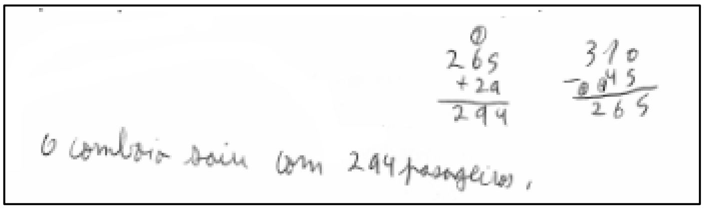
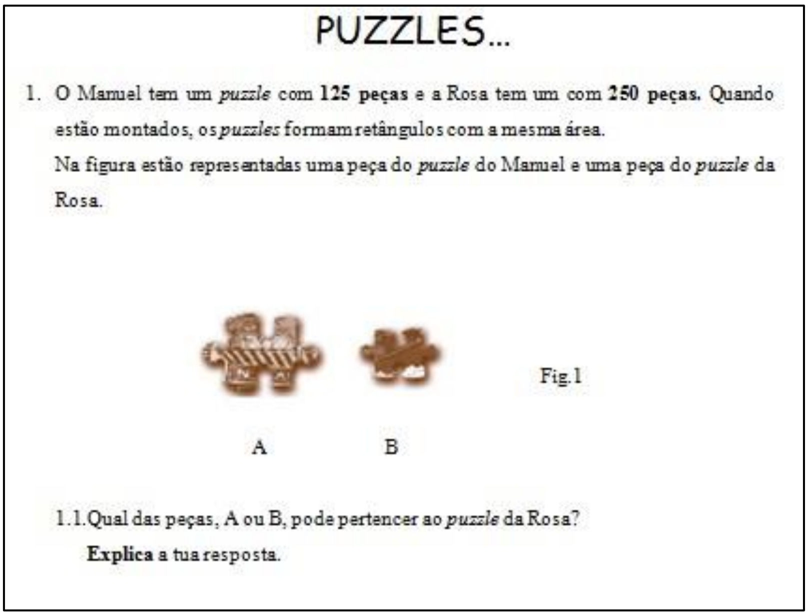


Figura 6 – Resolução apresentada por um dos alunos à questão 11 do teste de diagnóstico.

Face aos resultados obtidos no teste diagnóstico da escola, houve necessidade de o complementar com um teste específico, dirigido só à turma do estudo, para aprofundar este diagnóstico. Este segundo teste diagnóstico (Anexo 5), constituído por três tarefas matemáticas, (”Puzzles”, “Moedas…que problema!” e “Descobre a próxima linha do triângulo”), foi resolvido individualmente. A professora informou os alunos que o objetivo era perceber os processos de resolução que utilizariam e as dificuldades que sentiriam (pelo que teriam que ler com atenção, pensar e responder ao solicitado sem a ajuda da professora).

A tarefa “puzzles” mobiliza conhecimentos do tema Geometria e Medida, a tarefa “Descobre a próxima linha do triângulo” foca Relações e Regularidades e a tarefa “Moedas…que problema!”, foca Números e Operações. Todas estas tarefas envolvem a utilização de capacidades transversais, em particular a comunicação matemática na interpretação, expressão e representação de ideias matemáticas.

Na tarefa “Puzzles” (figura 7):



PUZZLES...

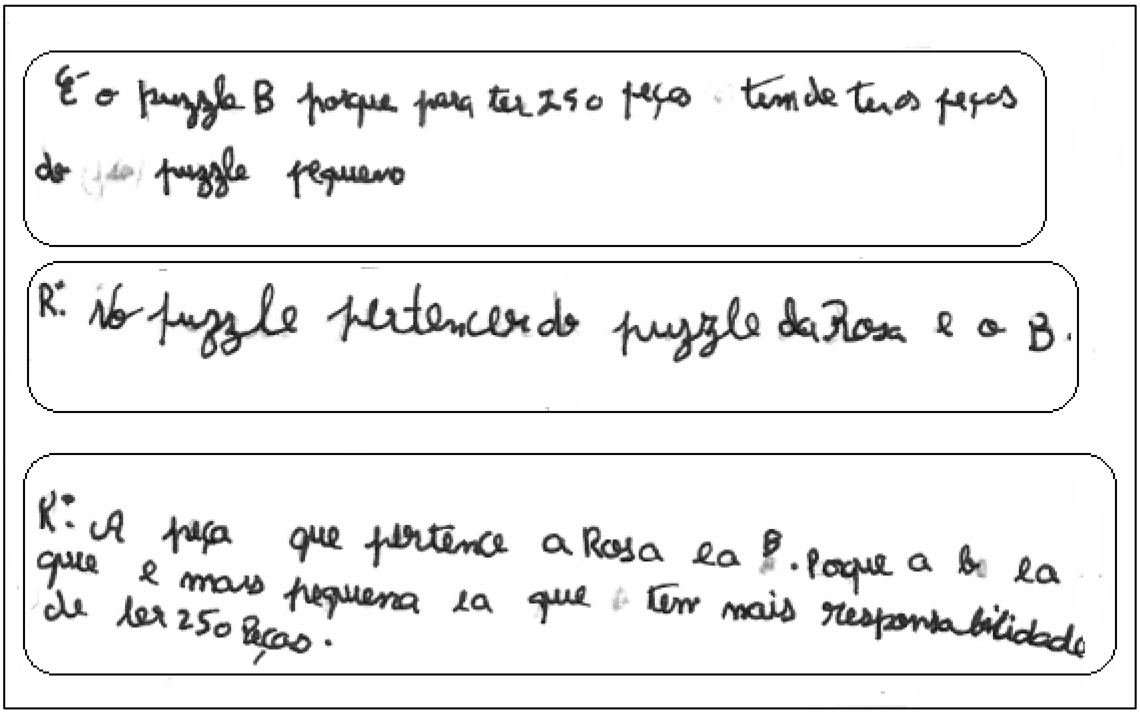
1. O Manuel tem um *puzzle* com **125 peças** e a Rosa tem um com **250 peças.** Quando estão montados, os *puzzles* formam retângulos com a mesma área.
Na figura estão representadas uma peça do *puzzle* do Manuel e uma peça do *puzzle* da Rosa.

A B Fig.1

1.1. Qual das peças, A ou B, pode pertencer ao *puzzle* da Rosa?
Explica a tua resposta.

Figura 7 – Tarefa “Puzzles”.

A análise das respostas dadas pelos alunos à tarefa revela que a maioria deles responde corretamente (76,5%) mas, tal como no primeiro teste, ou não explicam ou explicam de forma incompleta e revelaram reduzidas capacidades para justificar.

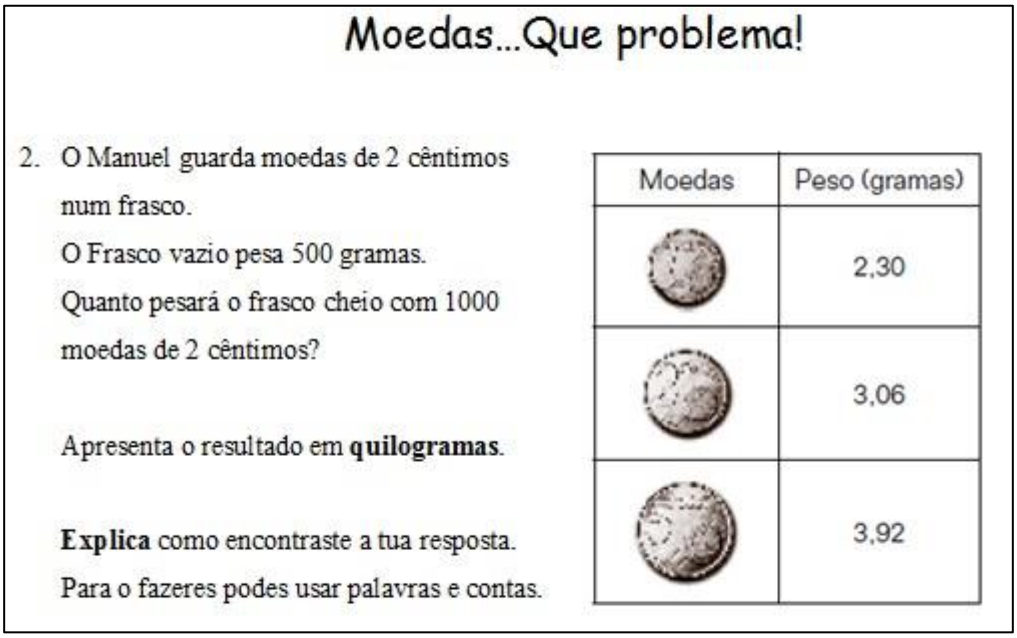

É o puzzle B porque para ter 250 peças tem de teres peças do puzzle pequeno

R: No puzzle pertencendo puzzle da Rosa e o B.

R: A peça que pertence a Rosa ea B. Porque a B ea que e mais pequena ea que tem mais responsabilidade de ter 250 peças.

Figura 8 – Respostas de três alunos à tarefa "Puzzles".

A tarefa 2 é “Moedas…Que problema!” (figura 9):



Moedas...Que problema!

2. O Manuel guarda moedas de 2 cêntimos num frasco.
   O Frasco vazio pesa 500 gramas.
   Quanto pesará o frasco cheio com 1000 moedas de 2 cêntimos?

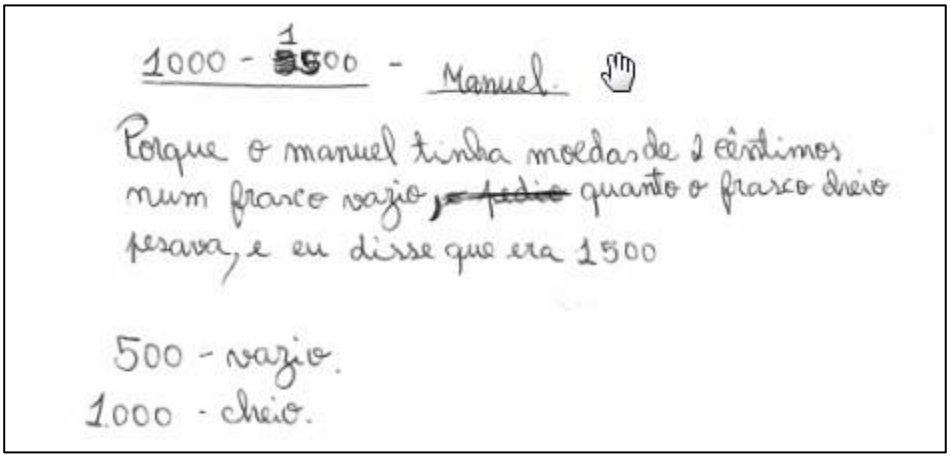
   Apresenta o resultado em **quilogramas**.

   Explica como encontraste a tua resposta.
   Para o fazeres podes usar palavras e contas.

Moedas	Peso (gramas)
	2,30
	3,06
	3,92

Figura 9 – Tarefa “Moedas…Que problema!”.

Nesta tarefa, nenhum dos alunos da turma respondeu corretamente e só três alunos (17,6%) apresentaram uma explicação, embora incorreta, do seu raciocínio. As figuras 10 e 11 ilustram as dificuldades manifestadas pelos alunos em exprimirem e representarem matematicamente as suas ideias, para além das dificuldades no raciocínio matemático e na resolução de problemas. As resoluções revelam que os alunos não utilizam formas diversificadas de representação matemática e a argumentação é pobre:

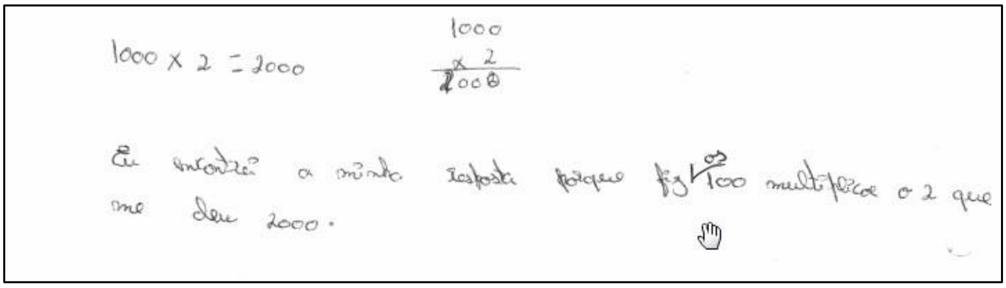


1000 - 1500 - Manuel

Porque o manuel tinha moedas de 2 cêntimos num frasco vazio, ~~e pedia~~ quanto o frasco cheio pesava, e eu disse que era 1500

500 - vazio.
1000 - cheio.

Figura 10 – Resolução de um dos alunos na tarefa "Moedas...Que problema!".

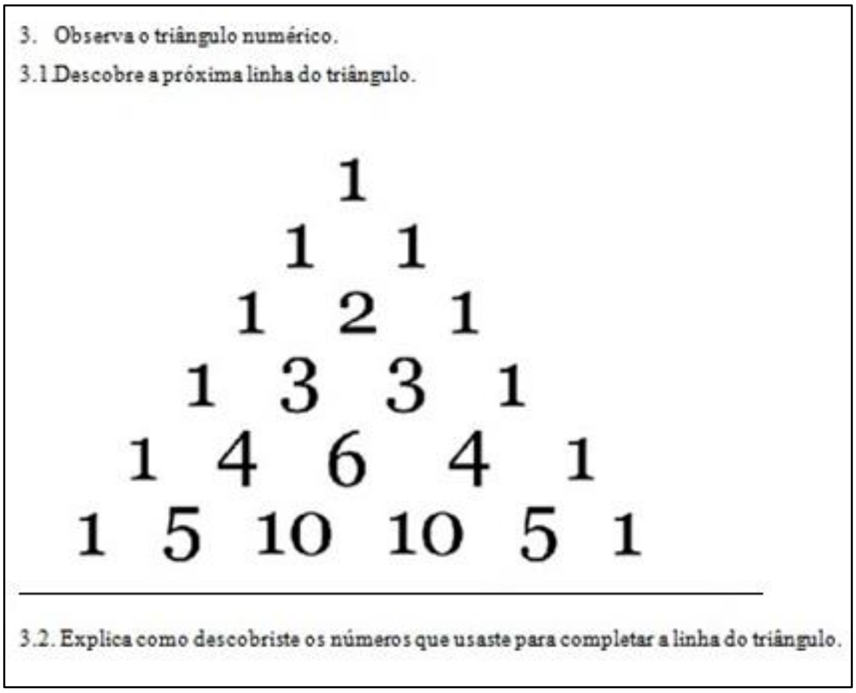

1000 x 2 = 2000

$$\begin{array}{r} 1000 \\ \times\ 2 \\ \hline 2000 \end{array}$$

Eu encontrei a minha resposta porque fiz 1000 multiplicar o 2 que me deu 2000.

Figura 11 – Resolução de um dos alunos na tarefa "Moedas...Que problema!".

A tarefa 3 é sobre regularidades numéricas (figura 12):


3. Observa o triângulo numérico.

3.1 Descobre a próxima linha do triângulo.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

3.2. Explica como descobriste os números que usaste para completar a linha do triângulo.

Figura 12 – Tarefa sobre regularidades numéricas.

Nesta tarefa, só dois alunos acertaram (11,8%) e, também aqui, a maioria deles não apresentou uma explicação compreensível sobre a forma como pensaram (figura 13):

Figura 13 - Justificação apresentada por três alunos para a resolução da tarefa "Descobre a próxima linha do triângulo".

Mesmo os alunos que responderam corretamente mostram dificuldades em produzir um discurso articulado, mobilizando explicação e justificação, recorrendo a terminologia e representações gráficas matemáticas adequadas. As dificuldades matemáticas são agravadas pelas dificuldades comunicativas, especialmente ao nível da expressão escrita (no uso da língua materna e da linguagem matemática).

De modo geral, e de forma mais evidente do que no 1.º teste de diagnóstico (realizado ao nível da escola), os alunos mostram grandes dificuldades na utilização da comunicação escrita para explicar os seus raciocínios na sua língua materna (construção articulada de enunciados escritos em português) como na mobilização de notação e vocabulário próprios da Matemática. Os alunos revelam não estar habituados a produzir, no contexto da resolução de problemas, enunciados de teor explicativo e justificativo, reduzindo as resoluções a cálculos e a respostas curtas que evidenciam fracamente os raciocínios seguidos.

Grelhas de observação. Para obter dados que permitissem avaliar, à partida, a comunicação oral dos alunos da turma, ao nível da expressão de ideias, foi utilizada a grelha de observação “Expressão de ideias” (Anexo 2). Essa grelha foi aplicada durante uma semana e procurou-se observar o seguinte: “O aluno, por sua iniciativa, exprime ideias e processos matemáticos usando vocabulário próprios com clareza, pertinência e profundidade" (conforme definido na metodologia).

Da aplicação da grelha de observação resultou que 14 dos 17 alunos (82,4%) revelam Nível Baixo (1) na expressão de ideias através da utilização de linguagem matemática (notação, vocabulário e simbologia) no que respeita à *clareza*, como mostra o gráfico 1:

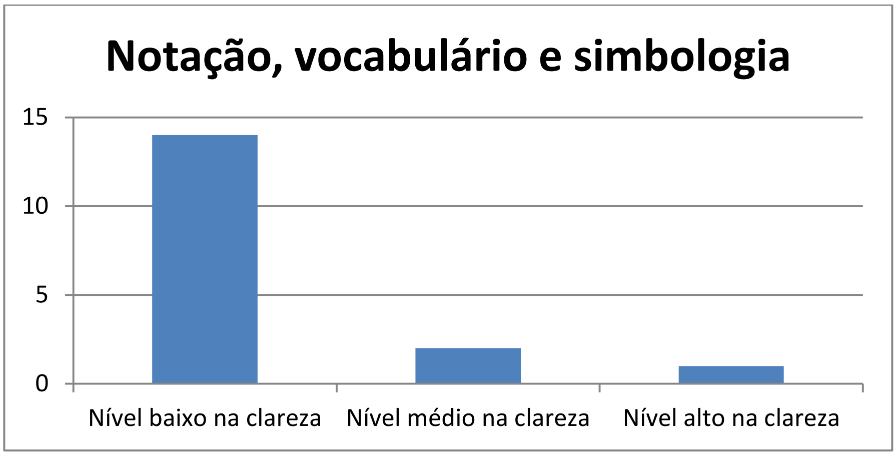


Gráfico 1- Avaliação da capacidade de comunicação matemática no que respeita à clareza.

A maioria dos alunos, 14 (82,4%), revelou Nível Baixo (1) no que respeita à *pertinência* uma vez que não estabeleceram ligação entre assuntos, como mostra o gráfico 2:

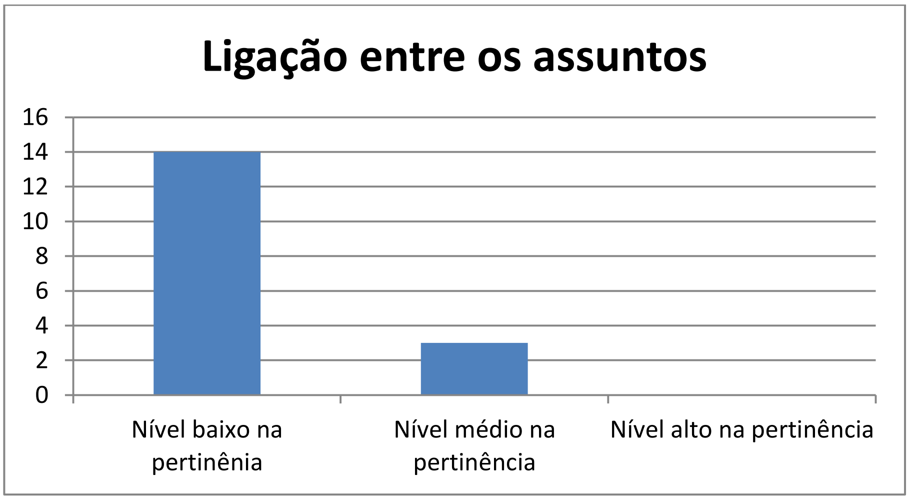


Gráfico 2 - Avaliação da capacidade de comunicação matemática no que respeita à pertinência.

Em relação à *profundidade*, nenhum aluno revelou dominar aspetos mais complexos dos assuntos, como mostra o gráfico 3:

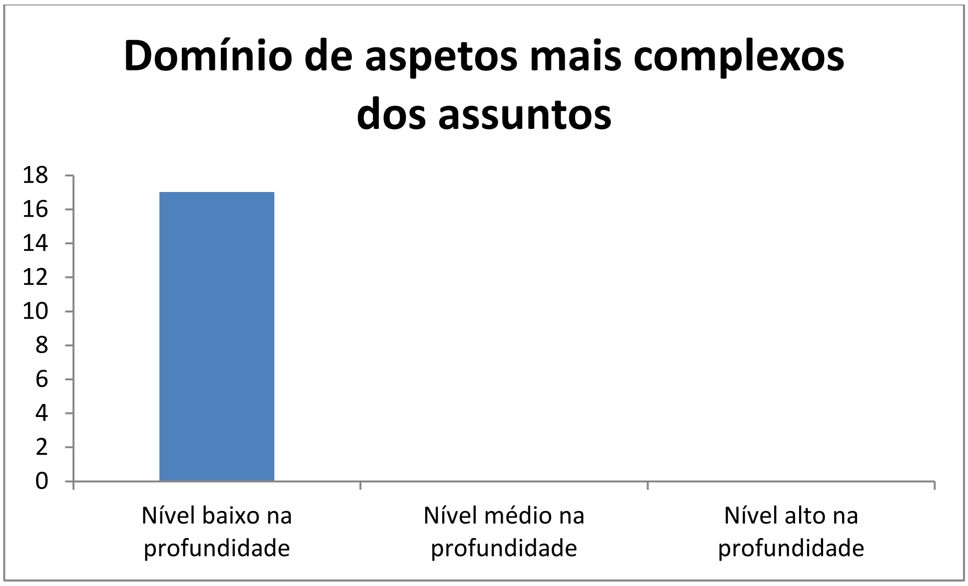


Gráfico 3 - Avaliação da capacidade de comunicação matemática no que respeita à profundidade.

Resumindo, no início do estudo, a maioria dos alunos revela insuficiências na capacidade de comunicação matemática, tanto oral como escrita. Ao nível da comunicação escrita revelam dificuldades em exprimir com nitidez as suas ideias, não usando adequadamente vocabulário, notação e simbologia próprios da Matemática. Ao nível da comunicação oral, os alunos revelam dificuldades em exprimir as suas ideias recorrendo a vocabulário próprio da Matemática, faltando lógica na ligação entre os assuntos e evidenciando fraco domínio nos aspetos mais compreensivos dos tópicos matemáticos.

O diagnóstico realizado veio reforçar a ideia de que era necessário implementar estratégias de ensino no sentido de vir a desenvolver a capacidade de expressão de ideias e resultados matemáticos usando vocabulário próprio, com clareza, pertinência e profundidade. Esta capacidade comunicativa é fundamental para ajudar os alunos a organizarem a apresentação das suas ideias e a discutirem os resultados, processos e ideias matemáticos com eficiência, lógica e pertinência.

5.2 – Refletindo sobre a prática letiva

Depois de apresentar o diagnóstico inicial efetuado aos alunos, e antes de apresentar e analisar dados da experiência de ensino, considero fundamental para a investigação refletir sobre a minha prática letiva enquanto professora de Matemática. A minha interrogação inicial foi: Que prática pedagógica utilizo habitualmente para promover o desenvolvimento da comunicação matemática dos meus alunos? Procurando "olhar" para as interações que se estabelecem ao longo das minhas aulas, outras interrogações se me colocaram:

- Que desafios coloco, enquanto professora, de modo a levar os meus alunos a pensarem matematicamente e a explicar como pensam recorrendo a linguagem apropriada?
- Como trabalho as tarefas matemáticas e como as apresento aos alunos?
- Como levo os alunos a trabalharem (individualmente ou em grupo)?
- Proporciono oportunidades para os alunos discutirem ideias matemáticas?
- Que tipo de perguntas coloco (abertas, fechadas, focadas, estimulantes, redutoras) para levar os alunos a comunicar?
- Que estilo de comunicação utilizo habitualmente nas aulas (assertivo, manipulativo, passivo, agressivo)?
- Controlo os ruídos no decorrer das aulas (assumindo que se tratam de fatores inibidores da aprendizagem)? Como faço?
- Realizo uma escuta ativa nas aulas (ouço os alunos, dou-lhes tempo para pensarem e exporem as suas ideias, reajo ao *feedback*)?
- Promovo o envolvimento de todos os alunos na exploração e discussão de desafios matemáticos?

Analisando a minha prática à luz destas interrogações, considero que, embora procurasse implementar uma prática promotora de aprendizagens matemáticas com sucesso, as minhas aulas decorriam em torno de três momentos: apresentação da tarefa, realização da tarefa e correção de resultados ao mesmo tempo que realizava a sistematização. As tarefas eram realizadas, na maioria das vezes, individualmente e algumas vezes aos pares. A apresentação das soluções (e menos das resoluções) partia, regra geral, da iniciativa dos alunos, e raramente era eu que as selecionava. Habitualmente, eram os grupos de alunos com melhor desempenho que apresentavam o seu trabalho à turma e o objetivo era corrigir os que tinham errado. O estilo de comunicação que mais vezes utilizava era o manipulativo, pois eu estava preocupada em levar os alunos a responder o que deseja ouvir. A maioria das perguntas que formulava, por essa razão, destinava-se a inteirar-me simplesmente do que os alunos sabiam e pouco em procurar compreender genuinamente o que pensam e como pensam (explicando e justificando). Embora, durante a apresentação de resultados procurasse que se gerasse alguma discussão, na maior parte das vezes apenas alguns alunos participavam e quando o faziam era, geralmente, participando para dar resposta ao que eu perguntava, e não para questionar ou argumentar em relação ao exposto pelos colegas. Apenas pontualmente criticavam ou discutiam as estratégias apresentadas pelos colegas. Eu, enquanto professora, focava-me principalmente em torno dos assuntos a serem sistematizados, modelando e conduzindo a aula neste sentido.

Concluindo, enquanto professora, considero que para fomentar o desenvolvimento da comunicação matemática tenho que repensar o modelo de ensino e alterar a minha forma de atuação em vários aspetos, nomeadamente:

- Na forma de apresentar a tarefa;
- Na maneira de desafiar os alunos a trabalhar a tarefa;
- Na forma como seleciono e sequencio as apresentações dos alunos;
- Na maneira como organizo as apresentações (galeria de tarefas);
- No tipo de perguntas que coloco para estimular o pensamento matemático e fomentar a discussão de ideias;
- Na forma como escuto e reajo ao que é dito;
- No modo de levar todos os alunos a participar ativamente na discussão e sistematização das aprendizagens.

5.3 - Planificação, intervenção e análise

A partir do diagnóstico das capacidades comunicativas dos alunos e da reflexão sobre as minhas práticas comunicativas de professora de Matemática, foi concebido e implementado um modelo de ensino (apresentado no capítulo 4) tendo em vista a melhoria da aprendizagem da Matemática pelos alunos, em particular das suas capacidades comunicativas. Ao longo do ano, foram planificadas várias aulas com estas características sendo aqui apresentadas 5, de acordo com a tabela 2:

Tabela 1 – Aulas selecionadas para análise.

Aula n.º	Data	Tarefa
1	14/10/2012	Instituição de solidariedade
2	22/11/2012	O terreno do João e da Ana
3	17/01/2013	Ovos e mais ovos
4	29/01/2013	Vamos lá a pôr a cruz!
5	12/06/2013	Descontos na Bit-@-byte

Em cada uma das aulas, apresento a intervenção realizada, a partir da planificação (apresentada nos Anexos 7, 8, 9, 10 e 11) mostrando a atividade comunicativa dos alunos na interação com a professora visando a aprendizagem da Matemática. A análise que decorre ao longo das diversas fases da aula é complementada, no final, por uma análise transversal. Nesta secção, refiro-me a mim própria como "professora" porque isso facilita o discurso e evita dificuldades de compreensão do texto, especialmente nos diálogos.

5.3.1 - Aula 1: “Instituição de solidariedade”

A tarefa “Instituição de solidariedade” (Figura 14) foi proposta com o objetivo de abordar o tópico “Propriedades da multiplicação”. Ao mesmo tempo, pretendia-se desenvolver as capacidades transversais, em particular a comunicação matemática: (i) Explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos, recorrendo a exemplos e contraexemplos e à análise exaustiva de casos; (ii) Interpretar a informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas; e (iii) Representar informação e ideias matemáticas de diversas formas:

> “Uma instituição de solidariedade recebeu 25 caixas, tendo cada caixa 18 pacotes de bolachas.
>
> Quantos pacotes de bolachas recebeu a instituição?
>
> Se cada pacote tinha 24 bolachas, quantas bolachas havia nas 25 caixas?
>
> Explica a resolução do problema e compara-a com a dos teus colegas.”

Figura 14 – Enunciado da tarefa “Instituição de solidariedade”.

Em seguida, analiso a implementação do modelo de ensino, com esta tarefa, ao longo das diversas fases da aula.

5.3.1.1- Intervenção na sala de aula

Apresentação da tarefa. Os alunos foram distribuídos em cinco grupos de três e um grupo de dois alunos, havendo uma distribuição não aleatória na formação dos grupos, ao contrário do que acontecia antes. A professora teve a preocupação de organizar os grupos procurando garantir que todos os alunos se encontravam em condições de participar, pois, por vezes os alunos com mais facilidade de intervenção dominam a resolução da tarefa, não dando oportunidade aos colegas menos participativos e com mais dificuldade de se envolverem na resolução. Houve também a preocupação de controlo do clima inicial da aula, uma vez que a mobilidade dos alunos em relação aos lugares habituais gera alguma instabilidade. Por isso, a professora procura minimizar o ruído que esta movimentação acarreta na fase da apresentação da tarefa.

Professora – Agora sem barulho, vão juntar-se em grupos de três, um grupo vai ficar com dois. Vocês ficam os três, pode ser? A Mariana junta-se com o Gustavo…

A professora distribui folhas A3 pelos grupos, que, sabendo já do que se esperava deles, aguardam tranquilamente as diretrizes:

Professora – Têm 10 minutos para a realização da tarefa, usem a folha branca, leiam com atenção a tarefa, primeiro individualmente e depois discutam entre vocês.

Depois de distribuídos os materiais para os registos, a professora lê a tarefa e verifica se ela é bem compreendida por todos os alunos, colocando algumas questões. Depois, desafia os alunos para a sua resolução, pedindo-lhes que, mais uma vez, a discutam e registem todos os procedimentos e justificações na folha distribuída, lembrando que à semelhança das outras vezes, os grupos terão oportunidade, na *galeria de tarefas*, de apreciar o trabalho dos colegas.

Realização da tarefa. A professora acompanha os grupos ajudando a interpretar vocabulário que mesmo após a fase de apresentação ainda suscita dificuldades como, por exemplo, o que é uma "instituição de solidariedade". No primeiro momento de resolução, a primeira tendência dos alunos é utilizarem nos valores numéricos do enunciado e operarem com eles. Por isso, é necessário fazê-los pensar, questionando-os "Porque realizaram essa operação?", "A que se refere o resultado que obtiveram? Caixas, pacotes ou bolachas?".

Duarte – …que está a receber 25 caixas, e cada caixa tem 18 pacotes, dentro de cada, mas ele – referindo-se ao Daniel – está a dizer que não, eu acho que temos que somar 25 com 18!

Daniel – "Temos que dividir!".

Professora – O que vais dividir?

Daniel – As caixas pelos pacotes.

A primeira coisa que ocorre à professora é perguntar "Como é que consegues dividir as caixas pelos pacotes?", manifestando imediatamente que considerava a estratégia errada, mas, contendo-se, pede:

Professora – Explica lá melhor isso, como é que vais dividir as caixas pelos pacotes? Explica lá a tua ideia.

Daniel – Então, eu estava a dizer-lhe que recebeu 18 pacotes por cada caixa.

Professora – Mas é só uma caixa?

Daniel – Não, são 25….ah, pois 25 vezes 18, já dá! Se fizermos este vezes este [referindo-se a 18 e a 25] já podemos saber quantos pacotes tinham as duas caixas.

A professora afasta-se, pois estavam "encaminhados" e provavelmente o aluno tinha-se enganado no nome da operação e, por isso, estava a ter dificuldade em convencer o colega e que a sua estratégia era adequada.

Ao mesmo tempo, a professora procurava provocar a discussão entre os elementos do grupo e questiona: "E tu, como pensas?". Notava-se, nos registos realizados pelo grupo na folha A3 (Figura 15), que os alunos se preocupavam em registar os procedimentos: identificavam o problema, os dados e a sua estratégia:

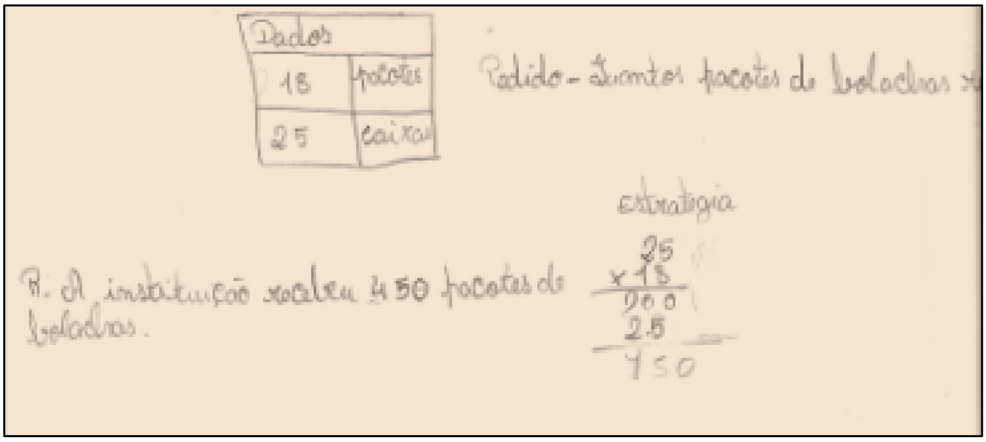


Figura 15 — Estratégia utilizada por um dos grupos.

A maioria dos grupos recorre à operação multiplicação para calcular o número de pacotes. Contudo, um grupo usa uma estratégia diferente: calcula, primeiro, quantos pacotes estavam em cinco caixas e adicionou cinco vezes esse valor, ao mesmo tempo que acompanhava o raciocínio com um esquema (Figura 16):

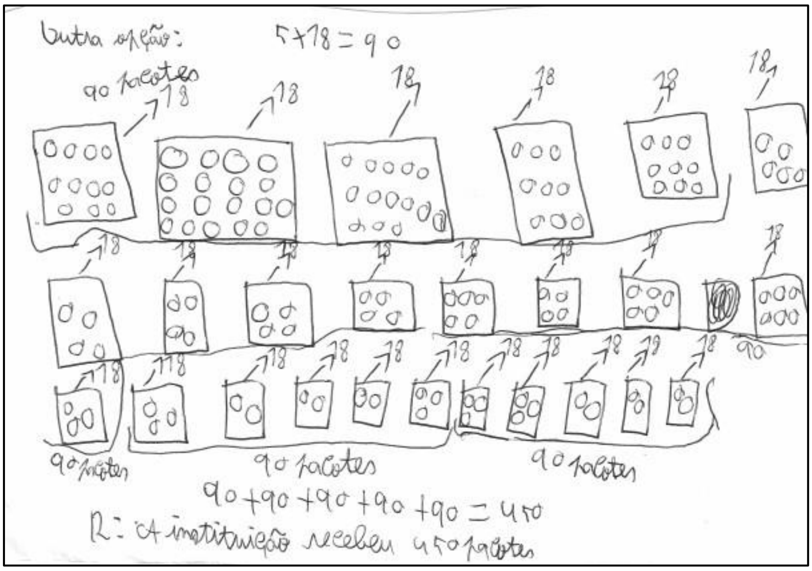


Figura 16 - Resolução de um dos grupos.

Durante o trabalho de grupo, os alunos mostraram-se envolvidos e motivados com a tarefa. Não se constatam ruídos de ordem disciplinar ou outros, o ambiente é tranquilo e a música de fundo que acompanha a realização da tarefa (já habitual para os alunos) parece ter auxiliado ao evoluir do trabalho e à conversação dos alunos. Um grupo que interrogava sobre o algoritmo da divisão chama a professora:

Martins – O professora, ela diz que aqui é um para dois…

Adriana – Na tabuada do um não há dois – responde prontamente a colega.

João – Então não há? Um vezes dois é dois!

A professora deixa que discutam mas a certa altura intervém:

Professora – Não estou a perceber a vossa ideia, explique-me lá.

Adriana – Aqui – referindo-se à primeira parte da tarefa – nós fizemos a conta de vezes só que eles disseram que dava muito – disse a aluna referindo-se aos colegas de grupo.

Professora – Dava muito, o quê?

João – Dava 450.

Professora – 450 o quê?

A professora leva os alunos do grupo a retornar ao enunciado: “ O que pede par fazer? O que diz o enunciado?” Até que um aluno diz:

João – É vinte e cinco vezes dezoito!

Professora – Porque é que tu achas que é o produto de vinte e cinco por dezoito?

Propositadamente, a professora utiliza o vocabulário “produto de 25 por 18”, fá-lo pausadamente, olhando para as expressões dos alunos tentando perceber se compreendiam o que estava a ser dito.

Adriana – Porque tem vinte e cinco caixas e cada caixa tem dezoito pacotes, por isso temos que fazer vinte e cinco vezes dezoito.

A professora afasta-se deixando os alunos a discutir a restante tarefa. Os alunos compreendem a expressão utilizada pela professora mas continuam a usar linguagem corrente.

Também desta vez, à semelhança do que tinha acontecido em aulas anteriores, com uma estrutura semelhante, o tempo estipulado para o trabalho autónomo dos alunos (10 minutos) não foi suficiente e, por isso, foi necessário dar mais tempo. Desbloqueadas as dificuldades na resolução da primeira parte da tarefa, a segunda parte, onde se pede para determinar quantas bolachas havia nas 25 caixas, não suscitou tantas dúvidas, pelo que a professora deixou que o trabalho se desenvolvesse de forma autónoma, procurando intervir só quando solicitada.

Galeria de tarefas. Depois de terminada a resolução da tarefa, as folhas de registo foram afixadas e os alunos convidados a analisarem a resolução dos colegas e a tecer comentários escritos nas folhas expostas. Esta atividade dura cerca de 10 minutos e os alunos parecem concentrados naquilo que observam, demoram os olhos nas resoluções, as suas expressões são curiosas, registam comentários como “concordo”, “faltam os dados”, “não concordo”, “falta a resposta”, ou “é interessante a estratégia” (Figura 17):

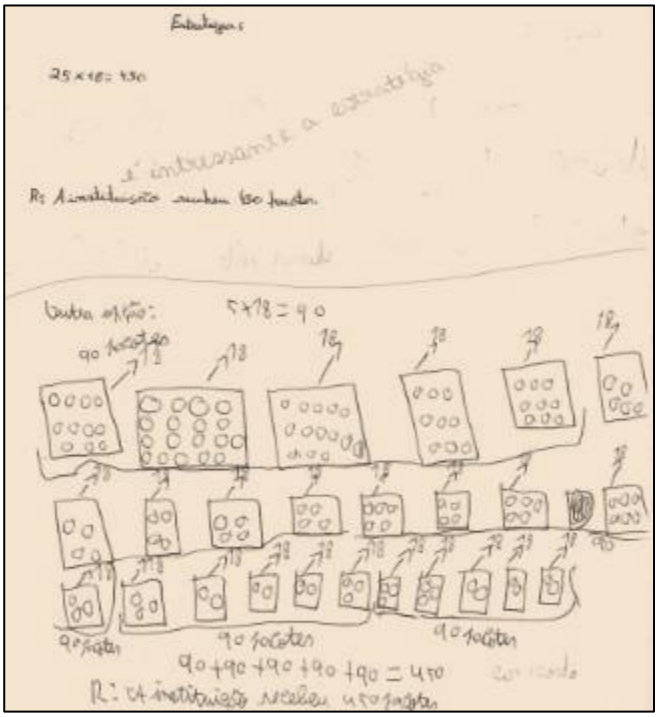


Figura 17 – Resolução com comentário.

Os comentários são simples. É provável que tal simplicidade esteja relacionada com a falta de hábito, por parte dos alunos, de realizar comentários escritos à resolução dos colegas. Pode, também, dever-se ao facto de a tarefa ser um problema com grau de dificuldade pouco elevado (ainda assim, problemática para estes alunos). Mesmo sendo os comentários pouco desenvolvidos, revelam a atenção que os alunos dispensaram às produções dos colegas.

Discussão/Sistematização das aprendizagens. A professora seleciona um grupo para explicar à turma a estratégia utilizada para dar resposta à primeira parte da tarefa:

Ana – Nós fizemos 25 caixas pelos dezoito pacotes e deu-nos 450 pacotes.

Ao pedido de explicação, por parte da professora, esta aluna acrescenta, auxiliada pelos dois outros elementos:

Ana – Como nos pedia para encontrar o número de pacotes e cada caixa tinha 18 e eram 25 caixas, tínhamos que fazer 25 caixas vezes 18 pacotes e assim deu-nos os 450 pacotes que estavam nas 25 caixas.

Como todos os grupos tinham conseguido chegar a esta resposta durante o trabalho autónomo, apesar de um grupo ter usado também uma estratégia aditiva, e estavam de acordo, a professora avança para a sistematização de conhecimentos, aproveitando para realizar exploração do vocabulário referente à operação multiplicação:

> **Professora** – Utilizaram que operação?
>
> **Ana** – Multiplicação.
>
> **Professora** – Muito bem! Alguém se lembra que nome tem cada termo da operação da multiplicação?

Ao mesmo tempo que coloca a questão, regista no quadro a expressão: $25 \times 18 = 450$. Como os alunos manifestam não se recordar, a professora regista por baixo dos termos: 1.º fator, 2.º fator e produto. E continua:

> **Professora** – Neste grupo 450 é o produto de 25 por 18, e neste? – Pergunta pontando para o trabalho de outro grupo, onde estava escrito 18 × 25 – há alguma diferença?

Quando colocou a pergunta, a professora esperava que a resposta fosse "não", mas prontamente um aluno responde, surpreendendo-a:

> Zé – Há! É que a multiplicação também é comutativa!
>
> Professora – Porque é que dizes isso?
>
> Zé – Porque podemos trocar as parcelas, dá o mesmo.

A professora percebe que o Zé associa o que observara antes na propriedade comutativa da adição, quando diz "parcelas" em vez de "fatores". A professora aproveita oportunidade para despertar a memória dos colegas, trazendo ao pensamento dos alunos conhecimentos prévios e, assim, despertando a sua atenção para a discussão/sistematização.

> **Professora** – Muito bem, mas neste caso, como se chamam os termos da multiplicação?

Depois de alguma hesitação sobre o vocabulário apropriado, a professora, em colaboração com os alunos, regista no quadro: " $25 \times 18 = 18 \times 25 = 450$ A multiplicação goza da propriedade comutativa, podemos trocar a ordem dos fatores que o produto não se altera."

Dando continuidade à discussão/sistematização das aprendizagens matemáticas suscitadas pela tarefa, a professora solicita a outro grupo que explique como encontrou o número de bolachas que estavam nas 25 caixas. A explicação levantou dúvidas a um aluno:

> **Inês** – Nós multiplicámos 24 por 25.
>
> **Samuel** – Ó professora, não pode ser!

Professora – Não pode ser porquê?

Zé – Então assim era só um pacote!

Professora – Explica lá a tua ideia.

Zé – É como explicámos ali – apontando para a folha exposta (ver Figura 18) – um pacote tem 24 bolachas mas havia 18 pacotes em cada caixa e eram 25 caixas, assim elas só calcularam como se fosse um pacote em cada caixa.

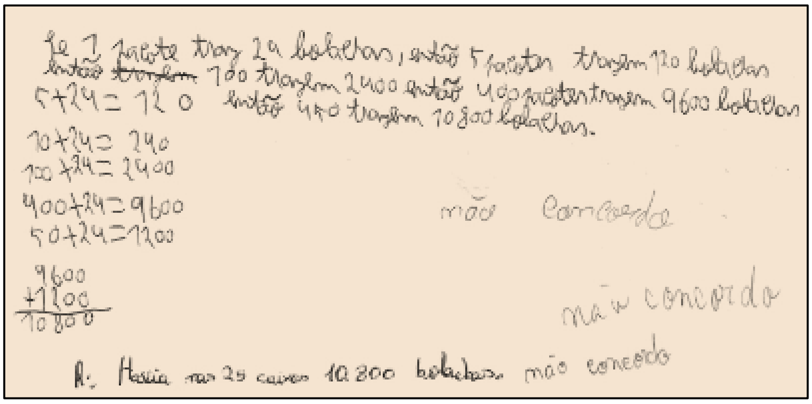


Figura 18 – Resolução do grupo do Zé.

A professora pergunta: ”Concordam com o Zé?”

Inês olha para o trabalho dos colegas (Figura 18), ainda pouco convencida e exclama “Ó professora, eu não percebi nada do que eles escreveram, por isso é que escrevi “não concordo”. Os desacordos são extremamente importantes na discussão coletiva, como aconteceu neste caso:

Professora – Expliquem a vossa estratégia para encontrar o número de bolachas.

Luciano – Nós pensámos assim: se um pacote tem 24 bolachas, dois pacotes têm 28, três tem 72, quatro tem 96, cinco tem 120 bolachas, nós ali – apontando para a folha exposta – vimos que cinco pacotes têm 120, cinquenta pacotes têm 1200 bolachas, então 100 pacotes têm 2400, 400 pacotes têm 9600, 450 pacotes têm 10 800 bolachas, 9600 mais 1 200 que dá os 10 800.

Inês – Ah! Agora já percebi.

Professora – Muito bem! E aquele grupo, como fez?

Rita – Nós multiplicámos logo 450, que era o número de pacotes nas 25 caixas, por 24 e também nos deu 10 800 bolachas.

Nenhum dos grupos tinha resolvido usando o produto de três fatores, isto é, nenhum grupo tinha escrito $25\times 18 \times 24$. A professora regista no quadro $450 \times 24 = 10\,800$ enquanto exclama “Muito bem”. Em seguida, exclama: “Poderíamos ter resolvido de outra maneira?”

Os alunos olham, não se manifestam e a professora tem que tomar uma decisão: dar mais tempo ou apresentar o produto? Insiste:

Professora – Então, em vez deste valor – aponta para os 450- eu não posso ter outro numeral que lhe seja equivalente?

Maria – Pode, $18 \times 25!$

A professora regista no quadro a expressão $(18 \times 25) \times 24 = 10\,800$ e pensa “surpreendem-nos sempre”. Perspicaz, um aluno volta a surpreender a professora:

Luciano – Se multiplicarmos 25 por 24 e depois dezoito por esse valor, dá a mesma coisa e assim ela é associativa.

Logo outro aluno toma a palavra, facilitando a sistematização das aprendizagens:

Zé – Goza da propriedade associativa, como na adição.

A professora, em colaboração com os alunos regista no quadro: “$(18 \times 25) \times 24 = 18 \times (25 \times 24) = 10800$ A multiplicação goza da propriedade associativa, podemos associar os fatores que o produto não se altera”.

Aproveitando o facto de os alunos estarem a fazer conexões com a adição, a professora pergunta “E neste caso, nesta operação, qual é o elemento neutro?”. Rapidamente, os alunos concluem que é o número 1.

Professora – Porquê?

Daniel – 1 vezes qualquer número dá sempre esse número, professora!

A sistematização das aprendizagens é realizada ao mesmo tempo que se discutem as resoluções, facto que ainda foi mais nítido porque a tarefa tinha duas partes. À semelhança do que já fizera anteriormente, na discussão de outras tarefas, a professora elabora uma tabela onde regista algumas das ideias apresentadas pelos alunos. Aproveitando as suas resoluções e as suas intervenções, a professora regista na tabela os principais conceitos abordados. Apresenta-se na Figura 19, o extrato de um registo realizado no quadro negro da sala de aula:

Grupos	Resolução da tarefa "Instituição de solidariedade"
Zé, Samuel e Luciano	$25 \times 18 = 450$
Débora, Ana e Mariana	$\underbrace{18}_{\text{fator}} \times \underbrace{25}_{\text{fator}} = \underbrace{450}_{\text{produto}}$ A multiplicação é comutativa pois podemos alterar a ordem dos fatores que o produto não se altera.

Figura 19 – Extrato de um registo realizado no quadro negro da sala de aula.

No seguimento da aula, os alunos têm oportunidade de resolver expressões numéricas onde verificam que a aplicação das propriedades aprendidas facilita o cálculo, nomeadamente em situações de cálculo mental.

5.3.1.2 - Análise transversal

Quando a professora planificou esta aula, estava convencida de que os alunos não precisariam de mais de 10 minutos para resolver a tarefa. Antecipou que a tarefa, sendo um problema pouco exigente mas adequado para atingir os objetivos a que se tinha proposto, seria de fácil resolução. Contudo, logo no início, a maioria dos alunos revela dificuldades na compreensão do enunciado da tarefa. O fato de existir uma palavra nova, que a maioria tem dificuldades em ler corretamente, torna-se um fator de bloqueio, ou seja, um ruído.

No trabalho autónomo em pequeno grupo, os alunos mostram-se empenhados, trocam impressões, discutem, discordam e concordam. Estão visivelmente envolvidos e, mesmo quando erram, estão a fazer o seu percurso na aprendizagem da Matemática. Algumas vezes, a professora tem que controlar o impulso de manifestar surpresa, evitando as comunicações não-verbais que podem ser inibidoras do pensamento matemático dos alunos: quando o Daniel diz que vai dividir 25 caixas por 18 pacotes, a primeira intenção da professora foi exclamar "Achas possível dividir caixas por pacotes?". Consciente de que isso não iria fazer o aluno compreender o seu erro, apenas possibilitaria a inibição e a insegurança, a professora procura levar o aluno a perceber, por ele, o erro e o seu porquê, pedindo “Explica lá a tua ideia”. A professora acaba por se aperceber de que o aluno apenas se enganou no nome da operação, ou por distração ou por qualquer outra razão: O aluno diz “dividir” mas a sua ideia era, encontrar o produto de 25 por 18.

O tempo necessário para a resolução da tarefa acaba por fugir ao previsto, porque a professora opta por deixar que os alunos ultrapassem por eles as suas dificuldades, incentivando, questionando, fazendo-os refletir, até perceber que a maioria deles compreende a tarefa e encontra uma estratégia correta para a sua resolução. Na resolução da tarefa, os alunos aliam elementos pictóricos com simbólicos, facto que contribui para enriquecer a discussão.

O momento da exposição na *galeria de tarefas* é muito apreciado pelos alunos, que gostam de ver os trabalhos dos colegas e de expor o seu, ficando expetantes em relação aos comentários postados. Ainda não tecem comentários elaborados ou críticas muito estruturadas, é apenas o começo que com o tempo irá contribuir de forma significativa para o hábito da observação e reflexão crítica, aumentando progressivamente a capacidade de comunicação escrita das ideias matemáticas. Apesar de apenas figurarem, na maioria dos comentários, “concordo” e “não concordo”, estes contribuem para valorizar a discussão. Quando, por exemplo, a Inês diz “Eu escrevi “não concordo” porque não percebi”, o grupo explica a sua estratégia enriquecendo, a discussão coletiva que se segue a esta fase da aula.

Quando a professora coloca questões no sentido de estimular a discussão, a intenção é levar os alunos a explicar o seu raciocínio, apelar a conceitos conexos negociando os seus significados e, paralelamente, promovendo a utilização de vocabulário e simbologia da Matemática. Ao contrário do que aconteceu nesta aula, num ensino predominantemente unidirecional, sem diálogo ou discussão, a professora não tem oportunidade de se aperceber da capacidade que os alunos possuem de realizarem conexões com assuntos trabalhados anteriormente. Sendo os alunos a contribuir significativamente para a negociação de significados e entendimentos, a probabilidade dos colegas prestarem mais atenção aos assuntos matemáticos e estes virem a fazer sentido é maior do que se for a professora a expô-los sem o seu envolvimento.

Ao mesmo tempo que promove a discussão dos trabalhos, a professora sistematiza os conceitos abordados (este, o objetivo final da aula). Ao fazê-lo, numa tabela onde o nome dos grupos surge, pretende aproveitar a sua contribuição e expô-la como reforço positivo. Os alunos gostam de ver reconhecido o seu trabalho, sentem-se motivados e confiantes.

Na discussão coletiva, um grupo organiza a apresentação do seu trabalho recorrendo a esquemas apropriados e de fácil interpretação (Figura 16). Um outro grupo usa uma estratégia que embora seja apropriada (Figura 18) é pouco clara no que respeita à expressão escrita das suas ideias (em linguagem natural) e às representações (nomeadamente os esquemas utilizados). No que respeita à expressão oral das ideias matemáticas, a maioria dos alunos utiliza vocabulário impreciso, pouco claro ou mesmo incorreto, facto que revela ideias pouco estabilizadas e que prejudicam a comunicação.

À medida que a aula avança e aumenta o número de interações verbais entre professora/alunos e alunos/alunos, nota-se na sequência de aulas anteriores, uma progressiva clareza na forma como os alunos exprimem as suas ideias matemáticas. Na sequência do que ouvem, alguns alunos respondem com eficácia, contribuindo, assim, para enriquecer a discussão (em torno do problema) e a sistematização de assuntos. Alguns alunos, como por exemplo o Zé, a Maria e o Luciano, apresentam argumentos com lógica e com pertinência, pois revelam raciocínio e conexão entre as ideias. O facto de os alunos terem a oportunidade de exprimirem e discutirem ideias e processos matemáticos, tanto em grupo como coletivamente, contribui para o desenvolvimento da sua capacidade de comunicação matemática e, ao mesmo tempo, para a compreensão dos assuntos matemáticos que estão a ser trabalhados (propriedades da multiplicação de números inteiros).

No que respeita à prática da professora, esta tem ainda que controlar alguns aspetos que podem constituir-se como ruídos inibidores da aprendizagem, nomeadamente o controlo do tempo para a resolução da tarefa (o tempo a mais que dá para tentar que os alunos cheguem a uma solução pode tornar a resolução da tarefa muito demorada e "maçadora" em vez de desafiante) e a forma como apresenta a tarefa (deve realizar a leitura e reconto até obter um *feedback* que lhe permita perceber que a tarefa é compreendida por todos). Nota-se, também, que a professora ainda tem que realizar um esforço para manter um estilo de comunicação assertivo, com perguntas abertas que levem os alunos a pensar, a discutir e a chegarem a uma solução. A professora realiza ainda com dificuldade uma escuta ativa principalmente na fase da discussão coletiva, embora se esforce por ouvir e compreender o que é dito pelos alunos.

5.3.2 – Aula 2: “O terreno do João e da Ana”

A tarefa “O terreno do João e da Ana” foi selecionada com o objetivo de abordar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Para além disso, pretendia-se com a tarefa levar os alunos a desenvolver a capacidade de resolver problemas (que envolvam as propriedades da multiplicação) e também de raciocinar e comunicar em contextos numéricos:

O João e a Ana calcularam por dois processos diferentes a área do terreno representado na figura.

Tenta também calcular a área do terreno por dois processos diferentes.

Explica o teu raciocínio.

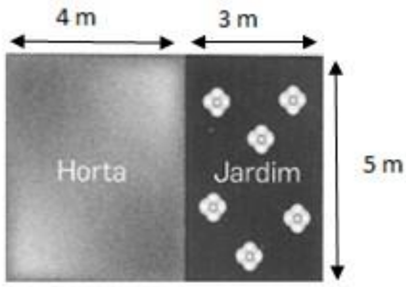


Figura 20 – Enunciado da tarefa “O terreno do João e da Ana”.

Em seguida, analiso a implementação do modelo de ensino, com esta tarefa, ao longo das diversas fases da aula.

5.3.2.1 - Intervenção na sala de aula

Apresentação da tarefa. A professora forma os grupos mas os alunos demoram a acomodar-se. Quando o borburinho acalma, a professora pede a um aluno que leia em voz alta a tarefa que entretanto distribuíra juntamente com uma folha branca de tamanho A3 destinada à apresentação da resolução. De seguida, pede a outro aluno que a reconte a tarefa visando averiguar da compreensão da mesma pelos alunos. Depois do aluno recontar, a professora enfatiza a necessidade de, na resolução, explicar como fizeram. A professora não avança na exploração do enunciado da tarefa, para além de verificar da sua compreensão, de modo a não diminuir o seu nível de desafio cognitivo. Depois de se assegurar que os alunos estão em condições de iniciar o trabalho de grupo, desafia-os a envolverem-se ativamente na tarefa.

Realização da tarefa. Os alunos focam-se no enunciado da tarefa. E, enquanto circula pela sala, a professora observa que os alunos estão bastante envolvidos na atividade mas esquecem-se de moderar o tom de voz, facto que a obriga a intervir para lhes pedir que falem mais baixo, a fim de não perturbarem o ambiente de trabalho.

Os grupos gastam bastante tempo na leitura e compreensão do enunciado da tarefa, que aparentemente não tinha colocado dificuldades na fase anterior da aula:

Tiago – Temos que calcular a área.

João – Temos que fazer igual ao do outro dia.

O aluno referia-se a um problema, trabalhado em aulas anteriores, sobre cálculo de áreas retangulares. A professora entra no diálogo, procurando em paralelo zelar pela utilização correta da linguagem matemática, tanto simbólica como oral.

Professora – Como se calcula uma área de uma figura como esta?

João – Comprimento vezes largura.

Professora – O produto do comprimento pela largura, sim. E como se representa, em linguagem simbólica, a área? – a professora aponta para o registo onde se lê "$\mathrm{a} = \mathrm{c} \times l$".

Tiago – Com um A grande.

Professora – Maiúsculo, sim.

Um outro grupo, mais avançado no seu trabalho, explica como pensou quando a professora os questiona:

Mafalda – Nós fizemos assim: $4m + 3m = 7m, depois\ 7m \times 2m = 14\ m^2$ e depois $2 \times 14\ m^2 = 28m^2$

Quando a professora pede para explicarem, a intenção é compreender como pensaram os alunos, pois de repente é confrontada com uma situação que não tinha previsto. Precisava de compreender como pensaram para poder colocar perguntas que os levem a descobrir que a sua estratégia não está correta e o porquê disso:

Professora – Expliquem-me como pensaram? De onde vem esse valor, o número 2?

Maria – Vem daqui – Diz, apontando para os dois lados mais compridos do retângulo.

O facto de a professora colocar as duas perguntas em simultâneo, faz com que a aluna apenas refira de onde vem o valor dois.

Professora – Como se calcula a área de uma figura retangular?

Maria – Comprimento vezes a largura.

Professora – Muito bem, encontrando o produto do comprimento pela largura. Qual é o comprimento desta figura? – Pergunta, apontando para o retângulo.

Adriana – 7 de um lado e 7 do outro.

Professora – Quantos comprimentos tem a figura, afinal? Olha, esta sala, por exemplo, achas que é muito comprida?

Adriana – Mais ou menos…

Professora – Como vês isso, explica-me.

Adriana – Assim – Diz, apontando para o comprimento.

Professora – Quantos comprimentos tem a sala, afinal?

Adriana – Um…

Professora – E porque é que o terreno tem dois?

A professora nota que os alunos começam a compreender onde estava a sua confusão, deixa-os a discutir e afasta-se, circulando pelos outros grupos, observando o seu trabalho (que evolui lentamente). O tempo já fora ultrapassado e a maioria dos alunos ainda só tinha calculado a área por uma das formas. Mesmo assim, a professora dá por terminado o tempo (entendendo que este é um dos aspetos que os alunos têm que aprender a controlar) e pede para afixarem a folha da resolução na *galeria de tarefas.*

Galeria de tarefas. As folhas são afixadas e os alunos convidados a registar comentários no trabalho realizado pelos colegas. Como entretanto tocara para intervalo, este momento passou para a aula seguinte (20 minutos depois). Quando regressam, os alunos dirigem-se aos trabalhos afixados, de forma ordeira e revelando curiosidade. A professora espera que este momento fomente o envolvimento dos alunos e contribua para a discussão que irá decorrer a seguir. A maioria dos comentários registados pelos alunos nas folhas expostas, ainda continuam a ser pouco elaborados: “Concordo”, “Não concordo”, “Não percebo” mas isso não significa que não estejam envolvidos nesta fase da aula:

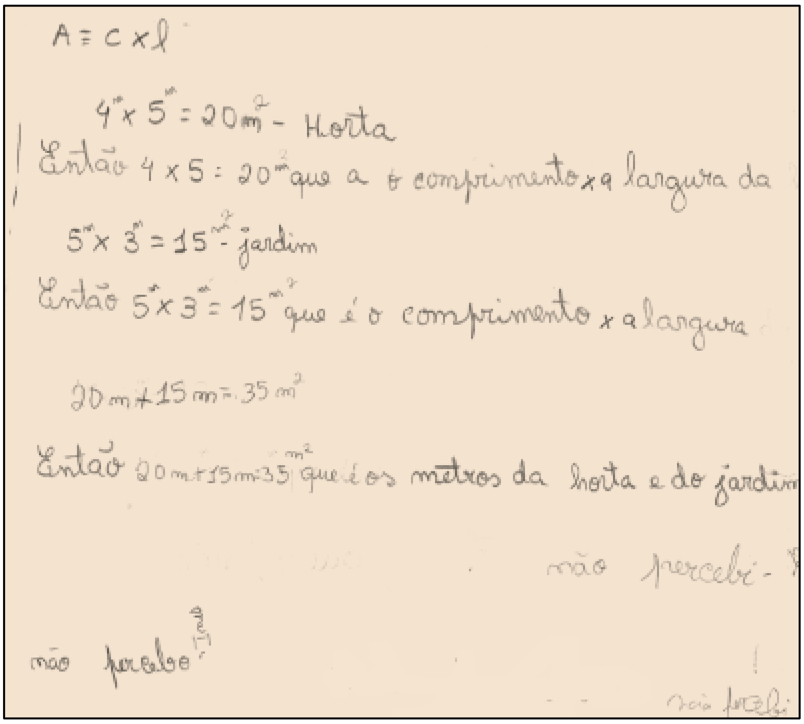


Figura 21− Comentários realizados, durante a exposição na *galeria de tarefas*, numa estratégia apresentada por um grupo.

Apesar disso, um dos comentários já revela do aluno uma postura mais compreensiva do raciocínio dos colegas: “É a mesma estratégia.”, assinalando um dos trabalhos em que um grupo apresenta a mesma estratégia em duas resoluções trocando apenas a ordem dos fatores. Esta observação viria a contribuir para enriquecer a discussão coletiva da tarefa, como se apresenta a seguir.

Discussão/Sistematização das aprendizagens. Depois de retomarem ao lugar, a professora convida os grupos a apresentar a sua solução e explicar a sua resolução. A partir da observação que fez anteriormente, nomeadamente na *galeria de tarefas*, resolve começar pelo grupo onde os colegas tinham assinalado "É a mesma estratégia." porque este comentário poderia contribuir para a discussão em torno das propriedades da multiplicação.

Gustavo – Nós encontrámos dois processos mas alguém escreveu aqui "é a mesma coisa" – Diz o aluno apontando para a folha exposta.

Este grupo apresenta a resolução indicada na Figura 22. Entre a 1.ª estratégia e a 2.ª estratégia pode ler-se um dos comentários realizados durante a exposição na galeria, que diz "É a mesma coisa" e aponta, com auxílio de setas, para cada uma das expressões numéricas:

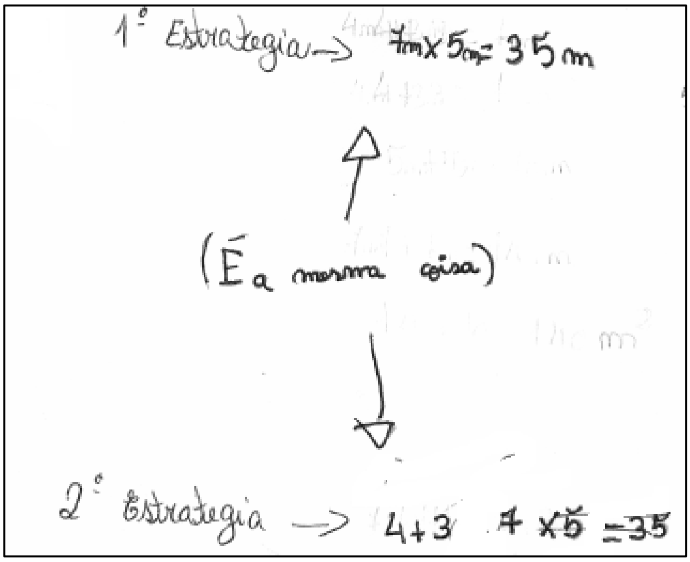


Figura 22 - Estratégia apresentada por um dos grupos.

A professora resolve intervir no diálogo:

Professora – Porque é que vocês acham que o vosso colega escreveu isso?

Inês – Não sabemos!

Professora – Porque é que acham que é a mesma coisa? – Pergunta, virando-se para o grupo que fizera o registo.

Samuel – Então, eles só trocaram.

Professora – Só trocaram o quê?

Samuel – O comprimento e a largura.

Zé – É a comutativa!

Gustavo – Ó "Stra", por isso é que trocámos, porque é outra maneira de sabermos a área.

A professora tinha previsto que poderia vir a acontecer esta situação. A discussão desenrola-se, durante algum tempo, entre o significado de “processos diferentes”, no sentido de se referir a métodos diferentes para calcular a área da figura, e o significado e consequência da utilização da propriedade comutativa, onde apenas foi trocada a ordem dos fatores, sendo na sua essência um processo equivalente. A discussão prossegue:

Luciano – Eles também têm outra coisa mal. E aquele grupo também.

O Luciano referia-se à estratégia de um dos grupos, apresentada na figura 23:

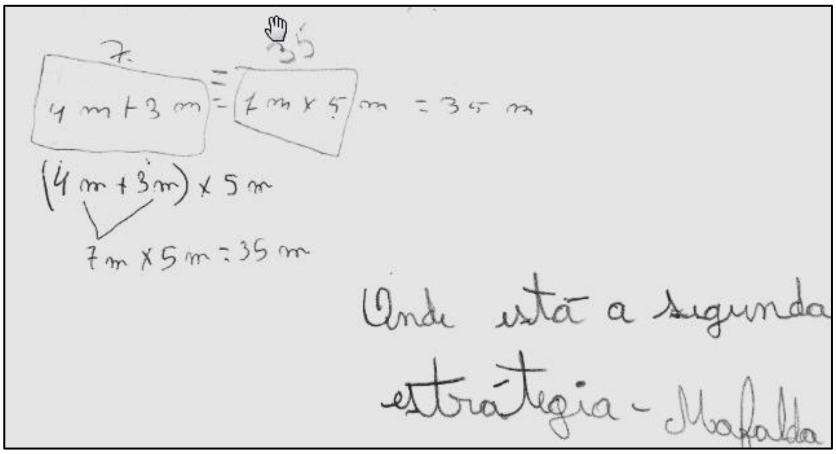


Figura 23 – Estratégia apresentada por um grupo e respetivo comentário realizado durante a exposição na *galeria de tarefas*.

A professora pede para explicar e o aluno continua:

Luciano – Ali, onde têm $4+3 = 7 \times 5 = 35$.

Professora – Porquê?

Luciano – Então, $4 + 3$ não é igual a 7×5!

Inês – Nós fizemos $4 + 3$ porque era para dar o 7, que é o comprimento e depois multiplicámos por 5 que é a largura.

Tiago – Nós também fizemos assim.

Professora – Raciocinaram muito bem, mas e a forma como apresentaram o vosso raciocínio, acham que está correta?

Maria – Não está, porque como diz o Luciano, não é igual, devia estar separado.

A professora resolve dinamizar a discussão, questionando:

Professora – Concordam com os vossos colegas?

João – Sim.

Luciano – Mas eles a seguir já têm bem – Diz, referindo-se à expressão $(4m + 3m) = 7m \times 5m = 35m$.

Depois de mais alguma discussão em torno do sinal de equivalência e da forma de utilizar este tipo de simbologia matemática, a professora faz o ponto da situação: "Muito bem, este grupo aplicou a propriedade comutativa, no cálculo da área do terreno". Solicita, em seguida, a outro grupo (Samuel, Luciano e Zé) que apresente a sua resolução.

Samuel – Nós na primeira fizemos como eles – Diz apontando para o trabalho (Figura 24) – e depois fizemos por partes.

Nas figuras 24 e 25 são apresentados os dois processos. No primeiro, os alunos encontraram a área total do terreno calculando o produto da soma dos comprimentos pela largura e no segundo, calculando a soma da área da horta com a área do jardim.

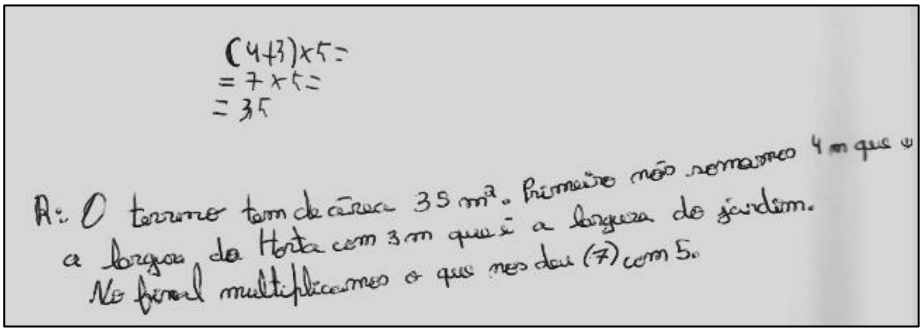


Figura 24 - Primeiro processo utilizado pelo grupo para calcular a área do terreno.

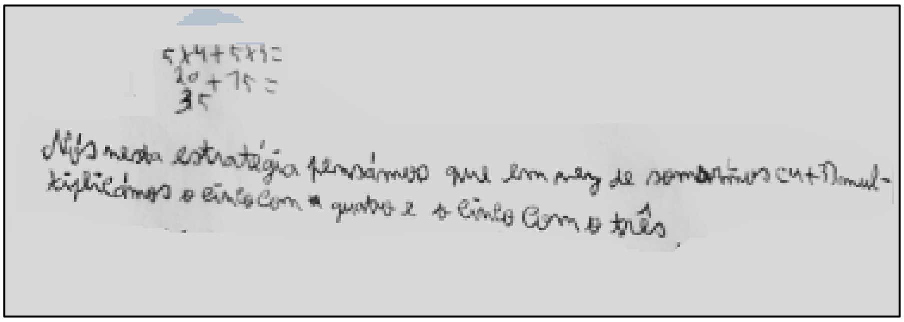


Figura 25 - Segundo processo para calcular a área, apresentado pelo grupo.

Aproveitando o facto de este grupo ter conseguido calcular a área do terreno por dois processos diferentes onde se evidenciava a propriedade distributiva da multiplicação, a professora desafia-os:

Professora – Expliquem-nos como pensaram.

Luciano – No primeiro, fomos encontrar a área toda de uma vez, no segundo juntámos as áreas das duas partes.

Professora – Concordam?

Inês – Eu concordo, assim já são duas maneiras diferentes!

A professora questiona levando os alunos a aprofundarem o seu raciocínio e a elaborarem e densificarem o seu discurso:

Professora – Que diferença ou semelhança existe entre os dois processos?

Zé – A diferença é que enquanto no primeiro calculámos a área toda, porque juntámos o comprimento, no segundo calculámos uma de cada vez.

Professora - Explica lá isso melhor.

Zé – Então, como a largura é a mesma para a horta e para o jardim, no primeiro juntámos os dois comprimentos, da horta e do jardim e depois multiplicámos pela largura, que é igual. No segundo multiplicámos a largura pelo comprimento da horta e deu-nos a área da horta e depois multiplicámos a largura pelo comprimento do jardim e deu-nos a área do jardim, depois juntámos e deu-nos a área do terreno, como no primeiro.

A professora, já pensando na sistematização das aprendizagens, insiste ao questionar:

Professora – Podemos dizer que estes dois processos são equivalentes?

Samuel – Sim, são iguais, dão a mesma coisa.

Professora – Explica melhor o que queres dizer.

Samuel – Então, tanto faz calcular logo a área toda ou calcular a área da horta e a área do jardim e juntar depois.

Professora – Concordam?

Entretanto, a professora regista no quadro "$5 \times (4+3) = 5 \times 4 + 5 \times 3$". Procurando sistematizar as aprendizagens, pergunta:

Professora – Que conclusão podemos retirar desta equivalência?

Maria – Deste lado o 5 só aparece uma vez, do outro lado aparece duas.

Professora – E porque será?

Luciano – Porque deste lado (referindo-se ao lado esquerdo da equivalência), o 4 e o 3 estão entre parêntesis.

Professora – Faz diferença, os parêntesis?

Inês – Faz, se não já não dava.

Professora – Porquê?

Inês – Se não estivessem lá os parêntesis, multiplicava-se o 5 pelo 4 mas pelo 3 não.

Professora – Muito bem, deste lado temos o produto de cinco pela soma de quatro com três (diz modelando a linguagem) e do outro lado?

Tiago – Do outro lado o 5 está a multiplicar o 4 e a multiplicar o 3.

Zé – Por isso é que dá a mesma coisa.

Professora – Do outro lado temos a soma do produto de cinco por quatro com o produto de cinco por três (diz, modelando, mais uma vez a linguagem).

A professora repete a ideia dos alunos modelando a utilização de uma linguagem matemática correta. Consciente de que os alunos sentem dificuldade na linguagem da Matemática, aproveita para, pausadamente a utilizar, como se a introduzisse naturalmente na discussão:

> **Professora** – O produto de um número natural por uma soma é igual à soma dos produtos desse número por cada uma das parcelas da soma.

Enquanto fala, a professora desenha setas que ligam o fator em evidência às parcelas dentro do parêntesis. Depois de um breve diálogo visando a sistematização, registando no quadro: “ A multiplicação é distributiva em relação à adição”. Depois, a professora coloca um desafio, na forma de questão: “Será a multiplicação distributiva em relação à subtração?”. O tempo da aula estava a chegar ao fim e a professora sugere que investiguem esta possibilidade como tarefa para casa.

5.3.2.2 - Análise transversal

A professora inicia os trabalhos distribuindo os alunos por grupo. Como os alunos não estão ainda suficientemente habituados a este tipo de metodologia de trabalho, demoram a acomodar-se. Este facto viria a repercutir-se no tempo destinado à realização da tarefa. A professora apresenta a tarefa e pede o seu reconto mas não se certifica devidamente se os alunos, de forma geral, compreenderam o que lhes era pedido. Durante a fase da sua realização, vão repetir-se dúvidas que poderiam ter sido esclarecidas na primeira fase da aula. A forma de apresentação da tarefa é um aspeto que a professora terá que rever e melhorar.

A tarefa constituía um problema simples e fechado. Contudo, proporcionava um contexto adequado para o estudo das propriedades das operações para o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática, com recurso a simbologia e vocabulário apropriados. Durante a realização da tarefa, a professora acompanhou os alunos procurando evitar tensões entre os grupos (por vezes os alunos discutiam sobre assuntos que nada tinham a ver com a tarefa) e dissipando dúvidas. A certa altura, a professora tem também necessidade de colocar perguntas no sentido de compreender como os alunos pensam, quando um grupo apresenta uma resolução que a professora não compreende (7×2 e 2×14). Apercebendo-se de que este raciocínio assentava num erro no cálculo de área, a professora opta por colocar uma série de perguntas com o objetivo de os levar a recordar conhecimentos anteriores. Para isso, abandona a formulação de perguntas abertas e coloca perguntas com a finalidade de mobilizar conhecimentos específicos, como por exemplo “Como se calcula a área de uma figura retangular?”. Ao aperceber-se que mesmo assim a dúvida permanece em alguns alunos, apresenta um exemplo, o comprimento da sala de aula. Em seguida, deixa os alunos a discutir entre eles o assunto, notando que tinham conseguido ultrapassar a sua dificuldade, pois viriam a calcular corretamente a área da figura por um dos processos.

A realização da tarefa em grupo foi importante para a partilha de ideias, a par da discussão coletiva. Quando, por exemplo, um dos alunos diz para o grupo “Temos que calcular a área” e outro acrescenta “Temos que fazer como no outro dia”, referindo-se a uma tarefa realizada dias antes sobre cálculo de áreas, estão a estabelecer conexões que mobilizam conhecimentos prévios. Estes são necessários para a apropriação dos novos conhecimentos pelos alunos e sustentáculos da aprendizagem, que será tanto melhor (com compreensão) quanto maior e mais profunda for a discussão e a partilha de ideias – o entendimento comum constrói-se quando o grupo-turma, após sucessivas interações verbais, chega a um acordo sobre as propriedades da multiplicação.

Nesta aula, os alunos demoram tempo em demasia na resolução da tarefa, dispersando-se nas discussões que estabelecem, tardando a organizar os seus registos para a *galeria de tarefas*. Apesar de verificar que a maioria dos grupos não encontrou um segundo processo para o cálculo da área da figura, a professora opta por dar por concluída esta parte da aula, dado ter já ultrapassado largamente o tempo estipulado (20 minutos).

O momento da observação dos trabalhos na *galeria de tarefas* foi do agrado dos alunos. Demoraram na sua observação, teciam comentários com os colegas do mesmo grupo e registavam comentários. Porém, como a maioria não está habituado a este método de trabalho a professora espera que, ao longo das aulas, os alunos formulem, progressivamente, comentários mais elaborados e mais pertinentes, contribuindo para enriquecer a discussão e promover a aprendizagem. Este momento da galeria funcionou também como motivação dos alunos, não só para a resolução da tarefa, uma vez que eles sabiam que iam estar expostas e sujeitas a críticas, mas também para o aumento da atenção e participação na sua discussão. A observação na galeria também permitiu discutir coletivamente alguns aspetos da atividade matemática, como a importância da utilização da linguagem simbólica, aspeto também contemplado nos objetivos da aula (desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática, onde está incluída a utilização da linguagem simbólica matemática). Para além disso este momento proporcionou aos alunos aprendizagens decorrentes da observação das estratégias dos seus pares e da discussão entre eles. Em particular, os grupos que não tinham conseguido encontrar o segundo processo observavam com curiosidade e atenção o trabalho do grupo que o tinha conseguido.

Para iniciar a discussão coletiva, quarto momento da aula, a professora opta por selecionar e convidar o grupo que apresentara a mesma estratégia para calcular a área da figura (trocando apenas a ordem dos fatores), como de dois processos se tratassem. O comentário deixado nesse trabalho aquando da *galeria de tarefas* acabaria por ser uma mais-valia, não só porque dava o mote para a discussão mas também porque acabaria por permitir a conexão com outros tópicos matemáticos (no caso, a propriedade comutativa da multiplicação) e a tradução em linguagem matemática oral de linguagem simbólica da matemática.

No que respeita à organização da apresentação dos trabalhos na discussão coletiva, os alunos exprimem as suas ideias com relativa clareza, utilizando, no entanto, algumas vezes simbologia inadequada. A forma como os grupos utilizam a comunicação escrita, na justificação das suas ideias é ainda pobre, recorrendo a vocabulário pouco elaborado. Exprimem-se por escrito com pouca clareza e profundidade na mobilização dos conceitos, pois revelam não dominar aspetos fulcrais do tópico (a maioria não concluiu a tarefa e o grupo que a concluiu não relaciona o primeiro processo com o segundo). Também na discussão coletiva, os alunos discutem estratégias e tópicos matemáticos com pouca eficácia e utilizaram, na maioria das vezes, linguagem matemática imprecisa.

A professora sistematiza as aprendizagens em colaboração com os alunos, recorrendo a perguntas mais focadas do que na discussão da tarefa. Em paralelo com a sistematização das ideias matemáticas, procura modelar a linguagem matemática associada. A oportunidade de os alunos se exprimirem oralmente, mas também por escrito, faz com que estes se apropriem dos conceitos matemáticos de forma natural. Escutá-los apenas a partir da exposição da professora, por muita atenção que os alunos tenham, não garante a sua apropriação. Em relação à aprendizagem das propriedades da multiplicação, os alunos manifestaram, ter compreendido os conceitos matemáticos, colaborando ativamente na sistematização dos mesmos.

A forma como a professora organiza os grupos de alunos (de modo a não constituir um ruído que afete o clima da aula), realiza a apresentação da tarefa, a galeria e a discussão/sistematização são importantes para o desenvolvimento da comunicação e da aprendizagem dos conceitos previsto para a aula. A *expertise* do professor neste tipo de aulas é algo que se desenvolve muito lentamente, dadas as dificuldades e desafios que são colocados ao professor numa aula de ensino exploratório. A utilização de perguntas, o ouvir atento (ativo) e o comentário/resposta/explicação do professor são ações comunicativas que se manifestam ao longo de toda a aula, embora de forma diferente em cada uma das fases. As perguntas estão presentes em toda a aula, embora as perguntas na fase de apresentação e sistematização tenham sobretudo a função de diagnosticar o estado da aprendizagem. Já durante a realização e discussão da tarefa, as perguntas visam desenvolver o raciocínio dos alunos. O ouvir também se mostra muito importante, sobretudo nessas fases intermédias da aula. A explicação do professor, como se observa nesta aula, é decisiva na apresentação da tarefa e na sistematização das aprendizagens (fases nos "extremos da aula").

Em relação aos alunos, a sua falta de hábito de trabalharem, de forma continuada e consolidada, em grupo e discutirem as suas ideias, processos e soluções coletivamente, pode justificar alguma da dispersão, demora na realização da tarefa e alguma falta de qualidade nas intervenções, assim como as dificuldades na comunicação das suas ideias matemáticas, tanto por escrito como oralmente. Espera-se que com a continuação da utilização do modelo de ensino exploratório da matemática, os alunos desenvolvam estas capacidades (uso de linguagem apropriada, utilização de diferentes formas de apoiarem as suas ideias matemáticas, discussão de ideias, resultados e processos e ainda a argumentação).

5.3.3 - Aula 3: “Ovos e mais ovos”

A tarefa “Ovos e mais ovos”, ocorre no início do segundo período letivo. Com esta tarefa, a professora propõe-se atingir os seguintes objetivos: (i) Determinar os divisores de um número natural; (ii) Usar corretamente os termos: divisor, divisível, múltiplo e fator; e (iii) Resolver problemas, raciocinar e comunicar em contextos numéricos. Em particular, devem ainda: (1) Identificar os dados, as condições e o objetivo do problema; (2) Conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas verificando a adequação dos resultados e dos processos utilizados; (3) Representar informação e ideias matemáticas de diversas formas, com clareza, lógica e eficácia; (4) Explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticas com eficácia, lógica e pertinência; e (5) Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios com clareza, originalidade e precisão.

A figura 26 apresenta o enunciado da tarefa “Ovos e mais ovos”:

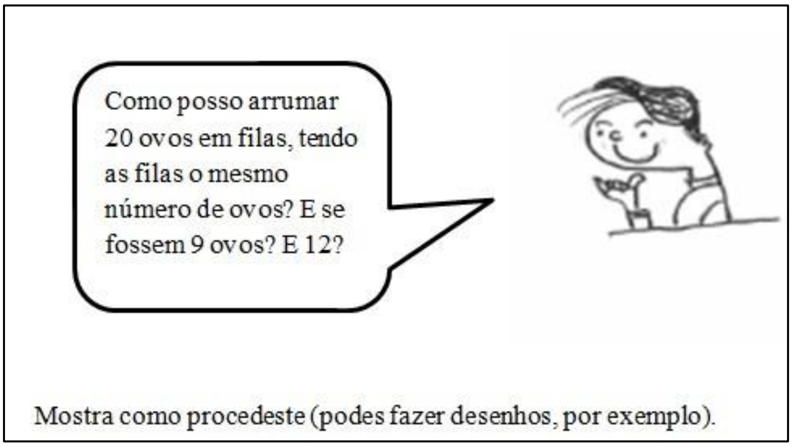


Figura 26 − Enunciado da tarefa “Ovos e mais ovos”.

Em seguida, analiso a implementação do modelo de ensino exploratório da matemática, com esta tarefa, ao longo das diversas fases da aula.

5.3.3.1 - Intervenção na sala de aula

Apresentação da tarefa. No primeiro momento, depois de aberta a lição, a professora apresenta a tarefa propondo aos alunos a sua resolução em pequenos grupos. Previamente, procurando evitar ruídos que perturbem um ambiente de trabalho tranquilo, a professora distribui os alunos por grupo de forma a minimizar a desordem que estas situações podem acarretar: arrastar de cadeiras mudança de material, alteração de humores entre os alunos devido às deslocações. Os alunos são distribuídos de acordo com a proximidade entre eles e os alunos com mais dificuldades são colocados em grupos de alunos mais capazes de promoverem a inclusão destes colegas. Maria, por exemplo, é uma aluna meiga, paciente e que demonstra grande sensibilidade para integrar os colegas com mais dificuldades.

Quando os alunos se encontram sentados e tranquilos, a professora pede a um dos alunos que leia a tarefa em voz alta. Após a escuta da leitura, a professora solicita aos alunos que digam em que consiste a tarefa. Para isso, procura gerir o discurso de modo a favorecer as interações consecutivas dos alunos. No entanto, observa-se que entre duas falas consecutivas de alunos está uma fala da professora uma vez que os alunos ainda não reagem espontaneamente a intervenções dos colegas:

Professora – Queres explicar o que vos é pedido nesta tarefa?

Ana – A tarefa pede-nos para arrumar os ovos em filas.

Professora – Concordar com o que diz a Ana?

Luciano – Também diz que temos que ter o mesmo número de ovos em cada fila.

Professora – Muito bem e quantos ovos temos que arrumar?

Duarte – Temos que arrumar 20 ovos.

A professora procura averiguar a compreensão integral da tarefa e insiste com a formulação de perguntas:

Professora – Só temos que arrumar 20 ovos?

Zé – Não, também pede para arrumar 9 e depois 12.

Professora – E para mostrar como arrumaram os ovos o que têm que fazer?

Adriana – Desenhos…

Professora – Muito bem, vamos lé ao trabalho.

Depois de verificar a compreensão da tarefa e, distribuídos os materiais de registo, a professora decide distribuir também feijões como material de apoio. A professora considera que estes materiais podem ser importantes na resolução da tarefa, dado que esta tem uma natureza mais aberta do que algumas outras que propôs aos alunos antes. Depois, a professora desafia os alunos, em grupo, a empenharem-se ativamente na realização da tarefa.

Realização da tarefa. De acordo com o que era esperado, os alunos discutem a tarefa entre si. Aparentemente, todos parecem envolvidos, falam uns com os outros, gesticulam, discutem e por vezes até parecem discordar. Os feijões distribuídos para representarem os ovos parecem motivar os alunos. Contudo, quando inicia uma ronda pelos grupos para avaliar o andamento da resolução, apercebe-se de que alguns parecem perdidos, com dificuldade em iniciar a atividade, manuseiam os feijões, discutem, fazem várias filas mas parecem não saber o que fazer a seguir. Por isso, a professora resolve recorrer à formulação de perguntas que ajudem a resolução da tarefa:

Professora – Conseguem arrumar os ovos em três filas?

Adriana – Não dá.

Professora – Porquê?

Adriana – Porque sobram.

Professora – Então pensem lá como é que podem arrumar os ovos em filas iguais.

A natureza mais aberta da tarefa, em que não é formulado um pedido direto que possa ser respondido com um único cálculo, constitui-se como uma dificuldade para os alunos. Por isso, apercebendo-se que um grupo ainda manifesta alguma desorientação, aborda-os perguntando:

Professora – Como estão a fazer?

Samuel – Estamos a partir os ovos…mas…

Professora – A partir? O que pede para fazer? – Diz sorrindo.

Samuel – Arrumar os feijões de forma a fazer filas, partindo-os…

A professora percebe o que o Samuel queria dizer. Para o aluno, “partir” os ovos por filas significava “dividir” os ovos por filas. Por isso, decide levar os alunos a escolher um termo mais adequado que não seja gerador de interpretações erróneas:

Professora – Partir os ovos? Isso era terrível, não? Diz a professora a sorrir.

Rita – Pondo 5 em cada fila.

Professora – Como “partir” não dá muito jeito já que se trata de ovos, de que outra forma podemos dizer?

Samuel – Repartir.

Professora – Muito bem.

Este grupo decide distribuir os 20 ovos recorrendo principalmente a representação pictórica, complementada por símbolos (Figuras 27 e 28):

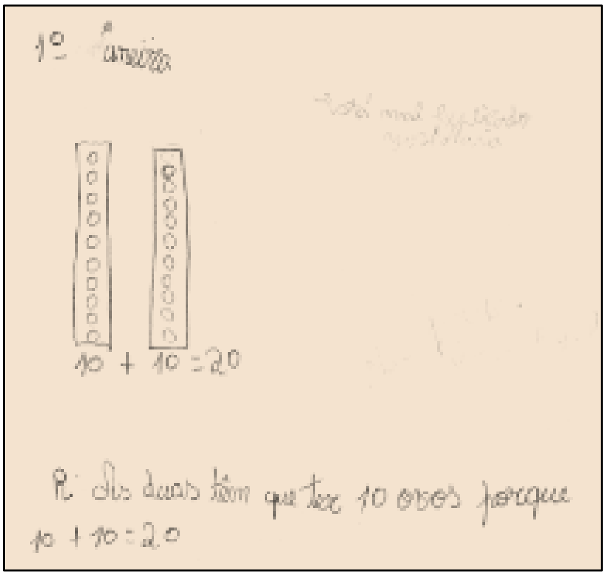


Figura 27 - Representação dos 20 ovos.

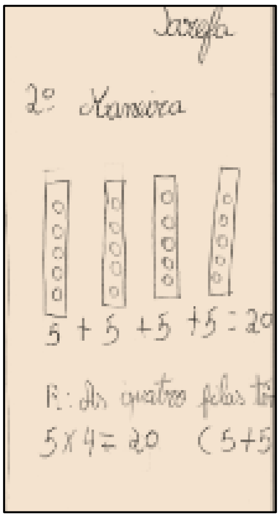


Figura 28 - Resolução usando representações pictóricas e símbolos matemáticos.

Este grupo, depois de representar 5 filas de 4 ovos cada, através de desenho, da adição do número 4 e da multiplicação de 5 por 4, ainda representa os 20 ovos da seguinte maneira:

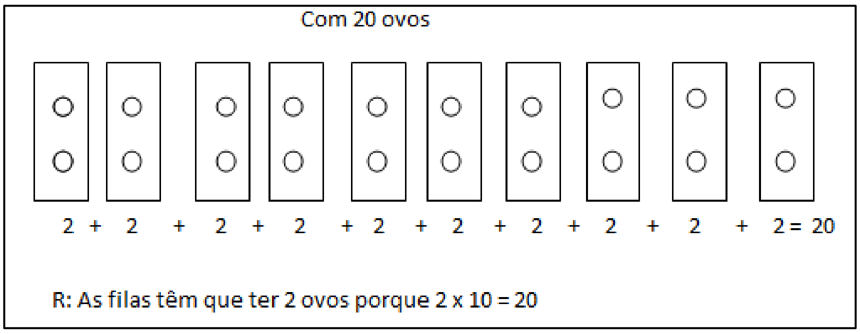


Figura 29 – Reprodução da representação dos 20 ovos apresentada na Figura 29.

Nota-se que, no trabalho deste grupo, houve evolução na compreensão e representação da distribuição dos ovos. Começam por representações ativas, recorrendo aos feijões, para utilizarem depois representações pictóricas e só por último as simbólicas – ainda assim, começam pela adição e só passam à utilização da operação multiplicação quando o número de parcelas aumenta muito. Este grupo, que inicialmente parecia bastante perdido, manifestando dificuldade em perceber o que se pretendia que fizessem, encontra três maneiras de distribuir os 20 feijões: 2 filas de 10, 4 filas de 5 e 5 filas de 4.

Num outro grupo, que gasta imenso tempo a desenhar os ovos, a professora procura incentivar a utilização de simbologia matemática. Dessa forma, demanda que compreendam que tanto a manipulação dos feijões como o desenho constituem procedimentos que podemos utilizar inicialmente mas que depois devemos tirar partido das representações simbólicas da Matemática:

Professora – Expliquem-me o que representam os vossos desenhos.

Inês – Então, nós, aqui, com os 20 nos ovos fizemos 5 filas com 4 ovos, aqui fizemos 4 filas com 5 ovos, aqui 2 filas com 10 0vos, aqui 10 filas com 2 ovos, aqui 20 filas com 1 ovo e aqui, 1 fila com 20 ovos.

Professora – Muito bem, E não podem representar esses desenhos com símbolos matemáticos?

Zé – Podemos, então, aqui é 4 vezes 5.

Professora – Porquê?

Zé – Porque são 4 vezes 5 ovos.

Professora – E qual é o produto de 4 por 5?

Inês - O produto é 20, os 20 ovos.

Professora – Muito bem! O produto de 4 por 5 é 20. Não querem representar o que me disseram também na folha, para depois os vossos colegas verem?

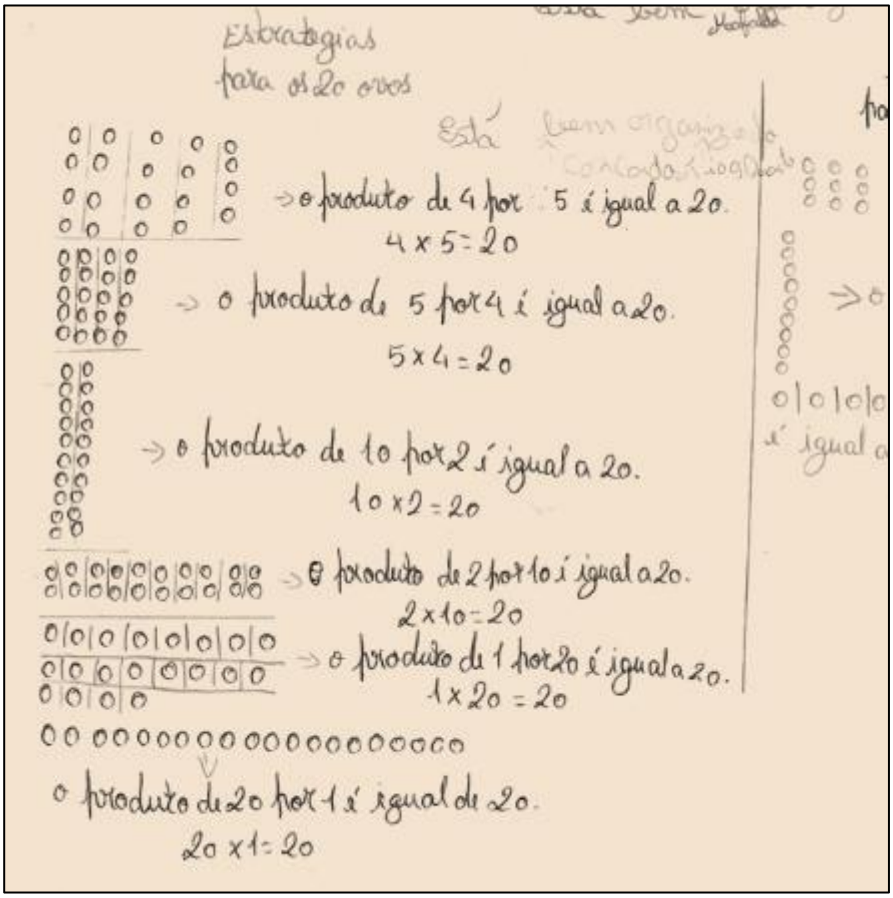


Figura 30 - Resolução da tarefa pelo grupo do Zé e da Maria, exposta na galeria.

A professora certifica-se de que os grupos já encontraram a maior parte das maneiras de distribuir os ovos e, uma vez que se aproxima o fim do tempo estipulado para a resolução da tarefa, avança para a *galeria de tarefas*.

Galeria de tarefas. A professora solicita aos grupos que exponham os seus trabalhos na *galeria de tarefas* para, de seguida, todos nos alunos observarem os trabalhos dos colegas e registarem neles os seus comentários.

Este continua a ser um momento muito desejado pelos alunos: mostrar aos colegas o seu trabalho e poderem observar como é que os outros grupos resolveram a tarefa é estimulante para os alunos. Como sabem que os seus trabalhos vão estar expostos, os alunos procuram ser briosos na sua apresentação e esforçam-se por resolver corretamente a tarefa.

A professora apercebe-se do diálogo travado entre dois alunos, visivelmente curiosos enquanto observam uma das resoluções expostas na galeria. A professora escuta sem intervir:

Inês – Isto não está bem explicado! O que é que isto quer dizer? Três, três, três?

Tiago – Não vês que são os ovos.

Este diálogo, travado entre estes alunos, mostra que a galeria, para além de funcionar como fator motivacional, é fomentadora das interações e potencia a aprendizagens entre pares.

A Figura 32 representa a resolução da tarefa por um dos grupos, sem recurso a representações pictóricas, exposta na galeria, e sobre a qual dialogavam a Inês e o Tiago:

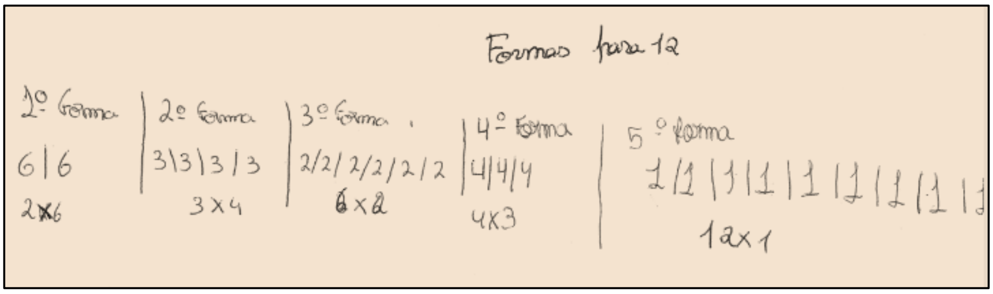


Figura 31– Resolução de um grupo, exposta na galeria.

Alguns dos comentários feitos pelos alunos, nos trabalhos expostos na galeria, revelam que, progressivamente, os alunos tendem a ter uma postura mais compreensiva dos raciocínios dos colegas:

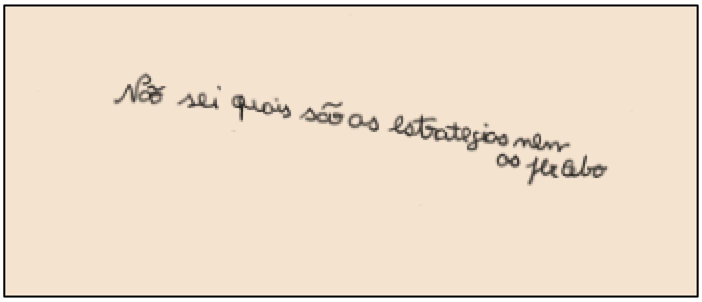


Figura 32 – Comentário realizado por um colega numa das resoluções exposta na *galeria de tarefas*.

Esta atitude, por parte dos alunos, é reveladora de maior compreensão dos raciocínios dos colegas e é um elemento importante e indutor da discussão coletiva da tarefa que acontece a seguir.

A maioria dos grupos não consegue encontrar todas as maneiras de distribuir os 20, 9 e 12 ovos, à exceção de um grupo. Este grupo apresenta todas as formas possíveis para distribuir os ovos, recorrendo a representações pictóricas, a linguagem corrente e a linguagem simbólica da matemática. O trabalho revela que os alunos estão, progressivamente, a evoluir na sua capacidade de comunicação escrita da Matemática, como se observa na Figura 31. Contudo, a professora opta por escolher outro grupo para iniciar a apresentação dos trabalhos, na discussão coletiva, como veremos a seguir.

Discussão/Sistematização das aprendizagens. Dando continuidade aos trabalhos, a professora convida um dos grupos a apresentar a sua resolução da tarefa. A professora resolve começar por um grupo que resolvera a tarefa de forma incompleta. Escolhe o grupo da Maria, do Tiago e da Ana, porque, para além da resolução da sua tarefa estar incompleta, este grupo é constituído por alunos com algumas dificuldades, apresentando-se, assim, uma oportunidade para os envolver, de forma mais ativa, na discussão em grande grupo. O grupo dirige-se à *galeria de tarefas* e um dos elementos, apontando para a sua folha (figura 35), explica:

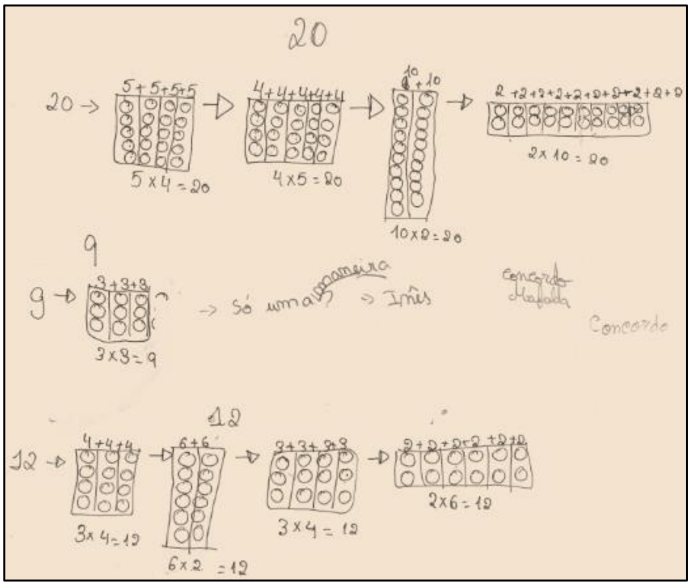


Figura 33 − Resolução da tarefa pelo grupo que iniciou a apresentação na discussão coletiva.

Maria− Para conseguir dividir 20 ovos pelas filas fizemos 4 filas com 5 ovos cada, pois 4x5 dá 20.

A professora sugere:

Professora – Sugiro que a Ana ou o Tiago, registe o que dizes no quadro, usando simbologia matemática para representar as vossas ideias, pode ser?

Ana regista no quadro: “4x5=20”. A professora observa e questiona:

Professora – Mas vocês registaram na vossa folha outra operação.

Ana – A adição e a multiplicação.

Professora – Alguém quer comentar?

A professora procura envolver a turma na discussão e a turma adere.

Luciano – Eu compreendi. Dá das duas maneiras. Ter 5, mais 5, mais 5, mais 5 é a mesma coisa que ter 4 vezes o 5, dá na mesma 20.

Professora – É verdade, a soma de quatro parcelas iguais é igual ao produto do número de parcelas pelo valor da parcela.

Ana, sem que seja necessário pedir, regista no quadro: “ 5x4=20”.

Professora – Que observam no produto de 4 por 5 e no produto de 5 por 4?

Zé – Na primeira, temos 4 filas de 5 ovos e na segunda temos 5 filas de 4 ovos.

Maria – Se trocarmos a ordem dos fatores o resultado não se altera porque é comutativa.

O grupo regista simbolicamente no quadro as maneiras que encontrou para distribuir os 20, 9 e 12 ovos. Outros grupos são convidados a apresentar as outras formas de distribuir os ovos, que ainda não tinham sido exploradas, uma vez que este grupo só apresentara a distribuição dos ovos que conseguira fazer. Como a generalidade dos grupos tinha chegado à maioria das maneiras de distribuir os ovos e tinha, também, registado os produtos, não houve controvérsia nas apresentações, chegando-se facilmente a todas as distribuições possíveis. Na discussão coletiva, os alunos com mais facilidade de aprendizagem e de comunicação ainda tendem a ocupar grande parte do discurso da aula. Contudo, a maioria dos alunos está atenta e motivada para escutar pois sentem-se integrados na discussão, possivelmente por terem participado na realização das tarefas em grupo e estas também terem sidos apresentadas na galeria.

Para conduzir a discussão de forma a encaminhar os alunos para a sistematização das aprendizagens que emergem da resolução da tarefa, a professora questiona-os. Os alunos relacionam a operação da divisão (distribuição dos ovos por filas) com a operação de multiplicação (representações das distribuições retangulares dos ovos), e também os conceitos de divisor com o de fator:

Professora − Observem e digam-me que relações encontram entre os fatores e o respetivo produto?

Zé − O 2 é divisor de 20!

Professora − Explica lá Zé o que queres dizer quando afirmas que 2 é divisor de 20.

Zé − Porque quando multiplicamos 2 por 10 dá 20 ou 10 por 2 que também dá 20.

Professora − O Zé disse muito bem! 2 é divisor de 20 porque existe um número cujo produto por 2 é 20. Assim 20 é divisível por 2.

Alunos − Dá uma divisão exata.

Professora − Muito bem. Sendo assim 2 é divisor de 20.

A professora regista no quadro “ 20 é divisível por 2” e “ 2 é divisor de 20”. Os alunos continuam a contribuir para a sistematização:

Samuel − 4 também é divisor de 20.

Tiago − E 5 também.

Professora − Quais são, então os divisores de 20?

Luciano - 1, 2, 4, 5, 10 e o 20!

Note-se que os grupos, globalmente, tinham apresentado todas as formas de arrumar os 20 ovos, assim como os 9 e os 12 ovos. A professora insiste em questionar com o intuito de levar os alunos a explicarem o seu raciocínio:

Professora − Porquê?

Luciano − Então porque se multiplicarmos 1 por 20 dá 20, 2 por 10 dá 20 e 5 por 4 também.

Professora − O 12 é divisor de 20?

Samuel − Não, não há nenhum número que a multiplicar por 12 dê 20.

Zé − Não podemos dividir 20 por 12 e ter uma divisão exata.

A professora, em colaboração com os alunos e com base nas suas resoluções, sistematiza as aprendizagens realizadas sobre os divisores de 20, de 9 e de 12. Assim, elabora uma tabela, registada no quadro negro. Para isso, a professora coloca perguntas, com o objetivo de realizar um registo organizado dos assuntos estudados: “Os divisores de 20 são?”, “ 20 é o quê, em relação ao 2?”. Vários alunos participam respondendo: “ Os divisores de 20 são: 1, 2, 4, 5, 10 e 20”. Zé, o mais participativo, antecipa-se “ 20 é múltiplo de 2, por isso é divisível por 2, e 2 é seu divisor. Acontece o mesmo para os outros, professora”. A professora aproveita a intervenção do aluno e alarga o âmbito das questões saindo do contexto da tarefa: “Quais são os divisores de 2? E de 3? E de 5? E de 7? O que podemos concluir?”.

A cada pergunta colocada, a generalidade dos alunos vai respondendo corretamente. A professora continua o seu questionamento, com perguntas fechadas:

Professora – Quantos divisores têm, estes números? Dêem-me outro exemplo?

Luciano – 11.

Inês – 13.

Depois de vários exemplos e da respetiva confirmação, a professora, em colaboração com os alunos, regista no quadro “ Há números naturais que só têm dois divisores, o 1 e ele próprio”. A sistematização e verificação das aprendizagens prossegue, estimulada à custa das perguntas que a professora vai colocando, “ Qual é o conjunto dos divisores de 14?”, “E de 22?”, “ Qual é o divisor que é comum a todos os números? Porquê?”, “E o próprio número, é sempre seu divisor? Porquê?”, “ Qual é o primeiro divisor de um número natural? E o último?”, até ao registo no quadro e no caderno dos alunos: “ Todo o número natural é divisor de si próprio”, “ O número 1 é divisor de todos os números naturais” e “ O conjunto dos divisores de um número é um conjunto finito.”.

5.3.3.2 - Análise transversal

No primeiro momento da aula, *apresentação da tarefa,* houve, por parte da professora, a preocupação em controlar o ambiente inicial dos trabalhos. A distribuição dos grupos foi pensada de forma a minimizar ruídos: evitou-se o borburinho na forma como se realizou a distribuição dos grupos, teve em atenção a integração de alunos com mais dificuldades, evitando a segregação e a inibição ou sentimentos de baixa autoestima. Há também preocupação na forma como a professora apresenta a tarefa, pedindo a um aluno a leitura do enunciado e a outro o respetivo reconto. A professora evidencia assim a preocupação de contornar o ruído que se prende com a não compreensão do enunciado, que pode ser um fator de inibição para o bom desenrolar dos trabalhos. O diálogo que estabelece com os alunos, durante a exploração do enunciado, permite-lhe obter *feedback* sobre a sua compreensão e ir ajustando as perguntas que formula “Quantos? Só temos…? O que têm que fazer? Explica-me”, de forma a levar os alunos a uma melhor compreensão da tarefa.

A tarefa, uma exploração, de natureza mais abertas do que algumas das tarefas anteriores, é apresentada com recurso a materiais manipuláveis, permitindo a alguns alunos a concretização das ações de distribuição, isto é, permite estabelecer uma ligação entre o concreto (visual) e o abstrato (simbólico), favorecendo a relação entre ambos e o encaminhamento para a segunda forma de representação.

O trabalho em grupo facilita a prática da discussão de ideias. Os alunos, ao discutirem, com os seus pares. as suas ideias relativamente às diferentes formas de distribuir os ovos, nas condições indicadas no enunciado da tarefa, são desafiados a escutar, a pensar e a falar. A professora, ao colocar perguntas como “Porquê? Como estão a fazer? Explica-me a tua ideia”, incentiva os alunos, promovendo a reflexão sobre assuntos matemáticos, a discussão de ideias matemáticas e a utilização de vocabulário próprio da Matemática. Quando o Samuel diz “Partir os ovos” e a Rita, procurando melhorar a intervenção do Samuel, diz “ Dividir os ovos”, temos um exemplo de como a interação verbal permite, por um lado, a afinação de significados e, por outro, a utilização correta de vocabulário específico da Matemática.

Os alunos preocupam-se com a apresentação dos registos em papel, tendo em vista a galeria. Ao mesmo tempo que discutem a tarefa e a forma de a abordar, discutem também a forma como representam as suas ideias no papel. Os alunos sabem que os seus trabalhos vão ser expostos, observados e criticados pelos colegas, e, talvez por isso, tenham manifestado a preocupação de usar diversas representações matemáticas que facilitassem a explicação das suas estratégias.

A exposição dos trabalhos na *galeria de tarefas* é um momento significativo para os alunos. Os alunos manifestam, através do interesse e entusiasmo com que se dirigem à galeria, que gostam de ver os seus trabalhos expostos e que gostam também de ver os trabalhos dos colegas, nomeadamente as suas estratégias de resolução. Nesta tarefa, e em comparação com as duas anteriores, nota-se progresso na atenção com que os alunos observam as resoluções expostas na galeria e isso reflete-se na existência de comentários mais elaborados que revelam, também, uma postura mais compreensiva do raciocínio dos colegas. Houve também maior preocupação na forma como organizam, no papel, a explicação do seu raciocínio, diversificando as representações matemáticas. A *galeria de tarefas* contribui de forma decisiva para a discussão e sistematização dos assuntos. Nesta tarefa, observa-se que por um lado, os alunos sentem-se mais motivados para participar uma vez que deram o seu contributo, conhecem o trabalho dos colegas e estão expectantes. Por outro lado, a apresentação dos trabalhos expostos na galeria, serve como ponto de partida para a discussão. Os alunos observam na galeria e depois fazem transitar para a discussão, que nem todos usaram as mesmas formas de representação dos ovos e nem todos recorreram às mesmas operações matemáticas, para além de terem dado respostas diferentes.

A discussão da tarefa entre professora e alunos e mesmo entre os próprios alunos permite que, ao expressarem as suas ideias, os alunos sejam incentivados a utilizar vocabulário próprio da Matemática ao mesmo tempo que estabelecem conexões que lhes permite compreender e assimilar conhecimento melhorando a sua capacidade de comunicação matemática.

Nesta tarefa, a professora tem um papel preponderante na condução da discussão coletiva, tanto na discussão que se estabelece no trabalho autónomo (nos grupos) como na discussão coletiva que se estabelece com a apresentação dos trabalhos à turma. A forma e o tipo de perguntas que coloca são importantes para que se estabeleça diálogo, partilha de ideias e utilização de vocabulário apropriado. Quando a professora pergunta “Porquê?” ou pede

"Explica lá", faz pensar, desafia a partilha de ideias e a procura de entendimentos. Quando pergunta "Que observam no produto de 4 por 5 e no produto de 5 por 4?" não só serve de modelo na utilização da linguagem matemática apropriada, como incentiva a sua utilização e facilita a sua compreensão e apropriação, uma vez que é utilizada num contexto rico em conexões.

De forma geral, os alunos organizam a sua apresentação e apoiam as suas ideias recorrendo a representações pictóricas e linguagem simbólica com clareza, bem compreendidos pela professora e pelos colegas, com lógica, uma vez que os desenhos utilizados revelam raciocínio e coerência. Na discussão, os alunos exprimem as suas ideias utilizando vocabulário matemático, na maioria das vezes, apropriado, com relativa pertinência pois estabelecem relações com assuntos trabalhados anteriormente. Sempre que respondem ou intervêm, a maioria dos alunos fá-lo com qualidade, enriquecendo a discussão, dando respostas com lógica e conexão entre as ideias discutidas e por vezes com pertinência, como por exemplo quando a Maria intervém dizendo "Se trocarmos a ordem dos fatores, o resultado não se altera por que é comutativa". Maria utiliza vocabulário matemático apropriado e estabelece conexão com assuntos trabalhados em aulas anteriores, nomeadamente no estudo das propriedades da adição.

Pode concluir-se que os alunos começam a manifestar evolução na sua capacidade de comunicação nos diferentes domínios (expressão de ideias, na forma como apoiam as suas ideia em termos de representações matemáticas e na forma como discutem na sequência do que veem e ouvem). No que respeita às aprendizagens realizadas relacionadas com o tópico, divisores de um número natural, os alunos manifestam terem compreendido os conceitos trabalhados, contribuindo de forma significativa para a sistematização dos assuntos.

No que respeita à prática da professora, da qual depende em grande parte a eficácia do modelo de ensino, nota-se maior controlo sobre os ruídos assim como maior facilidade na colocação de perguntas abertas e ainda melhoria na forma como realiza a escuta ativa, dando mais tempo aos alunos para falar – exprimirem as suas ideias – e, sobretudo, procurando compreendê-los.

A análise desta aula evidencia que este modelo de ensino exploratório da Matemática, em que existem fortes preocupações com a promoção da comunicação matemática, dá oportunidade aos alunos de exprimirem e partilharem as suas ideias e processos matemáticos, tanto em termos de registo escrito como oral e, por conseguinte, de realizarem negociação de significados matemáticos, tanto com os seus pares como com a professora, uma vez que prevê o trabalho de grupo e momentos de discussão coletiva.

Um aspeto também importante deste modelo de ensino exploratório, visível nesta aula, prende-se com o envolvimento de todos os alunos na *galeria de tarefas*. Este momento da aula, para além da sua contribuição para a discussão que se lhe vai seguir e para a realização das aprendizagens matemáticas com os seus pares, faz com que os alunos aumentem a sua autoestima ao verem os seus trabalhos expostos e comentados, sentindo-se parte integrante do que é feito na aula e por conseguinte estão mais recetivos e motivados a interagirem no momento da discussão. É uma nova cultura de sala de aula que se está a desenvolver.

5.3.4 - Aula 4: “Vamos la a pôr a cruz!”

A tarefa “Vamos lá a pôr a cruz!” foi realizada em duas aulas, no segundo período letivo, tendo como finalidade trabalhar os critérios de divisibilidade. Em concreto, o trabalho com esta tarefa (uma exploração) deveria permitir: (i) Utilizar critérios de divisibilidade de um número natural; (ii) Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação e vocabulário próprios; (iii) Discutir resultados, processos e ideias matemáticos; e (iv) Formular e testar conjeturas e generalizações e justifica-las fazendo deduções informais.

A figura 34 representa o enunciado da tarefa:

Completa o quadro, colocando X quando se verifica a condição de um número ser divisível.
Acrescenta números naturais à tua escolha.

Tabela 2 - Números divisíveis por, 2, 5, 10, 3, 4 e 9

Número	8	17	25	63	88	270	840	3600	…
É divisível por 2?									
É divisível por 5?									
É divisível por 10?									
É divisível por 3?									
É divisível por 4?									
É divisível por 9?									

Tenta redigir uma regra que substitua o cálculo quando queres saber se um número é, ou não, divisível por 2, 5, 10, 3, 4 ou 9.

Figura 34 – Enunciado da tarefa “Vamos lá a pôr uma cruz!”.

Em seguida, analiso a implementação do modelo de ensino exploratório da matemática, com esta tarefa, ao longo das diversas fases da aula.

5.3.4.1 - Intervenção na sala de aula

Apresentação da tarefa. A planificação da tarefa previa o recurso a computadores. Para tal, foi necessário mudar para uma outra sala devidamente equipada. Uma hora antes, a professora prepara os computadores com a respetiva tarefa, colocando-a no ambiente de trabalho. Entretanto, prepara também o computador destinado ao professor de forma a projetar a tarefa no ecrã (Figura 35). Os alunos estavam entusiasmados: era a primeira vez que utilizavam aquele espaço. A professora distribui os alunos por grupos e atribui-lhes um computador:

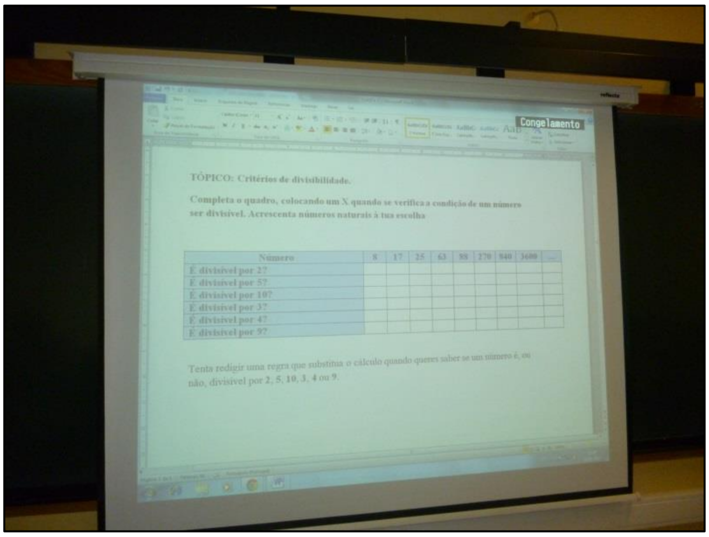


Figura 35 - Projeção da tarefa no ecrã.

Ao mesmo tempo, a professora informa os alunos dos materiais necessários para realizar a tarefa. Para além do computador, indica que também utilizarão a calculadora. Esta informação veio destabilizar os alunos, pelo que a professora esclarece: “Calma, podem usar a máquina de calcular que existe no computador. Não se preocupem que eu vou a cada grupo ensinar como usar a máquina. Para além disso, só precisam de ter uma folha e um lápis.”

Depois, a professora pede a uma aluna que leia a tarefa, projetada no ecrã. Para se certificar de que foi compreendida, interpela os alunos:

Professora – Quem quer explicar o que têm que fazer?

Duarte – Então, temos que pôr cruzes naquele quadro nos números que sejam divisíveis por 2, 5, 10, 3, 4 e 9 e depois temos que redigir uma regra…isso é que não percebo bem…

Professora – O que quer dizer redigir?

Os alunos fazem silêncio. A professora prossegue:

Professora – Tenta escrever uma regra. Para quê?

Com a colaboração dos alunos, a professora explora o enunciado da tarefa para garantir que os alunos realizam o seu trabalho com sucesso. Depois de a palavra "redigir" causar dificuldades, a expressão "regra que substitua o cálculo" também suscita muitas dúvidas. A professora coloca perguntas como "o que entendes que está a pedir?", com a intenção de conduzir os alunos à compreensão do enunciado. Contudo, os alunos continuam a dar muitas respostas confusas. Entretanto, um aluno intervém e esclarece:

Luciano – Então, nós temos que escrever uma regra para ver se um número é divisível por 2, 5, 10, 3, 4 e 9.

Professora – Sim. Têm que escrever uma regra que vos permite saber se um número é ou não divisível por, 2, 5, 10, 3, 4 e 9.

A professora opta por omitir propositadamente a expressão "que substitua o cálculo", uma vez que lhe pareceu, nesta altura, que a frase da segunda parte do enunciado da tarefa "tenta redigir uma regra que substitua o cálculo quando queres saber se um número é, ou não, divisível por 2, 5, 10, 3, 4, ou 9", era demasiado longa, tornando-se confusa para os alunos. Para além disso, o conceito de "regra" não é claro para alguns alunos que não perdem a oportunidade de questionar:

Daniel – Mas eu ainda não percebi muito bem, uma regra? – Diz, com expressão da cara de quem acha que não faz sentido.

Professora – Qual é a regra para poderem participar na aula?

Inês – Pôr o braço no ar!

Professora – Só participa o aluno que levanta o braço! Para este caso já tens a regra.

Luciano – Pois, nós temos que escrever uma regra para os números que são divisíveis por aqueles.

Professora – Quando observarem um número e souberem, pelas suas características, que ele é divisível, por exemplo, por dois, então já sabem a regra! Tiago, explica-os o que entendeste, agora.

Duarte – Já percebi! Por exemplo para o 2, é fácil!

A professora, entendendo que o enunciado da tarefa está esclarecido, desafia os alunos a iniciar o trabalho: “Muito bem, vamos lá ao trabalho”. Fechando a janela da tarefa, projetada no ecrã da sala, dá instruções: “Olhem para o ecrã do computador, no ambiente de trabalho encontram um documento que diz “Tarefa”, cliquem com a parte esquerda do rato no documento para abrir. Depois, colocam o cursor na tabela para escreverem a cruz nos respetivos espaços”. A professora explica onde podem utilizar a calculadora do computador para realizar os cálculos que considerem necessários. A integração da calculadora no computador ajuda ao trabalho. Para além disso, a utilização do computador serviu para mudar o contexto de trabalho, a forma de registo e representação e, portanto, o próprio formato da galeria e da discussão coletiva.

Realização da tarefa. Os alunos realizam, em grupo, a primeira parte da tarefa (colocação de cruzes que assinalam a divisibilidade) sem grandes dificuldades. Quando passam à segunda parte (a tentativa da generalização da regra – o cerne da tarefa), envolvem-se verdadeiramente na discussão. Um aluno de um grupo chama a professora para se certificar de que encontraram a regra para a divisibilidade por 2. A professora opta por dialogar com o grupo em vez de validar a regra:

Duarte – Nós aqui, nos divisíveis por 2, metemos assim “os números divisíveis por dois são pares ou acabam em zero”.

Professora – Porque é que dizes isso?

Duarte – Então, professora, nós vimos que se podem dividir. Na máquina não dá um número com vírgula.

Professora – Que nome tem o número que não é decimal?

Luciano – Natural!

Duarte – Pois, dá um número natural, para os pares e para os que terminam em zero.

Naquele momento, a professora pensa: “Pergunto quais são os números que pertencem ao conjunto dos números pares ou pergunto diretamente sobre os números cujo algarismo das unidades é zero?”. A conjunção das condições que os alunos estavam a estabelecer e a forma como estavam a definir “número par” leva a professora a decidir perguntar:

Professora – E um número cujo algarismo das unidades seja 0, é par ou impar?

Luciano – É par, o zero também é um número par. Já aprendemos isso…

Duarte – Ah! Então são todos pares!

A professora sorri e afasta-se sentindo que a pergunta que formulou levou os alunos a pensar sobre o conceito de número par. Um outro grupo opta por não usar a calculadora para preencher a tabela e utiliza uma estratégia diferente. O grupo interpela a professora sobre o critério por 3, que opta, em resposta, também por interpelar:

Adriana – Nós aqui, fizemos três vezes vinte e um, que nos deu sessenta e três – diz apontando para a tabela.

Professora – Expliquem lá isso.

Mafalda – Nós para ver se o 63 é divisível por 3, fomos ver se havia um número qua a multiplicar por 3 dava 63.

Adriana – 63 é divisível por 3.

Mais uma vez, a professora interroga-se a si própria: “Incentivo-os a usar a calculadora, para mais rapidamente refletirem e generalizarem as regras ou deixo que continuem a usar este processo?”. Decide sugerir que utilizem a calculadora, mas dando continuidade ao diálogo explorando a ideia de divisor:

Professora – Porque é que 63 não é divisível por 5?

Ana – Porque não há nenhum número que a multiplicar por 5 dê 63.

Professora – O que acontece quando dividimos 63 por 5?

Mafalda – Não dá resto zero!

Adriana – Na máquina deu-nos um pontinho…

Professora – E o pontinho representa o quê?

Mafalda – A vírgula. Deu 12,6.

Professora – E qual foi o quociente de 63 por 3?

Mafalda – 21.

Professora – A que conjunto de números pertence o 21?

Mafalda – Aos números naturais. Para ser divisível o quociente tem que ser um número natural…

A professora afasta-se e deixa o grupo prosseguir o seu trabalho. O grupo estava a preencher a tabela e o diálogo acabara por fazer com que a aluna utilize vocabulário específico da Matemática de forma correta para além de estabelecer conexões com os assuntos tratados nas aulas anteriores.

Um outro grupo chama a professora, pois aparentemente ainda subsistem dúvidas na questão da “regra”: “Professora, temos aqui uma dúvida. Temos que arranjar uma regra para todos ou só para cada um?”.

A professora hesita em pedir para voltar a ler o enunciado da tarefa mas opta, mais uma vez, por informar, pois entende que não é suficientemente relevante nem contribui para realizar aprendizagens significativas pedir para explorar de novo o enunciado: “É para cada um dos números”. Passando rapidamente os olhos pelo enunciado, a professora apercebe-se que era possível ficar com essa dúvida: “Tenta redigir uma regra”.

Quando a professora chega perto de um outro grupo, apercebe-se de que estes tinham redigido a identidade fundamental da divisão como regra:

Professora – Expliquem-me qual é a vossa ideia.

João – Por exemplo, 25 não é dividendo de 2, porque não há nenhum quociente que a multiplicar por 2 dê o 25.

A professora percebe que o aluno está a utilizar a identificação dos termos do algoritmo da divisão. O aluno está a tentar dizer que 25 não é divisível por 2.

Professora – Sim. Está muito bem, 25 não é divisível por 2, de facto não há nenhum número que a multiplicar por 2 dê 25, mas que vos pede para fazer?

Os alunos olham o enunciado e respondem:

Gustavo – Pede-nos para redigir uma regra que substitua o cálculo para saber se um número é ou não divisível pelos que estão ali.

Professora – Uma regra que substitua o cálculo – reforça a professora – uma regra que permita observar o número e dizer, rapidamente, se é ou não divisível por 2.

Ana – Eu já tinha dito! Não dá…

Professora – Porquê, Ana?

Ana – Porque temos que escrever com palavras, temos que dizer como é que é o número…

Professora – Boa, Ana! Observem na tabela, os números divisíveis por dois. O que é que eles têm em comum?

Luciano – Ah! Descobrimos a pólvora!

Os alunos ficam a discutir o critério de divisibilidade por 2; a professora ainda ouviu “…são pares…”.

Num outro grupo, a professora interpela os alunos sobre o critério de divisibilidade por 5:

Samuel – Nós fizemos esta regra para o número cinco: os números divisíveis por cinco podem ser pares ou ímpares.

Professora – Na tabela não assinalaram o 8 como sendo divisível por 5. Porquê?

Samuel – Porque não dava resto zero.

Professora – Usaram a máquina? – Pergunta, com intenção de os fazer referir que não obtinham um número natural, depois de realizada a operação.

Zé - Sim, não nos dava um número natural – Responde o Zé, parecendo perceber o que pretendia a professora.

Professora – Muito bem! E o 8, é um número par ou ímpar? – Vira-se para o Samuel.

Samuel – É par!

Professora – Porquê?

Samuel – Porque se pode dividir por dois e dá resto zero.

Zé – Não podem ser pares…

Professora – 270, é par ou ímpar?

Samuel – Par! Mas este já é divisível por 5, por isso é que nós estávamos a dizer que era.

Zé – Mas não são todos…

Professora – E o 63, é par ou ímpar?

Samuel – Mas o 25 é impar?

Professora – Pois é. E o 63, é par ou ímpar?

Samuel – Ai! É ímpar…

Zé – Também não podem ser todos os ímpares…

Samuel – Não pode ser esta regra!

Professora – Voltem a observar os números divisíveis por cinco, inclusive os que vocês encontraram.

A professora afasta-se deixando o grupo continuar o seu trabalho depois do contributo que deu com a formulação das questões.

Um grupo discutia os critérios de divisibilidade por três. Por não ser tão evidente como os critérios anteriores, os alunos parecem regredir no que é uma “regra”:

Professora – Expliquem-me.

Maria – Se multiplicarmos um número por 3 dá-nos um número que lhe é divisível.

Professora – Sim. Que nome se dá a esse número?

Maria – Múltiplo!

Professora – Sim. Como é que, ao observar um número qualquer, conseguem dizer que ele é divisível por três?

Maria – Se dividirmos…

Professora – Reparem no enunciado. O que pede?

Mafalda – Uma regra…que substitua o cálculo…

A professora percebe que, de forma geral e como esperado, os alunos estão a ter dificuldades para as regras respeitantes ao 3, 4 e 9. Opta, nesta fase, por deixar os alunos refletirem mais um pouco e depois deixar a formulação para a galeria e para a discussão coletiva.

Galeria de tarefas. Dadas as características do suporte dos registos (Figura 37), a professora pede aos alunos que circulem pela sala para observarem o trabalho dos colegas nos computadores e registem nos seus cadernos os comentários.

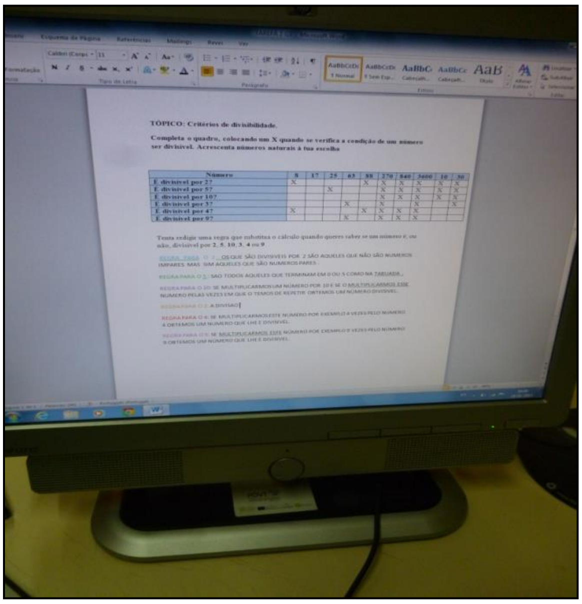


Figura 36 - Tarefa realizada por um grupo, exposta no ecrã.

Os alunos circulam, muito disciplinadamente, sem ser necessário a professora fazer qualquer reparo. Observam os trabalhos, comentam e registam nos cadernos. Um aluno de um grupo, depois de comentar com os outros elementos do seu grupo, escreve: “Este grupo tem mal, o que fizeram não pode ser”. Outro aluno, de outro grupo, regista “ “Encontraram quase todas as regras mas não sabemos se estão bem”.

Esta fase da galeria permite aos alunos comparar o seu trabalho com o dos colegas, refletir sobre outras estratégias e realizar aprendizagens com os seus pares e, ao mesmo tempo, contribui para enriquecer a discussão coletiva da tarefa. No caso concreto desta tarefa, a intervenção dos alunos, durante a *galeria de tarefas*, incentiva os colegas, na discussão coletiva, a explicar oralmente o seu raciocínio e, ao mesmo tempo que comparticipa com questões importantes para a realização das aprendizagens matemáticas previstas.

Discussão/ Sistematização das aprendizagens. A discussão da tarefa só pode ocorrer na aula seguinte. Minutos antes da aula, a professora coloca no ambiente de trabalho do computador do professor os documentos enviados pelos alunos e prepara a projeção. Após a entrada dos alunos, dá início à aula recordando a tarefa. Para isso, pede a um aluno que recorde o que fizeram na aula anterior:

Gustavo – Nós estivemos na sala de TIC a resolver uma tarefa nos computadores, em grupo. A professora, primeiro, projetou-a no ecrã branco.

Professora – Qual era a tarefa?

Inês – Primeiro, tínhamos que preencher um quadro, com cruzes…

Tiago – Tínhamos que ver quais eram os números divisíveis por 2, 3, 4, 5, 9 e 10, para pormos a cruz.

Inês – Depois tínhamos que “re..gir” (gaguejou sem conseguir prenunciar a palavra) ai, escrever uma regra para esses números, oh professora, nós só fizemos para alguns, para o 3, para o 4 e para o 9, não conseguimos.

A professora percebe que a tarefa está bem presente na memória dos alunos e prossegue com a aula, pedindo a um dos grupos que explique o seu trabalho. A intenção da professora era não demorar muito tempo com o preenchimento da tabela, uma vez que tinham tido a oportunidade de usar a calculadora. Pretendia centrar a atenção na generalização das regras, ou seja, nos critérios de divisibilidade. Sabia que, como tinha previsto, teria que conduzir a discussão para que fossem os alunos a encontrar as regras para os divisores de 3, 4 e 9, já que os alunos não o tinham conseguido. Contudo, o grupo que se ofereceu para começar a apresentação dos trabalhos veio alterar-lhe os planos quando explica a forma como pensaram, começando pelo critério de divisibilidade por 3:

Zé - Nós pensámos que: 270; podemos fazer 27, pois na tabuada do 3, 3x9 é 27, acrescentámos um 0 ao 9 e encontrámos um número que a multiplicar por três dá 270, logo 270 é divisível por 3.

Diz um aluno de outro grupo:

Luciano – Nós também pensámos assim para o 3. Para ver se 63 é divisível por 3, vimos que 3x10 dá 30, logo 3x20 é 60 depois o 3 é igual ao 3x1, então 2x21 dá 63, 62 é divisível por 3 – Diz um aluno de outro grupo.

Os alunos insistem em mostrar como realizaram o cálculo mental. Quando a professora pede ao grupo para apresentar o seu trabalho, não especifica exatamente o que queria que apresentassem. Naturalmente, os alunos pensam que deveriam explicar como encontraram os divisores dos números dados, ou seja, centraram-se no cálculo mental. Zé, o porta-voz do grupo que apresentava, explica como viram que 840 era divisível por 3. Perante a explicação confusa, os alunos reagem:

Maria – Não percebi nada!

Martins – Explica por outras palavras.

Luciano – Olha, explica no quadro.

Professora – Boa ideia. Explica-nos lá isso, usa o quadro, se quiseres.

Zé – Para o 840, pensámos: 3x10 é 30, 30 + 30 é 60, somámos mais 30 e deu 90, mas 90 já não dava, passava de 84, então tiramos-lhe 1 e deu 27…

Professora – Tiraram 1 e deu 27? Explica lá isso.

Zé – Sim, ao 10. Mas ainda não dava: 30 +30 é 60, 60 + 27 é 87, então tirámos mais 3, assim: 60 +24 , a soma é 84! Então, 3x (10 +10 + 8), que dá 3×28. Depois foi só acrescentar o 0.

Inês – Oh professora, só entendi agora, no fim!

Duarte – Eu não percebi bem o que ele fez, ele tira e põe…

A professora, embora considere muito importante o cálculo mental realizado pelo grupo mas dado que já ia na segunda explicação e para centrar a discussão nos critérios, intervém pedindo que comecem por focar a sua atenção nos critérios de divisibilidade por 2, 5 e 10.

De forma geral, todos os grupos redigiram a regra para os números divisíveis por 2. A maioria redigiu os critérios de divisibilidade por 2, 5 e 10, embora em alguns casos não se tratassem de verdadeiros critérios mas de definições de múltiplos desses números (Figura 38):

Número	8	17	25	63	88	270	840	3600	86	98
É divisível por 2?	X				X	X	X	X	X	X
É divisível por 5?			X			X	X	X		
É divisível por 10?						X	X	X		
É divisível por 3?				X		X		X	X	
É divisível por 4?	X				X		X	X		
É divisível por 9?				X		X		X		

Tenta redigir uma regra que substitua o cálculo quando queres saber se um número é, ou não, divisível por **2**, **5**, **10**, **3**, **4** ou **9**.

2-Só é divisível quando o número é par.

5-Só é divisível quando o número acaba em 5 ou em 0.

10-Só é divisível quando o número acaba em 0.

3-Só é divisível quando os números acabam em 3,6,9,2,0,5.

4-

9-

Figura 37 - Trabalho realizado pelo grupo 6.

Tenta redigir uma regra que substitua o cálculo quando queres saber se um número é, ou não, divisível por **2**, **5**, **10**, **3**, **4** ou **9**.

REGRA PARA O 2 : OS QUE SÃO DIVISIVEIS POR 2 SÃO AQUELES QUE NÃO SÃO NUMEROS IMPARES MAS SIM AQUELES QUE SÃO NUMEROS PARES .

REGRA PARA O 5 : SAO TODOS AQUELES QUE TERMINAM EM 0 OU 5 COMO NA TABUADA .

REGRA PARA O 10: SE MULTIPLICARMOS UM NÚMERO POR 10 E SE O MULTIPLICARMOS ESSE NUMERO PELAS VEZES EM QUE O TEMOS DE REPETIR OBTEMOS UM NÚMERO DIVISIVEL.

REGRA PARA O 3: A DIVISAO PARA TODOS

REGRA PARA O 4: SE MULTIPLICARMOS ESTE NUMERO POR EXEMPLO 4 VEZES PELO NUMERO 4 OBTEMOS UM NUMERO QUE LHE E DIVISIVEL.

REGRA PARA O 9: SE MULTIPLICARMOS ESTE NÚMERO POR EXEMPLO 9 VEZES PELO NÚMERO 9 OBTEMOS UM NÚMERO QUE LHE É DIVISIVEL.

Figura 38 - Trabalho realizado pelo Grupo 3.

Como previsto, os critérios de divisibilidade do 3, 4 e 9 foram mais problemáticos para os alunos. A professora enceta o diálogo com os alunos voltando um pouco atrás:

Daniel – Nós quando queríamos ver as regras, primeiro não, mas depois começámos a olhar para o último…

Professora – Último, explica.

João – Algarismo das unidades.

Luciano – Par o dois é fácil: são os que terminam em 0, 2, 4, 6, e 8, ou seja pares.

Zé – Para o 5 são os que terminam em 0 ou 5.

Professora – Vocês têm escrito "como na tabuada". O que querem dizer?

Samuel – Os que estão na tabuada também terminam em 0 ou 5.

Professora – O que é que são esses números em relação ao 5?

Samuel – Múltiplos.

Professora – O que é que podemos concluir?

Zé – Que os números divisíveis por 5 são os seus múltiplos!

Professora – Concordam?

Mafalda – É como os divisíveis por dois, também estão na tabuada e também são os seus múltiplos.

Duarte – Para os de 10 também foi fácil, mas para os de 3…

Inês – Oh professora, eu não percebi o que aquele grupo escreveu.

A intervenção desta aluna veio ao encontro do que a professora esperava, pois preparava-se para questionar o referido grupo que, para o critério de divisibilidade por 10, escreveu: "Se multiplicarmos um número por 10 e se o multiplicarmos esse número pelas vezes em que o temos de repetir obtemos um número divisível" (cf. Figura 38).

Professora – Expliquem como pensaram.

Maria – Pois…nós vimos que os números terminavam em 0, era a mesma coisa que multiplicarmos 10, por exemplo 270, é a mesma coisa que multiplicar 10 por 27; 840 é a mesma coisa que multiplicar 10 por 84 e assim tínhamos um número que era divisível por 10.

Inês – Ahh! Agora percebi, porque o que tinham escrito não se percebia nada.

Maria – Mas aquele grupo escreveu melhor. Nós vimos logo isso, eu até disse ao Tiago que como eles fizeram estava melhor.

Professora – Que podemos concluir sobre a regra para os divisíveis por de 10?

Todos os alunos concordaram que os números divisíveis por 10 eram todos aqueles cujo algarismo das unidades fosse 0. À medida que a discussão e sistematização avança, os alunos apercebem-se que algumas das suas regras não são verdadeiros critérios porque não permitem dizer se um número é ou não divisível por outro. Isso ajudou a pensar os critérios por 3, 4 e 9:

Daniel – Nós, para os divisíveis por 3 dissemos que eram os que terminavam em 3, 6, 9, 2, 0 e 5.

Professora – Expliquem-nos porquê? Como pensaram?

Daniel – O 3 porque o 3 é, e o 33, o 6 e o 66, o 12, o 30, 0 45.

Maria – Mas o 23 não é, e termina em 3! Não é múltiplo, por isso não é divisível!

Zé – Nem o 25!

Maria – Por isso é que nós dissemos que só dividindo é que podemos ver!

Professora – Mas o enunciado pedia uma regra que substituísse o cálculo.

Como esperava, nenhum dos alunos encontra o critério de divisibilidade para o 3. Por isso, sendo mais diretiva, interpela: "Que acontece se adicionarem os algarismos dos números divisíveis por 3, que encontraram?". Os alunos olham o quadro, alguns pegam no lápis e rabiscam nos cadernos. A interpelação da professora resultou:

Ana – Dá um número que está na tabuada do 3!

Zé – Dá um múltiplo de 3! No 63 deu 9, no 840 deu 12!

Professora – Qual é a regra?

Vários alunos colocam o braço no ar:

Maria – Se somarmos, o número tem que dar um múltiplo de 3!

Professora – Qual número?

Zé – Os algarismos, professora, somarmos os algarismos!

A professora dá voz ao pensamento dos alunos e sistematiza: " Um número é divisível por 3, se a soma dos seus algarismos for um múltiplo de 3". Nesta sequência, pergunta: "– E para o 4?".

Os alunos somam os algarismos. Ficam confusos, para uns dá, para outros não. A professora resolve orientar: " Observem os dois últimos algarismos, que relação há entre eles e o número 4?”. Rapidamente, os alunos observam que ou são 0 ou múltiplos de 4: “Luciano – Pois é! E para o 9? Vou ver…”.

Entusiasmados, os alunos procuram depois a regra do nove usando o mesmo procedimento que usaram antes.

Adriana – Professora, para o nove é como para o 3, temos que somar tudo!

A professora, em colaboração com os alunos, elabora uma tabela com o título “Critérios de divisibilidade”, onde registada os critérios de divisibilidade encontrados e alguns exemplos.

5.3.4.2 - Análise transversal

A tarefa poderia ter sido realizada sem o recurso ao computador. Contudo, pretendeu-se uma aula com uma dinâmica diferente e, sobretudo, criar um outro contexto para a *galeria de tarefas*. A acomodação dos alunos nos computadores decorreu de forma tranquila e ordeira. A professora preocupou-se em preparar antecipadamente as ferramentas necessárias, minimizando constrangimentos e perdas de tempo. Quando apresenta a tarefa e pede a um aluno que leia, e logo de seguida a outro que a reconte, obtém o *feedback* que precisa para perceber que o enunciado não tinha sido compreendido, na sua totalidade. Foi assim que se apercebeu que uma das dificuldades manifestadas pelos alunos se prendia com o vocabulário utilizado no enunciado, nomeadamente a palavra “redigir”, desconhecida para a maioria dos alunos. Perante esta dificuldade, e depois de uma primeira tentativa para serem os alunos a encontrar o seu significado, opta por esclarecer: “Tenta escrever uma regra”, pois entende que a discussão que se gerara à volta do vocábulo não acrescentava nada de relevante à aprendizagem da Matemática. Já em relação ao termo “regra”, que sendo conhecido dos alunos, e colocou igualmente problemas relativamente ao seu significado, foi esclarecido através do diálogo que se gerou por ser mais central na atividade matemática (ocorreu, assim, processo de negociação de significados).

Durante a realização da tarefa, a professora procura incentivar a expressão oral dos alunos, nomeadamente a sua comunicação matemática. Quando Tiago diz “Um número que não tem vírgula”, não o corrige mas pergunta: “Que nome tem um número que não é decimal?”. Intencionalmente, desafia os alunos para a utilização de vocabulário matemático apropriado. Em vários momentos da aula, formula perguntas no sentido de desencadear a expressão oral das ideias dos alunos: "Explica" ou "Porquê?". Algumas vezes, porque não o previu, a professora tem que decidir o tipo de comunicação a utilizar. Embora sabendo que o estilo diretivo é redutor, no que diz respeito ao desenvolvimento de competências, opta por utilizá-lo, induzindo os alunos a seguir uma estratégia. Isso aconteceu, por exemplo, quando diz "…podem usar a máquina…", numa altura em que os alunos utilizavam estratégias de cálculo mental. Utiliza este estilo de comunicação para evitar que os alunos, ao errarem o cálculo ou demorando mais do que havia previsto, se afastassem do objetivo principal que era encontrar critérios de divisibilidade. Volta a acontecer quando o Samuel diz " Os números divisíveis por 5 podem ser pares ou ímpares". A professora, em vez de perguntar "Porque dizes isso?", fomentando a discussão e a comunicação de ideias, opta por apresentar contraexemplos, desconstruindo a sua ideia. Contudo, neste caso, a forma como conduz a discussão acaba por ser proveitosa no que concerne à utilização de vocabulário específico da Matemática e à realização de aprendizagens: são eles que acabam por chegar ao critério de divisibilidade. Várias vezes, a professora provoca discussões onde, intencionalmente, se repete vocabulário. É intenção da professora que os alunos se familiarizem com o vocabulário matemático, apropriando-se do mesmo de forma natural através da escuta e da verbalização durante a discussão de ideias.

Em relação aos critérios de divisibilidade por 3, 4 e 9, a professora opta por não orientar inicialmente, deixando que os alunos discutam livremente, apesar de se aperceber que a maioria dos grupos não regista uma regra correta. Fá-lo propositadamente pois pretende explorar as ideias dos alunos sobre os critérios (e sobre o que é um critério) durante a discussão.

A *galeria de tarefas* foi, nesta tarefa, um momento muito valorizado pelos alunos. Desenvolve a capacidade de reflexão e do espírito crítico e, ainda, contribui para animar a discussão, como aconteceu explicitamente quando Maria diz "…eu até disse ao Tiago que como eles fizerem estava melhor", referindo-se a um trabalho de outro grupo, que tinham observado.

A fase da discussão coletiva mostra alunos bastante participativos. Explicam as suas ideias e questionam os colegas, chegando a sugerir-lhe, espontaneamente, formas de se exprimirem para melhor serem compreendidos. Quando Maria afirma "Não percebi nada!", mostra que está interessada em compreender o colega. A discussão, ao envolver a maioria dos alunos, permite o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática, nomeadamente a comunicação oral – porque se aprende a comunicar, comunicando. Nesta fase da aula, o grupo que se oferece para apresentar a sua resolução e, com isso, dar o “pontapé de saída” à discussão, apresenta uma extensa explicação do cálculo mental que utilizou para encontrar os divisores e opta por se situar no divisor 3. A professora não tinha previsto esta situação e não age de imediato. Previra que apenas verificariam se os números encontrados estavam corretamente assinalados na tabela, uma vez que tinham a permissão de utilizarem a máquina de calcular e esperava que a discussão ocorresse, apenas, na parte dos critérios de divisibilidade. Acabou por se tornar um momento interessante, do ponto de vista da comunicação matemática, nomeadamente na explicação de raciocínio inerente ao cálculo, mas desviou a discussão do essencial.

No que respeita à expressão de ideias, por sua iniciativa, os alunos fizeram-no com clareza, sendo compreendidos pelos colegas e professora, recorrendo muita vez a vocabulário próprio. Muitas das intervenções foram pertinentes, revelando lógica e ligação entre os assuntos. Na sequência do que ouviam, os alunos respondiam, na maioria das vezes, com eficácia, isto é, com qualidade, enriquecendo a discussão, pois apresentaram argumento que revelavam conexão entre as ideias e ligação entre os assuntos.

A professora evoluiu no que respeita ao controlo de ruídos: realizou de forma mais eficaz a distribuição dos grupos e a apresentação da tarefa. Embora utilize pontualmente um estilo de comunicação diretivo, fá-lo por opção atendendo ao objetivo do momento e certificando-se de que não punha em causa o “fazer pensar”. Um dos aspetos que a professora ainda tem que melhorar de modo a otimizar o modelo, prende-se com a planificação no que respeita à antecipação de resoluções, dúvidas e intervenções dos alunos para que prontamente saiba como reagir, isto é, saiba que perguntas colocar ou que estratégias utilizar para continuar a fazer ”Pensar, escrever e falar”.

5.3.5 - Aula 5: “Descontos na Bit-@-byte”

Próximo do final do ano, desenrola-se a aula em torno da tarefa “Descontos na Bit-@-byte” [2]. Com esta tarefa pretende-se atingir os seguintes objetivos: (i) Calcular e usar percentagens; (ii) Resolver problemas que envolvam números racionais não negativos; (iii) Explicar e justificar os processos e resultados e ideias matemáticos; (iv) Representar informação e ideias matemáticas de diversas formas; (v) Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios; e (vi) Discutir resultados, processos e ideias matemáticos. A figura 40 apresenta o enunciado da tarefa “Descontos na Bit-@-Byte”.

Descontos na Bit-@-byte

Na loja Bit-@-Byt um computador custa 800 €. No primeiro dia de cada mês a loja reduz o seu preço em 10% relativamente ao valor anterior.

1. Ao fim de quantos meses o preço do computador pode ser inferior a metade do valor inicial?
2. Que desconto, aproximadamente, deve ser efetuado, todos os meses, para que um computador que custe 950 €passe a custar menos de 400 €, a partir do 4.ºmês?

Figura 39 – Enunciado da tarefa “Descontos na Bit-@Byte”.

Em seguida, analiso a implementação do modelo de ensino, com esta tarefa, ao longo das diversas fases da aula.

5.3.5.1 - Intervenção na sala de aula

Apresentação da tarefa. Depois da distribuição dos alunos por grupos de trabalho, a professora pede-lhes que leiam a tarefa individualmente, em silêncio. Após alguns instantes, pede a uma aluna que a leia em voz alta. Logo a seguir, solicita a um aluno o reconto. Para evitar que este se “prendesse” excessivamente ao enunciado e de forma a avaliar o nível de compreensão da tarefa, decide perguntar: “ Qual é a história da tarefa?”. Adriana responde ao

[2] Tarefa do PFCM, 2010/2011 da ESE de Viseu

desafio – “É sobre uma loja de computadores que tem um computador à venda que custa 800 € e no primeiro dia de cada mês a loja faz um desconto de 10%”.

Como a aluna faz uma pausa, indiciando que terminou, a professora pergunta a outro aluno: “Concordas?”. O diálogo surge:

> **Luciano** – Eu concordo, mas também diz que faz 10% no preço daquele mês. Todos os meses baixa o preço, mais e mais…
>
> **Professora** – Muito bem. E o que pede a tarefa para fazer?
>
> **Adriana** – Queremos saber o preço do computador…
>
> **Gustavo** –…ao fim de quantos meses o preço é menos do que metade de 800 €, ou seja é menos de 400 €.

Procurando enfatizar a questão, a professora retoma o discurso: “ Diz o Gustavo e muito bem, queremos saber ao fim de quantos meses o preço do computador é inferior a metade do inicial, ou seja, inferior a 400 €”. E continua convidando os alunos ao diálogo:

> **Professora** – Só nos pede para fazer isso?
>
> **Inês** – Depois é para sabermos o desconto, ao fim de quatro meses, para ficar a custar metade de 950 €.
>
> **Zé** – Aqui querem o contrário…
>
> **Professora** – Explica la isso, Zé.
>
> **Zé** – Então, primeiro querem saber ao fim de quantos meses passa a metade, e já nos dão o desconto. Agora querem o desconto e já nos dizem ao fim de quantos meses passa a custar metade, que é quatro.

Como Zé é um dos alunos com melhores resultados escolares, sua intervenção não dá segurança à professora de que todos os outros alunos compreenderam a segunda parte da tarefa. Contudo, a intervenção do Zé foi importante, pois constituiu mais uma oportunidade de ajudar os alunos a compreender o pedido. Para continuar a certificar-se da compreensão, por parte da maioria dos alunos, pergunta de novo: “ Concordas, Maria?”. A aluna responde ao repto:

> **Maria** – Sim, professora. Porque aqui diz “Que desconto?”, só que não diz metade, diz “passe a custar menos 400 €”, que é quase metade do que custa agora. O Primeiro custava 800 € e este custa 950 €. Mas agora já nos dizem que tem que custar menos de 400 € a partir de quatro meses…

As várias intervenções são realizadas por alunos pertencentes a vários grupos, pelo que a professora entende dar continuidade à aula, desafiando-os para a resolução da tarefa.

Realização da tarefa. Os alunos discutem a tarefa e a professora observa-os com atenção. De forma geral, os alunos não manifestam dificuldades na primeira abordagem à tarefa. Não chamam a professora, não pedem esclarecimentos, trabalham autonomamente. Os alunos, concentrados, discutem entusiasmados e a professora apercebe-se que alguns grupos se preparam para começar a organizar a apresentação ao mesmo tempo que discutem a estratégia para encontrar a solução. Procurando incentivar a organização e apresentação dos trabalhos, a professora adverte: "Lembrem-se que vão apresentar a tarefa na *galeria de tarefas.* Os alunos empenham-se e a professora procura avaliar o trabalho em desenvolvimento. Um grupo discute a primeira parte da tarefa, surgindo um início de desacordo:

Inês – Então, no primeiro mês o desconto foi de 80 €, agora temos que tirar…

Rita – Temos que tirar sempre 80 €…

Inês – Espera…eu acho que não…

Inês volta a ler o enunciado, em voz alta para as colegas, e sublinha: " Lembras-te daquela tarefa que fizemos dos 10%, no combustível? Lá fizemos mal, lembras-te? Eu acho que aqui é como na outra…". Aulas antes, a professora tinha proposto uma tarefa, também sobre percentagens, e as alunas estavam a usar essa memória, no fundo a estabelecer conexões com aprendizagens anteriores.

Num outro grupo, João afirma: "Temos que tirar 10 por cento a 800…". Quando chega mais perto do grupo, a professora apercebe-se de que os alunos tinham registado " 800 - 10%". Pede-lhes para explicarem a sua ideia e o registo que fizeram:

Tiago – Porque aqui diz que tira 10 por cento, vai ficar mais barato.

Professora – Sim é verdade. O que significa 10 por cento?

João – A redução.

Professora – Sim. Mas o que significa 10% ou 15 % ou 50%, por exemplo?

João – Se fosse 50 por cento, descontava metade.

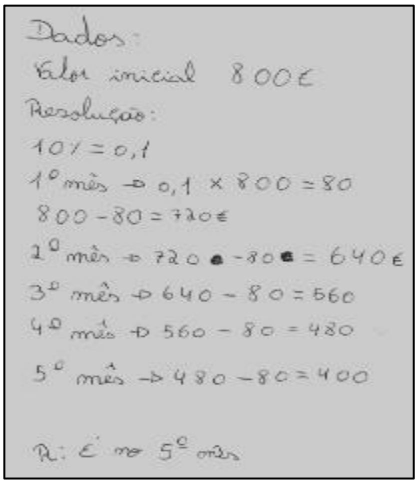
Professora – Quanto seria o desconto?

Tiago – 400 euros…

Professora – Porquê?

Durante a discussão, quando a professora pensava que teria de arranjar outra estratégia, socorrendo-se de exemplos com moedas ou explorando o conceito de percentagem recorrendo a uma tira de papel, um dos alunos do grupo diz: “Tirávamos 10 se fosse 100, mas como são 800 temos que tirar 80, porque é 10 mais 10, mais 10….”

A professora observa que alguns grupos estão atrasados e o fim do tempo estipulado para a resolução aproxima-se. Alguns grupos ainda não começaram a procurar a solução para a segunda parte da tarefa. Por isso, avisa: “Meninos, falta pouco para terminarmos”. Enquanto circula pela sala, a professora observa as resoluções dos alunos e começa a refletir sobre aquelas com as quais irá iniciar a discussão. Um dos grupos, na sua estratégia para encontrar a solução para a primeira parte da tarefa, subtrai em todos os meses o desconto encontrado para o primeiro mês (Figura 40):


Dados:
Valor inicial 800€
Resolução:
10% = 0,1
1º mês → 0,1 × 800 = 80
800 − 80 = 720€
2º mês → 720 − 80 = 640€
3º mês → 640 − 80 = 560
4º mês → 560 − 80 = 480
5º mês → 480 − 80 = 400

R: É no 5º mês

Figura 40 - Resolução de um dos grupos.

De forma a fazer o grupo repensar sobre a sua resolução, a professora questiona:

Professora – Porque é que descontaram 80 no segundo mês?

João – Então, porque é o valor do desconto…

Professora – Sim, explica-me lá isso…porque é que o valor do desconto é sempre igual?

Gustavo – Então, porque fomos encontrar quanto era 10% e deu-nos 80.

Professora – Sim, mas 80 resultou da percentagem sobre que valor?

Tiago – Do preço do computador.

Professora – E o preço é sempre igual?

Pela expressão dos alunos, a professora percebe que continuam agarrados à sua ideia inicial. Não querendo correr o risco de os “orientar” em demasia para a resolução, sem que estes tenham entendido onde estava o erro, a professora opta por se afastar confiando que, na confrontação de estratégias na *Galeria* e durante a discussão coletiva, estes venham a compreender e a interiorizar o conceito de que o valor da percentagem depende do valor sobre o qual esta (percentagem) recai.

Um outro grupo utiliza a estratégia indicada na Figura 41 para encontrar a solução da segunda parte da tarefa:

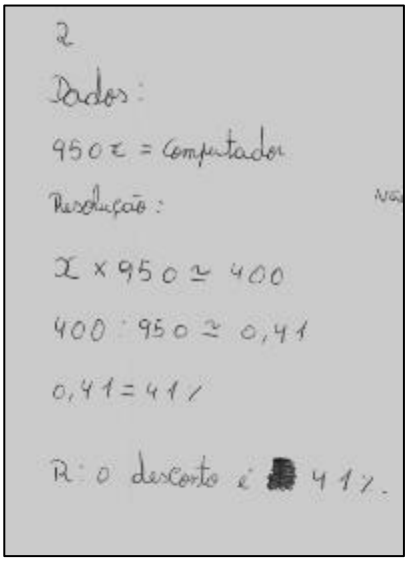

2
Dados:
950€ = Computador
Resolução:
$x \times 950 \simeq 400$
$400 : 950 \simeq 0,41$
$0,41 = 41\%$
R: o desconto é 41%.

Figura 41 - Estratégia utilizada por um dos grupos de alunos para a segunda parte da tarefa.

Verificando que este grupo tinha conseguido encontrar uma estratégia que lhes permitia chegar à solução, para a primeira parte da tarefa (ao fim de quantos meses o preço do computador passa a ser inferior a metade do inicial), opta, mais uma vez, por deixar que os alunos confrontem a sua estratégia com as estratégias apresentadas na galeria e na discussão coletiva. O tempo previsto para a resolução da tarefa estava ultrapassado e, uma vez que durante o trabalho da galeria e durante a discussão coletiva havia a possibilidade de confronto de ideias, surgia, também, a oportunidade de os alunos realizarem aprendizagens com os seus pares. Entretanto, a professora seleciona e anota a ordem das resoluções para serem apresentadas durante a discussão coletiva. Ordena-as da seguinte forma: primeiro, as soluções baseadas em conceitos (como os exemplos anteriores) a seguir, aquelas que possuem estratégias mais eficazes e, por fim, aquelas onde os alunos apresentam generalizações. Uma das escolhas resulta do diálogo travado entre os alunos de um grupo e a professora, quando esta os questiona sobre a solução encontrada para a segunda parte da tarefa (encontrar o desconto efetuado todos os meses para que um computador que custe 950 €, passe a custar 400 € ao fim do 4.º mês):

Zé – Então professora, nós pensámos assim: se no primeiro caso com 10% ele ia diminuindo um décimo do valor, que é só acrescentar a vírgula.

Enquanto falava, o aluno apontava para os algarismos “72” no valor 720 (que correspondia ao desconto do segundo mês). O diálogo gera-se:

Zé – E demorou tantos meses, no segundo caso, para demorar quatro, a percentagem tinha que ser maior, pelo menos o dobro. Tentámos com 20%. – Diz, concluindo.

Professora – Porquê 20%?

Luciano – Pensámos assim, a percentagem é a mesma, mas tem que ser mais que 10%, porque já vimos que não dava, pelo anterior, como disse o Zé, mas o valor vai diminuindo, é cada vez mais pequeno, logo o valor da percentagem também…

Zé – Experimentámos e vimos que dava.

Professora – E experimentaram com outra percentagem?

Luciano – Podemos experimentar professora, mas esta dá!

No diálogo, estes alunos demostram que a sua solução se baseava em reflexões mais elaboradas do que as realizadas pelos outros grupos. Perante isto, a professora decide que este seria o último grupo a apresentar.

Galeria de tarefas. Antes de pedir a afixação dos trabalhos, a professora relembra que podem registar comentários sempre que acharem pertinente ou então devem anotar para a discussão coletiva. Nesta altura, uma aluna intervém induzindo um episódio de diálogo que denuncia ter já construído uma norma de ação (ou norma sociomatemática) do que seria para ela a intervenção nesta fase da aula – a *galeria de tarefas*:

Maria – Ó professora, mas que não ponham só “concordo”, ou “ não concordo”, ou “está bem”, ou “Não está bem”, isso não é nada!

Professora – Concordam com a Maria?

Luciano – Eu também acho!

Professora – Porquê?

Luciano – Porque devem, por exemplo, dizer “ Como pensaram para te dar isto?”, ou “Porque é que aqui vos dá isto e ali aquilo”…se não concordam têm que dizer porquê, eu acho…

Os outros alunos abanam com a cabeça manifestando concordância. A professora fica muito agradada com a postura dos alunos face à *galeria de tarefas*. Os alunos mostram que tinham evoluído. Começam, finalmente, a valorizar a oportunidade facultada pela galeria, de promover o espírito crítico e de contribuir para a discussão das soluções e estratégias seguidas.

Os trabalhos foram afixados ao longo das paredes da sala, como se tratasse de uma exposição de arte plástica, e os alunos (em grupo) foram convidados a observá-los. A professora observa os trabalhos, avalia as soluções e estratégias encontradas e confirma a sua ideia inicial em relação à seleção e sequência das apresentações dos grupos na discussão coletiva. Ao mesmo tempo, presta atenção aos comentários dos alunos. Um grupo discute em frente a um dos trabalhos. É o grupo dos alunos que tinha a primeira solução errada. Entretanto, chamam um dos alunos pertencentes ao grupo do trabalho exposto e solicitam: "Ana, explica-nos o que é que a vossa resposta tem a ver com o que fizeram?".

Efetivamente, este grupo, na segunda parte da tarefa, apresenta uma estratégia completa, calculando 20% de 900 €, seguindo o mesmo raciocínio até obter, no 4.º mês 389,02 mas responde "Foi no 4.º mês", em vez de responder "O desconto é de 20%", dado que o que se pedia para fazer (calcular o desconto). É provável que tal tenha acontecido porque, uma vez que o tempo já escasseava, os alunos se tenham precipitado na resposta.

Ana procura entender, mas parece confusa: chama os colegas e os dois grupos discutem. Nas tarefas anteriores, a professora procura evitar as discussões entre grupos nesta fase da galeria, mas nesta aula, como em outras no 3.º período, opta por deixar que isso aconteça. Afinal, discutiam Matemática e na discussão coletiva procura colocar perguntas que levam os alunos a partilhar aquele momento. Ao fim de dez minutos, a professora pede para os grupos retomarem ao lugar e passa à discussão coletiva.

Discussão da tarefa/Sistematização das aprendizagens. Depois de os alunos estarem acomodados, a professora, tal como tinha pensado, pede ao primeiro grupo que partilhe a sua resolução. Note-se que os alunos não sabem que a professora utiliza critérios para organizar a discussão coletiva (critérios sobre as soluções, o grau de eficiência das estratégias e as aprendizagens que tem em vista). Este grupo inicia a apresentação mas, em função do que haviam observado na galeria, têm consciência de que cometeram erros na sua resolução. A professora procura dinamizar a discussão:

Professora – Querem partilhar connosco a vossa solução para a primeira parte da tarefa e como pensaram para a encontrar?

Gustavo – Eu acho que nós temos mal.

Professora – Porquê?

Tiago – Ó professora, os outros têm diferente…

Professora – Mas porque é que vocês acham que está mal e não os outros?

Gustavo – Porque nós já vimos. Nós enganámo-nos.

Professora – Concordam? – Pergunta, virando-se para a turma.

Inês – Eu concordo, eles têm mal!

Professora – Mas porquê?

Luciano – Eles não têm tudo mal…

Gustavo – Pois não, foi só a partir do segundo mês.

Professora – Então e porquê? Porque acham que só têm a partir do segundo mês?

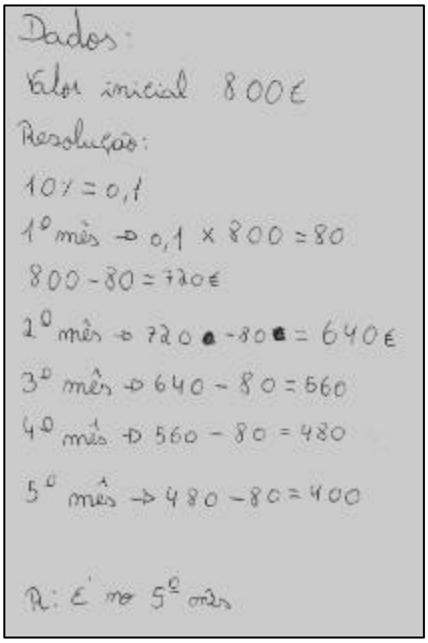


Figura 42 - Resolução apresentada pelo primeiro grupo.

A professora, com as perguntas que coloca, pretende avaliar se os alunos perceberam por que razão a sua solução está errada. O diálogo visando o entendimento comum continua envolvendo cada vez mais alunos:

Zé – Porque eles tinham bem, mas depois em vez de usarem o valor que deu nesse mês, no 2.º, voltaram a usar o do primeiro mês.

Professora – Foi isso? – Diz, virando-se para o grupo.

João – Foi. Nós ali (aponta para a folha exposta) devíamos ter feito outra vez a conta.

Professora – Expliquem-me isso.

Gustavo – Eu quando vi os outros trabalhos vi que nós devíamos ter calculado dez por cento de 720 euros, e a seguir também…

Professora – Concordam?

Adriana – Sim! Nós dissemos-lhe ali porquê.

Professora – Então porquê?

Adriana – Porque dez por cento de 720 não dá 80, e a seguir é dez por cento de 640, também não dá 80.

Tiago – Dá cada vez menos…

A professora aproveita a oportunidade para sublinhar que embora a percentagem seja sempre a mesma, o seu valor está dependente do valor sobre a qual recai, ou seja, que a percentagem é um valor relativo e não absoluto:

Professora – Explica lá isso.

Tiago – Então, se já custa menos o desconto também é menos.

Professora – Mas a percentagem mantém-se. Expliquem-me melhor.

Aqui a professora pretende avaliar o conhecimento dos alunos relativo à noção de percentagem:

Luciano – Por isso mesmo, professora. Se a percentagem aumentasse, então também aumentava, até podia ser mais de 80 euros.

Professora – Explica lá isso.

Luciano – A percentagem mantém-se, é 20 por cento, mas agora o preço é mais baixo, logo também o valor do desconto é menor.

A professora entende que a primeira parte da tarefa está esclarecida e continua a discussão com um outro grupo a apresentar:

Professora – Muito bem. A solução não é cinco meses e já vimos porquê. – Virando-se para outro grupo, pede:

Professora – E vocês? Acham que encontraram a solução?

Rita – Sim. Nós achamos que é no 7.º mês que o computador custa menos que 400 euros.

Professora – E como pensaram para chegar a essa solução?

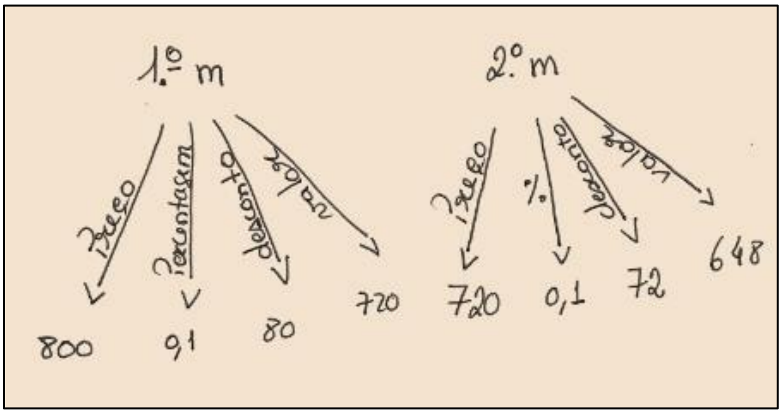


Figura 43 – Reprodução de uma estratégia apresentada pelo grupo para chegar à solução.

Adriana – Nós pensámos assim: no primeiro mês vimos que 10 por cento dava 720, porque 10 por cento de 800 euros é 80 euros. Fizemos o mesmo para os outros meses só que nós enganámo-nos nos cálculos a partir do 3.º mês.

Professora – Enganaram-se a onde?

Inês – Nós fizemos os cálculos de cabeça e arredondámos, enganámo-nos mas por pouco e deu quase o mesmo.

A professora procura envolver a turma no diálogo:

Professora – Acham isso importante? – Pergunta à turma.

Maria – Eu acho que não é muito, porque eles pensaram bem e a solução também está bem, mas deviam ter cuidado.

Professora – Porquê?

Maria – Então, porque aqui acabou por dar na mesma mas se fosse noutro problema já poderia não dar e depois pensavam bem mas tinham a solução mal.

Professora – Concordam?

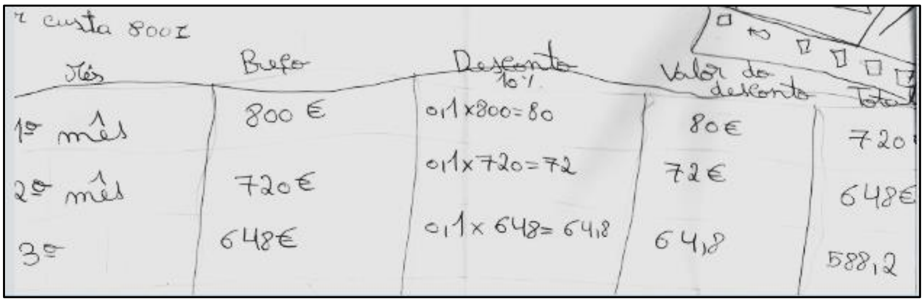
Mafalda – Eu concordo, mas o mais importante é que eles pensaram bem.

Os alunos revelam valorizar os processos de resolução para além da simples solução, o que não acontecia no início. A apresentação continua:

Professora – E vocês? Como pensaram?

Mafalda – Nós usámos a mesma estratégia mas apresentámos tudo numa tabela.

O grupo mostra a sua resolução:



Mês	Preço	Desconto 10%	Valor do desconto	Total
1º mês	800 €	0,1 x 800 = 80	80 €	720
2º mês	720 €	0,1 x 720 = 72	72 €	648 €
3º	648 €	0,1 x 648 = 64,8	64,8	588,2

Figura 44 – Resolução apresentada pelo grupo.

De todos os trabalhos apresentados na galeria, a turma considera este o mais interessante, sobretudo pela sua clareza:

Rita – Eu gostei, era fácil de perceber e tinha lá tudo.

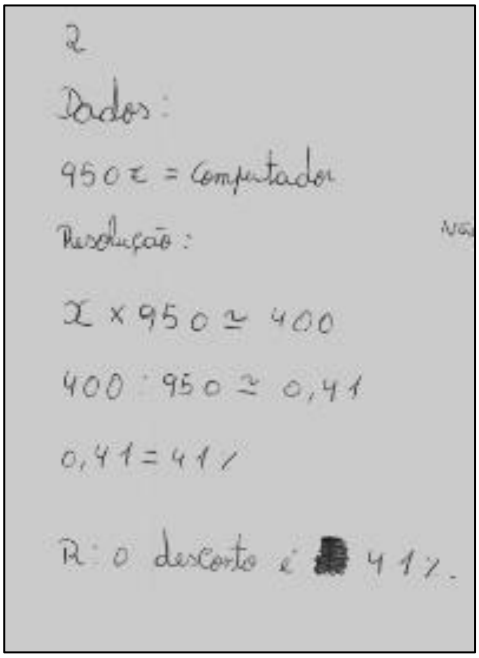
Luciano – Nós, no princípio, estávamos a pensar se é 10 por cento é 10 em 100, logo em tinha que ser 80 em 800, depois o Zé disse “ao multiplicar por 0,1 é só acrescentar uma vírgula ao número e fizemos isso para todos os valores.

Depois de finalizar esta parte, a professora entende que está na hora de passar à discussão da segunda parte da tarefa. Só dois grupos tinham conseguido chegar a uma solução, embora diferentes. A professora convida à apresentação:

Professora – Querem explicar a vossa solução e a vossa estratégia?

João – Nós achamos que é 41 por cento. Pensámos assim, se 10 por cento de 800 é multiplicar 0,1 por 800, então tínhamos que achar o número que a multiplicar por 950 desse 400.

Luciano – Eu não concordo com a solução deles!



2

Dados:

950€ = Computador

Resolução:

$x \times 950 \simeq 400$

$400 : 950 \simeq 0,41$

$0,41 = 41\%$

R: o desconto é 41%.

Figura 45 ─ Resolução do grupo à segunda parte da tarefa.

A turma discute a razão de terem usado a letra *x* no lugar do primeiro fator. A professora questiona: "Porque substituíram este fator por *x*?". Um aluno do grupo justifica dizendo: "Porque nós queríamos encontrar uma percentagem que a multiplicar pelos novecentos nos desse 400". A professora volta a questionar: "Luciano, estavas a dizer que não concordavas com a solução e estratégia dele, porquê?"

Vários alunos manifestam a sua discordância. Perante a hesitação do Luciano que parece um pouco perdido, um aluno intervém e o diálogo generaliza-se rumo a um entendimento comum:

Zé – Então, vê-se logo pelo que fizemos antes. Aqui o desconto também é todos os meses e eles encontraram logo o valor, no 2.º mês.

Maria – Pois é. No segundo mês tem que ter outro preço, o desconto já não é igual.

Professora – Explica lá melhor.

Maria – Posso ir ao quadro? – Maria levanta-se para ir explicar a sua ideia no quadro.

Maria – Então, se fizermos 0,41 a multiplicar por 950, no primeiro mês dá… - Maria faz a conta com a ajuda da turma – 389,50 de desconto, se tirarmos aos 950 dá…229,805. E só pode passar a custar menos de 400 euros no 4.º mês.

Luciano – Também se via logo que não podia ser, 41 por cento é quase metade porque já é perto de 50%.

Professora – Concordam? – Pergunta virando-se para a turma.

Mafalda – Eu concordo. Podíamos pensar num número e fazíamos como na primeira parte…

Tiago – Nós pensámos de outra maneira.

Professora – Expliquem-nos então.

Zé – Nós pensámos assim, então se ali – apontando para a primeira parte da tarefa – 10 por cento de 800 euros demorava sete meses até custar menos de 400 euros, aqui tínhamos menos meses, mas também não podia ser uma percentagem muito alta.

Professora – E porquê?

Zé – Nós pensámos em 20 por cento e fomos verificar.

Professora – E porque escolheram 20 por cento?

Zé – Porque 20 por cento, no 1.º mês ia dar o dobro.

Professora – Explica melhor.

Zé – Então, se fosse 10 por cento não dava, o desconto seria 95 euros e ia demorar mais de sete meses, pensámos em 20 por cento porque daria o dobro de 95, daria 190 que já era bastante.

Luciano – No primeiro mês deu quase o mesmo que 10 por cento de 800 euros.

Zé – Depois verificámos e vimos que o desconto era 20 por cento porque no quarto mês deu-nos 389,12 euros.

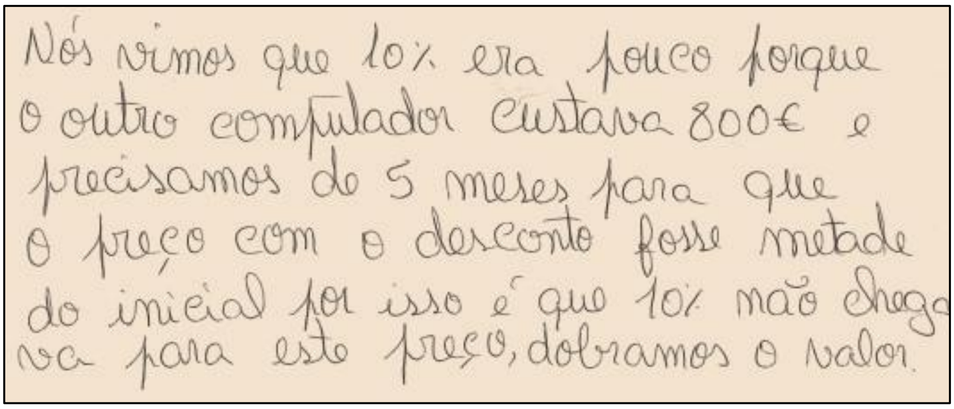

Nós vimos que 10% era pouco porque
o outro computador custava 800€ e
precisamos de 5 meses para que
o preço com o desconto fosse metade
do inicial por isso é que 10% não chega
va para este preço, dobramos o valor.

Figura 46 - Justificação escrita que acompanhava as indicações operatórias deste grupo.

A professora decide fazer a sistematização das aprendizagens. Sem que a professora precise de dizer, os alunos colocam os cadernos diários em cima da mesa e preparam-se para realizar registos.

> **Professora** – Muito bem! Então o que é que aprendemos ou recordámos com a realização desta tarefa?

Os alunos colocam o braço no ar e a professora vai passando a palavra ao primeiro que o fizer:

> **Tiago** – Que 10 por cento de um preço não é sempre a mesma coisa.
>
> **Luciano** – O que ele quer dizer é que se o valor for maior, o valor da percentagem também é.
>
> **Professora** – Muito bem. O que é que quer dizer, então, 10 por cento?
>
> **Maria** – É a percentagem do desconto…
>
> **Professora** – Sim, neste caso. E de forma geral?
>
> **Zé** – Então, quer dizer que o desconto era 10 se custasse 100.

A noção de percentagem tinha sido abordada dias antes. A tarefa tinha o intuito de consolidar as aprendizagens. Aproveitando a intervenção dos alunos e preparando-se para realizar o registo no quadro, pergunta: “E como é que podemos representar 10 por cento?”

Com a colaboração dos alunos, regista no quadro:

- 10% de um valor é o mesmo que $\frac{10}{100}$ ou 0,1
- 10% de um valor é o mesmo que 10% × “o valor”, ou 0,1 × o valor, $ou\ \frac{10}{100} \times$ $"o\ valor".$

No final, reforça a ideia: “dez por cento é o mesmo que o produto de 10% pelo valor ou seja…”. Os alunos completam e registam no caderno.

5.3.5.2 - Análise transversal

Antes da apresentação da tarefa, a professora procura criar um clima favorável à aprendizagem tentando controlar situações perturbadoras como o desconforto de uma posição desfavorável para participar na atividade de grupo, tensões inerentes à distribuição dos alunos, barulhos ou diálogos paralelos. Em suma, procura controlar ruídos que possam interferir com a concentração dos alunos, desmotivando-os ou/e prejudicando o seu raciocínio matemático e, em consequência, a resolução de problemas.

A compreensão do enunciado da tarefa é um dos aspetos que a professora tem em conta na fase da apresentação dos trabalhos. Um enunciado mal compreendido pode constituir um ruído na medida em que pode afastar os alunos do verdadeiro objetivo da tarefa ou a bloquear a sua resolução. A incompreensão, muitas vezes, tem origem nas dificuldades com a língua materna que associada à linguagem matemática acresce essas mesmas dificuldades. Por essa razão, a professora opta por apresentar a tarefa em três fases: (1) leitura silenciosa, (2) leitura oral e (3) reconto. O reconto permite saber se os alunos compreenderam o enunciado, incluindo o que se pretende que façam (ou seja, a tarefa em si). A professora, para o reconto, pede "Conta a história da tarefa". A intenção é garantir que os alunos não se prendam ao enunciado, levando-os a repetir, sem compreensão, as palavras lidas e ouvidas, deixando na professora a dúvida se realmente foi compreendido. Ao contarem como se de uma história se tratasse, dão o *feedback* que a professora precisa.

Durante a realização da tarefa, a professora opta por deixar os alunos trabalhar autonomamente, procurando intervir só quando solicitada ou quando se apercebe que estes enveredam por estratégias erradas, como acontece quando um grupo inicia a sua resolução subtraindo 10% a 800 escrevendo "800 – 10%". Perante isto, em vez de apontar o erro, a professora coloca perguntas no sentido de perceber o que sabem os alunos: "O que significa 10%?". Em seguida, tenta fazê-los refletir sobre a estratégia que utilizam para encontrar a solução, através do questionamento que foca atenção dos alunos em aspetos chave da tarefa. O passo seguinte, da professora, é levá-los a compreender por analogia, através da apresentação de um exemplo: "Têm aqui 5 € em notas e moedas, quero que tirem 10%, como fazem?". Entretanto, um dos alunos dá uma resposta indicando que não seria necessário concretizar, uma vez que mostra saber utilizar o conceito de percentagem. Este acontecimento só foi possível porque se estabeleceu um diálogo entre a professora e o grupo onde as perguntas colocadas levaram os alunos refletir, a estabelecer conexões com conhecimentos prévios, conseguindo-se gerar entendimento e significados partilhados sobre o conceito de percentagem.

A *galeria de tarefas* converte-se num momento de realização de aprendizagens com significado matemático, uma vez que os alunos têm oportunidade de "olhar para fora", ou seja, esta é a primeira oportunidade da aula de os alunos analisarem outras resoluções e as compararem com as suas. Associado a isto, este é um momento apreciado pelos alunos, gerando ganhos no plano da motivação e isso faz com que se proporcione um ambiente favorável à aprendizagem. Na galeria, os alunos visualizam, discutem e comentam as resoluções apresentadas, desenvolvendo a sua capacidade de interpretação e expressão no campo da comunicação matemática.

Para a discussão coletiva, a professora não escolhe aleatoriamente as resoluções a apresentar pelos grupos. Pelo contrário, primeiro, escolhe as resoluções com soluções incorretas e/ou estratégias menos eficazes. Pretende, em primeiro lugar, dar oportunidade a estes alunos de comunicar como pensaram e também para que, ao serem confrontados com as críticas dos colegas e as suas fundamentações, num ambiente de troca e partilha de ideias, processos e soluções, compreendam onde e porque erraram e como poderiam ter feito para chegar a uma solução correta. Contudo, quando o primeiro grupo é convidado a partilhar a sua resolução já tinha constatado e reconhecido que a sua estratégia não estava correta: "Eu quando vi o trabalho dos outros, vi que nós devíamos ter calculado 10% de 720, e a seguir também". Estes alunos deram conta que a sua estratégia estava errada não só porque observaram a solução e estratégia dos colegas mas também porque tinham partilhado ideias com eles na galeria, junto aos trabalhos expostos. Os erros cometidos serviram como ponto de partida para um episódio de discussão sobre as consequências de um erro deste género e permitiram igualmente recordar como se fazem arredondamentos à unidade. Este tema não estava previsto mas, uma vez que surge na discussão, é aproveitado pela professora para incentivar os alunos a refletirem sobre a pertinência do valor encontrado para a solução.

A professora dá continuidade à discussão do assunto de acordo com o que estava planificado. Os grupos que apresentam a seguir permitem discutir o valor da organização e da apresentação das ideias matemáticas. Um grupo apresenta a resolução baseada num esquema e outro através de uma tabela (ambos com apoio em simbolização). De forma geral, os alunos, valorizam esta forma de apresentação (tabela), reconhecendo que as ideias ficam mais organizadas e compreensíveis.

Nem todos os grupos conseguem realizar a segunda parte da tarefa no tempo estipulado. Também aqui a professora utiliza o mesmo critério para iniciar a discussão. O grupo que primeiro é convidado a partilhar a sua resolução é o que, apesar de ter usado corretamente o conceito de percentagem, utiliza uma estratégia errada. A troca e partilha de ideias durante a discussão permite que sejam os próprios alunos a reconhecer o erro e a dizer como poderiam ter feito para chegar a uma solução correta.

Na discussão da tarefa, os alunos estão bastante interventivos e seguros. Exprimem-se oralmente com alguma facilidade, principalmente ao nível da utilização da língua materna. Isto pode dever-se ao facto de, com a utilização do modelo de ensino exploratório da Matemática, ao longo do ano, os alunos terem vindo a adquirir o hábito de apresentar e discutir as suas ideias.

A aplicação das grelhas de avaliação da capacidade de comunicação, no que respeita à organização da apresentação do trabalho (Anexo 1), revela que a maioria dos grupos se situa no nível médio, tanto na clareza como na lógica e na eficácia. Um grupo destacou-se com nível elevado na clareza, uma vez que exprime, no que respeita à primeira parte da tarefa, as suas ideias de forma nítida, com recurso a vocabulário matemático e esquemas apropriados e de fácil interpretação, sendo compreendido pela professora e colegas (trabalho apresentado com recurso a uma tabela). No que respeita à expressão de ideias (Anexo 2), os alunos que participaram fizeram-no com clareza e lógica e por vezes com profundidade, quando o Luciano diz "A percentagem mantém-se, é 20% mas agora o preço é mais baixo, logo o valor do desconto também", ou quando diz "…41% é quase metade porque já é perto de 50%", ou quando o Zé diz "Porque 20% no 1.º mês é o dobro". Os alunos não só se exprimem com clareza, como estabelecem conexão entre assuntos com alguma profundidade. Também no que diz respeito à forma como escutam e respondem, a maioria dos alunos, na sequência do que ouvem e até do que veem (na galeria), fazem-no com qualidade, argumentando com lógica e na maioria das vezes com bastante pertinência.

A professora mostra já um maior domínio no controle dos ruídos. À medida que vai anulando ruídos, a professora fica disponível para controlar outros que até então não tinha previsto nem dado tanta importância. Ao orientar a forma como os alunos se posicionavam em relação à folha de trabalho, por exemplo, garante que se criem condições favoráveis para o envolvimento de todos na resolução da tarefa. Na apresentação da tarefa, respeitante à exploração do enunciado, nota-se maior segurança na forma como realiza a escuta e reage ao *feedback*. Também ao longo das interações que estabelece com os alunos, realiza escuta mais ativa e as perguntas que coloca são agora naturalmente mais abertas. É nesta altura, também, mais assertiva no que concerne ao controlo do tempo de resolução da tarefa e na condução dos trabalhos.

A forma como seleciona as tarefas matemáticas a apresentar aos alunos é também um aspeto que sofreu visível evolução ao longo do ano letivo. Este é um aspeto do qual depende muito o sucesso do modelo de ensino, contribuindo para promover a discussão de ideias matemáticas, partindo das resoluções baseadas em estratégias mais simples até as mais eficazes, permitindo o envolvimento de todos e a discussão gradual das ideias, resultados e processos.

5.4 – Avaliação final

A avaliação da capacidade de comunicação matemática dos alunos, e também das aprendizagens matemáticas mais em geral, para além do apresentado em 5.2 (no trabalho com as diversas tarefas), assentou na aplicação de: (i) grelhas de observação (oral e escrita); (ii) Teste final (avaliação da comunicação matemática escrita); e (iii) Resultados de período letivo.

Grelhas de observação. As grelhas de avaliação de comunicação matemática foram aplicadas 6 vezes: na semana seguinte à realização do teste diagnóstico da capacidade de comunicação matemática (Anexo 2) e nas 5 aulas (Anexos 1, 2 e 3). A informação resultante da sua aplicação está organizada na seguinte tabela (Figura 47):

	Organização da apresentação									Expressão de ideias									Escuta e responde								
	Clareza			Lógica			Eficácia			Clareza			Pertinência			Profundidade			Eficácia			Lógica			Pertinência		
	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 1	Nível 2	Nível 3
1 sema-na	–	–	–	–	–	–	–	–	–	X			X			X			–	–	–	–	–	–	–	–	–
Aula 1	X			X			X			X			X			X			X			X			X		
Aula 2	X				X		X				X		X			X			X				X		X		
Aula 3		X				X		X			X			X		X				X			X			X	
Aula 4		X			X			X			X			X			X			X			X			X	
Aula 5		X	X		X	X		X	X		X	X					X	X		X			X			X	X

Figura 47- Avaliação da capacidade de comunicação matemática (Anexo 1, 2 e 3).

Para cada aula, o nível atribuído na tabela da Figura 48 (1, 2 ou 3) resulta da ponderação dos níveis atribuídos a cada aluno. Os dados recolhidos revelaram que os alunos evoluíram ao longo do ano na forma como organizam a apresentação das suas resoluções, apoiando as suas ideias em diferentes formas de representação/comunicação (desenhos, esquemas, tabelas, etc), exprimindo-se de forma mais nítida e com qualidade comunicativa. Para além disso, com o decorrer das aulas, as suas produções escritas evoluíram e foram progressiva e decisivamente contribuindo para o enriquecimento da discussão de ideias matemáticas, tanto no trabalho de grupo como no plenário da turma. Também no que respeita à capacidade oral, os alunos evoluíram: exprimem-se com nitidez e vocabulário apropriado (nomeadamente, o matemático), argumentando muitas vezes com lógica, eficácia e pertinência. Dessa forma, foi mais fácil a construção conjunta dos significados matemáticos previstos para as diversas aulas programadas.

Teste final. Em maio, aplicou-se o segundo teste de diagnóstico, o mesmo que foi utilizado no início do estudo (Anexo 5). Note-se que, quando aplicado da primeira vez, a professora, propositadamente, não o corrigiu ou discutiu com os alunos.

Na primeira tarefa do teste, "puzzles" onde inicialmente os alunos não souberam explicar o raciocínio ou o fizeram de forma incompleta, observou-se agora o contrário. Praticamente todos os alunos (16/94% da turma) acertaram a resposta e só um aluno não apresenta qualquer justificação. A maioria dos alunos justifica de forma adequada a estratégia usada, facto particularmente relevante nos alunos que revelavam grandes dificuldades à disciplina. Nesta tarefa, relacionada com a área temática Geometria e Medida, era perguntado qual das duas peças de puzzle, A (maior) ou B (menor), de dimensões diferentes, pertenciam à Rosa, sabendo que o Manuel tinha 125 peças, a Rosa 250 e ambos os puzzles formavam um retângulo com a mesma área (Anexo 5).

No que respeita à expressão de ideias e processos matemáticos usando vocabulário próprio com clareza, pertinência e profundidade (Anexo 2), observou-se uma evolução muito significativa do primeiro para o segundo teste, tendo como referência a resposta esperada: "A peça do puzzle B. Se os puzzles têm a mesma área e as peças da Rosa são menores, tendo por isso menor área a sua peça do que a do Manuel, ela precisa de um número maior de peças para, quando montado, o seu puzzle, possa ter uma área equivalente ao puzzle do Manuel. A Rosa tem o dobro das peças do Manuel.".

Mariana, uma aluna com grandes dificuldades à disciplina, responde no segundo teste: “É a peça B, porque a Rosa precisa de mais peças para formar um retângulo com a mesma área”. No primeiro teste tinha respondido simplesmente, e sem justificar: “A peça que pertence à Rosa é a peça A”. No segundo teste, a aluna para além de justificar a sua resposta, fá-lo exprimindo as suas ideias de forma articulada e com clareza, e utilizando para isso vocabulário apropriado.

Maria, uma aluna com aproveitamento satisfatório a Matemática, responde no segundo teste:

> Era a peça B, do puzzle do Manuel, uma vez que tinha a mesma área que o puzzle da Rosa, tem menos peças, logo a área das peças é maior e a área das peças da Rosa é menor, logo para ter um puzzle com a mesma área do puzzle do Manuel tem que ter maior número de peças.

No primeiro teste, a mesma aluna já tinha acertado, tendo dado a seguinte resposta: “É a peça B. Porque como o puzzle leva mais peças logo as suas peças têm de ser mais pequenas do que as do Manuel que leva menos peças”. Como é evidente, Maria utiliza um discurso mais articulado e sobretudo usa consistentemente o conceito de área e respetiva linguagem matemática: “área”, “menor”, e “menor”, conseguindo dessa forma expressar melhor as suas ideias matemáticas.

Na segunda tarefa do teste de diagnóstico (“Moedas… Que problema!” – Anexo 5), observam-se igualmente melhorias relativamente ao primeiro teste, tanto na solução encontrada como na justificação dada. Quatro alunos (24%) acertaram na totalidade da resposta, 8 (47%) alunos acertaram parcialmente, pois cometeram erros de cálculo e 5 (29%) alunos erram a resposta. Ao contrário do que aconteceu no primeiro teste, no segundo todos os alunos apresentam uma explicação para o seu raciocínio.

Nas figuras 48 e 49 observam-se as resoluções de um mesmo aluno no segundo e primeiro testes, respetivamente:

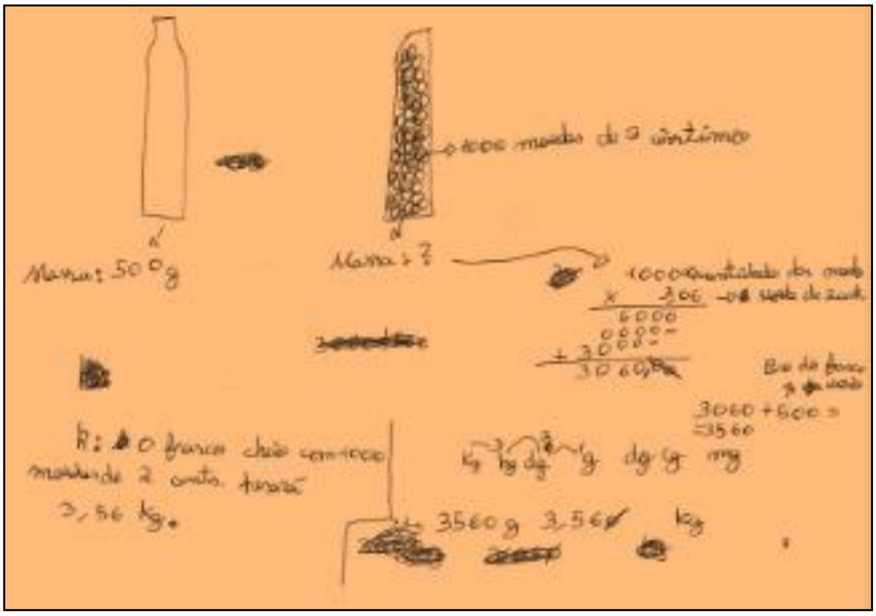


Figura 48 - Resolução de um aluno no segundo teste diagnóstico, à tarefa 2.

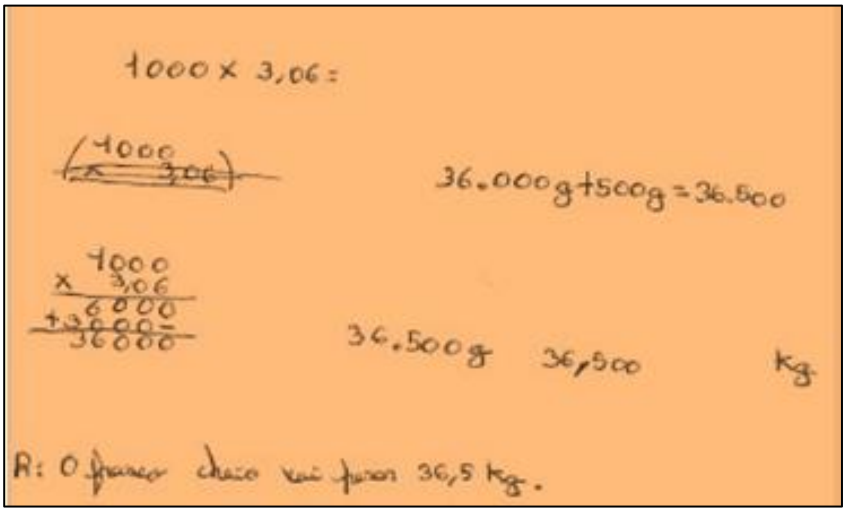


Figura 49 - Resolução de um aluno, no primeiro teste diagnóstico, à tarefa 2.

No primeiro teste (Figura 49), o aluno dá uma resposta centrada exclusivamente na utilização de duas operações aritméticas (utilizando, quando não seria suposto, o algoritmo da multiplicação e fazendo-o erradamente). A resolução, embora simples, não foi acompanhada de qualquer esquema ou explicação. No segundo teste, o mesmo aluno recorre novamente ao algoritmo, que realiza de forma correta, mas preocupa-se também em organizar os dados e em explicar, conforme era pedido no enunciado da tarefa apoiando as suas ideias em desenhos e esquemas com valor explicativo que evidenciam lógica pela coerência e conexão entre as ideias, com recurso a linguagem matemática apropriada. No segundo teste, o aluno refere-se ao peso usando a expressão "massa". A diferença entre peso e massa tinha sido discutida numa aula anterior e, o aluno aproveita a oportunidade para realizar conexões entre os assuntos estudados.

Na terceira tarefa do teste de diagnóstico (Anexo 5), apresentava-se uma sequência numérica com os números colocados triangularmente, pedindo-se para os alunos a continuarem, explicando o raciocínio subjacente ("Explica como descobriste os números que usaste para completar a linha do triângulo"). Cinco alunos (29% da turma) acertam a resposta e 12 (71%) não respondem corretamente na totalidade. Contudo, todos os alunos apresentam justificação para o seu raciocínio revelando maior capacidade para expressar as suas ideias matemáticas, embora em alguns casos não completamente corretas. Samuel, na resolução desta tarefa que não era propriamente de nível cognitivo baixo, no segundo teste, elabora uma justificação em que utiliza o conceito de padrão para a formação da sequência numérica: ": "Eu descobri [a sequência] porque o padrão é na primeira fila sempre 1, na segunda fila é sempre mais um, na terceira e quarta, como são sempre o mesmo, faz-se primeiro 1, 3, 6, 10, 15". No primeiro teste, Samuel, como a maioria os alunos, para além de não apresentarem uma sequência aceitável não dão uma explicação ou quando o fazem não se exprimem com correção.

Resultados de período letivo. Por último, para se complementar a evolução das aprendizagens matemáticas dos alunos, onde estão naturalmente incluídas as competências comunicativas, apresenta-se o Gráfico 4 que representa o total das classificações obtidas pelos alunos da turma em cada um dos períodos letivos:

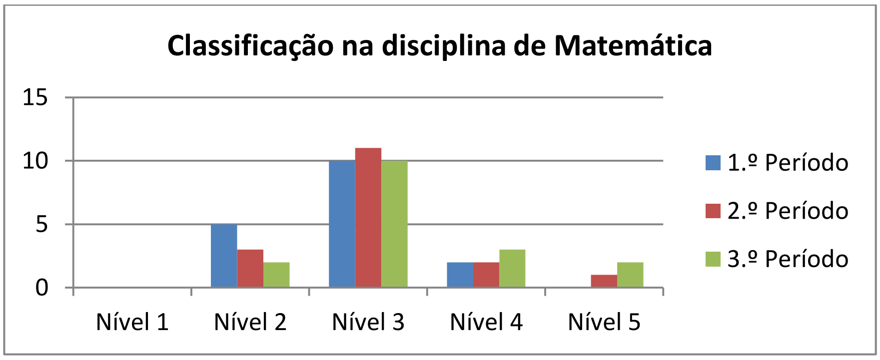


Gráfico 4 - Avaliação dos alunos à disciplina de matemática, nos três períodos letivos.

O gráfico revela que a turma obteve, no final do ano, um sucesso de 88% à disciplina de Matemática, ou seja, que a generalidade dos alunos fez as aprendizagens previstas no programa. Os resultados obtidos revelam ainda que os alunos evoluíram, baixando ao longo do ano o número de níveis 2 e aumentando o número de níveis 4 e 5.

Embora o número de níveis 3 seja maioritário ao longo de todo o ano, os resultados escolares obtidos podem considerar-se muito positivos tendo em conta as dificuldades reveladas pelos alunos no início, principalmente ao nível da sua capacidade de comunicação. Tendo em conta o papel instrumental da comunicação na aprendizagem da Matemática e de a melhoria da capacidade de comunicação ser algo demorado, a repercussão nos resultados/classificações escolares é algo que surte efeito a mais longo prazo.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste capítulo final, apresento as conclusões e recomendações do estudo. Começo por reapresentar o estudo, o seu objetivo, enquadramento e metodologia. A seguir, procuro verificar se os objetivos (geral e específicos) foram atingidos e, por último, apresento algumas reflexões e recomendações para estudos futuros.

6.1 – Reapresentação do estudo

O objetivo geral deste estudo é conceber e estudar o impacto na aprendizagem da Matemática de alunos do 5.º ano de escolaridade do ensino básico de um modelo de ensino promotor da capacidade de comunicação matemática. Para especificar este objetivo geral, foram definidos os seguintes objetivos específicos: (i) Refletir sobre as minhas práticas letivas antes do início deste estudo, em particular sobre aquelas que são promotoras do desenvolvimento das competências comunicativas matemáticas; (ii) Avaliar a capacidade de comunicação matemática dos meus alunos do 5.ºano do ensino básico, no início deste estudo: identificando limitações, nomeadamente na forma de expressar ideias, no poder de argumentação e na capacidade de justificação; (iii) Conceber e aplicar um modelo de ensino promotor do desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática, nos alunos do 5º ano de ensino básico; (iv) Avaliar a repercussão do modelo de ensino promotor do desenvolvimento da capacidade de comunicação na aprendizagem da Matemática dos alunos do 5.º ano do ensino básico; (v) Analisar as minhas práticas de ensino no quadro do modelo de comunicação desenvolvido.

Para atingir estes objetivos, foi realizada uma experiência de ensino em que se implementou um modelo de ensino de natureza exploratória desenvolvido em torno de quatro fases de aula (Stein et al., 2008): (1) apresentação da tarefa; (2) resolução da tarefa pelos alunos; (3) galeria de tarefas; (4) discussão coletiva e sistematização das aprendizagens. Este modelo de ensino tem como objetivo principal a aprendizagem da Matemática com compreensão, desenvolvendo em paralelo capacidades transversais (ME, 2007), em particular a capacidade de comunicação matemática dos alunos (aspeto muito problemático, no início, no grupo de alunos estudado). Este modelo de ensino assenta em grande parte nas teorias de comunicação interpessoal (Freixo, 2011; Guerreiro, 2011; Menezes et al., 2013), sendo fortemente interativo e cabendo ao professor a dinamização e controlo da comunicação estabelecida ao longo das diversas fases da aula.

Este estudo, que se enquadra numa abordagem essencialmente qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994), desenrolou-se em três fases: (i) Diagnóstico; (ii) Implementação; e (iii) Avaliação. O trabalho realizou-se numa turma do 5.º ano do ensino básico, constituída por 17 alunos, lecionada pela professora-investigadora. A recolha de dados fez-se através de gravações áudio, documentos produzidos pelos alunos e notas realizadas pela professora, baseadas na sua observação da aula (naturalmente participante). Para avaliar a capacidade de comunicação matemática dos alunos, antes, durante e depois da aplicação do modelo de ensino, foram utilizados testes, no início e no fim. Para a análise das capacidades comunicativas nas intervenções orais dos alunos, foram elaboradas e utilizadas grelhas de avaliação da capacidade de comunicação matemática no que respeita a: (i) Organização da apresentação (Anexo1); (ii) Expressão de ideias (Anexo 2); e (iii) Escuta e responde (Anexo3).

6.2 – Conclusões do estudo

Nesta secção, apresento as conclusões do estudo, focadas no desenvolvimento do modelo de ensino e no impacto deste modelo na promoção da aprendizagem da Matemática, em particular na capacidade de comunicação matemática dos alunos.

6.2.1 – Desenvolvimento do modelo de ensino

O estudo mostra que é possível ensinar Matemática a alunos do 5.º ano do ensino básico, recorrendo de forma continuada a um modelo de ensino exploratório da Matemática. As cinco tarefas aqui apresentadas procuram ilustrar o trabalho que foi feito com muitas outras tarefas, ocorrido ao longo do ano letivo. Outros estudos, ao contrário do que aqui se apresenta, têm mostrado a adequação do modelo de ensino exploratório da Matemática mas centram-se unicamente num número restrito de aulas, normalmente unidades temáticas (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012; Guerreiro, 2011; Mendes, Oliveira & Brocardo, 2013; Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013). Este estudo mostra a viabilidade do modelo de ensino exploratório da Matemática para ser desenvolvido sistematicamente ao longo de um ano letivo, sendo esta uma conclusão importante para levar os professores de Matemática deste nível de ensino a aderir e a utilizar este modelo de ensino.

O estudo mostra que a eficácia do modelo de ensino passa pela utilização, por parte do professor, de um estilo de comunicação interpessoal assente nas teorias de comunicação defendidas por diversos autores (Freixo, 2011; Guerreiro, 2011; Menezes et al., 2013; Pimm, 1987; Sfard, 2008; Spierpinska, 1998). Compete, assim, ao professor a dinamização e controlo da comunicação estabelecida na aula, doseando as suas próprias intervenções e as intervenções dos alunos de forma produtiva, realizando uma escuta ativa, dando especial atenção ao *feedback* e à redução de ruídos (entendidos aqui, de forma lata, como tudo aquilo que pode prejudicar a transferência de informação entre os interlocutores).

Com o decorrer da experiência de ensino, a professora melhora a forma como gere e controla alguns dos ruídos (utilização de linguagem inadequada ou desajustada, leitura e reconto das tarefas de forma imprecisa, tom de voz desadaptado a cada situação, expressões corporais inibidoras, escolha e seleção desajustada dos trabalhos para a apresentação na discussão coletiva, dificuldades na gestão do tempo). Igualmente, a professora evolui na forma como realiza a escuta ativa (dando progressivamente mais tempo aos alunos para exporem as suas ideias, sem interrupções, ouvindo-os, com mais atenção e aproveitando cada vez melhor as suas intervenções), e também progride na formulação de perguntas (coloca, progressivamente, perguntas mais abertas e gere melhor os tempos de pausa após a pergunta e as respostas dos alunos). A importância da formulação das perguntas pelo professor é um aspeto destacado no trabalho de Menezes, Guerreiro, Martinho e Ferreira (2013) quando estes autores referem que, numa aula exploratória da Matemática, estão habitualmente presentes três tipos de questões colocadas pelo professor (focalização, confirmação, inquirição), sendo as de inquirição as mais abertas e presentes em momentos como a resolução da tarefa e a discussão coletiva.

Para a implementação do modelo de ensino, a professora cria um ambiente de sala de aula favorável, com o contexto apropriado para dar lugar à comunicação matemática. A professora proporciona paralelamente experiências de aprendizagem desafiantes e incentiva os alunos a verbalizar e a discutir ideias matemáticas, questionando, orientando e focando os alunos nos aspetos matemáticos mais importantes de cada aula, proporcionando a negociação de significados matemáticos, indo assim ao encontro do que defendem vários autores como Fosnot e Dolk (2002), Martinho (2009), Martinho e Ponte (2005), Boavida e Menezes (2012), Ponte et al (2007), Stein et al (2008) e Sierspinska (1998) e Também organizações/organismos como o NCTM (2007) ou o ME (2007).

Em relação às fases da aula de Matemática de natureza exploratória, apresentadas por Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) e reafirmadas por Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), o modelo de ensino concebido e aplicado neste estudo mostra que estas fases são promotoras do desenvolvimento de diversas capacidades matemáticas transversais (ME, 2007), nomeadamente da capacidade de comunicação matemática, e também da aprendizagem dos diversos temas matemáticos. De entre as diversas fases do modelo de ensino aplicado, a fase da discussão (em paralelo ou não com a fase de sistematização das aprendizagens) assume um papel preponderante na promoção das aprendizagens, ao permitir a partilha de ideias e processos matemáticos, essencial para a negociação de significados e consolidação do saber matemático (Cengiz, Kline & Grant, 2011;Guerreiro, 2011; Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013; Rodrigues, Menezes & Ponte, 2014). O modelo mostra também que as fases de discussão e de sistematização das aprendizagens podem ser realizadas em simultâneo e de forma interligada, em ciclos sucessivos, como ocorre na aula relativa à tarefa 1.

O trabalho colaborativo, em pequenos grupos, seguido no modelo de ensino, mostra-se o mais indicado para o desenvolvimento da capacidade de comunicação e a realização de aprendizagens matemáticas, pois potencia a discussão de estratégias, possibilita a melhoria da compreensão das ideias matemáticas e é uma forma de integrar os alunos que manifestam dificuldades, indo ao encontro do defendido por vários autores (Boavida & Menezes, 2012; Mayo, 2007; Menezes, 1996, 2000, 2004; ME, 2007; NCTM, 2007; Sfard, 2008).

O estudo mostra ainda que a *galeria das tarefas,* uma novidade relativamente ao modelo de Stein et al (2008), Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) e Oliveira, Menezes e Canavarro (2013) e inspirada em D'Ambrósio (2009), teve um papel importante e inovador no modelo de ensino. A *galeria de tarefas* permitiu potenciar a discussão coletiva, desenvolver a capacidade crítica e de análise dos alunos, fomentou as interações entre os alunos (intra e inter grupos) e a realização de aprendizagens matemáticas com os seus pares. A evolução dos alunos na *galeria de tarefas* mostra que este processo de observação, análise, troca de ideias e registo é algo que se desenvolve muito lentamente (o conteúdos dos registos/comentários dos alunos ao longo do ano evidencia isso mesmo).

Ao revelar-se como um momento muito apreciado pelos alunos, por ser uma novidade absoluta relativamente às suas experiências escolares anteriores, funciona, também, como um motor de motivação para o envolvimento dos alunos na realização da tarefa e, mais latamente, na realização de aprendizagens matemáticas.

6.2.2 – Impacto na aprendizagem matemática dos alunos

No que respeita às conclusões acerca do impacto do modelo de ensino exploratório da Matemática, incluindo a realização da *galeria de tarefas*, no desenvolvimento da comunicação matemática e das aprendizagens dos alunos, o estudo mostra que, no que respeita ao desenvolvimento da sua capacidade de comunicação matemática, os alunos desenvolveram:

- A sua capacidade de interpretar enunciados escritos (tarefas e resoluções dos colegas), realizando, progressivamente, comentários mais pertinentes nas produções dos colegas expostos na *galeria de tarefas*;
- A sua capacidade de organizar e apoiar as suas ideias em diferentes formas de comunicação (desenhos, esquemas, tabelas, etc), com lógica, clareza e eficácia, tanto em grupo, evidente nos trabalhos expostos na *galeria de tarefas*, como individualmente, observado no teste diagnóstico final e nos resultados de final de ano;
- A sua capacidade de exprimirem, oralmente e por escrito, ideias e processos matemáticos usando vocabulário próprio com clareza, eficácia e profundidade, tanto em pequeno grupo como na discussão coletiva (este facto tem evidência nos dados recolhidos pelas grelhas de observação e pela análise das produções escritas dos alunos);
- A sua capacidade de discutir resultados, processos e ideias matemáticos, na sequência do que ouvem e do que observam, com eficácia, lógica e pertinência, tanto no trabalho em pequeno grupo como na discussão coletiva (este facto tem evidência nos dados recolhidos pelas grelhas de observação).

Estes resultados são muito animadores porque eram um dos principais objetivos da intervenção. Recorde-se que esta turma revelava no início do estudo dificuldades acentuadas na sua capacidade de comunicar matematicamente, ao nível da interpretação de enunciados orais e escritos, ao nível da expressão e representação de ideias matemáticas utilizando a sua língua materna (o português) e a linguagem própria da Matemática (simbologia, representações e vocabulário) e, por fim, ao nível da discussão (algo a que os alunos não estavam habituados). Os resultados em termos do desenvolvimento das capacidades de comunicação vão no sentido de que só se aprende a comunicar comunicando, como foi o caso do experimentado neste estudo através do modelo e como apontam diversos autores e organizações (Cobb, Wood & Yackel, 1993; Brendefur & Frykholm, 2000; Godino & Llinares, 2000; Guerreiro, 2011; Menezes, 2004; NCTM, 2005; Pimm,1987; PMEB, 2007; Sierpinska, 1998).

Em relação à realização de aprendizagens matemáticas, o estudo mostra que os alunos aprenderam os conceitos matemáticos contemplados no programa em vigor na altura (ME, 2007) com compreensão. A aprendizagem com compreensão é um dos principais ganhos deste modelo de ensino, especialmente quando se compara com o ensino direto (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012; NCTM, 2007; Ponte, 2005). Essa aprendizagem da Matemática colhe evidência nos dados das aulas, através das diversas tarefas matemáticas trabalhadas e daquelas que são apresentadas neste trabalho e pelos resultados das avaliações realizadas ao longo do ano. Os resultados finais do ano letivo testemunham essa aprendizagem da Matemática, embora também revelem que este trabalho, assente neste modelo de ensino, não é algo que se realize num só ano. Por isso, a importância de se realizar um trabalho nestes moldes com uma certa continuidade.

Em termos de aprendizagens da Matemática, o estudo revela, também, que os alunos desenvolveram outras capacidades transversais em associação com a comunicação matemática e com os temas matemáticos, como sejam a capacidade de resolução de problemas e o raciocínio matemático. Este desenvolvimento é natural neste tipo de ensino, ao contrário do que muitas vezes acontece no ensino direto em que a resolução de problemas tem o estatuto de mera aplicação de conhecimentos, porque comunicar, pensar, resolver problemas e construir conhecimento matemático são operações mentais simultâneas e inseparáveis (Cobb, Wood & Yackel, 1993; Brendefur & Frykholm, 2000; Godino & Llinares, 2000; Martinho, 2007; NCTM, 2007; Vygotsky, 2007).

6.3 – Reflexões e recomendações para estudos futuros

O insucesso frequente à disciplina de Matemática e as inúmeras estratégias implementadas, ao longo dos anos para o debelar, sem os resultados esperados, levou-me a questionar se a comunicação matemática não seria uma das capacidades centrais no desenvolvimento de outras capacidades matemáticas como o raciocínio e a resolução de problemas e não seria também o motor das aprendizagens dos temas matemáticos com significado.

Embora muitos outros fatores, internos e externos ao ambiente escolar, condicionem também a aprendizagem da Matemática, a experiência da minha prática letiva levou-me a conceber, implementar e avaliar um modelo de ensino em que a valorização da comunicação é um elemento central no trabalho dos alunos.

Esta decisão não se apoiou simplesmente na minha experiência mas também em leituras. O documento do NCTM (2007), *Princípios e Normas para a Matemática escolar*, assim como diversos estudos neste âmbito (Gomes & Nacarato, 2007; Guerreiro, 2011; Ponte et al., 2007; Spierpinka, 1998) apontam a capacidade de comunicação matemática, como uma das capacidades basilares na promoção de aprendizagens matemáticas.

A reflexão que faço nesta altura, enquanto professora que investigou as suas práticas, é de que em termos profissionais a decisão de levar para a frente este trabalho foi, embora difícil, bastante positiva.

Sendo este um tema de grande pertinência para o ensino e aprendizagem da Matemática, e não sendo o ensino exploratório da Matemática ainda muito generalizado em Portugal, faz todo o sentido que se venham a realizar outros estudos neste âmbito. Ao terminar este estudo, fica para mim claro que permanecem em aberto algumas questões que podem ser objeto de estudo subsequentes:

- Que estratégias pode desenvolver o professor na fase da *galeria de tarefas* para melhorar a articulação com a fase da discussão coletiva?
- Como a escuta ativa é muito importante para o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática dos alunos (particularmente na discussão), que estratégias pode desenvolver o professor nas diversas fases da aula para a promover?

Por fim, espero que este trabalho contribua para a realização de reflexões, que inspire outros professores, tanto no estudo do tema como na utilização ou remodelação deste modelo de ensino ou, ainda, na conceção de outros modelos que venham a protagonizar estratégias promotoras do desenvolvimento de capacidades transversais e aprendizagens matemáticas dos alunos.

BIBLIOGRAFIA

Anghileri, J. (2006). Scaff olding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 33-52.

APM. (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino da Matemática (Relatório final).*Lisboa: APM.

Barrody, A. (1993). *Problem solving, reasoning, and communicating, K-8: Helping children think mathematically*.New York: Macmillan.

Belchior, F. (2003). Pedagogia, comunicação e existência. *Revista Portuguesa de Pedagogia, 3,* 197-230.

Belo, J. M. (2005). Comunicação didática e competência de comunicação: a necessidade de emergência de novos modelos. *Actas do Congresso da Associação Portuguesa de Ciências da Comunicação, 4.º SOPCOM* (pp. 305-316). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Boavida, A. M., & Menezes, L. (2012). Ensinar matemática desenvolvendo as capacidades de resolver problemas, comunicar e raciocinar: contornos e desafios. In L. Santos (Ed). *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 287-295). Portalegre: SPIEM.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico: Programa de formação contínua para professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico.* Lisboa: Ministério da Educação - Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting Mathematical communication in the classroom: Two preservice theachers' conceptions and pratices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 125-153.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, pp. 11-17.

Canavarro, A., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da Matemática: o caso de Célia. In L. Santos (Ed.), *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 255-266). Portalegre: SPIEM.

Carvalho, L. M., Oliveira, E. R., Freitas, Z. L., Carvalho, W. L., & Barros, M. T. (2009). Possibilidade da ação comunicativa na formação de professores de Ciências da Natureza e Matemática. *VII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências* (pp. 1-12). Florianópolis.

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14, 355-374.

Clampitt, P. G. (2005). *Comumunicating for managerial effectiveness.*London: SAGE.

Cloutier, J. (1975). *A era do EMEREC.* Lisboa: Ministério da Educação e Investigação - Instituto de Tecnologia Educativa.

Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1993). Discourse, mathematical thinking and classroom practice. In E. A. Forman, N. Minick, & C. A. Stone (Eds),*Contextos for learning: Sociocultural dynamics in children's* development (pp. 91-120). New York: Oxford University.

D'Ambrosio, B. (2009). *Leitura, Escrita e Educação Matemática: comunicação na aula de matemática.* Disponível em: http://alb.com.br/arquivo-morto/edicoes_anteriores/anais17/txtcompletos/conferencias/Beatriz_d_Ambrosio.pdf

D'Ambrósio, B., Kastberg, S., & Lambdin, D. (2007). Designed to differentiate: What is NAEP measuring? In P. W. Kloosterman & F. K. Lester (Eds.), *Results and interpretations of the 2003 mathematics assessments of the National Assessment of Education Progress* (pp. 289-309). Reston, VA: NCTM.

Doyle, W. (1983). Academic Work. *Review of Educational Research*, 53, 159-199.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classe: the contexte of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist*, 23(2),167-180.

Fidalgo, A. (n.d.). *A semiótica e os modelos de comunicação.* Disponível em: http://www.bocc.ubi.pt/pag/fidalgo-semiotica-modelos.html

Fiske, J. (1982). *Introduction to Communication Studies.*London: Nethuen.

Fonseca, J. (1994). Dimensão acional da linguagem e construção do discurso. In J. Fonseca, *Colecção Linguística* (pp. 105-131). Porto: Porto Editora.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2002). *Young Mathematicians at Work: Constucting Fractions, Decimals, and Percents.*Portsmouth. NH: Heinemann.

Freixo, M. J. (2011). *Teorias e Modelos de Comunicação* (2.ª ed.). Lisboa: Instituto Piaget.

Godino, J., & Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática*, 12 (1), 70-92.

Gomes, A. A., & Nacarato, A. (2007). *Tarefas exploratório-investigativas na EJA: comunicando ideias matemáticas.* Disponível em: www.sbem.com.br/files/ix_enem/.../CC28147183801R.doc

Guerreiro, A. (2011). *Comunicação no ensino-aprendizagem da matemática: Práticas no 1.º ciclo do ensino básico (*Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa*).*

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). *Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning.* Disponível em: https://mathedseminar.pbworks.com/w/file/fetch/57725932/henningsen_Stein_1997.pdf

Hierbert, J., & Wearne, D. (1993). Instructional taskes, classroom discourse, and students' learning in second-grade arithmetic. *American Educational Research Journal*, 30, 393-425.

Lappan, G., & Schram, P. (1989). Comunication and reasoning: Critical dimensions of sense making in mathematics. In P.R. Trafton & A. P. Shulte (Eds). *New directions for elementary school mathematics* (pp. 14-30). Reston, VA: NCTM.

Lindstone, J. (1995). *Como lidar com os media*. Mem Martins: Cetop.

Martinho, M. H. (2007). *A comunicação na sala de aula de matemática: Um projeto colaborativo com três professoras do ensino básico (*Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Martinho, M. H. (2009). *A comunicação na aula de matemática: o papel do professor*. Disponível em: https://repositorium.sdum.uminho.pt/.../XXSIEM_Conf3_Martinho.pdf

Martinho, M. H., & Ponte, J. P. (2005). Comunicação na sala de aula de Matemática: Práticas e reflexão de uma professora de matemática. In J. Brocardo, F. Mendes, & A. M. Boavida (Ed.), *Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 103-123). Setúbal: APM.

Martins, P. (2009). *A Epistemologia da comunicação*. Disponível em: http://pmartins-simplesmentecomunicar.blogspot.pt/2009/12/epistemologia-da-comunicacao.html

Mayo, R. (2007). *Connections Between Communication and Math Abilities*. Disponível em: http://digitalcommons.unl.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1021&context=mathmidsummative

McQuail, D., & Windahal, S. (2003). *Modelos de comunicação: para o estudo de comunicação de massas.* Lisboa: Editorial Notícias.

Mendes, F., Oliveira, H., & Brocardo, J. (2013). A evolução dos procedimentos usados pelos alunos: contributo de uma experiência de ensino centrada na multiplicação. *Quadrante*, *22(1)*, 133-162.

Menezes, L. (1995). *Concepções e práticas de professores de matemática: Contributos para o estudo da pergunta.* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Menezes, L. (1996). A comunicação na aula de matemática. *Millenium*, *3*, 20-28.

Menezes, L. (2000). *Comunicação na aula de matemática e desenvolvimento profissional de professores*. Disponível em: http://www.ipv.pt/millenium/20_ect7.htm

Menezes, L. (2004). Desenvolvimento da comunicação matemática em professores do 1.º ciclo no contexto de um projecto de investigação colaborativa. In A. Boavida (Eds). *Actas do XVI SIEM* (pp. 349-365). Setúbal: APM.

Menezes, L. (2004). *Investigar para ensinar matemática: contributos de um projeto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores.* Disponível em: http://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/1149/4/Investigar%20para%20ensinar%20Matem%C3%A1tica.pdf

Menezes, L., Delplancq, V., & Castanheira, G. (2014). Classe de Mathématiques réalité et communication. No prelo.

Menezes, L., Ferreira, T. R., Martinho, H. M., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de matemática. No prelo.

Menezes, L., Guerreiro, A., Martinho, M. H., & Ferreira, T. (2013). Essay on the Role of Teachers' Questioning in Inquiry-Based Mathematics Teaching. *SISYPHUS Journal of Education, 1(3)*, 44-75.

Ministère de L'Education de L'Ontario. (2011). La communication en classe de mathématiques .*Accroître la capacité: Série d'apprentissage professionnel*, 13, 1-8. Disponível em: http://www.edu.gov.on.ca/fre/literacynumeracy/inspire/research/CBS13Fr.pdf

Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Moreira, S. A., & Fonseca, L. (2009). A comunicação e a resolução de problemas envolvendo padrões. *Actas do XIXEIEM.* Vila Real. Disponível em: http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2009

NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

Newstrom, J. W., & Davis, K. (1997). *Organizational Behavior: human behavior at work.* New York:McGraw Hill.

Newstrom, J. W., & Davis, K. (1997). *Organizational Behavior: a management challeng.* Fort Worth:the Dryden Press.

Nicol, C. (1999). Learning to teach Mathematics: Questioning, Listening, and Responding. *Educational Studis in Mathematics* 37, 45-66.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante, 22 (2)*, 30-53.

Pepin, B. (2011). How Educational Systems and Cultures Mediate Teacher Knowledge: 'Listening' in English, French and German Classrooms. In T. Rowland, K. Ruthven, T. Rowland, & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching Mathematics* (pp. 119-134). Cambridge: Springer.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms.*London: Routledge.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante, 3(1)*, 3-18.

Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In I. G. (Ed), *O Professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.),. In *O professor e o desenvolvimento* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., et al. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de matemática. *Revista Portuguesa de Educação, 20(2)*, 39-74.

Quivy, R., & Campenhoudt, L. V. (1992). *Manual de investigação em ciências sociais.* Lisboa: Gradiva.

Radford, L., & Demes, S. (2004). *La communication comme compétence.* Disponível em: Luis Readford: http://www.luisradford.ca/books/communication/chap2.pdf

Rodrigues, C., Menezes, L., & Ponte, J. P. (2014). Práticas de discussão matemática no ensino da ÁlgebraIn. In. M. H. Martinho, R. A. Tomás Ferreira, A. M. Boavida & L. Menezes (Eds.), *Atas do XXV Seminário de Investigacão em Educacão Matemática* (pp. 65-78). Braga: APM.

Schramm, W. (1963). *The science of human communication.* New York: Basic Books.

Serrazina, L. (n.d.). *Resolução de problemas: o porquê da resolução de problemas.*Disponível em: http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/COORDENADORES/Materiais%20Coordenad/Textos/Problemas_texto_Coord.pdf

Sfard, A. (2008). *Thinking as comunicating: Human development, the grouth of discourss, and mathemaitizing.* Cambrige, UK: Cambridge University Press.

Shannon, C., & Weaver, W. (1948). *The mathematical theory of communication*. Disponível em: http://raley.english.ucsb.edu/wp-content/Engl800/Shannon-Weaver.pdf

Silva, B. D. (1998). *Educação e comunicação.* Braga: Instituto de educação e Psicologia, Universidade do Minho.

Sousa, A. (2005). *Investigação em Educação.*Lisboa: Livros Horizonte.

Spierpinska, A. (1998). Tree epistemologies, tree views of classroom communication: Constructivism, sociocultureal approaches, interactionism. In M. G.H. Steinbring, M. G.Bartolini Bussi & A. Sierpinski (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom* (pp. 30-62). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). *Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell, Mathematical Thinking and Learning.* Disponível em: http://vocserve.berkeley.edu/faculty/RAEngle/SteinEngleSmithHughes(inpress).pdf

Stein, M. K., Grover, B., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An alalysis of mathematical tasks used in reform classroom. *American Educational Research Jornal*, 33(2), 455-488.

Vasconcelos, T., & Neto, S. (n.d.). *Modelos de Comunicação: modelos de base cibernética*. Disponível em: http://modelosdecomunicacao.blogspot.pt/: http://modelosdecomunicacao.blogspot.pt/p/modelos-de-base-cibernetica.html

Ventura, S. (2010). *Os modelos de comunicação*. Disponível em: pt.slideshare.net: http://pt.slideshare.net/sergio.srav/os-modelos-de-comunicacao

Viali, L., & Silva, M. M. (2007). A linguagem matemática como dificuldade para os alunos do ensino médio. *ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática).* Belo Horizonte.

Vygotsky, L. S. (2007). *Pensamento e Linguagem.* Lisboa: Relógio D'Água.

Yackel, E. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*, 458-477.

ANEXOS

ANEXO 1 – Grelha de avaliação da capacidade de comunicação matemática “Organização da Apresentação”

Grelha de avaliação da capacidade de comunicação em matemática

ORGANIZAÇÃO DA APRESENTAÇÃO: os alunos organizam a sua apresentação e apoiam as suas ideias em diferentes formas de comunicação (diagramas, tabelas, desenhos, esquemas, etc), com **lógica**, **clareza e eficácia.**

TAREFA____Data __ / __ / __

			Clareza			Lógica			Eficácia		
Nº	NOME	n/observações	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											

Clareza: É exprimido de forma nítida as ideias dos alunos, com recurso a vocabulário e esquemas apropriados e de fácil interpretação, sendo compreendido por professor e colegas. Considera-se nível baixo (1) sempre que a organização e apresentação é confusa e utiliza termos incorretos, não sendo compreendido. Considera-se médio (2), sempre que apesar de apresentar ideias corretas, utiliza vocabulário impreciso ou errado e a apresentação não é de fácil interpretação ou/e é pouco clara. Considera-se elevado (3), sempre que apresenta ideias corretas, é utilizado vocabulário adequado. E os esquemas são apropriados facilitando a interpretação das ideias. **Eficácia:** Os alunos organizam a sua apresentação com qualidade, enriquecendo a discussão. Considera-se nível baixo(1) sempre que a apresentação é confusa e incompleta, considera-se nível médio82) sempre que a apresentação dá alguma contribuição para a discussão e nível alto (3) quando a apresentação contribuí significativamente para a discussão de ideias. **Lógica**: Os esquemas/desenhos/ registos revelam raciocínio, coerência, isto é, conexão entre as ideias discutidas. Considera-se nível baixo (1) quando os esquemas/desenhos/registos revelam pouco raciocínio e pouca conexão entre as ideias, não manifestando grande lógica. Nível médio (2) quando os esquemas/desenhos/registos revelam raciocínio e conexão entre as ideias, embora manifeste alguma confusão. Nível alto (3) quando os esquemas/desenhos/registos revelam raciocínio, grande coerência e conexão entre as ideias.

ANEXO 2 – Grelha de avaliação da capacidade de comunicação matemática "Expressão de ideias"

Grelha de avaliação da capacidade de comunicação em matemática

EXPRESSÃO DE IDEIAS: O aluno, por sua iniciativa, exprime ideias e processos matemáticos usando vocabulário próprios com **clareza, pertinência e profundidade**

TAREFA:____Data __ / __ / __

			Clareza			**Pertinência**			**Profundidade**		
Nº	NOME	n/observações	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											

Clareza: Exprime com nitidez as suas ideias, recorrendo a vocabulário próprio, sendo compreendido por colegas e professor. Considera-se nível baixo (1) sempre que é confuso e utiliza termos incorretos, não sendo compreendido. Considera-se médio (2), sempre que apesar de apresentar ideias corretas, utiliza vocabulário impreciso ou errado. Considera-se elevado (3), sempre que apresenta ideias corretas e utiliza vocabulário adequado.

Pertinência: Revela lógica de ligação entre os assuntos. Considera-se nível baixo (1) sempre que não estabelece ligação com outros assuntos. Considera-se médio(2) , sempre que estabelece pouca ligação com outros assuntos e elevado (3), sempre que estabelece diversas ligações com outros assuntos.

Profundidade: Revela dominar aspetos mais complexos dos assuntos. Considera-se nível baixo (1) sempre que não revela. Considera-se nível médio (2) sempre que revela algumas vezes. Considera-se elevado (3) sempre que revela muitas vezes.

ANEXO 3 – Grelha de avaliação da capacidade de comunicação matemática "Escuta e Responde"

<u>Grelha de avaliação da capacidade de comunicação em matemática</u>

ESCUTA E RESPONDE: os alunos, na sequência do que ouvem, discutem resultados, processos e ideias matemáticos com **eficácia**, **lógica** e **pertinência**.

TAREFA:____Data __ / __ / __

			Eficácia			Lógica			Pertinência		
Nº	NOME	**n / observações**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											

<u>Eficácia:</u> O aluno responde com qualidade aos argumentos e ideias dos colega, enriquecendo a discussão. Considera-se nível Baixo (1) sempre responde com alguma qualidade mas não enriquece a discussão, nível médio (2) sempre que responde com alguma qualidade a alguns argumentos e ideias e enriquece, embora pouco, a discussão e considera-se nível elevado (3) sempre que responde com qualidade e enriquece a discussão. **<u>Lógica</u>**: O aluno apresenta argumento/resposta que revela raciocínio, coerência, isto é, conexão entre as ideias discutidas. Considera-se nível baixo (1) sempre que a resposta do aluno revela um raciocínio confuso, não sendo compreendido, pouco coerente e pouca conexão entre as ideias. Nível médio (2) sempre que, embora apresente raciocínio, revele pouca ligação entre as ideias e nível alto (3) sempre qua apresente raciocínio, coerência e conexão entre as ideias. **<u>Pertinência</u>**: O aluno apresenta argumentos/respostas que revelam lógica de ligação entre os assuntos a ser discutidos, respondendo com elementos que provam o que pretende manifestar. Considera-se nível baixo (1) quando não dá resposta pertinente, sem elementos que provem a lógica de ligação entre as ideias. Nível médio (2) quando manifesta alguma pertinência e nível alto (3) quando apresenta muitas vezes elementos que provam a lógica entre as ideias/assuntos.

ANEXO 4 – Ficha de diagnóstico de matemática

ESCOLA BÁSICA E SECUNDÁRIA ABEL BOTELHO DE TABUAÇO

FICHA DE DIAGNÓSTICO DE MATEMÁTICA – 5.º ANO

Nome_____________________________Nº____ Turma____ Data:___/___/___

Professor________________________

1. **Escreve** o nome de cada um dos seguintes sólidos geométricos:

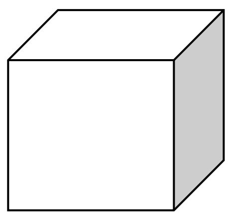
A **B** **C** **D** **E**

A __________________________ B __________________________

C __________________________ D __________________________

E __________________________

2. Na figura ao lado está representado um cubo.



2.1. Quantas faces tem o cubo? ___________

2.2. E quantas arestas? ____________

2.3. E quantos vértices? ___________

3. O que virá a seguir?

☺ ● □ ☺☺ ● ● □□ ☺☺☺ …

7. **Escreve** a leitura dos seguintes números:

a) 227 ____

b) 78531 ____

c) 12,5 ____

8. **Escreve**, usando algarismos, os seguintes números:

a) Setenta e três ________________________

b) Vinte e duas unidades e seis centésimas _______

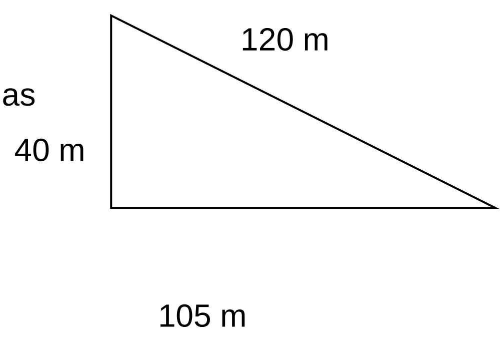
c) Quarenta e dois mil cento e vinte e um ________

9. **Escreve** os números por ordem crescente:

127 ; 471 ; 741 ; 1270 ; 97 ; 10,6

____

10. O Sr. Aníbal tem um terreno que tem a forma e as medidas representadas na figura.



- **Calcula** a quantidade de rede que é necessária para vedar o terreno. Justifica a tua resposta.

11. Um comboio com destino a Lisboa saiu do Porto com 310 passageiros. Em Coimbra saíram 45 passageiros e entraram 29.

- Com quantos passageiros saiu o comboio desta estação? Justifica a tua resposta.

12. **Calcula**:

a) Metade de uma dúzia (canto superior direito)

b) Um terço de 15 (canto inferior esquerdo)

c) Um quarto de 100 (canto superior esquerdo)

d) O dobro de um cento (canto inferior direito)

13. **Efetua** a seguinte operação:

10672 : 5,8 =

ANEXO 5 – Teste de diagnóstico da capacidade de comunicação matemática

TESTE DIAGNÓSTICO

Comunicação matemática

Representa informações e ideias matemáticas de diversas formas.

Exprime ideias e processos matemáticos por escrito, usando a notação e vocabulário próprios.

(evolvendo as competências de resolução de problemas e raciocínio)

Nome___________________________________ Nº__ Turma___ Data___ / ___ / ___

PUZZLES…

1. O Manuel tem um *puzzle* com **125 peças** e a Rosa tem um com **250 peças.** Quando estão montados, os *puzzles* formam retângulos com a mesma área.
   Na figura estão representadas uma peça do *puzzle* do Manuel e uma peça do *puzzle* da Rosa.

Fig.1

A B

1.1. Qual das peças, A ou B, pode pertencer ao *puzzle* da Rosa?
Explica a tua resposta.

Moedas…Que problema!

2. O Manuel guarda moedas de 2 cêntimos num frasco.
   O Frasco vazio pesa 500 gramas.
   Quanto pesará o frasco cheio com 1000 moedas de 2 cêntimos?

   Apresenta o resultado em **quilogramas**.

   Explica como encontraste a tua resposta.
   Para o fazeres podes usar palavras e contas.

Moedas	Peso (gramas)
	2,30
	3,06
	3,92

3. Observa o triângulo numérico.

3.1. Descobre a próxima linha do triângulo.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

3.2. Explica como descobriste os números que usaste para completar a linha do triângulo.

ANEXO 6 – Planificação da aula 1

PLANIFICAÇÃO

AULA 1

NÚMEROS NATURAIS

Subtópicos	Tarefa	Material	Tempo (min)	Data prevista
Multiplicação. Propriedades comutativa, associativa e distributiva.	**Instituição de solidariedade**	Folha A4 com o enunciado da tarefa. Folha A3 para registo dos trabalhos	**50 + 50**	**14 novembro**

"Uma instituição de solidariedade recebeu 25 caixas, tendo cada caixa 18 pacotes de bolachas.

Quantos pacotes de bolachas recebeu a instituição?

Se cada pacote tinha 24 bolachas, quantas bolachas havia nas 25 caixas?

Explica a resolução do problema e compara-a com a dos teus colegas."

Figura 50 – Enunciado da tarefa "Instituição de solidariedade".

Aprendizagens visadas

Os alunos, com a sua aprendizagem no âmbito deste tema, devem ser capazes de:

- Compreender as propriedades e regras da multiplicação e usá-las no cálculo.
- Resolver problemas que envolvam propriedades da multiplicação.

- Identificar os dados, as condições e o objetivo do problema.
- Conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados.
- Explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos, recorrendo a exemplos e contraexemplos e à análise exaustiva de casos.
- Interpretar a informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas.
- Representar informação e ideias matemáticas de diversas formas**.**

Indicações metodológicas

Apresentação e desenvolvimento. Depois de um dos alunos abrir a lição, a professora anuncia: " Hoje vamos trabalhar uma tarefa em grupo". Os alunos são distribuídos por grupos de trabalho. Depois de se certificar de que estão todos acomodados, a professora distribui a tarefa e uma folha A3 a cada grupo. Entretanto, a professora informa de que terão cerca de 20 minutos para a resolução da tarefa na folha A3, findo esse tempo, as referidas folhas serão afixadas na *galeria de tarefas*, antes da apresentação e discussão.

Durante a resolução da tarefa em grupo, a professora circula pela sala, dissipando dúvidas e incentivando os alunos a realizarem o trabalho e a registarem o seu pensamento, a sua estratégia. Para isso, a professora acompanha os trabalhos realizados e, quando achar oportuno, coloca questões como: "Como pensaste? Porquê? Explica-me a tua ideia". Terminado o tempo dado para a resolução da tarefa, a professora recolhe as folhas e afixa-as no espaço destinado à *galeria de tarefas*. De seguida, convida os alunos a observarem as folhas expostas e a registarem comentários nas mesmas, sempre que acharem pertinente.

Discussão coletiva. Os grupos são convidados a explicarem e justificarem oralmente a sua resposta e a sua resolução. Por sua vez os alunos são incentivados a discutirem e justificarem os comentários que registaram nas folhas da *galeria de tarefas*.

A professora anima e modera a discussão, promovendo a comunicação matemática e a negociação de significados, colocando questões que levem os alunos a explicar e justificar os seus resultados e a discuti-los (escutando, respondendo, perguntando) com os restantes alunos da turma: "Explica lá isso. Porquê? Como pensaste? Concordam?"

De acordo com o *feedback* dos alunos, a professora rege colocando novas questões e adaptando o seu discurso de modo a fazer pensar e a fazer falar.

Durante a discussão, a professora controla ruídos que possam dificultar a comunicação: linguagem, atenção dos alunos, expressão corporal, sons, etc.

Espera-se que os alunos expliquem e justifiquem as suas ideias matemáticas, apresentando os seus argumentos, utilizando linguagem e vocabulário apropriado, escutem e questionem as ideias e procedimentos dos colegas.

*Sistematização***.** A professora, em colaboração com os alunos, elabora uma tabela no quadro, onde regista as principais ideias da resolução dos grupos, procurando sistematizar os conceitos fundamentais que estivaram a ser trabalhados. Para isso, a professora pergunta:

a. A troca da ordem dos fatores altera o produto?
b. O produto altera-se se associares os fatores de forma diferente?
c. Isso é sempre verdade?
a. Como se lê 25 x 18 = 450?

E, em colaboração com os alunos, regista no quadro:

- A **multiplicação** de números naturais é a operação que a um par de números, os **fatores**, faz corresponder um número que se chama **produto**.

(25,18) 25 18 ou 450 $25 \times 18 = 450 \longrightarrow$ O produto de vinte e cinco por três é quinze.

- A multiplicação é comutativa, isto é, a ordem dos fatores não altera o produto:

$a \times b = b \times a$ (a, b representam números naturais)

- A multiplicação é associativa, isto é, o produto não depende do modo como se associam os fatores:

$a \times b \times c = a \times (b \times c)$ (a, b, c representam números naturais)

Caso na discussão dos resultados não surja a oportunidade, a professora propõe:

- Substitui cada ponto de interrogação:

$\mathbf{7} \times \mathbf{5} \times ? = \mathbf{7} \times ? \times \mathbf{5} = \mathbf{35}$ $? \times \mathbf{89} = \mathbf{89} \times ? = \mathbf{89}$

✓ O que podemos concluir?

" 1 é o elemento neutro da multiplicação"

ANEXO 7 – Planificação da aula 2

AULA 2

PLANIFICAÇÃO

NÚMEROS NATURAIS

Subtópicos	Tarefa	Material	Tempo previsto (min)	Data prevista
Propriedades das operações e regras operatórias	**O terreno do João e da Ana**	Folha A3	**50**	**22 de novembro**

O João e a Ana calcularam por dois processos diferentes a área do terreno representado na figura.

Tenta também calcular a área do terreno por dois processos diferentes.

Explica o teu raciocínio.

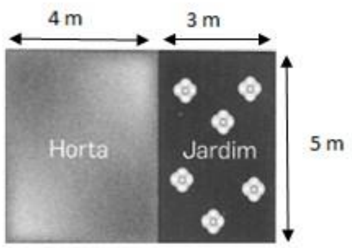


Figura 51 – Enunciado da tarefa "O terreno do João e da Ana".

Aprendizagens visadas

Os alunos, com a sua aprendizagem no âmbito deste tema, devem ser capazes de:

- Compreender as propriedades e regras das operações e usá-las nos cálculos.
- Resolver problemas que envolvam as propriedades da multiplicação.
- Resolver problemas, raciocinar e comunicar em contextos numéricos
    - Identificar os dados, as condições e o objetivo do problema.
    - Conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados e dos processos utilizados.
    - Representar informação e ideias matemáticas de diversas formas, com clareza, lógica e eficácia.
    - Explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos com eficácia, lógica e pertinência.
    - Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios com clareza, originalidade e precisão.

Indicações metodológicas

Apresentação da tarefa. A professora desafia os alunos a realizar a tarefa em pequenos grupos. Depois de distribuído o enunciado da tarefa e uma folha de tamanho A3, a professora pede a um aluno que a leia "Vamos todos escutar a leitura da tarefa", depois de lida, a professora solicita a outro aluno "Queres explicar-nos o que vos é pedido?" com intenção de auscultar como foi percebida a mensagem. É suposto que o aluno responda " Temos que calcular a área da figura mas por dois processos diferentes e depois temos que explicar como pensámos", caso não aconteça a professora insiste solicitando a outro aluno a explicação até que esta fique clara.

Os alunos são informados que têm 20 minutos para a sua resolução. Entretanto a professora pede aos grupos que registem na folha de tamanho A3, a resolução da tarefa proposta.

Resolução da tarefa. Com a resolução desta tarefa, pretende-se que os alunos calculem a área da figura da seguinte forma: $(4 + 3) \times 5$ e $4 \times 5 + 3 \times 5$. A professora acompanha o trabalho dos grupos ajudando a interpretar o problema "o que vos pede para fazer? Como podes fazer? Como se calcula a área de uma figura retangular?", desbloqueando dificuldades, estimulando os alunos a realizar o trabalho e a discutir a tarefa. Cabe à professora, também, o cuidado acrescido na utilização dos termos matemáticos, servindo como modelo, evitando corrigir diretamente os alunos mas reforçar, sempre que necessário, a ideia do aluno utilizando o vocabulário apropriado da matemática "Qual é a soma dos comprimentos?" "Qual é o produto da soma?". Esta linguagem específica da matemática deve ocorrer de forma natural, sempre após a expressão das suas ideias pelo aluno. A introdução do vocabulário tem que ser progressiva, também ele negociado através do diálogo, na discussão e argumentação das ideias, para que este passe a fazer sentido e passe a ser utilizado pelo aluno de forma natural e sistemática. Para isso, a professora procurará colocar perguntas que estimulem o pensamento e a discussão "Explica como pensaste?" "Porquê?" "Concordas?" evitando as perguntas que levem os alunos a concordar ou a discordar.

Galeria de tarefas. Ao fim de cerca de vinte minutos as folhas são recolhidas e afixadas na *galeria de tarefas,* usando o quadro para esse fim. Os alunos são convidados a levantarem-se e ordeiramente observarem as resoluções dos colegas e a registarem comentários que acharem pertinentes. Esta atividade permite que os alunos se inteiram dos procedimentos e estratégias dos colegas, proporcionando a oportunidade de se confrontarem com diferentes resoluções, realizarem aprendizagens com os seus pares e ainda contribuir para a discussão que se realizará a seguir. Para evitar ruídos precursores de distrações e desconcentrações, a professora orienta os grupos na visita à galeria fazendo com que se levante um grupo após o outro ter terminado a visita, num máximo de dois grupos juntos na galeria. Neste momento da aula, a professora aproveita para analisar, também, as resoluções dos alunos sem interferir nas suas observações e/ou nos seus comentários.

*Discussão da tarefa***.** Nesta fase da aula, alguns grupos são convidados a explicarem e justificarem a sua resposta e a estratégia utilizada, junto à galeria onde está exposta a sua folha. A professora seleciona a ordem dos grupos, para a apresentação, a partir das suas resoluções, começando pelas mais simples (soluções e estratégias baseadas em conceitos) e terminando nas que apresentam estratégias mais eficazes. Os restantes colegas são também convidados a justificar os seus comentários e a confrontar os argumentos dos apresentadores É suposto que nesta fase, uma vez que todos estão a par de todas as resoluções, todos os alunos se sintam motivados a participar. Cabe à professora moderar a discussão promovendo a comunicação matemática e a negociação de significados, para isso colocará perguntas que estimulem a expressão de ideias e o pensamento, evitando as perguntas fechadas e direcionadas (que levam os alunos a responder o que pretende): "Que forma tem o terreno?", "Como está dividido?", "Expliquem como pensaram para encontrar a área de duas maneiras diferentes?", "Qual é a diferença e a semelhança entre os dois processos?", "O que observamos?", Que conclusão poderemos retirar?". Cabe também, à professora, dar tempo aos alunos para exporem as suas ideias matemáticas.

A professora reage ao *feedback* dos alunos colocando novas questões e adaptando o seu discurso, de modo a fazer pensar e a fazer falar "Concordas com o teu colega? Porquê?". Se o aluno apresentar outro processo, como por exemplo, aplicando a propriedade comutativa, a professora diz:" Muito bem, sendo assim qual é a diferença entre os dois processos?", "E a semelhança?". De seguida, convida o grupo que apresentar o processo basado na propriedade distributiva e explora a sua explicação com os alunos.

Sistematização. A professora, em colaboração com os alunos, regista no quadro:

- $\mathbf{5} \times (4 + 3) = 4 \times \mathbf{5} + 3 \times \mathbf{5}$
  O produto de um número natural por uma soma é igual à soma dos produtos desse número por cada uma das parcelas da soma.
- A multiplicação é distributiva em relação à adição.
- $\mathbf{5}$ é o fator comum e está em evidência em $\mathbf{5} \times (4 + 3)$

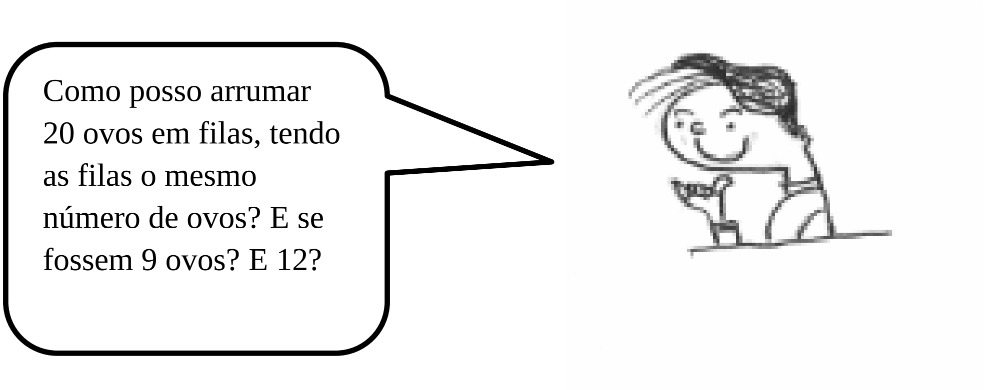
ANEXO 8 – Planificação da aula 3

PLANIFICAÇÃO

AULA 3

NÚMEROS NATURAIS

Subtópicos	**Objetivos**	**Tarefa**	**Material**	**Tempo (min)**	**Data prevista**
Divisores de um número	Determinar os divisores de um número natural. Usar corretamente os termos «divisor», «divisível», «múltiplo» e «fator»	**Ovos e mais ovos**	Peças de ábaco, feijão ou grão, para fazer de ovos Folha A3	**50 + 50**	**17 janeiro**



Mostra como procedeste (podes fazer desenhos, por exemplo).

Figura 52 - Enunciado da tarefa.

Aprendizagens visadas

Os alunos, com a sua aprendizagem no âmbito deste tema, devem ser capazes de:

- Determinar os divisores de um número natural.

- Usar corretamente os termos: divisor, divisível, múltiplo e fator
- Resolver problemas, raciocinar e comunicar em contextos numéricos
    - Identificar os dados, as condições e o objetivo do problema.
    - Conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados e dos processos utilizados.
    - Representar informação e ideias matemáticas de diversas formas, com clareza, lógica e eficácia.
    - Explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos com eficácia, lógica e pertinência.
    - Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios com clareza, originalidade e precisão.

Indicações metodológicas

Apresentação e desenvolvimento. A professora desafia os alunos a realizar a tarefa "**Ovos e mais ovos**" em pequenos grupos. Depois de distribuído o enunciado da tarefa a professora pede a um aluno que a leia "Vamos todos escutar a leitura da tarefa", depois de lida, a professora solicita a outro aluno "Queres explicar-nos o que vos é pedido?" com intenção de auscultar como foi percebida a mensagem. É suposto que o aluno responda " Pede-nos para arrumar os ovos em filas e de quantas formas o podemos fazer. Mas as filas têm que ter o mesmo número de ovos. Primeiro para 20 ovos, depois para 9 e depois para 12. Também nos pede para explicar como pensamos fazendo desenhos". Caso o *feedback* não seja o esperado, a professora solicita a outros alunos para ajudar na explicação, se mesmo assim houver dificuldades a professora interpreta, com os alunos, a tarefa " O que nos pede para fazer com os vinte ovos?", "O que quer dizer arrumar em filas?", " Que número de ovos tem que ter essas filas?" "Para quantos ovos temos que fazer?", "Como vamos mostrar aos colegas os nossos procedimentos?".

Os alunos são informados que têm 35 minutos para a sua resolução. Entretanto a professora distribui os materiais para representar os ovos e uma folha branca, A3, ao mesmo tempo que solicita aos grupos que registem nessa folha a resolução da tarefa proposta. Com a resolução da tarefa pretende-se que os alunos mostrem que para 20 ovos e para que todas as filas tenham o mesmo número de ovos e não sobre nenhum, podemos ter em cada fila

1,2,4,5,10 ou 20 ovos assim como para 9, podem ter filas com 1,3 e 9 ovos ou para 12 que pode ter 1,2,3,4,6 ou 12 ovos.

A professora acompanha o trabalho dos grupos ajudando a interpretar o problema "o que vos pede para fazer? Como podes fazer?", desbloqueando dificuldades, estimulando os alunos a realizar o trabalho e a discutir a tarefa "Usem o material e desenhem o que fizeram, será que podes encontrar outra fila?", "Quantas filas têm ai? Podem representar os esses esquema utilizando símbolos matemáticos? Quais? A que operação recorreram? Porquê?" Cabe à professora, também, o cuidado acrescido na utilização dos termos matemáticos, servindo como modelo, evitando corrigir diretamente os alunos mas reforçar, sempre que necessário, a ideia do aluno utilizando o vocabulário apropriado da matemática "O produto do número de ovos de cada fila pelo número de filas é 20" ou "O produto desses pares de números naturais é 20". Contudo, esta linguagem específica da matemática deve ocorrer de forma natural, sempre após a expressão das suas ideias pelo aluno a fim de evitar o risco da falta de sentido para este. A não compreensão da mensagem, por falta de conhecimento do sentido do vocabulário específico é um dos ruídos a que a professora deve estar atenta e evitar. Por essa razão, a introdução do vocabulário tem que ser progressiva, também ele negociado através do diálogo, na discussão e argumentação das ideias, para que este passe a fazer sentido e passe a ser utilizado pelo aluno de forma natural e sistemática. Para isso, a professora pode questionar, fazer falar e reforçar a ideia, como nos exemplos dados anteriormente, recorrendo a um tipo de comunicação pessoal manipulativa e assertiva.

Ao fim de cerca de vinte minutos, as folhas são recolhidas e afixadas na *galeria de tarefas,* usando o quadro para esse fim. Os alunos são convidados a levantarem-se e ordeiramente observarem as resoluções dos colegas e a registarem comentários que acharem pertinentes. Esta atividade permite que os alunos se inteiram dos procedimentos e estratégias dos colegas, proporcionando a oportunidade de se confrontar com diferentes resoluções, criando-lhes a expetativa para a posterior explicação e tempo para pensarem numa intervenção, participando ativamente na discussão gerada a quando da apresentação e argumentação de cada grupo. Para evitar ruídos precursores de distrações e desconcentrações, a professora orienta os grupos na visita à galeria fazendo com que se levante um grupo após o outro ter terminado a visita, num máximo de dois grupos juntos na galeria.

*Discussão da tarefa***.** Nesta fase da aula, alguns grupos são convidados a explicarem e justificarem a sua resposta e a estratégia utilizada, junto à galeria onde está exposta a sua folha. Os restantes colegas são também convidados a justificar os seus comentários e a confrontar os argumentos dos apresentadores É suposto que nesta fase, uma vez que todos estão a par de todas as resoluções, todos os alunos se sintam motivados a participar. Cabe à professora moderar a discussão promovendo a comunicação matemática e a negociação de significados:

Alguns grupos vão explicar à turma a sua resolução e os seus resultados. É-lhes solicitado que justifiquem as suas respostas e os seus desenhos apresentando argumentos tendo oportunidade de recorrerem à linguagem específica da matemática. A professora estimula a discussão colocando perguntas como: "Quantas filas de ovos têm ai? Na horizontal? E na vertical? Que relação existe entre os fatores e o respetivo produto? Porquê? Explica a tua ideia". A professora reage ao *feedback* dos alunos colocando novas questões e adaptando o seu discurso, de modo a fazer pensar e a fazer falar "Concordas com o teu colega? Porquê?". Se o aluno argumentar que pode dividir os vinte ovos por cinco filas, com quatro ovos cada fila e que não sobra nenhum, a professora pode dizer " Muito bem, sendo assim neste caso que propriedade da divisão se verifica? Porquê", esperando-se que o aluno responda "Divisão inteira porque o resto é zero" ou "Porque não há resto", " E se olharmos para o mesmo desenho na vertical, os ovos estão divididos em quantas filas?", "Não podemos representar esse esquema com outra operação? Qual? Que relação encontram entre os fatores e o respetivo produto?". Espera-se que os alunos expliquem e justifiquem as suas ideias matemáticas, apresentando os seus argumentos, utilizando linguagem e vocabulário adequado "**operação divisão**, **operação multiplicação**, **produto**, **fatores**, **dividendo**, **diviso**r, **quociente** e **resto**, **vertical** e **horizonta**l". A professora aproveita uma oportunidade para informar que o 5, por exemplo, é divisor de 20 assim como o 4, uma vez que o produto de 5 por 4 é 20. 20 é divisível por 5 e por 4. "Quais são os divisores de 20?" "Porquê?". "Quais são os divisores de 9? Porquê?". "Quais são os divisores de 12? Porquê? Porque é que 12 não é divisor de 20? E o 20 é divisor de si próprio?"." Isso acontece para todos os números? Porquê?". "O que podemos concluir?". "Qual é o número que é divisor de todos os números? Porquê?". "Quantos divisores tem o 20? E o 12?". "O que podemos concluir em relação ao conjunto de divisores de um número?" Nesta altura da discussão, a professora conduz o diálogo para que os alunos utilizem os vocábulos **divisíveis** e **divisor**. Espera-se, também, que os alunos refiram que 12 é múltiplo de 6, 12 é divisível por 6 e 6 é divisor de 12, caso não o façam, a professora conduz o diálogo nesse sentido. A professora continua a promover a discussão perguntando “Quais são os divisores de 5? E de 7? Encontram mais números que só tenham dois divisores? Quais? O que podemos concluir?”.

Sistematização. A professora, em colaboração com os alunos, regista no quadro:

Os **divisores** de 20 são: 1,2,4,5,10 e 20: 1 x 20 = 20 2 x 10 = 20 4 x 5 = 20 20 é **múltiplo** de 2 20 é **divisível** por 2 2 é **divisor** de 20	Os **divisores** de 9 são: 1, 3 e 9 1 x 9 = 9 3 x 3 = 9 9 é **múltiplo** de 3 9 é **divisível** por 3 3 é **divisor** de 9	Os **divisores** de 12 são: 1, 2, 3, 4, 6 e 12 1 x 12 = 12 2 x 6 = 12 3 x 4 = 12 12 é **múltiplo** de 2 12 é **divisível** por 2 2 é **divisor** de 12

12 não é divisor de 20 porque 20 não é múltiplo de 12. Não há um número natural cujo produto por 12 seja 20 $\_\_ \times 12 = 20$

Os divisores de 5 são: 1 e 5

Os divisores de 3 são: 1 e 3

Os divisores de 7 são: 1 e 7

- Há números que só têm dois divisores, o um e o próprio número.
- Todo o número natural é divisor de si próprio.
- O número 1 é divisor de todos os números naturais.
- O conjunto dos divisores de um número é um conjunto finito.

ANEXO 9 – Planificação da aula 4

PLANIFICAÇÃO

AULA 4

Completa o quadro, colocando ✕ quando se verifica a condição de um número ser divisível. Acrescenta números naturais à tua escolha.

Número	8	17	25	63	88	270	840	3600	…
É divisível por 2?									
É divisível por 5?									
É divisível por 10?									
É divisível por 3?									
É divisível por 4?									
É divisível por 9?									

Tenta redigir uma regra que substitua o cálculo quando queres saber se um número é, ou não, divisível por 2, 5, 10, 3, 4 ou 9.

NÚMEROS NATURAIS

Subtópicos	Objetivos	Tarefa	Material	Tempo (min)	Data prevista
Critérios de divisibilidade	Utilizar os critérios de divisibilidade por 2,3,4,5,9,10 e 100	**Vamos lá a pôr a cruz!**	Calculadora Computador projetor	**50 + 50**	**24 e 29 janeiro**

Aprendizagens visadas

Os alunos, com a sua aprendizagem no âmbito deste tema, devem ser capazes de:

- Utilizar os critérios de divisibilidade de um número natural.
- Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação e vocabulário próprios.
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.
- Formular e testar conjeturas e generalizações e justifica-las fazendo deduções informais**.**

Indicações metodológicas

Apresentação desenvolvimento. Os alunos são convidados a sentar-se em pequenos grupos junto ao computador que lhes foi atribuído onde se encontra o enunciado da tarefa. A professora, depois de aberta a lição, informa: "Hoje vão trabalhar a tarefa "Vamos lá a pôr a cruz!" A tarefa vai ser realizada nos computadores e poderão utilizar a máquina de calcular. Terão cerca de 40 minutos para a resolver. Depois de realizada a tarefa, todos os grupos circularão pelos computadores para observar o trabalho dos colegas. Comentaremos, na apresentação dos grupos, o trabalho realizado por cada um, discutiremos as resoluções da tarefa em conjunto e tiraremos as nossas conclusões.".

Entretanto, a professora certifica-se de que estão todos confortáveis, verifica se todos visualizam o ecrã, se estão comodamente sentados e se possuem o material necessário (uma folha, lápis e calculadora). A professora pede a um aluno para ler a tarefa e procura certifica-se, também, que todos compreenderam o que tinham que fazer, pedindo a um aluno: "Queres explicar aos teus colegas o que têm que fazer?". Para contornar possíveis dificuldades que os alunos possam ter no que é pedido depois do preenchimento da tabela, a professora coloca algumas questões no sentido de receber *feedback* e ajustar o discurso que leve a uma maior compreensão da tarefa. À pergunta colocada prevê-se que o aluno/a responda " Temos que, na tabela, assinalar com uma cruz os números que são divisíveis por 2,5,10,3,4 e 9. Depois temos que encontrar uma regra para saber, sem precisar de realizar cálculos, se um número é divisível por 2, 5 10, 3, 4 ou 9". Prevê-se, também, que o/a aluno/a se sinta tentado/a a ler o pedido, não conseguindo traduzir para palavras suas de forma a fazer sentido. É possível que alguns dos termos do enunciado constituam um ruído na compreensão da mensagem. Para ultrapassar esta situação, a professora lê pausadamente a tarefa e procura desbloquear dificuldades no vocabulário: “O que é uma regra?”, “O que quer dizer “substituir o cálculo”?”, “O que têm, então que fazer?”.

Com a resolução da tarefa, pretende-se que os alunos encontrem uma regra para ver se um número é divisível por outro e chegar, assim, aos critérios de divisibilidade por 2, 5, 10, 3, 4 e 9.

A professora acompanha o trabalho dos alunos certificando-se que a tarefa é discutida entre todos. Prevê-se que os alunos observem a tabela depois de preenchida e discutam as propriedades dos números que permitam saber se um número é ou não divisível por 2, 5, 10, 3, 4 ou 9. A professora confronta os alunos com o seu preenchimento da tabela “Porque consideram que este número é divisível por 2 (ou outro)? Porque consideram que este número não é divisível por 2 (ou outro)?”. Para a dificuldade em observar propriedades nos números, a professora poderá levantar questões como: “Quais são os números divisíveis por dois? E quais são os que não são divisíveis por dois?”, “ Já observaram o algarismo das unidades?” ou “ Já verificaram se há alguma relação entre os algarismos?”. Prevê-se que surjam mais dificuldades para encontrar os critérios de divisibilidade por 3, 4 e 9. Nessa altura, a professora coloca questões como “Já observaram os algarismos que constituem o número? Já experimentaram realizar uma operação com eles?”.

Findo o tempo da resolução, cerca de 10-15 minutos antes do intervalo, os alunos são convidados a circularem pelos computadores e a observarem a resolução dos colegas, inteirando-se das regras encontradas pelos colegas a fim de estarem mais preparados para a discussão de ideias que se seguirá. Entretanto, um dos elementos de cada grupo descarrega o respetivo trabalho no computador destinado ao projetor.

Discussão coletiva. Cada grupo apresenta as regras que encontrou que permitem saber se um número é divisível pelo 2, 5, 10, 3, 4 ou 9. Espera-se que os alunos apresentem as suas regras, defendendo os seus pontos de vista com argumentos onde recorram ao vocabulário específico da matemática como “**divisor**”, “**algarismo**”, “**algarismo das unidades**”, “**algarismo das dezenas**”, “**soma**”, “**múltiplo**”, e “**número par**”. A professora espera que os alunos questionem e discutam as regras apresentadas pelos colegas e poderá intervir questionando as ideias apresentadas “Explica porquê”. “Não concordas porquê?”. Espera-se que os alunos, de entre todas as apresentações, tenham redigido regras para todos os números dados. Caso não aconteça a professora estimulará a discussão colocando perguntas como “Quando é que dizemos que um número é divisível por outro? Isso verifica-se? Observam os algarismos que compõem o número, conseguem encontrar uma relação entre eles e o divisor em questão?”, para que os alunos cheguem aos critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 9, 10 e 100. Entretanto, a professora pode pedir contra exemplos “ Deem exemplo de números que não sejam divisíveis por 3, por 4 e por 9”. Na discussão a professora aproveita para informar que à regra que encontraram que permite saber que um número é divisível por dois, isto é, se é múltiplo dele – se o algarismo das unidades for 0, 2,4,6 ou 8, isto é, par, diz-se que é o critério de divisibilidade por 2, uma vez que se observa sempre o mesmo padrão. Pergunta: “ E qual é o critério de divisibilidade por 3? E por 4? E por 5? E por 9? E por 10? E por 100?”, pedindo sempre justificação para a resposta “Explica porquê?”, esperando que o aluno responda “ Porque, no quadro que preenchemos, por exemplo para o número dois, verificámos que o algarismo das unidades de todos os números de que ele era divisor, terminavam num número par: 0, 2, 4, 6, e 8”. De acordo com o *feedback* dos alunos, a professora vai colocando perguntas. Prevendo maiores dificuldades para os critérios por 3, 4 e 9, espera-se alguma discussão entre os alunos nestes casos. A professora poderá intervir pedindo “Explica porque dizes isso” e confrontá-los-á com “Isso verifica-se neste caso? E neste?”. Prevê-se que na apresentação e na discussão os alunos chegam a regras que permitam observar os critérios de divisibilidade para todos os casos dados. Para a regra dos números divisíveis por 3, a professora pedirá “Exemplifiquem.”, esperando que os alunos registem no quadro, por exemplo, “ 63 é divisível por 3 porque 6+3 = 9 e 9 é múltiplo de 3”. Se o aluno responder “ Se somarmos, o número que nos dá está na tabuada do 3”, como acontece frequentemente, a professora retorquirá “Muito bem! E que nome sé dá a esse número?”. Prevê-se que os alunos respondam “ Múltiplo de três!”. Prevê-se que os alunos exprimam “ Então um número é divisível por três se a soma dos seus algarismos for um múltiplo de três”. A professora continuará: “ Observem agora os algarismos dos números divisíveis por 4, que relações encontram entre eles e o divisor do número?”. Prevê-se que os alunos, façam algumas tentativas de reproduzir os mesmos critérios e discutam entre si o seu raciocínio, a professora confronta com os exemplos e contra exemplos “Verifica-se a tua regra para este caso?” e espera que outro aluno responda não ou sim, “Explica porque dizes isso”, pedirá”. Espera-se que algum aluno observe que todos os números que terminam em zero sejam divisíveis por 4, se necessário, a professora poderá perguntar “ Já observaram os dois últimos algarismos?”.

Sistematização. Na sistematização, são os alunos que registarem num quadro todas as aprendizagens realizadas, exprimindo-se utilizando o vocabulário e simbologia própria da matemática.

Os alunos registam no quadro:

Critérios de divisibilidade

Um número natural É divisível por:	CRITÉRIO	EXEMPLOS
2	Se o **algarismo das unidades** for 0,2,4,6,ou 8, isto é, par	88 é **divisíve**l por 2 porque é um número **par** 103 não é divisível por dois porque não é um número **ímpar**.
3	Se a **soma** dos seus algarismos for **múltiplo** de 3	54 é divisível por 3 porque **5+4==9** e 9 é múltiplo de 3
4	Se os dois últimos algarismos são zeros ou **múltiplos** de 4.	324 é divisível por 4 porque 24 é múltiplo de 4
5	Se e só se o algarismo das unidades for 0 ou 5.	135 é divisível por 5 porque o algarismo das unidades é 5
9	Se a soma dos seus algarismos for múltiplo de 9.	837 é divisível por 9 porque **8+3+7=18** e 18 é múltiplo de 9.
10	Se e só se o **algarismo das dezenas** e o **algarismo das unidades** for zero.	1520 é divisível por 10 porque o algarismos das unidades é 0.
100	Se e só se o algarismo das dezenas e das unidades for zero.	7600 é divisível por 100 porque o algarismo das unidades e das dezenas é 0.

ANEXO 10 – Planificação da aula 5

AULA 5

Planificação

NÚMEROS RACIONAIS NÃO NEGATIVOS

Subtópicos	Tarefa	Material	Tempo (min)	Data prevista
PERCENTAGENS	**Bit –@-byte**	Folha A2 com o enunciado da tarefa. Folha A3 para registo dos trabalhos	**50**	**12 de junho**

Descontos na Bit-@-byte

Na loja Bit-@-Byt um computador custa 800 €. No primeiro dia de cada mês a loja reduz o seu preço em 10% relativamente ao valor anterior.

1. Ao fim de quantos meses o preço do computador pode ser inferior a metade do valor inicial?
2. Que desconto, aproximadamente, deve ser efetuado, todos os meses, para que um computador que custe 950 €passe a custar menos de 400 €, a partir do 4.ºmês?

PFCM, 2010/2011

Aprendizagens visadas

Os alunos, com a sua aprendizagem, devem ser capazes de:

- Calcular e usar percentagens.
- Resolver problemas que envolvam números racionais não negativos.
- Explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos

- Representar informação e ideias matemáticas de diversas formas
- Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios.
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Indicações metodológicas

Apresentação e desenvolvimento. A professora informa os alunos que irão realizar uma tarefa em grupo. Os alunos são distribuídos por grupos de trabalho. A tarefa é distribuída pelos grupos (numa folha A4), assim como uma folha em formato A3 onde os alunos registarão as suas resoluções e respetivas explicações para serem, posteriormente, afixadas na *galeria de tarefas*. Os alunos são informados que terão cerca de 25 minutos para resolverem a tarefa. Entretanto a professora solicita a um aluno a leitura do enunciado da tarefa e de seguida o reconto com o objetivo de garantir a sua compreensão e apropriação. Depois disto, a professora realça a importância dos alunos organizarem o seu trabalho, justificando de forma clara as suas ideias e procedimentos, uma vez que irá ser observado e comentado, por todos, na *galeria de tarefas*. Os alunos dão início aos trabalhos e a professora circula pela sala dissipando dúvidas, quando solicitada e sempre que se aperceber da necessidade de intervir, ao mesmo tempo que procurará estimular os alunos a discutir entre si as suas ideias "Estão todos de acordo? Já discutiram entre vocês?" e a explica-las "Como pensaste? Porquê? Procura, também, estimular os alunos a realizarem registos que se tornem interessantes para a discussão. Terminada a resolução da tarefa, a professora, com a colaboração de um aluno de cada grupo, afixa as folhas na *galeria.* Os grupos são convidados a, ordeiramente observarem os trabalhos realizados pelos colegas e registarem, neles, comentários que achem pertinentes. Esta atividade terá uma duração de cerca de 7 minutos. De seguida alguns grupos são convidados a explicarem a sua resolução, bem como as suas ideias, e a justificarem as suas conclusões. É a partir daqui que a professora promove a discussão da tarefa com os alunos da turma.

Galeria de tarefas. Os trabalhos dos alunos são expostos numa *galeria de tarefas*, isto é, são expostos para que todos os alunos, em grupo, possam observar e criticar e discutir entre eles, os trabalhos uns dos outros. O principal objetivo deste momento da aula é proporcionar aos alunos a observação de estratégias diferentes, ou formas diferentes de apresentar de apresentar uma estratégia, a possibilidade de aprenderem por observação da resolução dos seus pares e ainda, realizarem observações que possam contribuir para o enriquecimento da discussão.

Discussão coletiva. Nesta fase da aula, os grupos são convidados a explicarem e justificarem a sua resposta e a estratégia utilizada, junto à galeria onde está exposta a sua folha. O tempo previsto para esta atividade é de cerca de 15 minutos. Os alunos são convidados a apresentar a sua solução e a explicar como pensaram para lá chegar. A professora iniciará este momento, solicitando ao grupo cuja resolução está mais simples, isto é, cuja solução esteja incompleta ou cuja justificação se baseie apenas em algoritmos, a seguir pede a intervenção do grupo cuja estratégia seja mais eficaz e por último, solicita a apresentação do trabalho, cuja solução apresente generalizações. É suposto que nesta fase, uma vez que todos estão a par de todas as resoluções, todos os alunos se sintam motivados a participar. Cabe à professora moderar a discussão promovendo a comunicação matemática e a negociação de significados, para tal, a professora procurará colocar questões que estimulem o pensamento, como "Expliquem como pensaram" "Porquê" "Concordas?" "Dá exemplos onde isto pode acontecer" "Qual a relação entre a percentagem e o valor sobre o qual ela recai?**".** Durante esta fase, a professora procura levar os alunos a estabelecer conexões entre o conceito de percentagem e o conceito de unidade perguntando, por exemplo, "O desconto corresponde a que fração do preço?

Sistematização. A professora, em colaboração com os alunos, durante cerca de 10 minutos, procura sistematizar os conceitos fundamentais que estiveram a ser trabalhados:

- 10% = $\frac{10}{100}$ = 0,10, são representações do mesmo número racional.
- 10% de um valor é o mesmo que 10% × ….
- 10% de um valor é o mesmo que $\frac{10}{100}$ × ….
- 10% de um valor é o mesmo que 0,1 × ….