ENSINAR MATEMÁTICA DESENVOLVENDO AS CAPACIDADES DE RESOLVER PROBLEMAS, COMUNICAR E RACIONAR: CONTORNOS E DESAFIOS

Ana Maria Boavida
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, UIDEF-IEUL
ana.boavida@ese.ips.pt

Luís Menezes
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viseu, CI&DETS
menezes@esev.ipv.pt

Introdução

A investigação realizada nos últimos anos tem mostrado que não é possível os alunos aprenderem Matemática com compreensão sem se apropriarem de um conjunto de tópicos matemáticos e, simultaneamente, desenvolverem capacidades que lhes permitam compreender e mobilizar os conhecimentos sobre esses tópicos em contextos diversificados. Esta visão sobre a aprendizagem da Matemática tem tido repercussões significativas nos currículos de Matemática de muitos países, entre os quais Portugal. Com efeito, o atual Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB), publicado em 2007, sublinha que a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática são capacidades que devem ser transversais a toda a aprendizagem da Matemática, isto é, devem ser objeto de atenção sistemática durante o ensino de qualquer tópico matemático seja qual for o ano de escolaridade considerado (ME, 2007). A importância destas capacidades transparece nas finalidades e objetivos gerais do ensino da Matemática aí enunciados e nos objetivos de aprendizagem indicados. Transparece, também, na maior visibilidade que lhes é dada relativamente a anteriores programas de Matemática. É um facto que nestes programas, especialmente nos do 2.º e 3.º ciclos, já havia referências a estas capacidades mas eram, sobretudo, limitadas à sua enunciação nos objetivos gerais. Diferentemente, o PMEB considera-as ao mesmo nível dos temas matemáticos, ou seja, são perspetivadas enquanto conteúdos de aprendizagem, explicitando-se, a exemplo do que acontece com os temas, um conjunto de tópicos e objetivos específicos que devem balizar o trabalho a desenvolver ao longo da escolaridade: "Na introdução de cada tema matemático e das capacidades transversais (…) [enunciam-se] os objetivos gerais de aprendizagem (desse tema ou capacidade), as indicações metodológicas (específicas do tema ou capacidade) e os respetivos tópicos e objetivos específicos de aprendizagem" (ME, 2007, p.1).

Trata-se, pois, de criar contextos de ensino e aprendizagem que permitam a articulação fecunda entre as referidas capacidades e a sua integração sistemática com os temas matemáticos, de modo a que os alunos progridam na sua maturidade matemática. Esta ideia da integração, a que se associa a de progressividade, reforça a transversalidade que as três capacidades mantêm entre si e com os tópicos matemáticos.

Neste documento procurar-se-á abordar questões relacionadas com o desenvolvimento das capacidades transversais articulando-as com os textos relativos ao tema apresentados nesta secção.

A resolução de problemas e o raciocínio matemático

Das capacidades transversais referidas no PMEB, a resolução de problemas é a que tem maior tradição na investigação em educação matemática tanto a nível internacional, como nacional. Em Portugal, desde o final da década de oitenta do século XX e, sobretudo, a partir da década seguinte, foi desenvolvido um amplo conjunto de estudos sobre esta problemática. Como evidencia uma meta análise da investigação portuguesa realizada por Ponte, Matos e Abrantes (1998), estes estudos centraram-se tanto em conceções e práticas dos professores sobre resolução de problemas, como na forma como os alunos aprendem a resolver problemas.

Apesar de se reconhecer, desde há muito, a importância da resolução de problemas no ensino e aprendizagem da Matemática, este reconhecimento não se tem materializado em práticas de ensino que a coloquem em primeiro plano, como bem salientam Isabel Vale e Teresa Pimentel no texto *Um novo-velho desafio: da resolução de problemas à criatividade em Matemática*. Com efeito, em muitas aulas, não apenas portuguesas, continua a predominar um ensino da Matemática baseado na metáfora da transmissão e em que ao aluno se atribui o mero papel de memorizar ideias, técnicas e procedimentos mesmo que não lhes atribua significado nem compreenda a sua razão de ser. Simultaneamente, não é invulgar a existência de perspetivas muito redutoras sobre o papel e lugar da resolução de problemas no ensino da Matemática. Com frequência, os problemas são encarados *apenas* como um meio de motivar os alunos ou de lhes permitir aplicar conhecimentos anteriormente aprendidos.

As atuais orientações curriculares sobre resolução de problemas distanciam-se desta perspetiva indo ao encontro do que alguns autores designam por ensinar Matemática com problemas (por exemplo, Lampert, 2001; Fi & Degner, 2012). Trata-se de uma abordagem de ensino que tem por pano de fundo a ideia de que a exploração e discussão de tarefas cognitivamente desafiadoras que favoreçam a construção de ideias matemáticas poderosas e incentivem o raciocínio e o pensamento reflexivo, é essencial para que os alunos aprendam Matemática com compreensão. Esta perspetiva tem fortes ressonâncias com a resolução de problemas considerada como uma capacidade transversal ao ensino e aprendizagem de qualquer tema e tópico matemático, tal como é proposto pelo PMEB.

Ensinar Matemática com problemas é reconhecidamente um empreendimento muito complexo para os professores, pois está em jogo uma multiplicidade de fatores de natureza cognitiva, afetiva e social (Lampert, 2001). É essencial compreender melhor a natureza deste empreendimento, entender como dar corpo à resolução de problemas enquanto meio para aprender tópicos matemáticos, conhecer as dificuldades com que o professor se depara, qual a sua origem e que pode ser feito para que estas dificuldades sejam ultrapassadas. Esta compreensão é fundamental para que se possam, nomeadamente delinear contextos de formação que permitam ao professor, ou ao futuro professor, lidar com toda essa complexidade.

A resolução de problemas e o seu lugar e papel no ensino da Matemática, é o cerne da comunicação de Isabel Vale e Teresa Pimentel que analisam o seu contributo para o desenvolvimento do pensamento criativo. Há alguma investigação a nível internacional sobre a criatividade em Matemática e suas relações com a aprendizagem, mas, em Portugal, é um campo em que estamos a dar os primeiros passos. Compreender de que modo é que a exploração, por futuros professores, de tarefas que incentivem a fluência, a flexibilidade e a originalidade — consideradas como componentes essenciais do pensamento criativo — e que sejam favoráveis ao entendimento de conceitos matemáticos essenciais, pode contribuir não só para iluminar o papel da criatividade na aula de Matemática, como para equacionar novas formas de fazer face ao desafio de criar condições para ensinar Matemática com problemas.

A problemática do raciocínio matemático e seu desenvolvimento, tem vindo a ser discutida desde há alguns anos, tendo-se, em Portugal, assistido à intensificação da investigação sobre esta problemática na última década. Esta situação não é de estranhar pois, para além do raciocínio sempre ter desempenhado um papel central em Matemática, cada vez mais se reconhece que ser capaz de raciocinar matematicamente é essencial para que alunos aprenderem com compreensão (NCTM, 2000). Há, no entanto, muitas questões que permanecem em aberto. De que falamos quando nos referimos ao raciocínio matemático? Como se aprende a raciocinar matematicamente? Que contextos e recursos favorecem o seu desenvolvimento? É que o termo raciocínio é amplamente usado como se houvesse um acordo universal sobre o seu significado e, na realidade, a maior parte dos matemáticos e educadores matemáticos usam-no sem o clarificarem (Yakel & Hanna, 2003). Como refere Steen (1999), não sabemos, realmente, o que é o raciocínio matemático.

Se nos situarmos num ponto de vista epistemológico, raciocinar remete para calcular, mas também para usar a razão ao julgar, compreender, examinar, avaliar, justificar e concluir. Assim, em Matemática, não raciocinamos apenas quando provamos algo. Também raciocinamos ao apresentar razões que justificam ideias ou posicionamentos, ao argumentarmos para nos convencermos, ou para convencer outros, da plausibilidade de conjeturas que enunciamos e da razoabilidade de afirmações que fazemos ou ao procurarmos explicar a coerência entre o que se aceita como válido e as suas consequências (Boavida, 2008). Esta perspetiva é consistente, por um lado, com as orientações do PMEB e, por outro, com o que referem Yakel e Hanna (2003): "o raciocínio matemático é uma atividade partilhada em que quem aprende participa enquanto interage com outros para resolver problemas matemáticos" (p. 228).

Adotar este significado de raciocínio matemático conduz à necessidade de considerar que são aspetos-chave da experiência dos alunos, a formulação e análise de conjeturas, a explicação, a justificação, a argumentação e a produção de provas, pelo que raciocinar matematicamente é indissociável da resolução de problemas e da comunicação.

Vários dos textos associados apresentados nesta secção focam questões relacionadas com estas atividades. António Domingos e Maria João Vieira, em *Pavimentações com o geometer's sketchpad*, abordam, nomeadamente a aprendizagem da demonstração por alunos do 10º ano de escolaridade tendo por recurso Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD) e tarefas que envolvem a formulação e validação de conjeturas. Os resultados deste estudo vão ao encontro do que é destacado por vários outros autores: embora os AGD possam constituir um amplificador conceptual dos conhecimentos dos alunos, o que pode facilitar a apropriação de importantes conceitos e processos matemáticos, nem sempre lhes é simples compreender a necessidade e papel da atividade de demonstrar, entender as funções da demonstração e elaborar raciocínios demonstrativos. Por vezes, quando constatam que uma conjetura se verifica em todas as construções feitas, consideram-na validada para todos os casos, confundindo, assim, experimentação com demonstração. Além disso, embora tenham facilidade em usar *software* de Geometria Dinâmica para fazerem construções, têm dificuldades em identificar o que é invariante e, por isso mesmo, não lhes é simples formular conjeturas. Simultaneamente, esta facilidade parece boicotar a necessidade de procurarem argumentos que poderiam ser úteis na elaboração de demonstrações.

A conceção de que *evidência é prova* (Chazan,1993), ou seja, que a validade de uma conjetura reside na sua mera verificação por exemplos, e, por isso, não é necessário lidar com a generalidade dos objetos referidos no seu enunciado, é comum a muitos alunos de diversos níveis de ensino, como revelam várias investigações realizadas em Portugal (por exemplo, Brocardo, 2001; Fonseca, 2000; Oliveira, 1998). A questão de como tornar inteligível para os alunos que uma generalização feita a partir da observação de regularidades em vários exemplos não constitui uma prova matemática e de como os ajudar a produzir provas com sentido para si, continua em aberto.

Três dos textos apresentados abordam a questão do raciocínio tendo por referência uma categorização dos tipos de raciocínio associada aos objetos/temas matemáticos com que lida quem raciocina. Consideramos aqui os que incidem sobre o pensamento algébrico. Em *A integração da folha de cálculo no estudo do tópico equações do 2.º grau no 9.ºano de escolaridade*, Sandra Nobre, Nélia Amado e João Pedro da Ponte, focam o papel da folha de cálculo no desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9.º ano. Os resultados apresentados incidem no caso de uma aluna e revelam que este desenvolvimento ocorreu. A aluna compreendeu o significado de conceitos essenciais, estabeleceu conexões entre diferentes tipos de representação de ideias matemáticas e aprofundou o seu entendimento de conceitos antes estudados, passando da compreensão instrumental à relacional.

A folha de cálculo é, igualmente, um dos recursos usados no estudo que está na base do texto de Laura Bandarra — *O pensamento algébrico e a aritmética* — que também se revelou útil para o desenvolvimento do pensamento algébrico por alunos dos 5.º e 9.º anos de escolaridade. As conclusões do estudo permitem evidenciar que em qualquer dos níveis de ensino, a folha de cálculo agilizou a realização de cálculos, possibilitando que os alunos explorassem propriedades e relações entre números, tratassem algebricamente os números e focassem a sua atenção em regularidades e relações numéricas. Os do 9.º ano de escolaridade, além de desenvolverem formas de pensamento algébrico relacionadas com a Aritmética generalizada — tal como aconteceu com os de 5º ano — também desenvolveram o pensamento funcional.

O pensamento algébrico, perspetivado como um *fio condutor curricular*, e o seu desenvolvimento por alunos do 4.º ano de escolaridade, é, ainda, o cerne do texto de Célia Mestre e Hélia Oliveira. Em particular, foca-se o modo como a professora/investigadora conduziu a discussão coletiva de uma tarefa matemática e orientou a sistematização das aprendizagens, tendo por referência os objetivos matemáticos visados. As conclusões permitem evidenciar que a integração de conteúdos e procedimentos algébricos na aula e a reconstrução coletiva de ideias matemáticas, se relaciona com a necessidade e importância de se dedicar atenção a três aspetos interdependentes. Em primeiro lugar, é essencial selecionar tarefas propícias ao desenvolvimento do pensamento algébrico: a tarefa apresentada revelou-se muito poderosa para promover, nomeadamente o pensamento funcional. Em segundo lugar, é indispensável cuidar da sua exploração na aula: foi fundamental o professor ter "*olhos e ouvidos algébricos"* e incentivar os alunos a refletirem sobre a atividade desenvolvida. Por último, é imprescindível construir e manter uma certa cultura de sala aula: na altura em que a tarefa foi apresentada, a aula tinha já os contornos de uma comunidade de investigação, assumindo os alunos uma significativa responsabilidade pela apresentação de explicações sobre os seus modos de pensar e pela compreensão das ideias dos colegas.

Como se ilustrará, em seguida, Rosário Monteiro e Leonor Santos, tal como Cláudia Domingues e Helena Marinho, abordam a questão do desenvolvimento do raciocínio matemático e sua relação com as práticas comunicativas da aula, evidenciando, em particular, o papel da discussão coletiva na construção das ideias matemáticas dos alunos.

A comunicação matemática

A partir da década de noventa do século XX, o estudo da comunicação matemática que ocorre na aula de Matemática atraiu, em Portugal, a atenção de um número crescente de autores. Estes trabalhos acompanharam o movimento internacional que mudou o foco dos estudos das questões da linguagem para as questões da comunicação, ou seja, a linguagem em ação na sua ligação com os processos de aprendizagem da Matemática (Ellerton e Clarkson, 1996; Sierpinska, 1998).

O trabalho de Bishop e Goffree (1986), intitulado "Classroom organization and dynamics", propõe uma nova forma de conceber a comunicação na aula de Matemática, que contrasta com a visão da comunicação como transmissão de informação do professor para os alunos. Estes autores introduzem a ideia da comunicação como um processo interativo, de sucessivas aproximações visando a compreensão através da negociação de significados. A comunicação é, assim, entendida como um processo de interação social que, para se concretizar, necessita de ser "alimentada" por tarefas matemáticas ricas, enquadradas num ambiente de sala aula desafiante e no qual o professor desempenha um papel chave (Guerreiro, 2012; Menezes, 2005).

A preocupação com a figura do professor na promoção de dinâmicas comunicativas da aula de Matemática tem estado presente em diversos estudos que têm sido realizados, nesta área, em Portugal (Guerreiro, 2012; Martinho, 2007; Menezes, 1996, 2005). O questionamento do professor, pela sua natureza, é um instrumento com potencialidades para promover aulas de Matemática onde esta visão da comunicação como interação, baseada na partilha de ideias e significados matemáticos, está presente, como sustenta Menezes (1996).

Nesta secção, as práticas de questionamento, em Matemática, de professores do 1.º ciclo do ensino básico, são analisadas no texto *O que é que a Maria quer saber?*, de António Guerreiro. O autor refere que, nas aulas observadas e no decorrer do processo de ensino-aprendizagem, há uma forte centralidade do conhecimento do professor, o que na sua perspetiva, origina um significativo predomínio de questões de *confirmação* do conhecimento adquirido pelos alunos e também de questões *focalização* nas soluções antecipadas pelo professor das tarefas matemáticas. Ainda assim, o autor assinala, com o decorrer do trabalho colaborativo, o progresso das interações comunicativas entre os alunos e o professor, salientando-se um acréscimo de questões de inquirição visando o conhecimento das ideias e estratégias dos alunos.

A negociação de significados matemáticos ocorre durante toda a aula, mas tem o ponto alto nos momentos de discussão coletiva, em que os alunos partilham as suas ideias com os restantes colegas e o professor e se pronunciam sobre os raciocínios apresentados pelos seus pares. Apresentar e seguir raciocínios consubstancia um tipo de discurso, que Cobb *et al.* (1997) designam por *discurso reflexivo*, que é fundamental na intercompreensão e na aprendizagem dos temas matemáticos e no desenvolvimento das capacidades de raciocínio e de comunicação.

A discussão coletiva não ocorre espontaneamente e precisa de ser preparada e devidamente acompanhada pelo professor. Conseguir que esta discussão seja matematicamente produtiva, é uma tarefa "extremamente exigente e intrincada" em que o "papel do moderador da discussão é particularmente difícil" (Sfard, 2003, p. 375). Stein *et al*. (2008) descrevem bem as complexidades deste trabalho, propondo a metáfora da *orquestração* para descrever o papel desempenhado pelo professor neste momento da aula cognitivamente forte. Os desafios com que tem que lidar são muitos, a sua origem é fortemente variada e a sua natureza é bastante diversa (Boavida, 2005). Por exemplo, que papel/papéis deve o professor assumir? A que aspetos deve dar especial atenção? Quais são os particularmente problemáticos? Que cuidados deve ter na preparação e orquestração de uma discussão para que esta contribua para a apropriação, pelos alunos, de novo conhecimento matemático? Como promover e sustentar, o envolvimento dos alunos na apresentação e defesa de explicações e justificações que, do seu ponto de vista, validam as ideias que enunciam e, concomitantemente, assegurar o caráter matemático de tais práticas argumentativas? Como lidar com os alunos que agem com uma certa "irresponsabilidade matemática" (Chevallard, Bosch, & Gascón, 2001), como se não fizesse parte do seu papel comprometerem-se com a coerência, avaliação ou justificação dos seus raciocínios, nem com a análise crítica e fundamentada do que ouvem dos colegas? Como controlar o andamento da discussão de modo a que haja espaço para a expressão de outras vozes além das valorizadas na turma? Como ensinar aos alunos o valor da expressão audível e da escuta atenta? Como selecionar e seriar as estratégias usadas pelos alunos na resolução de uma tarefa, de modo a que a sua discussão contribua para a aprendizagem de todos? Como equacionar a articulação entre a(s) fase(s) dedicada(s) à discussão coletiva e as outras fases da aula? Estas são questões atuais do campo das práticas profissionais de professores de Matemática algumas das quais são analisadas em alguns textos desta secção.

Sílvia Semana e Leonor Santos, em *A comunicação oral numa discussão matemática em grupo-turma: o papel da professora*, focam-se no desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática, analisando, precisamente, o papel de uma professora de Matemática durante uma discussão coletiva, na introdução do tópico "monómios e polinómios", numa turma do 8.º ano de escolaridade. As autoras identificam nas intervenções comunicativas da professora questões relativas à dinâmica, foco, direção pedagógica e significado, sublinhando a importância e complexidade do papel que desempenha na comunicação oral numa aula, em particular na promoção de discussões matemáticas produtivas.

Cláudia Domingues e Maria Helena Martinho, no texto *Desenvolvimento do raciocínio matemático e as práticas de comunicação numa aula*, analisam o contributo da comunicação, nos momentos de discussão coletiva, para o desenvolvimento do raciocínio de alunos do 9.º ano, após trabalho autónomo, a partir da realização de uma tarefa. As autoras sublinham, em particular, a importância da discussão coletiva para o desenvolvimento de noção de prova matemática dos alunos, destacando a preponderância da capacidade de comunicação na explicitação e desenvolvimento dos raciocínios dos alunos. A ligação entre a comunicação e o raciocínio é analisada, também, por Rosário Monteiro e Leonor Santos no texto *Desenvolvimento da capacidade de argumentação matemática de alunos do 11.º ano de Matemática a e práticas avaliativas dos professores: o caso de Laura*. O estudo, realizado no ensino secundário, tem como objetivo estudar as práticas avaliativas de professores sobre a argumentação matemática dos alunos. Os resultados obtidos evidenciam que, para a professora, a argumentação é a expressão de um raciocínio possível. Na conceção das tarefas, dirigidas ao desenvolvimento da capacidade de argumentação dos alunos, a professora privilegia a justificação, considerando, do ponto de vista cognitivo, a explicação um processo menos exigente do que a justificação. No estudo, a professora evidenciou preocupação em proceder a uma avaliação com intencionalidade reguladora, recorrendo, essencialmente, ao *feedback* escrito.

O poder de uma discussão coletiva, bem conduzida pelo professor, de estratégias de resolução usadas pelos alunos, está bem patente em *Práticas de ensino com cálculo mental* da autoria de Renata Carvalho e João Pedro da Ponte. Este texto incide sobre a análise das potencialidades de uma tarefa de cálculo mental com números racionais e a sua exploração numa turma do 6.º ano de escolaridade. A partilha das estratégias usadas pelos alunos e o debate e reflexão sobre os seus erros, foram favoráveis a que contactassem com estratégias de cálculo diferentes das suas, compreendessem o porquê das suas dificuldades e, por esta via, aprofundassem a sua compreensão dos números racionais. Além disso, a discussão que ocorreu a este propósito levou a que a tarefa, considerada à partida de baixo nível cognitivo, fizesse surgir uma outra, com um nível de exigência mais elevado, em que os alunos se envolveram em processos de formulação, teste e validação de conjeturas, estabelecendo conexões com outros temas matemáticos.

A concluir

O PMEB foi generalizado em 2010. Esta generalização coloca à investigação portuguesa um conjunto vasto de desafios. Alguns foram já apresentados anteriormente. A estes vários outros se poderiam acrescentar. Como impulsionar a integração e transversalidade de capacidades transversais e temas matemáticos? Que tarefas importa explorar na aula e qual o seu papel? Como perspetivar a formação de modo a que estas capacidades sejam valorizadas? Como dotar os professores de recursos que lhes permitam concretizar práticas de ensino consistentes com o que é preconizado no PMEB relativamente às três capacidades?

No seu conjunto, os textos apresentados nesta secção são um contributo para refletir sobre estes desafios. Permitem evidenciar que o desenvolvimento das três capacidades transversais referidas no PMEB requer a criação de ambientes de aprendizagem com características bem diferentes da dita "aula tradicional de Matemática". Em particular, é essencial a criação e manutenção de uma cultura de sala de aula com certas características, o que requer a negociação de normas de ação e interação que favoreçam e não boicotem a constituição e desenvolvimento de uma *comunidade de discurso matemático* (Sherin, 2002). Uma aula com este tipo de cultura, que pode designar-se por "cultura de argumentação" (Boavida, 2005, p. 95), é uma comunidade de aprendizagem em que as respostas imprevistas não são descartadas meramente por serem inesperadas; em que se encoraja a partilha e análise de várias estratégias de resolução e suas relações; em que se incentiva a reflexão sobre a inventariação e uso criativo de ideias matemáticas que podem ser úteis para fazer face a uma dada situação; em que se fomentam e apoiam discussões focadas na avaliação crítica e fundamentada de diferentes contribuições e abordagens; e em que se favorece a liberdade de expressão de modo a que os alunos se sintam seguros para assumir riscos e partilhar ideias emergentes e titubeantes.

Constituir e manter uma cultura de argumentação é, também, um forte desafio para o professor. Como mostram vários textos desta secção, a escolha de boas tarefas é importante, mas não basta, tal como não basta fazer emergir ideias dos alunos. Há que saber o que fazer com estas ideias de modo a que a turma trabalhe coletivamente no sentido de chegar a consensos fundamentados e matematicamente relevantes sobre o significado de ideias matemáticas importantes. Além disso, as oportunidades para que os alunos desenvolvam as referidas capacidades geram-se no interior das interações da aula, podendo surgir durante a resolução de qualquer tipo de tarefa. Assim, é essencial que o professor esteja atento aos acontecimentos e os rentabilize de modo a incentivar a apresentação de explicações e justificações e a delegar nos alunos a responsabilidade de avaliarem as ideias apresentadas e de posicionarem relativamente a elas.

Globalmente, os desafios referidos relacionam-se com a forma como diversos protagonistas educativos, em especial o professor e os alunos, lidam com a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática. Importa conhecer e discutir o que está a ser feito, nomeadamente em Portugal, nos diversos níveis de ensino e, simultaneamente, delinear caminhos que permitam fazer-lhes face e avançar na compreensão dos seus principais contornos. Afinal, o que está em causa é o desenvolvimento da *proficiência matemática*, uma expressão escolhida por Kilpatrik, Swafford e Findell (2001) para designar o que significa, hoje, uma aprendizagem bem sucedida da Matemática.

Referências

Bishop, A. J., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: Reidel.

Boavida, A. M. (2008). Raciocinar para aprender e aprender a raciocinar. *Educação e Matemática, 100*, 1.

Boavida, A. M. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração*. Lisboa: APM.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8º ano*. Lisboa: APM.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justifications for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 359-387.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (2001). *Estudar Matemáticas: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed Editora.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 258-277.

Ellerton, N., & Clarkson, P. (1996). Language factors in mathematics teaching and learning. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 987-1033). Dordrecht: Kluwer.

Fi, C., & Degner, K. (2012). Teaching through problem solving. *Mathematics Teacher, 105*(6), 455-458.

Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula*. Lisboa: APM.

Guerreiro, A. (2011). C*omunicação no ensino-aprendizagem da Matemática: Práticas no 1.º ciclo do ensino básico* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds). (2001). *Adding It Up: Helping Children Learning Mathematics.* Washington: National Academy Press.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, CT: Yale University Press.

Martinho, M. H. (2007). *A comunicação na aula de Matemática: Um projecto colaborativo com três professoras do ensino básico* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME – DGIDC.

Menezes, L. (1996). C*oncepções e práticas de professores de Matemática; Contributos para o estudo da pergunta*. Lisboa: Lisboa: APM.

Menezes, L. (2005). *Investigar para ensinar Matemática: Contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores*. Lisboa: APM.

NCTM (Ed.). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. VA: NCTM.

Oliveira, H. (1998). *Actividades de investigação na aula de Matemática: Aspectos da prática do professor*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: IIE.

Sfard, A. (2003). Balancing the unbalanceable: The NCTM Standards in light of theories of learning mathematics. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 353-392). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sherin, M. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*(3), 205-233.

Sierpinska, A. (1998). Three epistemologies, three views of classroom communication: Construtivism, sociocultural approaches, interactionism. In H. Steinbring, M. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 30-62). Reston, VA: NCTM.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.

Steen, L. (1999). Twenty questions about mathematical reasoning. In L. Stiff, & F. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 270-288). Reston, VA: NCTM.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. Martin, & D. Schifter (Eds*.), A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227- 236). VA: NCTM.