



**Politécnico
de Viseu**

Escola Superior
de Tecnologia
e Gestão de Viseu

Modelação Numérica de Elementos de Betão Armado Reforçados com Sistemas de CFRP

Gabriela Barbosa Clemente

Dissertação

Mestrado em Engenharia de Construção e Reabilitação

Trabalho efetuado sob a orientação de

Professor Doutor Paulo Alexandre Silveira Costeira Marques Silva

Professor Doutor António Ventura Gouveia

Professora Doutora Daniela Gustin

Julho de 2025



**Politécnico
de Viseu**

Escola Superior
de Tecnologia
e Gestão de Viseu

Modelação Numérica de Elementos de Betão Armado Reforçados com Sistemas de CFRP

Gabriela Barbosa Clemente

Dissertação

Mestrado em Engenharia de Construção e Reabilitação

Trabalho efetuado sob a orientação de

Professor Doutor Paulo Alexandre Silveira Costeira Marques Silva
Professor Doutor António Ventura Gouveia
Professora Doutora Daniela Gustin

Julho de 2025

Dedico este trabalho aos meus pais, meus maiores incentivadores e o motivo da minha perseverança. Eles me ensinaram que o significado de “casa” vai além das paredes de uma construção. Dedico também ao meu avô, Luís, um apaixonado pela engenharia, que não está mais entre nós, mas estará sempre no meu coração. Jamais esquecerei seus olhos brilhando na minha aprovação do vestibular.

AGRADECIMENTOS

Olhando para trás, percebo quanto essa trajetória foi enriquecedora, apesar do processo ter sido longo e exigente, também foi gratificante. Cada atitude tomada me trouxe até esta dissertação. Uma frase da minha série preferida diz que “escolher nossas pessoas é o mais perto que chegamos de controlar nosso destino”. Este agradecimento é para todas as “minhas pessoas”, que fizeram o meu sonho de me tornar engenharia civil tornar-se realidade. Mas começo agradecendo a Deus pela perseverança, serenidade e força em cada etapa.

Agradeço ao meu pai, Clécio, por ser meu alicerce e estar ao meu lado em cada decisão. À minha mãe, Andréa, por ser a luz da minha vida e por me ensinar a nunca deixar o medo impedir a conquista dos meus objetivos. Sem eles, nada disso seria possível. Ao meu padrasto, Jorge, agradeço pelo companheirismo e torcida constante. À minha madrasta, Gizele, pelo carinho e incentivo. Ambos ressignificaram a palavra “família” para mim, e sou imensamente grata. Aos meus irmãos, Letícia, Bárbara e Leonardo, e ao meu cunhado, Hendrick, obrigado por me ensinarem o verdadeiro significado de amor e amizade. Às minhas avós, Adélia e Selma, e à minha avó do coração, Neuza, agradeço pelo amor e apoio.

Aos meus amigos, deste ou do outro lado do Atlântico, a amizade, o incentivo e os momentos compartilhados foram essenciais para tornar essa jornada mais leve. E a todos os outros familiares que ficariam na torcida, o meu muito obrigada.

Quero expressar minha profunda gratidão ao meu orientador, Professor Paulo Costeira, por acreditar na minha capacidade e por compartilhar generosamente os dados de seus trabalhos. Ao meu orientador, Professor António Ventura, agradeço sinceramente por toda a atenção, disponibilidade constante e por me guiar com o seu vasto conhecimento. À minha orientadora, Professora Daniela Gutstein, que também foi minha professora em Teoria das Estruturas e Concreto Armado, expressei minha gratidão por despertar ainda mais minha paixão pela profissão.

Finalmente, agradeço ao Instituto Politécnico de Viseu, que me acolheu no programa de Dupla Diplomação, e à Universidade Tecnológica Federal do Paraná pelo suporte institucional e pelas oportunidades oferecidas ao longo da minha trajetória acadêmica.

RESUMO

O reforço de estruturas de betão armado com Compósitos Reforçados com Fibras de carbono – *Carbon Fiber Reinforced Polymer* (CFRP) tem sido amplamente utilizado desde a década de 1980 devido às suas propriedades mecânicas, como elevada resistência à tração e durabilidade. A técnica de colagem externa – *Externally Bonded Reinforcement* (EBR) apresenta uma solução leve e eficiente, podendo ser aplicada em diferentes superfícies sem comprometer a eficácia estrutural. No entanto, para garantir um desempenho adequado, é essencial uma interface forte e estável entre o reforço e o substrato.

Este estudo tem como objetivo modelar numericamente, por meio do Método dos Elementos Finitos – *Finite Element Method* (MEF), lajes de betão armado reforçadas com CFRP, avaliando a influência das leis constitutivas dos materiais. Foram analisados três tipos de lajes: betão armado (FSRC), betão armado reforçado com manta (FSBM) e betão armado reforçado com laminado (FSBL). A modelação permite comparar os resultados numéricos com dados experimentais, identificando a necessidade de calibração das leis constitutivas para aproximar o comportamento simulado ao observado em ensaios.

O estudo destaca que a modelação numérica de estruturas reforçadas com CFRP enfrenta desafios significativos, especialmente na calibração das leis constitutivas, na representação de roturas frágeis e na dificuldade de convergência em modelos não lineares. Foram analisadas curvas carga-deslocamento, padrões de fendilhação e distribuição das extensões nos sistemas de CFRP, tendo-se concluído que o modelo numérico captou de forma adequada o comportamento observado experimentalmente. Para isso, utilizou-se o programa computacional *Femix*, que possibilitou a análise da resposta estrutural e a identificação dos principais desafios na modelação.

Palavras-chave: Reforço estrutural; CFRP; Modelação Numérica; Betão Armado; Método dos Elementos Finitos

ABSTRACT

The strengthening of reinforced concrete structures with Carbon Fiber Reinforced Polymers (CFRP) has been widely used since the 1980s due to its mechanical properties, such as high tensile strength and durability. The externally bonded reinforcement technique (EBR) provides a lightweight and efficient solution, which can be applied to different surfaces without compromising structural effectiveness. However, to ensure proper performance, a strong and stable interface between the reinforcement and the substrate is essential.

This study aims to numerically model, using the Finite Element Method (FEM), reinforced concrete slabs strengthened with CFRP, evaluating the influence of material constitutive laws. Three types of slabs were analyzed: reinforced concrete (FSRC), reinforced concrete strengthened with CFRP sheets (FSBM), and reinforced concrete strengthened with CFRP laminates (FSBL). Modeling makes it possible to compare numerical results with experimental data, identifying the need to calibrate the constitutive laws in order to bring the simulated behavior closer to that observed in experimental tests.

The study highlights that the numerical modeling of reinforced concrete structures strengthened with externally bonded CFRP systems faces significant challenges, particularly in the calibration of constitutive laws, the representation of brittle failures, and the difficulty of convergence in nonlinear models. Load-displacement curves, cracking patterns, and distribution of extensions in CFRP systems were analyzed, concluding that the numerical model adequately captured the behavior observed experimentally. The *Femix* computational program was used to analyze the structural response and identify the main challenges in modeling.

Keywords: Structural Strengthening. CFRP; Numerical Modeling; Reinforced Concrete; Finite Element Method.

ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	v
ABSTRACT	vii
ÍNDICE GERAL	ix
ÍNDICE DE TABELAS	xi
ÍNDICE DE FIGURAS	xiii
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Enquadramento.....	2
1.2. Objetivos da Investigação	3
1.3. Abordagem Metodológica	4
1.4. Estrutura da Dissertação	4
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	7
2.1. Técnicas de Reforço com CFRP	7
2.2. Reforço de Estruturas de Betão Armado com CFRP Através da Técnica EBR .	10
2.2.1 Comportamento das estruturas reforçadas com CFRP	11
2.2.2 Estudos experimentais de lajes reforçadas com CFRP	14
2.3. Modelação Numérica desta Técnica de Reforço.....	15
2.3.1 Modelos constitutivos dos materiais.....	16
2.3.2 Modelos constitutivos para a interface Betão-CFRP	24
2.3.3 Principais dificuldades na modelação	28
3. CASO DE ESTUDO	31
3.1. Campanha Experimental.....	31
3.2. Resultados Experimentais	37
4. MODELAÇÃO NUMÉRICA DA LAJE DE BETÃO ARMADO	45
4.1. Malha e Propriedades dos Materiais.....	46

4.2. Análise da Sensibilidade da Malha.....	49
4.3. Calibração do modelo.....	53
5. MODELAÇÃO NUMÉRICA DAS LAJES REFORÇADAS COM CFRP.....	59
5.1. Malha e Modelação do Comportamento do Reforço	59
5.2. Apresentação e Discussão dos Resultados.....	63
5.2.1 Lajes reforçadas com mantas de CFRP	63
5.2.2 Lajes reforçadas com laminados de CFRP	71
6. CONCLUSÕES GERAIS E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS.....	79
6.1. Desenvolvimentos Futuros.....	80
REFERÊNCIAS.....	83

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 3.1 - Características dos modelos (adaptado de Costeira Silva, 2008).....	35
Tabela 3.2 - Características do betão (adaptado de Costeira Silva, 2008).....	35
Tabela 3.3 - Características da armadura (adaptado de Costeira Silva, 2008).....	36
Tabela 3.4 - Características dos sistemas de CFRP utilizados (adaptado de Costeira Silva, 2008)	36
Tabela 3.5 - Resultados dos ensaios de <i>Pull-off</i> (adaptado de Costeira Silva, 2008).....	37
Tabela 3.6 - Principais resultados da Fase 1 (adaptado de Costeira Silva, 2008)	37
Tabela 4.1 - Espessura e área usada nos elementos finitos referentes ao betão e às armaduras	47
Tabela 4.2 - Leis constitutivas do aço.....	49
Tabela 4.3 - Lei bilinear baseada no <i>fib</i> Model Code 2010	52
Tabela 4.4 - Leis bilineares baseadas no CEB-FIP Model Code 1990.....	53
Tabela 4.5 - Lei bilinear ajustada	55
Tabela 4.6 - Resultados experimentais e numéricos (série FSRC).....	56
Tabela 5.1 - Propriedade dos CRFP e da interface	59
Tabela 5.2 - Lei bilinear para o <i>Tension Softening</i> e <i>Tension Stiffening</i>	60
Tabela 5.3 - Leis constitutivas dos CFRP	60
Tabela 5.4 - Leis constitutivas das interfaces	63
Tabela 5.5 - Resultados experimentais e numéricos (série FSBM).....	70
Tabela 5.6 - Resultados experimentais e numéricos (série FSBL).....	77

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 - Técnica de reforço EBR (Dalfré e Parsekian, 2021)	8
Figura 2.2 - Técnica de reforço NSM (Dalfré e Parsekian, 2021).....	8
Figura 2.3 - Técnica de Reforço EBROG (Dalfré e Parsekian, 2021).....	9
Figura 2.4 - Técnica de Reforço EBRIG (Dalfré e Parsekian, 2021)	9
Figura 2.5 - Técnica de reforço EBR: a) com pré-esforço e b) com sistema de ancoragem externo (S&P Clever Reinforcement, 2025)	10
Figura 2.6 - Principais modos de ruína de vigas reforçadas à flexão com CFRP (Costeira Silva, 2008).....	11
Figura 2.7 - Resposta tensão-deformação do betão sob carga de compressão uniaxial (adaptado Sena-Cruz, 2005).....	18
Figura 2.8 - Relações de endurecimento e amolecimento para o betão (Sena-Cruz, 2005)	19
Figura 2.9 - Superfície de cedência adotada no modelo elastoplástico de fendilhação distribuída (Sena-Cruz, 2005)	21
Figura 2.10 - Diagrama de retenção de tensões de tração para o betão simples (Barros <i>et al.</i> , 1994)	22
Figura 2.11 - Modelos para representar a retenção de tensões de tração (Tiwary <i>et al.</i> , 2021)	22
Figura 2.12 - Elemento estrutural de betão a) sem armadura; b) com armadura (Pfeil, 1989)	23
Figura 2.13 - Diagrama tensão-deformação da armadura (Sena-Cruz, 1998).....	23
Figura 2.14 - Relação uniaxial tensão-extensão para as armaduras de aço (Costeira Silva, 1999)	24
Figura 2.15 - Relações constitutivas da interface propostas na bibliografia (Neto <i>et al.</i> , 2004)	26
Figura 2.16 - Oito propostas distintas de modelação do comportamento da interface (Augusthus-Nelson <i>et al.</i> 2024).....	27
Figura 2.17 - Proposta de modelação da interface utilizada (Barros <i>et al.</i> , 2021)	27

Figura 2.18 – Propostas de modelos de aderência-escorregamento apresentadas na literatura (Augusthus-Nelson <i>et al.</i> 2024).....	29
Figura 3.1 - Fases de ensaio realizados nos modelos de laje (Costeira Silva, 2008).....	31
Figura 3.2 - Modelos FSRC (Costeira Silva, 2008).....	32
Figura 3.3 - Modelos FSBM (Costeira Silva, 2008).....	33
Figura 3.4 - Modelos FSBL (Costeira Silva, 2008).....	34
Figura 3.5 - Diagrama de carga-deslocamento central na fase de pré-fendilhação	38
Figura 3.6 - Resultados do ensaio à rotura das lajes da série FSRC (Costeira Silva, 2008)	39
Figura 3.7 - Resultados do ensaio à rotura das lajes da série FSBM (Costeira Silva, 2008)	40
Figura 3.8 - Resultados do ensaio à rotura das lajes da série FSBL (Costeira Silva, 2008)	41
Figura 3.9 - Diagrama carga – flecha das lajes da série FSRC (ensaio à rotura)	42
Figura 3.10 - Diagrama carga – flecha das lajes da série FSBM (ensaio à rotura)	42
Figura 3.11 - Diagrama carga – flecha das lajes da série FSBL (ensaio à rotura).....	42
Figura 3.12 - Evolução das extensões no CFRP em função da carga total aplicada no modelo FSBM1 (Costeira Silva, 2008).....	43
Figura 3.13 - Evolução das extensões no CFRP em função da carga total aplicada no modelo FSBM2 (Costeira Silva, 2008).....	43
Figura 3.14 - Evolução das extensões no CFRP em função da carga total aplicada no modelo FSBL1 (Costeira Silva, 2008).....	44
Figura 3.15 - Evolução das extensões no CFRP em função da carga total aplicada no modelo FSBL2 (Costeira Silva, 2008).....	44
Figura 4.1 - Ilustração das malhas: (a) Malha 1; (b) Malha 2; (c) Malha 3	46
Figura 4.2 - Diagrama trilinear tensão-deformação normal à fenda para simular a propagação da fenda em modo de fratura I ($\sigma_{n,1cr} = f_{ct}$, $\sigma_{n,2cr} = \alpha_1 \sigma_{n,1cr}$, $\sigma_{n,3cr} = \alpha_2 \sigma_{n,1cr}$, $\epsilon_{n,2cr} = \xi_1 \epsilon_{n,ucr}$, $\epsilon_{n,3cr} = \xi_2 \epsilon_{n,ucr}$) (Ventura-Gouveia, 2011)	47

Figura 4.3 - Comportamento do aço (Sena-Cruz, 2005).....	48
Figura 4.4 - Comparação entre o valor teórico e numérico para as três malhas em estudo	50
Figura 4.5 - Malhas considerando a simetria: (a) Malha 1; (b) Malha 2; (c) Malha 3 ...	51
Figura 4.6 - Calibração comparando as três malhas	52
Figura 4.7 - Comparação de repostas numéricas, utilizando diferentes leis bilineares ..	54
Figura 4.8 - Leis tensão de tração – abertura de fenda segundo MC1990 e MC2010....	54
Figura 4.9 - Força-deslocamento a meio vão utilizando a lei bilinear ajustada	55
Figura 4.10 - Padrão de fendilhação: (a) FSRC1; (b) FSRC2; (c) Numérico (meia laje)	57
Figura 4.11 - Força-deslocamento usando elementos de 8 nós e de 4 nós e lei bilinear ajustada.....	57
Figura 5.1 - Divisão da altura da malha	60
Figura 5.2 - Curvas Tensão de Aderência (N/mm ²) – Escorregamento (mm) correspondentes às seis propostas de leis constitutivas analisadas para a interface Betão–Manta.....	61
Figura 5.3 - Curvas Tensão de Aderência (N/mm ²) – Escorregamento (mm) correspondentes às seis propostas de leis constitutivas analisadas para a interface Betão–Laminado.....	61
Figura 5.4 - Comparação entre a curva de Lu <i>et al.</i> (Modelo Simplificado) e a curva simulada no <i>Femix</i> para a interface Betão–Manta.....	62
Figura 5.5 - Comparação entre a curva de Lu <i>et al.</i> (Modelo Simplificado) e a curva simulada no <i>Femix</i> para a interface Betão–Laminado.....	62
Figura 5.6 - Força-deslocamento a meio vão das lajes reforçadas com mantas FSBM..	64
Figura 5.7 - Padrão de fendilhação: (a) FSBM1; (b) Numérico (meia laje)	64
Figura 5.8 - Padrão de fendilhação: (a) FSBM2; (b) Numérico (meia laje)	65
Figura 5.9 - Distribuição das tensões normais na laje FSBM, obtida numericamente, para o deslocamento a meio vão de 23 mm (série FSBM1)	65

Figura 5.10 - Distribuição das tensões normais na laje FSBM, obtida numericamente, para o deslocamento a meio vão de 33 mm (série FSBM2)	65
Figura 5.11 - Extensões na manta de CFRP na região de flexão pura (FSBM1)	66
Figura 5.12 - Extensões na manta de CFRP na região de flexão simples (FSBM1)	67
Figura 5.13 - Extensões na manta de CFRP na região de flexão pura (FSBM2)	68
Figura 5.14 - Extensões na manta de CFRP na região de flexão simples (FSBM2)	69
Figura 5.15 - Força-deslocamento a meio vão das lajes reforçadas com mantas FSBL. 71	
Figura 5.16 - Padrão de fendilhação: (a) FSBL1; (b) Numérico (meia laje)	72
Figura 5.17 - Padrão de fendilhação: (a) FSBL2; (b) Numérico (meia laje)	72
Figura 5.18 - Distribuição das tensões na laje FSBM obtida numericamente para deslocamento a meio vão de 20 mm (série FSBL1)	73
Figura 5.19 - Distribuição das tensões na laje FSBM obtida numericamente para deslocamento a meio vão de 17 mm (série FSBL2)	73
Figura 5.20 - Extensões no laminado de CFRP que melhor se ajustaram (FSBL1).....	74
Figura 5.21 - Extensões no laminado de CFRP que mais divergiram (FSBL1).....	75
Figura 5.22 - Extensões no laminado de CFRP na região de flexão simples (FSBL2) ..	76
Figura 5.23 - Extensões no laminado de CFRP na região de flexão pura (FSBL2).	76

1. INTRODUÇÃO

As estruturas de betão possuem um papel essencial na construção civil, sendo projetadas para garantir segurança, condições operacionais e para serem duráveis. Mas com o passar do tempo uma série de fatores pode acabar comprometendo a integridade dessas estruturas. Isso pode ser resultado de erros de projeto, erros de conceção, uso inadequado, condições ambientais desfavoráveis ou simplesmente envelhecimento dos materiais. Nesses casos é possível que surja a necessidade de reforçar e reabilitar tais estruturas para atender aos novos padrões de segurança e durabilidade.

O envelhecimento das estruturas de betão armado pode originar uma série de problemas críticos, que variam desde a degradação superficial do material até à perda significativa da capacidade de carga desses elementos. Estes problemas são agravados por condições ambientais agressivas ou pela exposição a cargas superiores às inicialmente previstas, o que coloca em risco a segurança e a funcionalidade das estruturas. Para diminuir esses riscos e garantir que as construções durem mais, as técnicas de reforço e reabilitação têm se tornado essenciais na engenharia civil.

Entre as diversas técnicas de reforço existentes, destaca-se o uso de materiais Compósitos Reforçados com Fibras de Carbono - *Carbon Fiber Reinforced Polymer* (CFRP), os quais que vem ganhando destaque no reforço de estruturas de betão armado. Segundo Juvandes (2001) os CFRP possuem propriedades ideais para reforço de estruturas de betão armado, pois possuem elevada resistência à tração, baixa densidade, alta rigidez e alta resistência à corrosão. Este material também pode ser considerado versátil já que se adapta em diferentes superfícies, como em elementos curvos, sendo uma grande vantagem em comparação com as técnicas tradicionais de reforço, como o uso de chapas de aço por exemplo.

A técnica de colagem exterior de armaduras conhecida como Colagem Exterior de Armaduras - *Externally Bonded Reinforcement* (EBR), surgiu como uma solução eficaz para o reforço à flexão de elementos de betão armado, como pilares, vigas e lajes. Essa técnica foi inicialmente desenvolvida para o uso com chapas de armadura, mas a aplicação de sistemas de CFRP tem se tornado cada vez mais predominante devido às suas propriedades mecânicas, à sua capacidade de aderência ao betão e à facilidade construtiva. O CFRP em reforços EBR melhora o desempenho estrutural e também reduz as intervenções arquitetónicas, uma vez que a quantidade de material de reforço

necessário é menor, diminuindo assim o impacto visual e as mudanças na geometria original da estrutura (Dalfré *et al.*, 2021; Dias e Barros, 2005).

O uso dos sistemas de CFRP tem sido amplamente estudado e desenvolvido em todo o mundo, gerando um avanço significativo na compreensão do comportamento estrutural de elementos reforçados. A modelação numérica é fundamental nesse processo, permitindo simulações mais precisas e o desenvolvimento de métodos de análise que ajudam a prever o desempenho de estruturas reforçadas com CFRP ao longo do tempo. Estas inovações tecnológicas não só aprimoram o entendimento teórico sobre o comportamento dos materiais compósitos, mas também oferecem soluções práticas que podem ser implementadas em campo com maior confiabilidade e facilidade.

A modelação numérica também oferece uma série de vantagens destacando-se pela sua capacidade de fornecer resultados precisos com um investimento relativamente baixo. Essa abordagem facilita a análise de estruturas complexas com simulações detalhadas que antecipam o comportamento dos elementos estruturais sob diversas condições de carga. Além do mais, a flexibilidade e facilidade de uso de ferramentas computacionais constituem uma opção atraente para engenheiros e pesquisadores, ajudando-os a desenvolver soluções de reforço cada vez mais eficientes e ajustadas às necessidades específicas de cada projeto.

A presente dissertação trata da modelação numérica de lajes de betão armado reforçadas com sistemas de CFRP pela técnica EBR, com foco na análise do comportamento estrutural desses elementos quando submetidos a um carregamento monotónico até à rotura. Utilizando modelos numéricos com comportamento não linear, a dissertação busca contribuir para a definição e calibração dos modelos de comportamento do betão fendilhado quando reforçados com sistemas de CFRP colados externamente ao betão e para analisar o desempenho da interface entre o betão e os compósitos.

1.1. Enquadramento

O reforço de estruturas de betão armado com materiais CFRP tem crescido significativamente, destacando-se a técnica EBR. Estudos experimentais e analíticos têm sido conduzidos ao longo dos anos para investigar e validar essas técnicas (Juvandes, 1999; Sena Cruz, 2005; Costeira Silva, 2008, Mostofinejad *et al.*, 2014, Torabian *et al.*, 2020, Ghaleh e Mostofinejad, 2022).

A maioria dos estudos experimentais realizados tem-se focado no comportamento de vigas reforçadas ao corte e/ou à flexão com estes materiais compósitos e com recurso à técnica EBR. Porém, a sua aplicação a lajes de betão armado é relevante, pois na maioria dos casos estes elementos estruturais possuem suficiente resistência ao corte e é possível, se necessário, a adoção de ancoragens externas ou a aplicação de pré-esforço aos sistemas laminados de CFRP.

O Método dos Elementos Finitos (MEF), desenvolvido por Zienkiewicz e Taylor (2005), tem sido amplamente empregado em análises computacionais numéricas para avaliar o comportamento de estruturas de betão armado reforçadas à flexão com CFRP. A simulação numérica do comportamento desses elementos estruturais reforçados é crucial devido aos custos reduzidos em comparação com campanhas experimentais, além de proporcionar a validação dos resultados, quando realizadas análises comparativas com metodologias experimentais, bem como a análise de condições de carregamento e deformação diversas.

Neste contexto, este estudo visa contribuir para a simulação numérica da resposta estrutural de lajes de betão armado reforçados à flexão com CFRP. Utilizando modelos numéricos disponíveis no programa *Femix* (Azevedo *et al.*, 2003; Ventura-Gouveia, 2011), bem como resultados de estudos experimentais (Costeira Silva, 2008) para validação das análises, o objetivo é simular o comportamento não linear do elemento estrutural de lajes desde o início do carregamento até à sua rotura. Este trabalho busca fornecer *insights* valiosos para a modelação e análise de estruturas reforçadas, contribuindo para avanços na aplicação prática dessas técnicas na engenharia civil.

1.2. Objetivos da Investigação

Com essa dissertação pretende-se:

- Efetuar uma revisão bibliográfica sobre o comportamento à flexão de elementos de betão armado reforçados com sistema de CFRP pela técnica EBR e sobre a modelação numérica deste comportamento;
- Calibrar as leis constitutivas dos materiais e da interface de colagem;
- Simular numericamente o comportamento experimental das lajes por meio de modelos não lineares, utilizando o programa *Femix*.

1.3. Abordagem Metodológica

A abordagem desta dissertação emprega o Método dos Elementos Finitos (MEF) para modelar numericamente o comportamento à flexão de uma laje de betão armado reforçada com sistemas CFRP pela técnica EBR. O software *Femix 4.0* desempenha um papel crucial na implementação dos modelos desenvolvidos. O MEF é escolhido pela sua capacidade de capturar a complexidade do comportamento estrutural desses elementos, enquanto o *Femix 4.0* proporciona uma plataforma robusta e versátil para análise estrutural avançada. A metodologia inclui a modelação detalhada dos elementos, a calibração das propriedades dos materiais e da interface de colagem com base em dados experimentais, além da validação do modelo numérico.

1.4. Estrutura da Dissertação

A presente dissertação está organizada de maneira a cumprir os objetivos estabelecidos de forma abrangente e estratégica, sendo composta por seis capítulos distintos.

O Capítulo 1 (Introdução) estabelece o contexto da pesquisa, define os objetivos do estudo e descreve a estrutura da dissertação.

O Capítulo 2 (Revisão Bibliográfica) realiza uma análise detalhada da literatura existente sobre o tema abordado, iniciando pelas técnicas de reforço com CFRP. A seguir, é discutido o comportamento das lajes reforçadas com CFRP utilizando a técnica EBR, incluindo estudos experimentais sobre o reforço de lajes. Também é apresentada a modelação numérica, com foco no Método dos Elementos Finitos (MEF) e na modelação do comportamento não linear dos materiais. O capítulo explora ainda as leis constitutivas da interface betão-CFRP, e finaliza com uma análise das dificuldades encontradas nas modelações.

O Capítulo 3 (Caso de Estudo) resume os estudos experimentais realizados por Costeira Silva (2008). Este capítulo descreve os ensaios experimentais realizados nas lajes que foram utilizadas neste estudo.

No Capítulo 4 (Modelação Numérica da Laje de Betão Armado), são apresentados os modelos numéricos utilizados para a modelação do comportamento estrutural das lajes de betão armado, utilizando o programa computacional de elementos finitos *Femix* (Azevedo *et al.*, 2003; Ventura-Gouveia, 2011). Detalham-se, ainda, as leis constitutivas

consideradas e procede-se a uma análise de sensibilidade para definição da malha de elementos finitos a considerar neste estudo. Este Capítulo termina com a apresentação e discussão dos resultados obtidos.

No Capítulo 5 (Modelação Numéricas das Lajes Reforçadas com CFPR) são apresentados os modelos numéricos utilizados para a modelação do comportamento estrutural das lajes de betão armado reforçadas com sistemas CFRP pela técnica EBR, utilizando o software *Femix*. Neste Capítulo é detalhado o modelo de aderência adotado para simular o comportamento da interface betão-CFRP e são comparados os resultados obtidos numericamente com os experimentais.

O Capítulo 6 (Conclusões Gerais e Desenvolvimentos Futuros) apresenta as principais conclusões derivadas da pesquisa e sugerem-se possíveis direções para trabalhos futuros.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo serão abordadas as técnicas de reforço estrutural, com ênfase na técnica EBR aplicada com CFRP, direcionando para a análise numérica do reforço de lajes, que corresponde a uma aplicação de grande relevância na engenharia estrutural. Serão analisados os estudos experimentais e discutidos os aspectos numéricos, com foco na modelação das estruturas reforçadas. Além disso, serão apresentadas as dificuldades associadas à modelação numérica, incluindo desafios relacionados à precisão dos modelos e à calibração das leis constitutivas dos materiais nas simulações.

2.1. Técnicas de Reforço com CFRP

Uma das técnicas mais comuns de reforço estrutural em estruturas de betão armado é a utilização de CFRP fixados ao betão por meio de adesivos epóxi, uma abordagem estudada desde a década de 1980 devido às suas vantagens, como alta resistência mecânica, baixo peso, durabilidade e resistência à corrosão (Fernandes *et al.*, 2014; Dalfré e Parsekian, 2021). Além disso, a aplicação de CFRP não exige grandes intervenções na estrutura existente, tornando-se uma opção atrativa para projetos de reabilitação.

Entre as principais abordagens, destacam-se as técnicas EBR, NSM (*Near Surface Mounted*), EBROG (*Externally Bonded Reinforcement On Grooves*) e EBRIG (*Externally Bonded Reinforcement In Grooves*). Além dessas, há variações como EBR com pré-esforço, NSM com pré-esforço e EBR com sistemas de ancoragem.

A técnica EBR teve a sua origem na década de 1980, com estudos conduzidos pelo EMPA (Swiss Federal Laboratories for Materials Testing and Research), na Suíça. Inicialmente introduzida por Meier (1987) e posteriormente desenvolvida por Kaiser (1989) buscando substituir a colagem exterior de chapas de aço por sistemas de CFRP no reforço de estruturas de betão armado. A técnica consiste na colagem de mantas ou laminados de CFRP diretamente na superfície do betão, sendo amplamente utilizada devido à sua simplicidade e aplicabilidade para reforços à flexão, corte e torção (FIB, 2019; Dalfré e Parsekian, 2021). No entanto, a sua eficácia pode ser limitada pelo destacamento precoce do CFRP.

A classificação das técnicas de reforço estrutural com CFRP deve-se ao método de aplicação e à eficiência da aderência desses sistemas ao betão. Com relação ao método de aplicação, o reforço pode ser externo como na técnica EBR (ver Figura 2.1), inserido em

entalhes, como em NSM (ver Figura 2.2), ou híbrido, como nas técnicas EBROG e EBRIG (ver Figura 2.3 e Figura 2.4), que combinam as características anteriores.

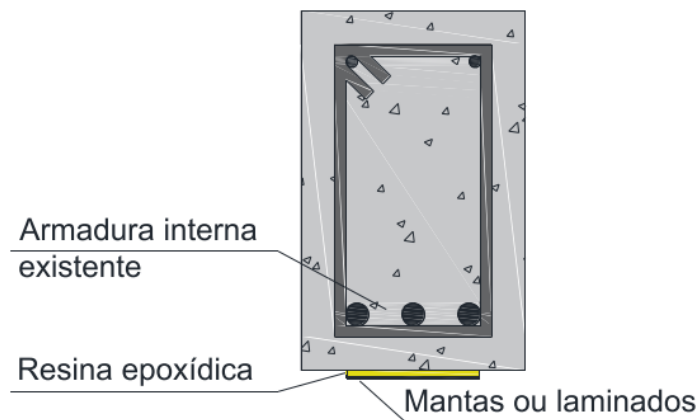


Figura 2.1 - Técnica de reforço EBR (Dalfré e Parsekian, 2021)

A técnica de NSM envolve a inserção do CFRP em entalhes feitos na superfície do betão. Esse método apresenta maior eficiência na aderência do reforço, reduzindo o risco de descolamento precoce, além de proporcionar melhor proteção contra fatores ambientais adversos (De Lorenzis e Teng, 2007).

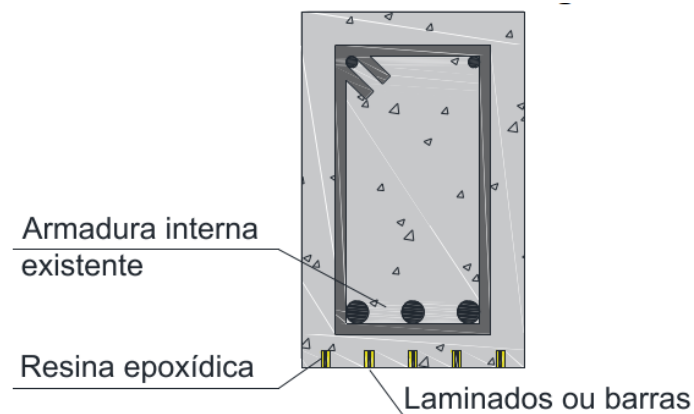


Figura 2.2 - Técnica de reforço NSM (Dalfré e Parsekian, 2021)

A técnica EBROG, por sua vez, combina elementos da EBR e NSM, onde entalhes são realizados na superfície do betão e preenchidos com resina epóxi antes da aplicação do CFRP. Essa técnica ajuda a melhorar a ancoragem do reforço e a reduzir as chances de descolamento pela colagem (Mostofinejad *et al.*, 2014).

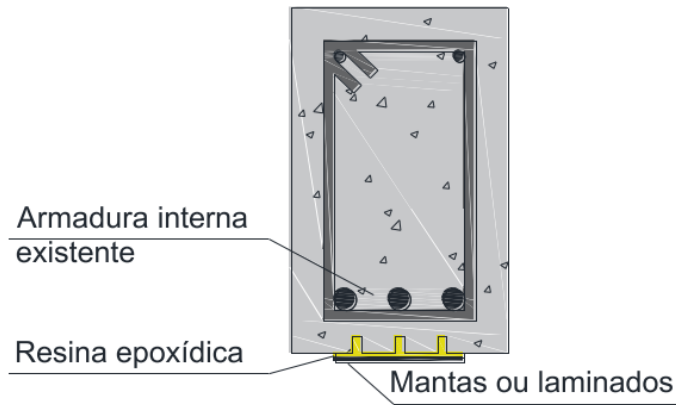


Figura 2.3 - Técnica de Reforço EBROG (Dalfré e Parsekian, 2021)

A técnica de reforço EBRIG segue um princípio semelhante ao EBROG, mas com a diferença de que as mantas ou laminados de CFRP são aplicados tanto na superfície do betão quanto no interior dos entalhes, garantindo maior aderência e eficiência estrutural (Mostofinejad *et al.*, 2014). Ambas as abordagens buscam mitigar os problemas de descolamento do FRP, ampliando a durabilidade do reforço (Dalfré e Parsekian, 2021).

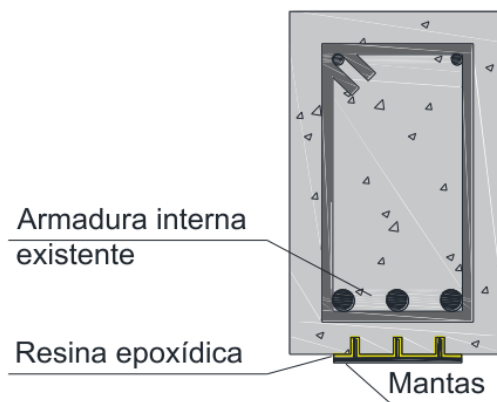


Figura 2.4 - Técnica de Reforço EBRIG (Dalfré e Parsekian, 2021)

Quanto à eficiência na aderência do CFRP, a técnica EBR é considerada menos eficiente devido ao maior risco de descolamento, a técnica NSM apresenta desempenho intermediário, enquanto as técnicas EBROG e EBRIG oferecem melhor fixação e ancoragem.

O sucesso da técnica EBR depende diretamente da qualidade da aderência entre o CFRP e o betão. Para garantir a eficiência do reforço, é essencial a realização de rigoroso controle de qualidade na preparação da superfície, aplicação do adesivo e monitoramento

das condições ambientais durante a instalação (Juvandes, 1999, Mostofinejad *et al.*, 2014). A aderência inadequada pode comprometer a capacidade de carga da estrutura reforçada, tornando imprescindível a adoção de protocolos rigorosos de controle e inspeção. Assim, quanto melhor a aderência entre o betão e o CFRP, melhor será o desempenho da estrutura reforçada (Dalfré e Parsekian, 2021). Por esse motivo, a norma EN 1504-3 estabelece um valor mínimo de tensão de aderência de 1.5 N/mm², obtido através de ensaios de *pull-off*, garantindo que o betão possua resistência suficiente para a aplicação do reforço.

Para além das técnicas apresentadas, também existem variações como a EBR com pré-esforço, a NSM com pré-esforço e a EBR com sistemas externos de ancoragem (ver Figura 2.5). Essas técnicas apresentam vantagens adicionais no aumento da eficiência do reforço e da durabilidade das estruturas. A técnica EBR com pré-esforço, por exemplo, busca otimizar a capacidade de carga ao introduzir uma força inicial no sistema e assim obter um maior aproveitamento da capacidade resistente do CFRP, enquanto a NSM com pré-esforço visa melhorar a aderência e a distribuição das tensões. Já a técnica EBR com sistemas externos de ancoragem visa aumentar a segurança do sistema ao garantir uma melhor fixação do reforço, minimizando o risco de descolamento (Coelho *et al.*, 2011).



Figura 2.5 - Técnica de reforço EBR: a) com pré-esforço e b) com sistema de ancoragem externo (S&P Clever Reinforcement, 2025)

2.2. Reforço de Estruturas de Betão Armado com CFRP Através da Técnica EBR

Apesar das limitações de emprego da técnica EBR, destacadas em Dalfré e Parsekian (2021), a mesma continua a ser uma das mais empregadas na engenharia estrutural. Sendo

assim, no presente trabalho, serão adotados exemplos para validação numérica que empregam a técnica EBR sem pré-esforço, considerando o uso de mantas e laminados de CFRP, para a qual será dada ênfase neste trabalho.

2.2.1 Comportamento das estruturas reforçadas com CFRP

O desempenho mecânico das estruturas de betão armado ao longo da sua vida útil, tem vindo a degradar-se continuamente devido aos efeitos combinados do envelhecimento do betão, da corrosão da armadura, do aumento de carga, entre outros fatores. Analisando essa degradação, (Zhou *et al.*, 2023) ressalta a importância de implementar medidas adequadas de reforço para garantir a continuação da utilização segura dessas estruturas.

Analisando investigações experimentais realizadas, Costeira Silva (2008) identificou oito tipos de modos de ruína de elementos estruturais reforçados à flexão com CFRP, conforme esquematizado na Figura 2.6.

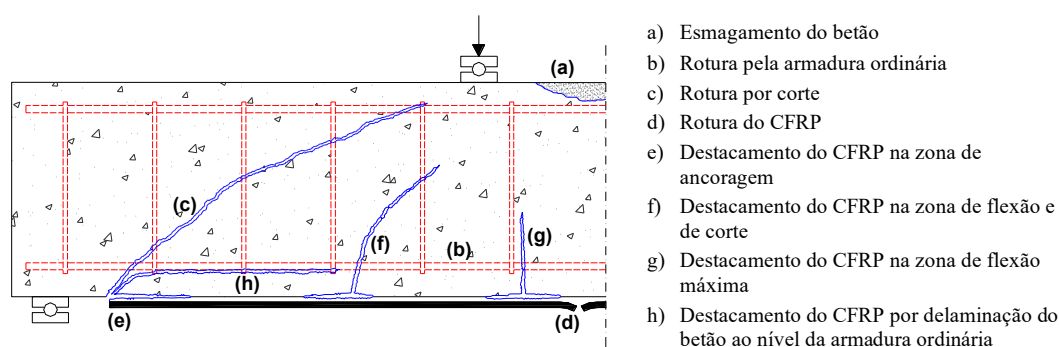


Figura 2.6 - Principais modos de ruína de vigas reforçadas à flexão com CFRP (Costeira Silva, 2008)

Em ensaios conduzidos por pesquisadores do EMPA, como Kaiser (1989), Deuring (1996) e Meier (1987), foram observados diversos modos de ruína em vigas reforçadas com laminados de CFRP. O primeiro tipo de falha corresponde à ruptura brusca na secção mais tracionada do laminado, precedida por ruídos característicos e fissuração no betão. Outro modo clássico de colapso é o esmagamento da zona comprimida da viga, caracterizando uma falha típica do betão armado. Além disso, o escorregamento de uma secção de betão por esforço transversal pode levar ao colapso da estrutura, especialmente quando combinado com outros efeitos de degradação (Azevedo, 2008).

Nos reforços estruturais com colagem de laminados, segundo Triantafillou *et al.* (1992), os modos de ruína podem ser agrupados em três categorias principais: (i) Ruínas clássicas das estruturas de betão armado ou pré-esforçado, identificadas como: a) Esmagamento do betão, b) Rotura pela armadura ordinária e c) Rotura por corte. (ii) Ruínas dos novos materiais que são adicionados à estrutura, identificadas como: d) Rotura do CFRP. Esses materiais podem falhar devido a mecanismos coesivos no adesivo ou por falha de tração no CFRP. No entanto, esses modos de ruína geralmente ocorrem em conjunto com outros, como a falha do betão ou da interface entre o laminado e o betão, resultando em uma falha mais complexa. (iii) Ruínas de cedência da ligação na interface betão-adesivo-laminado, comumente chamadas de "efeito de *peeling*" ou destacamento, causando uma cedência prematura do reforço da estrutura em três zonas específicas da estrutura, identificada como: e) Destacamento do CFRP na zona de ancoragem, f) Destacamento do CFRP na zona de flexão e corte, g) Destacamento do CFRP na zona de flexão máxima e h) Destacamento do CFRP na zona do betão ao nível da armadura ordinária (Juvandes, 1999). Esse modo de rotura pode ser causado por vários fatores, incluindo imperfeições na aplicação do adesivo, fendas de flexão no betão ou destacamento devido a movimentos verticais e horizontais nas secções reforçadas (Triantafillou *et al.*, 1992).

Portanto, a identificação e compreensão dos três grupos de modos de ruína — ruínas clássicas de betão armado, falhas nos materiais adicionados (adesivo e CFRP) e o destacamento da interface betão-adesivo-laminado — são fundamentais para garantir a eficiência e segurança dos sistemas de reforço estrutural com CFRP. Segundo Azevedo (2008), cada um desses modos pode ocorrer de forma isolada ou em combinação com outros, dependendo das condições de aplicação e das características específicas da estrutura reforçada. Ainda destacando que todas essas roturas são indesejáveis e devem ser evitadas, uma vez que ocorrem de modo repentino e abrupto.

Estudos experimentais e numéricos têm demonstrado a eficácia do uso de materiais compósitos de CFRP no reforço de elementos estruturais de betão armado em diversas situações, como corte, flexão e confinamento de pilares. No entanto, conforme apontado por Barros e Fortes (2005) e Mhanna *et al.* (2019), a eficiência desses métodos de reforço está fortemente relacionada à qualidade da ligação da interface entre o compósito de CFRP e o substrato de betão, destacando a importância do tratamento adequado da superfície para garantir uma adesão adequada.

Para Juvandes *et al.* (1996) existem 3 princípios básicos de projeto e execução de um reforço à flexão com CFRP que são necessários conhecer para compreender o comportamento geral nesta zona: (i) Princípio da compatibilidade de deformações entre os materiais que se traduz em admitir que os materiais estão perfeitamente solidarizados entre si (onde a aderência inadequada poderia levar ao deslocamento do CFRP ou destacamento prematuro do reforço); (ii) Verificação do princípio de Navier-Bernoulli, onde estabelece que as secções transversais do elemento estrutural permanecem planas após a deformação assim as linhas normais da superfície da viga não se deformam e continuam planas após a aplicação de cargas de flexão; (iii) Equilíbrio de forças na secção de betão armado com reforço estrutural com CFRP, onde se admite que as forças são distribuídas de maneira equilibrada entre o CFRP e o betão.

Os principais aspetos condicionantes que influenciam o comportamento das interfaces em reforços incluem o estado inicial do betão, como a classe e a deterioração do material, que afetam a resistência à tração e ao corte, além da transferência de forças para o compósito (Juvandes *et al.*, 1998). A preparação da superfície também é crucial, pois é necessário controlar a rugosidade, a humidade e a temperatura para garantir uma boa adesão do compósito. A qualidade do adesivo é outro fator importante, pois ele deve ser resistente à tração e ao corte, evitando falhas na interface betão-adesivo-compósito. O padrão de fendilhação, com fendas preexistentes ou novas, pode gerar tensões no adesivo e levar ao destacamento do compósito (Meier, 1997). Além disso, as características da armadura de reforço, como o tipo de laminado ou manta, devem ser aplicadas conforme especificações rigorosas para garantir a adesão e evitar destacamentos. Por fim, o efeito de extremidade, que ocorre quando há a interrupção do reforço e a criação de descontinuidade estrutural, pode afetar a transferência de esforços e gerar concentração de tensões nas zonas de ancoragem (Azevedo, 2008).

A maioria das pesquisas sugere que os sistemas externos de ancoragem, como os sistemas metálicos padrões e os sistemas compósitos, devem ser aplicados principalmente na zona de ancoragem do CFRP, onde o destacamento é mais comum, enquanto outros defendem a aplicação ao longo de toda a junta de colagem para antecipar destacamentos em diferentes secções. A utilização de sistemas de ancoragem pode também contribuir para melhorar a ductilidade, a resistência ao esforço transversal e o comportamento ao fogo das estruturas. Quanto à forma, os sistemas de ancoragem são variados, sendo mais comuns os sistemas metálicos "standard" e sistemas compósitos, estudos como os de De

Oliveira (2023) e Ferreira *et al.* (2019) sugerem a utilização de laminados de CFRP com ancoragens metálicas comprovadas.

2.2.2 Estudos experimentais de lajes reforçadas com CFRP

Embora o estudo do reforço com CFRP tenha começado ainda no século XX, nos dias atuais essa técnica continua a ser investigada com o objetivo de aprimorar a sua aplicação e compreender melhor os seus efeitos nas estruturas de betão armado. Uma das questões mais relevantes nesse contexto é a identificação de danos por fadiga, um desafio significativo na durabilidade dessas intervenções. Zou *et al.* (2023) observaram que lajes reforçadas com CFRP podem ter a sua resposta de vibração significativamente alterada. Além disso, em ensaios de fadiga cíclica de alta intensidade, o principal mecanismo de falha identificado foi uma combinação do plastificação da armadura com o descolamento do CFRP, evidenciando a complexidade do comportamento estrutural dessas lajes.

A eficácia do sistema de reforço pela técnica EBR depende diretamente da qualidade da interface entre o CFRP e o betão, além do tipo de material utilizado. Estudos conduzidos por Aljidda *et al.* (2024) e Lee *et al.* (2013) reforçam essa questão, destacando que uma boa aderência é essencial para garantir a eficiência do reforço. A influência desses fatores também é evidenciada nos resultados experimentais que demonstram ganhos significativos de capacidade de carga. Sharaky *et al.* (2023) relataram um aumento superior a 161% na resistência de lajes reforçadas com mantas de CFRP com esta técnica, enquanto Aljidda *et al.* (2024) verificaram que o uso de laminados CFRP resultou em incrementos quer na carga de cedência quer na de rotura, variando de 46% a 107% e 45% a 177%, respetivamente, com a mesma técnica. No entanto, apesar desses ganhos expressivos, a resistência à tração dos laminados não foi plenamente explorada, atingindo apenas 29% a 36% de sua deformação máxima devido ao descolamento precoce.

Além das investigações recentes, estudos mais antigos já indicavam as vantagens do reforço de lajes com CFRP. Teng *et al.* (2002), Shahawy *et al.* (1996) e Erik e Heffernan (1995) demonstraram que o uso de mantas ou laminados colados na face de tração de lajes de betão armado resulta em melhorias expressivas no desempenho estrutural. Embora o foco inicial da pesquisa sobre CFRP estivesse voltado principalmente para vigas, a aplicação em lajes tem se mostrado altamente promissora, especialmente com a evolução das técnicas de colagem e do entendimento das interações entre os materiais.

Diante dessas evidências, os estudos experimentais realizados até ao momento indicam que o reforço de lajes de betão armado com CFRP pela técnica EBR é uma estratégia eficaz para aumentar a capacidade de carga e a rigidez estrutural. No entanto, para otimizar o seu desempenho e garantir a sua durabilidade, é fundamental considerar fatores como a qualidade da interface, o tipo de material utilizado e os métodos de aplicação. A continuidade das investigações nessa área permitirá um melhor entendimento dos mecanismos de rotura e contribuirá para o desenvolvimento de soluções mais eficientes e duráveis no reforço de estruturas de betão armado.

2.3. Modelação Numérica desta Técnica de Reforço

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica numérica amplamente utilizada na engenharia para a análise estrutural, permitindo simular o comportamento de estruturas e materiais de forma precisa e eficiente. Consiste na subdivisão de um modelo contínuo em uma malha de elementos finitos interconectados, facilitando a resolução de equações diferenciais parciais por métodos numéricos que descrevem o comportamento da estrutura sob diversas condições de carga. A escolha da malha, ou seja, o número de elementos, desempenha um papel crucial na precisão dos resultados; quanto maior a quantidade de elementos, mais refinada será a solução obtida (Zienkiewicz e Taylor, 2005).

A simulação numérica, por meio do MEF, tem se consolidado como uma ferramenta poderosa no auxílio à compreensão e à resolução de problemas complexos. Com o avanço das ferramentas computacionais, as possibilidades de aplicação do MEF se expandiram significativamente, tornando a modelação numérica uma alternativa eficiente para estudar o comportamento estrutural de forma detalhada e económica. A modelação computacional permite a análise de uma variedade de cenários, com a vantagem de reduzir a necessidade de ensaios experimentais, que muitas vezes podem ser caros e demorados.

Petrauski (2016) afirma que para um modelo numérico ser realmente útil, é necessário que ele seja devidamente validado, e quando isso ocorre, o modelo pode representar com alta precisão a realidade de uma estrutura sob diferentes condições de carga e resposta. Nesse contexto, a escolha e o desenvolvimento de modelos constitutivos adequados são fundamentais. Estes modelos, que descrevem o comportamento do material, devem ser capazes de capturar os fenómenos não lineares mais relevantes, como o comportamento

de materiais sujeitos a tensões elevadas, deformações plásticas e roturas. Em particular, no caso das estruturas de betão armado, a aplicação de modelos constitutivos apropriados é essencial para prever com precisão o seu comportamento sob diferentes condições de carga.

Portanto, a utilização do MEF tem-se mostrado uma abordagem eficiente para o desenvolvimento e análise de projetos de engenharia, proporcionando ferramentas mais rápidas e eficazes para a previsão do desempenho estrutural.

2.3.1 Modelos constitutivos dos materiais

Como mencionado anteriormente, a modelação numérica não linear do betão armado é fundamental para prever o seu comportamento estrutural sob diferentes condições de carregamento. As leis constitutivas baseadas na Lei de Hooke descrevem a relação entre tensões e deformações do material, permitindo representar tanto a sua resposta em compressão quanto em tração de forma linear. Para obter uma análise precisa, é necessário considerar a fissuração, a interação entre o betão e as armaduras e os efeitos do endurecimento por tensão (Roberts e Li, 2015).

Na modelação de lajes de betão armado, a complexidade do comportamento estrutural exige também a consideração da resposta não elástica do elemento estrutural. A aderência e o deslizamento entre as armaduras e o betão desempenham um papel essencial na redistribuição dos esforços e influenciam diretamente a rigidez e a capacidade de carga da estrutura (Póvoas, 1991). Estudos demonstram que a formulação adequada dessas interações permite obter resultados mais próximos do comportamento real das lajes (Barros *et al.*, 1994).

Devido à não linearidade do problema, a modelação numérica frequentemente recorre a métodos iterativos para a solução das equações governantes. O método de Newton-Raphson é amplamente utilizado nesse contexto, pois transforma equações não lineares em uma sequência de aproximações lineares até alcançar a convergência. Esse método é especialmente relevante para capturar fenómenos como a fissuração e a redistribuição das tensões ao longo da estrutura (Alva *et al.*, 2010).

A fissuração é um dos principais aspetos que influenciam o desempenho das estruturas de betão armado. Inicialmente, as fissuras surgem devido à baixa resistência à tração do betão, propagando-se conforme a carga aplicada aumenta. A evolução das fissuras altera significativamente a rigidez da estrutura e deve ser considerada na

modelação numérica para que o comportamento real seja representado com maior precisão. Além disso, os efeitos do endurecimento por tensão são determinantes na capacidade de carga e na resposta pós-fissuração da estrutura (Tiwary *et al.*, 2021).

Portanto, a modelação numérica não linear do betão armado exige um tratamento rigoroso das propriedades do material, da interação entre os seus constituintes e dos métodos de solução adotados. O uso de modelos avançados permite análises mais confiáveis, fundamentais para o dimensionamento e avaliação de estruturas em condições reais de utilização.

i. Betão

Para compreender e prever o comportamento do betão, é essencial o estudo das leis constitutivas que regem as suas propriedades mecânicas e estruturais. Entre os principais parâmetros que influenciam esse comportamento, destacam-se a resistência à compressão, resistência à tração, módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, energia de fratura e massa específica.

A massa específica do betão, geralmente em torno de 2500 kg/m³ para o betão armado, influencia diretamente a resposta da estrutura ao peso próprio e às cargas aplicadas. A energia de fratura (G_f) é um parâmetro fundamental para entender o comportamento do betão após o início da fendilhação, pois quantifica a energia necessária para propagar uma fissura no material. Esse parâmetro é particularmente importante na análise do comportamento pós-fissuração, quando o material começa a se deformar de forma não linear. O *fib* Model Code 2010 (2013) oferece um modelo detalhado para a relação entre a energia de fratura e a abertura da fissura, permitindo uma avaliação mais precisa do comportamento do betão sob carregamentos elevados. Segundo o CEB-FIP Model Code 1990 (1993), o G_f pode ser estimado a partir da resistência do betão e do tamanho máximo do agregado.

O coeficiente de Poisson (ν) representa a relação entre a deformação transversal e a longitudinal. De acordo com a norma ABNT NBR 6118 (ABNT, 2023), para tensões de compressão menores que 0.5 da resistência à compressão do betão, f_c , e tensões de tração menores que a resistência à tração do betão, f_{ct} , o coeficiente de Poisson pode ser considerado igual a 0.2. O coeficiente de Poisson é utilizado para determinar o módulo de elasticidade transversal, G_c , conhecido o módulo de elasticidade longitudinal do betão, E_c . Este módulo pode ser calculado utilizando a equação (2.1).

$$G_c = \frac{E_c}{2(1 + \nu)} \quad (2.1)$$

As leis constitutivas estabelecem a relação entre tensões e deformações no betão quando este é submetido a cargas, permitindo a previsão do seu comportamento tanto em tração quanto em compressão.

No caso da compressão, o comportamento do betão é geralmente representado por um diagrama tensão-deformação não linear. Esse diagrama caracteriza-se por uma relação parabolicamente linear até o ponto de escoamento, seguida por uma resposta quase linear até a rotura.

A Figura 2.7 ilustra a resposta típica tensão-deformação de um provete de betão submetido à compressão uniaxial. Inicialmente, o betão apresenta um comportamento linear até atingir aproximadamente 30% da sua resistência de pico, f_c . A partir desse ponto e até ao valor máximo de tensão, observa-se uma diminuição gradual da rigidez. Após o pico de tensão, a rigidez torna-se negativa, e o ramo descendente da curva tensão-deformação caracteriza o amolecimento do betão sob carga compressiva uniaxial (Sena-Cruz, 2005).

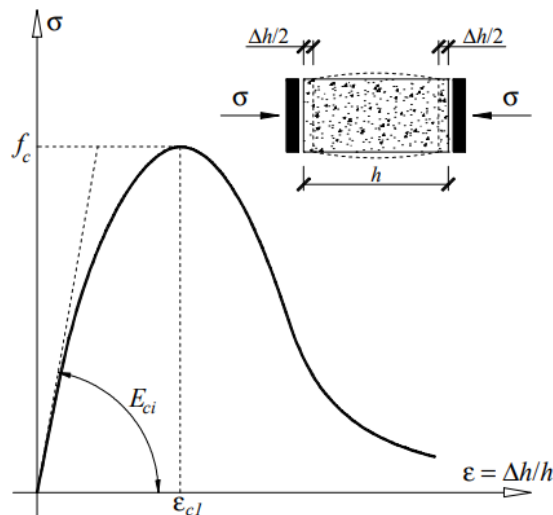


Figura 2.7 - Resposta tensão-deformação do betão sob carga de compressão uniaxial (adaptado Sena-Cruz, 2005)

Vários modelos elasto-plásticos foram propostos para simular o comportamento do betão, diferenciando-se principalmente pela forma da superfície de cedência e pelas leis

de endurecimento e fluxo. Desde a década de 1980, a teoria da plasticidade tem sido amplamente aplicada na modelação do comportamento do betão sob tensões compressivas (ASCE, 1982; Chen e Han, 1988). Baseada em dados experimentais, essa teoria proporciona um modelo construtivo que reflete diretamente as características do material.

Para representar a dissipação de energia na propagação de fissuras e o comportamento microestrutural, foram desenvolvidos modelos híbridos que combinam a mecânica da fratura com a teoria da plasticidade. Enquanto a mecânica da fratura é utilizada para simular o comportamento do betão armado sob tensões de tração após a fissuração, a teoria da plasticidade descreve o comportamento do material sob compressão (Sena-Cruz, 2005).

A Figura 2.8 apresenta a relação entre a tensão de cedência, $\bar{\sigma}$, e o parâmetro de endurecimento, κ , utilizado para simular as fases de endurecimento e amolecimento do betão. A transição entre os diferentes ramos da curva é definida por três pontos, cujas localizações são determinadas a partir de ensaios de compressão uniaxial:

- $\bar{\sigma}_0 = \alpha_0 f_c$;
- $\bar{\sigma}_p = f_c$; e
- $\bar{\sigma}_{lim} = 0.5 f_c$.

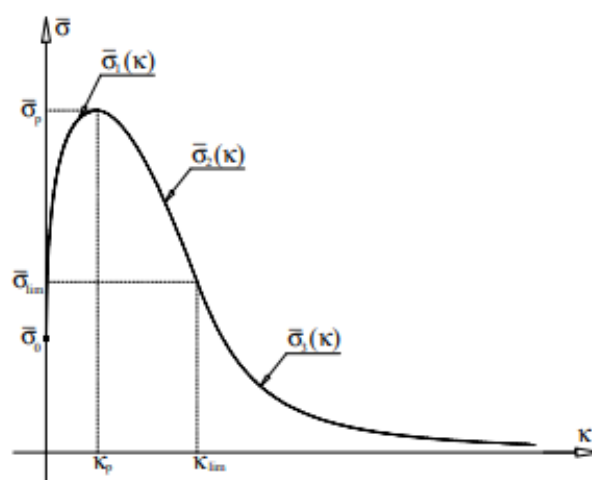


Figura 2.8 - Relações de endurecimento e amolecimento para o betão (Sena-Cruz, 2005)

A deformação plástica equivalente correspondente à resistência máxima à compressão, κ_p , é obtida a partir da deformação total no pico de resistência, ϵ_{cl} . O

parâmetro α_0 define o início do comportamento plástico, sendo comum a adoção do valor 0.3. Para a fase de endurecimento, $\bar{\sigma}_1(\kappa)$, foi utilizada a relação proposta por Lourenço (1996). Já para a fase de amolecimento, $\bar{\sigma}_2(\kappa)$ e $\bar{\sigma}_3(\kappa)$, adotou-se a relação pós-pico recomendada pelo CEB-FIP Model Code 1990 (1993) para o comportamento do betão sob compressão uniaxial conforme a equação (2.2) (Sena-Cruz, 2005).

$$\kappa_p = \frac{\varepsilon_{c1} - f_c}{E_c} \quad (2.2)$$

A modelação do betão sob compressão pode ser descrita através da combinação de diferentes critérios de escoamento, permitindo representar com precisão a transição do regime elástico para o plástico e a resistência máxima antes da rutura.

Conforme proposto por Sena-Cruz (2005), para a compressão, pode utilizar-se a superfície de cedência de Owen e Figueiras (1983), que descreve a cedência do betão até a sua resistência máxima, ou o critério Willam–Warnke (1975), e para a tração, adotar o critério de Rankine, que prevê que a abertura de fenda aconteça quando a maior tensão principal igualar a resistência à tração do betão. A Figura 2.9 ilustra essas superfícies no referencial das tensões principais normalizadas ($\sigma_I/f_c, \sigma_{II}/f_c$), destacando a transição do comportamento elástico para plástico e a superfície de cedência limite antes da rutura. Além disso, a Figura 2.9 inclui os resultados experimentais de Kupfer *et al.* (1969) para validar o modelo. A combinação desses critérios fornece uma descrição coerente do comportamento do betão sob estados multiaxiais de tensão.

O comportamento do betão sob tração, irá focar-se nos modelos de fendilhação distribuída e nos fenómenos de retenção de tensões. Quando a tensão de rotura do betão à tração é excedida, a tração gerada pela tensão principal máxima num ponto de amostragem (ponto de Gauss), pode levar à formação de uma fenda na direção perpendicular a essa tensão. O modelo de fendilhação, baseado no conceito de fendilhação distribuída, tem por princípio que a fendilhação ocorre de forma distribuída ao longo de uma zona de influência associada ao ponto representativo do estado de tensão do material, o que é modelado através de uma transformação nas relações constitutivas. Um ponto crucial é que o comportamento não linear do betão, quando sujeito a tensões significativas de compressão transversais ao plano de fenda, resulta na degradação

progressiva da sua capacidade resistente e rigidez. Esse fenômeno é acompanhado pela ampliação da extensão normal ao plano da fenda (Costeira Silva, 1999).

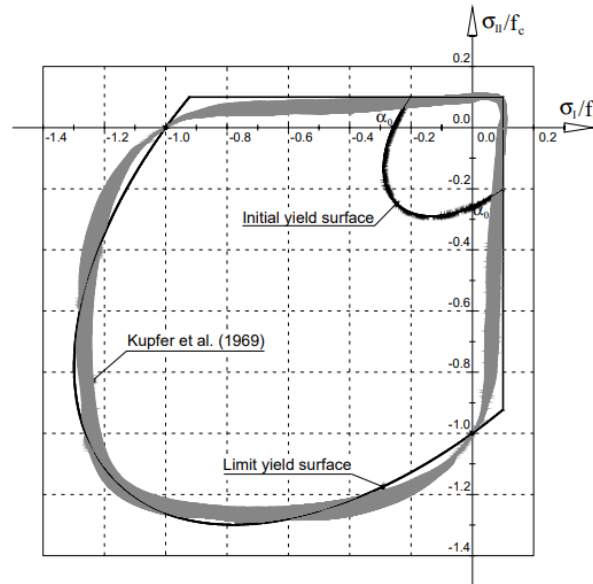


Figura 2.9 - Superfície de cedência adotada no modelo elastoplástico de fendilhação distribuída (Sena-Cruz, 2005)

A modelação da redução gradual da tensão normal à fenda, conhecida como "*tension softening*", em elementos de betão simples, e "*tension stiffening*" em elementos de betão armado, é efetuada através da definição de um valor positivo para essa tensão, determinado com base em diagramas tensão-extensão normal de tração. A aderência entre o betão e a armadura desempenha um papel vital na retenção de tensões normais de tração, sendo modelada pela relação entre as componentes normais dos estados de tensão e deformação que coincidem com a direção do plano de fenda.

Este comportamento é evidenciado nos diagramas de retenção de tensões de tração para o betão simples, conforme apresentado por Barros *et al.* (1994) (ver Figura 2.10), em que, após a formação da primeira fissura, a tensão no betão na zona de fendilhação diminui proporcionalmente ao módulo de elasticidade, enquanto a tensão na armadura que atravessa a fissura aumenta proporcionalmente ao seu módulo de elasticidade.

Diversos modelos para representar a retenção de tensões de tração foram propostos na literatura, incluindo aproximações lineares, bilineares, trilineares, dugdale, descontínuas e curvilíneas (ver Figura 2.11). Dentre esses, o modelo bilinear é amplamente utilizado por descrever de forma simplificada a relação tensão-deformação

do betão sob tração. Já o modelo Dugdale é mais adequado para representar o comportamento de materiais dúcteis, enquanto os modelos de decaimento curvilíneo exponencial capturam com maior precisão a ductilidade na fase pós-cedência. (Tiwary *et al.*, 2021)

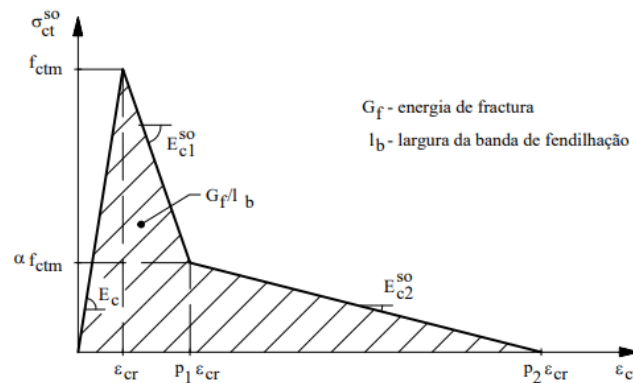


Figura 2.10 - Diagrama de retenção de tensões de tração para o betão simples (Barros *et al.*, 1994)

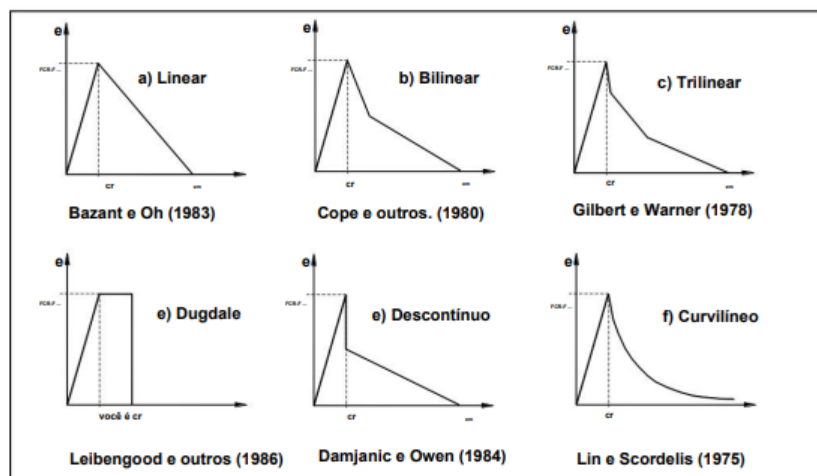


Figura 2.11 - Modelos para representar a retenção de tensões de tração (Tiwary *et al.*, 2021)

ii. Armadura

No contexto do betão armado, conforme Bastos (2011), a armadura desempenha um papel passivo, sendo suas tensões e deformações exclusivamente atribuídas às ações aplicadas na estrutura. A interação entre o betão e a armadura torna-se evidente quando comparamos um elemento estrutural sem armadura (betão simples, Figura 2.12a) com um elemento estrutural que contém armadura de flexão (betão armado, Figura 2.12b).

À medida que as forças aplicadas aumentam até o ponto de rotura, o elemento estrutural sem armadura apresenta uma falha súbita quando a primeira fissura se forma, momento em que a tensão de tração atinge a resistência do betão à tração na flexão. Em contraste, o elemento de betão armado exibe uma capacidade resistente à flexão muito superior devido à presença estratégica da armadura, que mitiga os efeitos adversos da baixa resistência do betão à tração.

O comportamento da armadura é frequentemente representado por um diagrama tensão-deformação que inclui três regimes distintos (Figura 2.13).

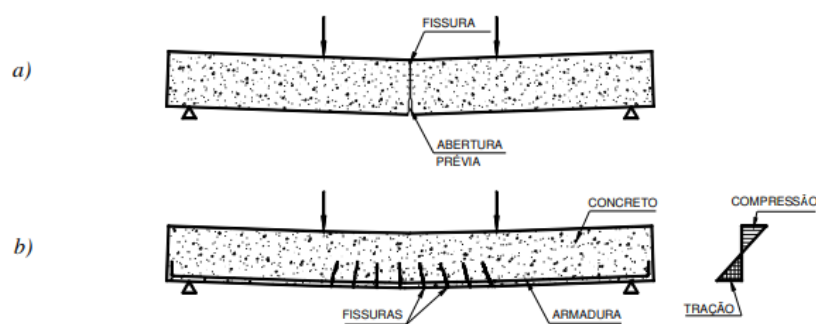


Figura 2.12 - Elemento estrutural de betão a) sem armadura; b) com armadura (Pfeil, 1989)

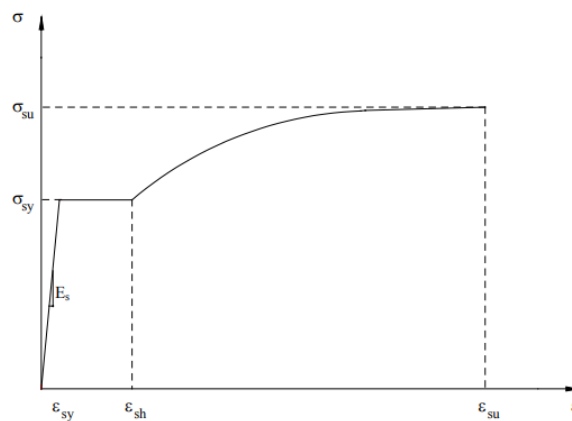


Figura 2.13 - Diagrama tensão-deformação da armadura (Sena-Cruz, 2005)

O primeiro é o regime elástico linear (trecho com módulo de Young, E_s , e deformação variando de zero a ϵ_{sy}), conhecido como ramo elástico, onde a armadura tem a capacidade de retornar à sua forma original quando a carga é removida. O segundo regime é o ramo plástico, ou de cedência, onde a armadura começa a se deformar permanentemente (de ϵ_{sy} a ϵ_{sh}). O terceiro ramo, denominado ramo de endurecimento, se inicia após a

deformação de cedência, com a deformação continuando, mas a uma taxa reduzida (de ϵ_{sh} a ϵ_{su}).

O comportamento elastoplástico com endurecimento do aço das armaduras é estabelecido, frequentemente, através de um diagrama multilinear (Figura 2.14). Esse tipo de modelação é comum em análises estruturais, pois permite aproximar a resposta real do material de forma simplificada, utilizando trechos lineares em diferentes estágios de deformação. No regime elástico inicial, a armadura se comporta de maneira linear elástica, com uma relação proporcional entre tensão e deformação, obedecendo à Lei de Hooke. O módulo de elasticidade inicial, E_s , define a rigidez do material nesta fase. Quando a tensão no aço atinge o limite de proporcionalidade, f_{sys1} , o material entra num estágio de deformação plástica, reduzindo a sua rigidez. O módulo de endurecimento, E_{s1} , representa a inclinação dessa nova fase. Após isso, o material entra num segundo estágio de endurecimento, com uma nova inclinação, E_{s2} , reduzindo novamente a rigidez, refletindo o aumento da resistência com a deformação plástica progressiva. Por fim, a armadura atinge sua máxima resistência antes da rotura, no ponto de plastificação total, ϵ_{su} , o que é importante para prever a capacidade de carga máxima da armadura antes do colapso (Costeira Silva, 1999, Póvoas, 1991).

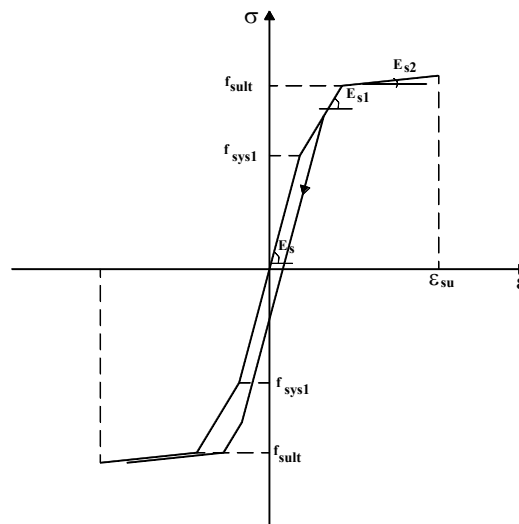


Figura 2.14 - Relação uniaxial tensão-extensão para as armaduras de aço (Costeira Silva, 1999)

2.3.2 Modelos constitutivos para a interface Betão-CFRP

A análise do comportamento da interface é amplamente estudada por diversos autores, incluindo Chajes *et al.* (1996), Maeda *et al.* (1997), Wu *et al.* (2012), Nakaba *et al.* (2001),

Dai *et al.* (2003), Yuan *et al.* (2004), Ahmed *et al.* (2006), Sharma *et al.* (2006), Subramaniam *et al.* (2007), Yun *et al.* (2008), Ueda e Dai (2005) e Rolland *et al.* (2020), entre outros.

Os modelos de aderência-escorregamento – *Bond-Slip* são essenciais para a modelação constitutiva da interface. Wu *et al.* (2004) classificam a investigação das características da interface em três abordagens principais: (1) medições diretas com extensómetros em ensaios como o *pull-off*; (2) soluções analíticas indiretas, derivadas de dados experimentais; e (3) análises pelo MEF. Dentre essas metodologias, a primeira é a mais utilizada. No entanto, os autores ressaltam que é praticamente impossível obter uma distribuição confiável e precisa das tensões de ligação na interface apenas por esse método. Isso ocorre devido à natureza frágil e altamente não linear do descolamento, bem como a distribuição aleatória de fissuras e dificuldades na medição da deformação, o que torna as tensões da interface inconsistentes (Dai *et al.*, 2003; Lu *et al.*, 2005).

A Figura 2.15 ilustra as diferentes relações constitutivas propostas para a interface betão-compósito apresentadas na literatura, onde:

- c é a tensão de corte (tensão de aderência);
- G_F^{II} é a energia de fratura;
- s_0 é o escorregamento da interface correspondente à tensão de aderência máxima; e
- s_{max} é o escorregamento final da interface.

As expressões matemáticas, embora úteis, são calibradas para conjuntos específicos de ensaios experimentais e precisam ser reajustadas para novos dados. Já a análise numérica permite uma visualização mais precisa do comportamento da interface, mas exige um conhecimento aprofundado do software utilizado e exige tempo significativo para a modelação detalhada das amostras a analisar (Augustus-Nelson *et al.*, 2024).

Augustus-Nelson *et al.* (2024) reúnem diversos estudos sobre modelação da interface, incluindo contribuições de Neubauer e Rostasy (1999), Monti *et al.* (2003), Brosens e Van Gemert (1998), Ko *et al.* (2014), Lu *et al.* (2005), Pan e Wu (2014) e Dai e Ueda (2005). Os autores destacam que os modelos de interface podem ser generalizados ajustando as constantes de forma (α , β e γ) ou separando as curvas ascendentes e descendentes, que se estabelecem em função dos parâmetros de aderência da interface (τ_{max} , S_1 e S_2).

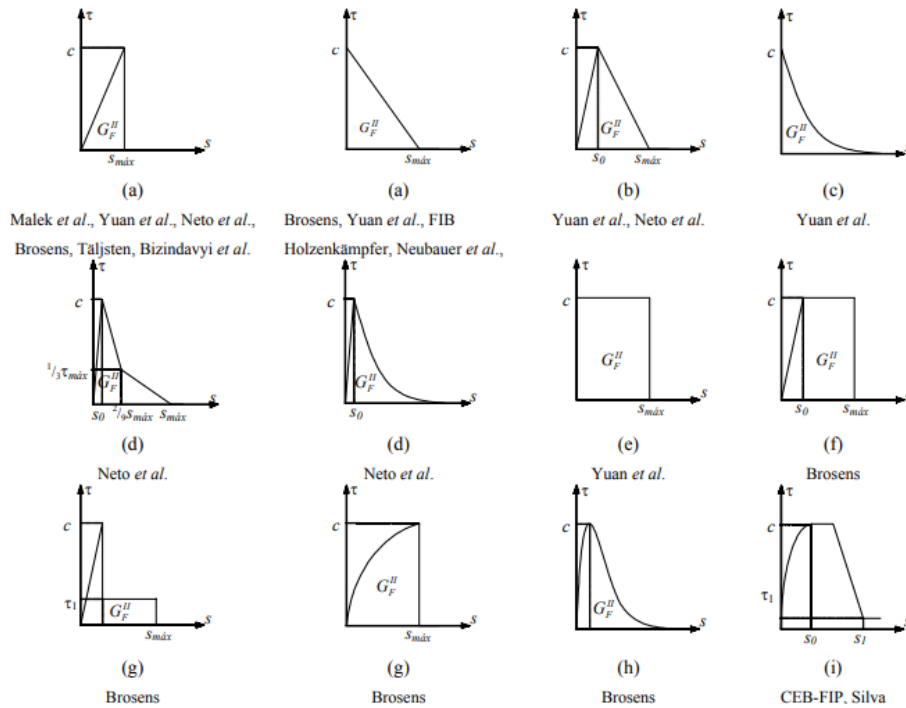


Figura 2.15 - Relações constitutivas da interface propostas na bibliografia (Neto *et al.*, 2004)

Com base nesses princípios, os autores apresentam seis modelos distintos de propostas para modelação da interface (ver a Figura 2.16), em que:

- τ_{max} é a tensão de aderência máxima da interface;
- τ_y é a tensão de aderência residual, representando a tensão mínima que ainda pode ser transmitida após danos progressivos;
- s_1 é o escorregamento correspondente ao à tensão de aderência máxima da interface;
- s_2 é o escorregamento a partir do qual a interface já não transfere mais esforços; e
- s_y é o escorregamento correspondente à tensão de aderência residual.

A parametrização dessas relações permite simplificar a previsão da aderência máxima e do escorregamento efetivo na interface.

O modelo apresentado na Figura 2.17 e expresso na equação (2.3) permite, através do ajuste dos diversos parâmetros que o definem, simular a maioria dos modelos de comportamento da interface apresentados anteriormente (Barros *et al.*, 2021). Neste modelo, τ_0 e δ_0 correspondem à tensão tangencial e ao escorregamento no final do trecho linear da relação tensão escorregamento, enquanto β_1 e β_2 são coeficientes que influenciam a forma da curva antes do pico e pós-pico, respetivamente. Os valores da

aderência máxima da ligação, τ_m , e o correspondente escorregamento, δ_m , podem ser obtidos através de ensaios experimentais ou através de equações propostas por diversos autores.

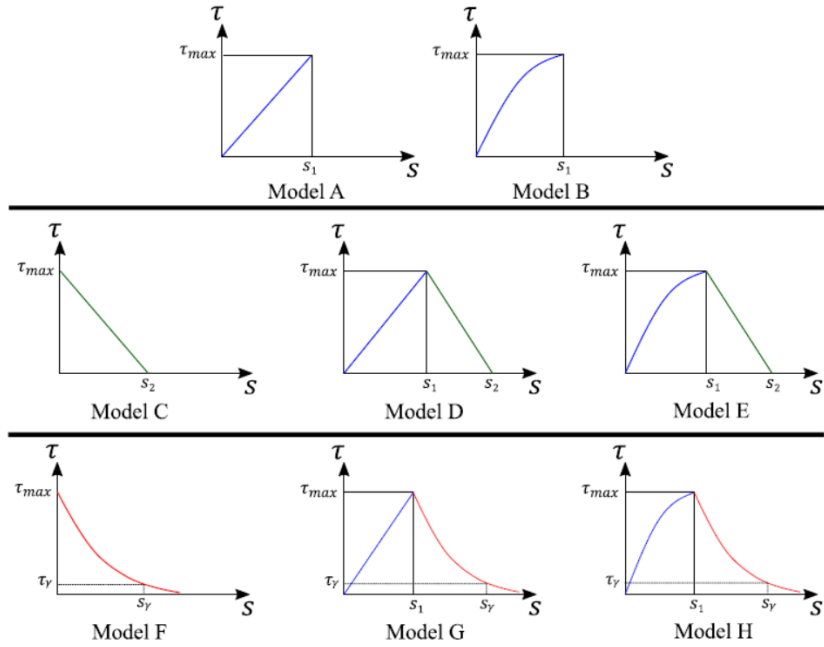


Figura 2.16 - Oito propostas distintas de modelação do comportamento da interface (Augusthus-Nelson *et al.* 2024)

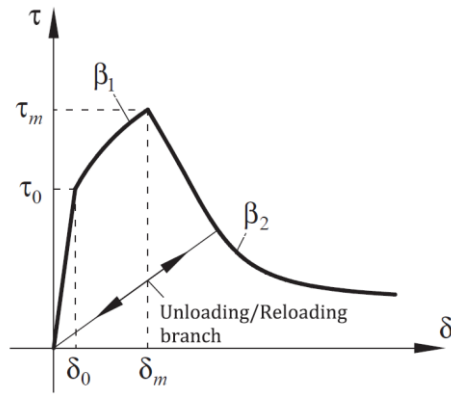


Figura 2.17 - Proposta de modelação da interface utilizada (Barros *et al.*, 2021)

$$\tau(\delta) = \begin{cases} \frac{\tau_0}{\delta_0} \delta & \text{se } \delta \leq \delta_0 \\ \tau_m \left(\frac{\delta}{\delta_m} \right)^{\beta_1} & \text{se } \delta_0 < \delta \leq \delta_m \\ \tau_m \left(\frac{\delta}{\delta_m} \right)^{-\beta_2} & \text{se } \delta > \delta_m \end{cases} \quad (2.3)$$

No seu trabalho, Augustus-Nelson *et al.* (2024) apresenta treze propostas de modelos de comportamento da interface discutidos na literatura, ver a Figura 2.18. Entre os principais parâmetros que intervêm na caracterização destas leis: τ (N/mm²) a tensão de aderência local, s_1 (mm) o escorregamento local, τ_{max} (N/mm²) a tensão máxima de aderência, s_2 (mm) o escorregamento correspondente à tensão de aderência máxima, s_f (mm) o escorregamento máximo para uma tensão de aderência nula, β_w o rácio das larguras do FRP (b_f em mm) e do betão (b_c em mm), f_c (N/mm²) a resistência à compressão do betão, f_t (N/mm²) a resistência à tração do betão, E_c (GPa) o módulo de elasticidade do betão, E_a (GPa) o módulo de elasticidade do adesivo e t_a (mm) a espessura da camada de adesivo e a energia de fratura da interface, G_f (N/mm).

2.3.3 Principais dificuldades na modelação

Ao longo deste capítulo, tem-se destacado que a modelação numérica de estruturas de betão armado reforçadas com CFRP tornou-se essencial para a análise dessas estruturas, possibilitando a simulação de comportamentos complexos sob diferentes condições de carregamento. No entanto, para que os resultados obtidos sejam precisos e confiáveis, é necessário superar desafios significativos, sobretudo no que se refere à representação dos materiais e suas interações.

Um dos principais obstáculos na modelação dessas estruturas é a complexidade do comportamento da interface entre o CFRP e o betão. Essa interface é fundamental para a transferência de carga, mas a sua representação precisa é dificultada por fatores como a qualidade da colagem, a rugosidade da superfície e as condições ambientais. A calibração das leis constitutivas para essa interface é um desafio constante, pois não existe um modelo único que se encaixe adequadamente em todas as situações. A resposta da interface é não linear e variável, tornando a definição de parâmetros universais extremamente difícil. Lu *et al.* (2005) destacam as limitações dos modelos existentes em prever com precisão o comportamento de aderência e escorregamento, especialmente quando diferentes adesivos e condições de serviço são considerados.

Model	Bond-slip model	Ascending (primary)	Descending (secondary)	Bond-slip parameters
A	Neubauer and Rostasy	$\tau_{max} \frac{d}{s_1}$	0	$\tau_{max} = 1.8\beta_e f_c$ $\alpha = 1$ $s_1 = 0.202\beta_e$ $s_2 = s_1$ $\beta_e = \sqrt{\frac{1.28(1-\lambda)\beta_c}{1.8\beta_c/100}}$
D	Monti et al.	$\tau_{max} \frac{d}{s_1}$	$\tau_{max} \frac{s_2-d}{s_2-s_1}$	$\tau_{max} = 1.8\beta_e f_c$ $\alpha = 1$ $s_1 = 2.5\tau_{max} \left(\frac{d}{K_c} + \frac{50}{K_c} \right)$ $s_2 = 0.33\beta_e$ $\beta_e = \sqrt{\frac{1.28(1-\lambda)\beta_c}{1.8\beta_c/100}}$
D	Brosens and Van Gemert	$\tau_{max} \frac{d}{s_1}$	$\tau_{max} \frac{s_2-d}{s_2-s_1}$	$\tau_{max} = 1.8\beta_e f_c$ $\alpha = 1$ $s_1 = 2.5\tau_{max} \left(\frac{d}{K_c} + \frac{50}{K_c} \right)$ $s_2 = \frac{50d}{\tau_{max}}$ $\beta_e = \sqrt{\frac{1.28(1-\lambda)\beta_c}{1.8\beta_c/100}}$ $G_f = 0.3\beta_e^2 f_c$
D	Ko et al.	$\tau_{max} \frac{d}{s_1}$	$\tau_{max} \frac{s_2-d}{s_2-s_1}$	$\tau_{max} = 0.165f_c$ $\alpha = 1$ $s_1 = 0.122 - 0.001f_c$ $s_2 = 0.302 - 0.002f_c$
D	Lu et al. bi-linear model	$\tau_{max} \frac{d}{s_1}$	$\tau_{max} \frac{s_2-d}{s_2-s_1}$	$\tau_{max} = 1.5\beta_e f_c$ $\alpha = 1$ $s_1 = 0.0195\beta_e f_c$ $s_2 = \frac{0.0166\sqrt{f_c}}{\tau_{max}}$ $\beta_e = \sqrt{\frac{1.28(1-\lambda)\beta_c}{1.8\beta_c/100}}$
G	Pan and Wu	$\tau_{max} \frac{d}{s_1}$	$\tau_{max} e^{-\beta(s_2-s_1)}$	$\tau_{max} = 1.31k_w^2 \left(\frac{d}{K_c} \right)^{0.15}$ $\alpha = 1$ $s_1 = \frac{\tau_{max}}{G_f}$ $\beta = \frac{\tau_{max}}{G_f}$ $\frac{G_f}{E_w d^3} = 0.247k_w^2 \left(\frac{d}{K_c} \right)^{0.216}$ $k = \frac{G_c}{f_c}$ $k_w = A' + (1-\lambda') \frac{G_c}{f_c}^{0.504}$ $A' = 1 + 0.222 \left(\frac{d}{K_c} \right)^{0.504}$ $E_w = 1M Pa; d = 1 m$
H	Lu et al. simplified model	$\tau_{max} \left(\frac{d}{s_1} \right)^2$	$\tau_{max} e^{-\beta(s_2-s_1)}$	$\tau_{max} = 1.5\beta_e f_c$ $\alpha = \frac{1}{2}$ $s_1 = 0.0195\beta_e f_c$ $\beta = \frac{1}{\frac{\tau_{max}}{G_f} - \frac{s_2}{s_1}}$ $\beta_e = \sqrt{\frac{1.28(1-\lambda)\beta_c}{1.8\beta_c/100}}$ $G_f = 0.308\beta_e^2 \sqrt{f_c}$
H	Dai and Ueda	$\tau_{max} \left(\frac{d}{s_1} \right)^{0.575}$	$\tau_{max} e^{-\beta(s_2-s_1)}$	$\tau_{max} = \frac{1}{72} \left(-1.575\psi K_c + \sqrt{2.481\psi^2 K_c^2 + 6.3\psi\beta^2 K_c G_f} \right)$ $\alpha = 0.575$ $s_1 = \frac{\tau_{max}}{G_f}$ $\beta = 0.0035K_c \left(\frac{d}{100} \right)^{0.24}$ $\psi = 0.028 \left(\frac{d}{100} \right)^{0.254}$ $G_f = 7.554K_w^{0.469} f_c^{0.343}$ $K_w = \frac{G_c}{f_c}$
	Lu et al. precise model	$\tau_{max} \sqrt{\frac{d}{s_1 A} + B^2 + B}$	$\tau_{max} e^{-\beta(s_2-s_1)}$	$\tau_{max} = 1.5\beta_e f_c$ $s_1 = 0.0195\beta_e f_c + \frac{\tau_{max}(G_c/f_c)}{G_f/f_c}$ $\beta = \frac{\tau_{max}}{G_f - G_c}$ $\beta_e = \sqrt{\frac{1.28(1-\lambda)\beta_c}{1.8\beta_c/100}}$ $G_f = 0.308\beta_e^2 \sqrt{f_c}$ $G_f^2 = \tau_{max} s_1 \left[\frac{2A}{\tau} \left(\frac{1-\beta^2 A}{A} \right)^2 - B - \frac{1}{2} B^2 A \right]$ $A = \frac{0.0195\beta_e f_c}{\tau_{max}}$ $B = \frac{1}{0.0195\beta_e f_c} \frac{\tau_{max}(G_c/f_c)}{G_f/f_c}$
	Baky et al.	$E_c s + (\tau_{max} - E_c s_1) \left(\frac{d}{s_1} \right)^2$	$\tau_{max} e^{-\beta(s_2-s_1)}$	$\tau_{max} = \frac{2\beta_e}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1}}$ $\alpha = 0.1$ $s_1 = \tau_{max} \left(0.35 \frac{f_c}{G_c} + 8.5 \frac{d}{G_c} + 3 \frac{G_c}{G_c} \right)$ $\beta = \frac{0.022\tau_{max}}{G_f}$ $G_f^2 = \tau_{max} s_1 \left[\frac{1.5\beta_e}{G_c} - 0.405 \left(\frac{f_c}{G_c} + \frac{d}{2.33G_c} \right) \right]$ $\lambda^2 = \frac{G_c}{f_c} \left(1 + \frac{d}{s_1} \frac{G_c}{f_c} \right)$ $\psi = \frac{A}{A_0}$ $\frac{1}{f_c} = \frac{f_c'}{G_c} + \frac{d}{G_c} + \frac{G_c}{f_c}$
	Nakaba et al.	$\tau_{max} \frac{d}{s_1} \left(3 / (2 + (s/s_1)^2) \right)$	$\tau_{max} = 3.5f_c^{0.19}$	$s_1 = 0.065$
	Savion et al.	$\tau_{max} \frac{d}{s_1} (2.86 / (1.86 + (s/s_1)^{2.86}))^4$	$\tau_{max} = 3.5f_c^{0.19}$	$s_1 = 0.051$
	Dai et al.	$2BG_f (e^{-\beta s} - e^{-2\beta s})^4$	$\tau_{max} = 0.5BG_f$	$s_1 = 0.693B$ $B = 6.846(E_c f_c)^{0.1108} \left(\frac{G_c}{f_c} \right)^{0.833}$ $G_f = 0.446(E_c f_c)^{0.0703} \left(\frac{G_c}{f_c} \right)^{-0.532} f_c^{0.736}$

FRP Reinforcement: b_f = width; t_f = thickness; E_f = elastic; G_{fj} = shear modulus.

Concrete: b_c = width; t_c = thickness; E_c = elastic Young's modulus; f_c = tensile strength; f_c = cylinder strength; G_c = shear modulus; t_i = thin inter-facial layer (Baky et al's model consider less than t_c).

Epoxy glue: t_e = thickness; E_e = elastic Young's modulus; G_e = shear modulus.

G_f = Fracture toughness (each model provides different formulae)

+ single curve

Figura 2.18 – Propostas de modelos de aderência-escorregamento apresentadas na literatura (Augustus-Nelson *et al.* 2024)

Além disso, a previsão dos modos de rotura, especialmente os modos de rotura frágeis, como o destacamento do CFRP, é crítica. Roturas dessa natureza são difíceis de modelar adequadamente, comprometendo a confiabilidade da modelação. Estudos como os de Teng *et al.* (2002) e Chen e Teng (2003) enfatizam que o descolamento prematuro do CFRP é um fenómeno crítico, e a previsão dessas roturas com precisão tem sido um grande desafio. A propagação de fissuras e a delaminação do betão, modos de rotura abruptos e imprevisíveis, exigem modelos avançados capazes de capturar essas interações complexas (Earij *et al.*, 2017).

Outro desafio importante está relacionado à exigência computacional das análises numéricas. A modelação de estruturas reforçadas com CFRP frequentemente exige a realização de análises não lineares, que podem apresentar dificuldades de convergência. Isso ocorre devido à complexidade do modelo, à interação entre os materiais, à discretização da malha e à escolha do método de solução. Barros e Correia (2022) apontam a dificuldade de obter conclusões confiáveis para aplicação prática devido a diferentes métodos que são adotados na modelação.

Os modelos existentes possuem limitações na precisão da interface e a validação experimental também representa um desafio experimental. Os testes de aderência-escorregamento entre o CFRP e o betão muitas vezes apresentam resultados dispersos devido a variáveis como a preparação da superfície e as condições ambientais, o que dificulta a correlação dos resultados experimentais com os modelos computacionais. (Lu *et al.*, 2005).

Assim é possível identificar que os principais desafios na modelação numérica de estruturas reforçadas com CFRP estão relacionados à calibração das leis constitutivas, à representação de roturas frágeis e à dificuldade de convergência em modelos não lineares. Como foi discutido no capítulo anterior, a validação dos modelos computacionais, a partir de resultados provenientes de análises experimentais, é um dos maiores desafios enfrentados na prática. No entanto, essa validação também se configura como um objetivo fundamental, pois visa garantir a confiabilidade e a adequação dos modelos, permitindo encontrar uma solução confiável e adequada para o problema em estudo.

3. CASO DE ESTUDO

Para a realização deste trabalho são utilizados os dados do trabalho de Costeira Silva (2008). O estudo realizado engloba seis modelos de lajes cujas dimensões geométricas se aproximam das utilizadas em obras, especificamente a laje superior do tabuleiro da Ponte Nossa Senhora da Guia, em Ponte de Lima. Neste capítulo faz-se a descrição dos ensaios e resumem-se os resultados que são úteis para este estudo.

3.1. Campanha Experimental

A campanha experimental realizada por Costeira Silva (2008) é composta por três séries de lajes de betão armado, cada uma contendo dois modelos. A primeira série, chamada de série de referência, é composta por duas lajes de betão armado (série FSRC). A segunda série consiste em lajes de betão armado reforçadas externamente com mantas de CFRP, curadas "in situ" (série FSBM). A terceira e última série inclui lajes de betão armado reforçadas externamente com laminados de CFRP (série FSBL).

Os ensaios realizados foram divididos em três fases: Fase 1, pré-fendilhação; Fase 2, cargas cíclicas; e Fase 3, rotura, como se ilustra na Figura 3.1.

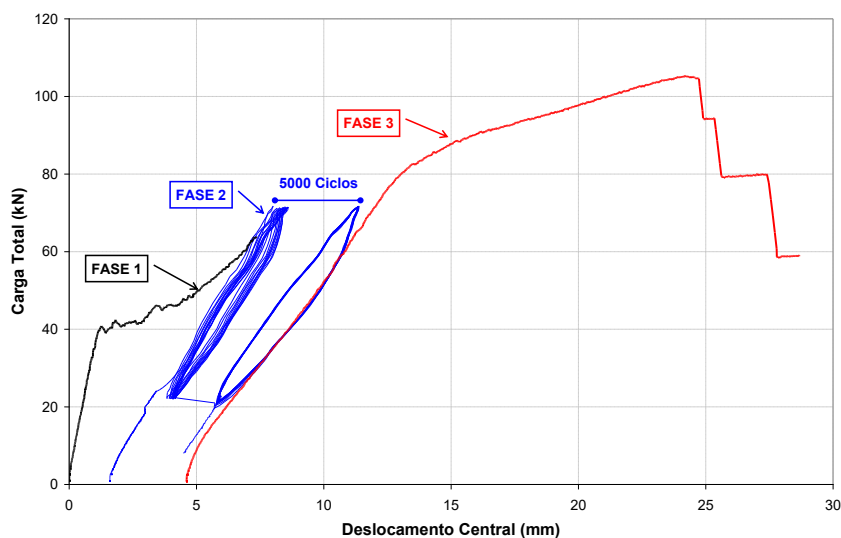


Figura 3.1 - Fases de ensaio realizados nos modelos de laje (Costeira Silva, 2008)

Esses modelos foram submetidos a uma fase inicial de cargas, cujo objetivo foi a obtenção de um padrão de fendilhação estabilizado. Em seguida, foi realizado um ciclo de 5000 cargas e descargas. Por último, os modelos foram sujeitos a uma carga progressivamente crescente até atingir a rotura.

Nas Figura 3.2 (modelos das séries FSRC), Figura 3.3 (modelos das séries FSBM) e Figura 3.4 (modelos das séries FSBL) são detalhadas, de forma esquemática, as características geométricas, as armaduras, o tipo de reforço com material composto e a localização dos pontos de aplicação das cargas.

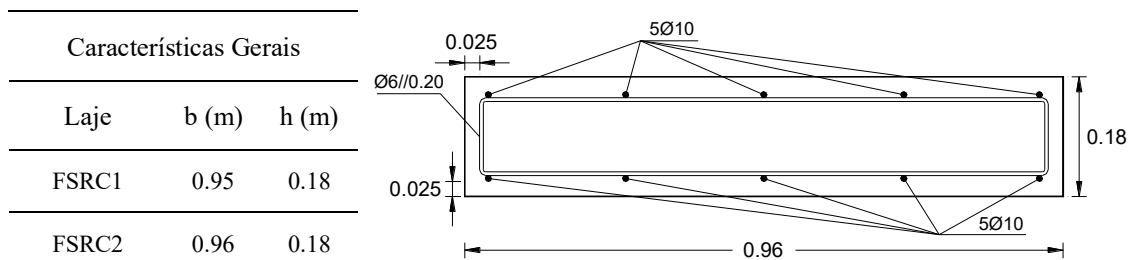
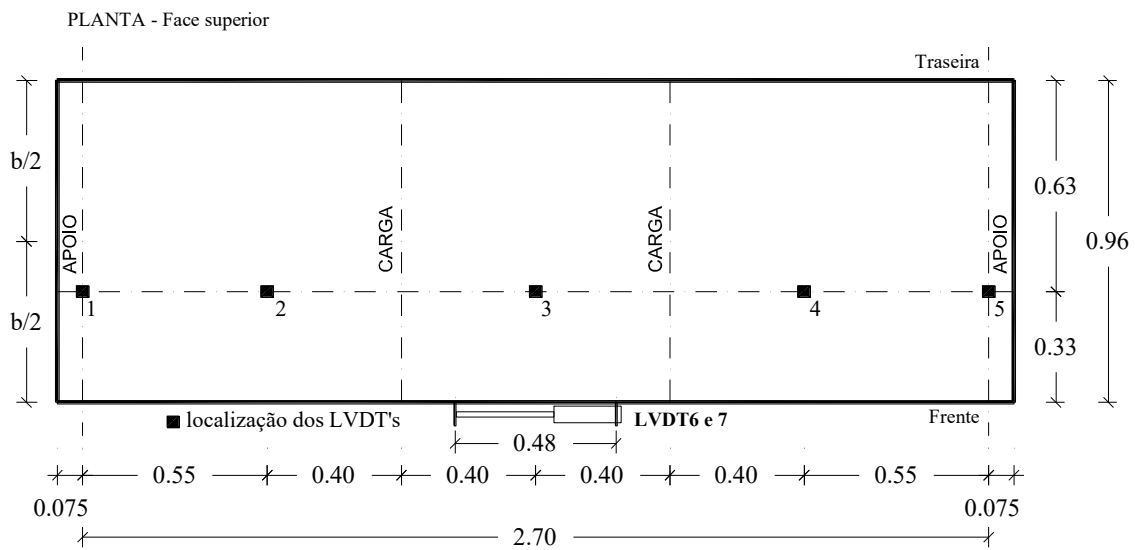
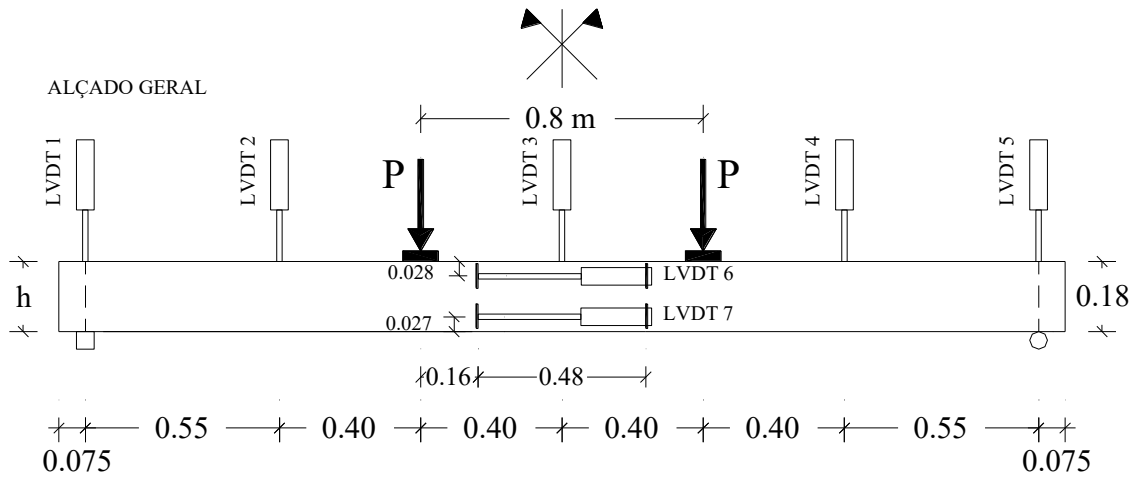


Figura 3.2 - Modelos FSRC (Costeira Silva, 2008)

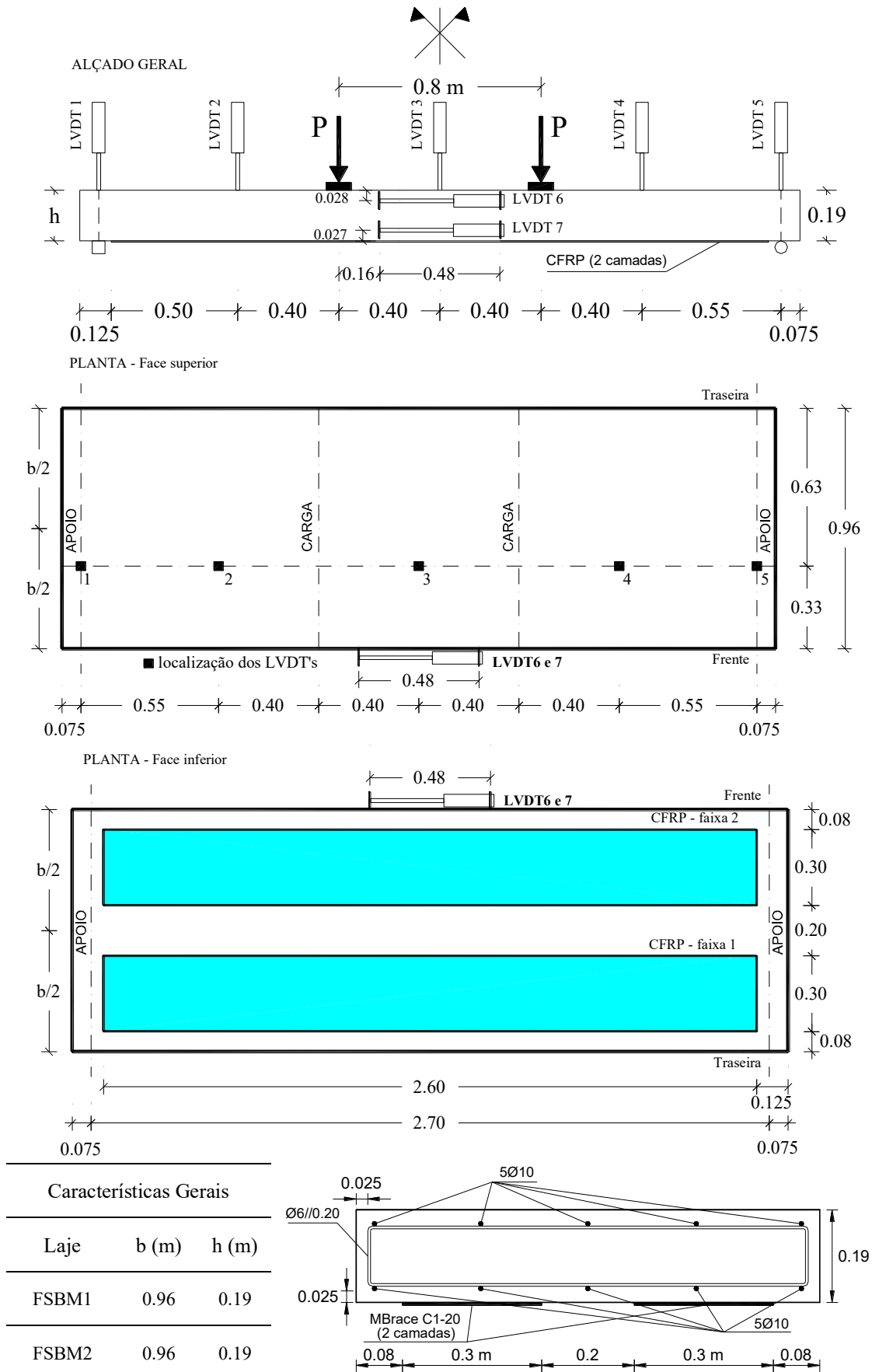


Figura 3.3 - Modelos FSBM (Costeira Silva, 2008)

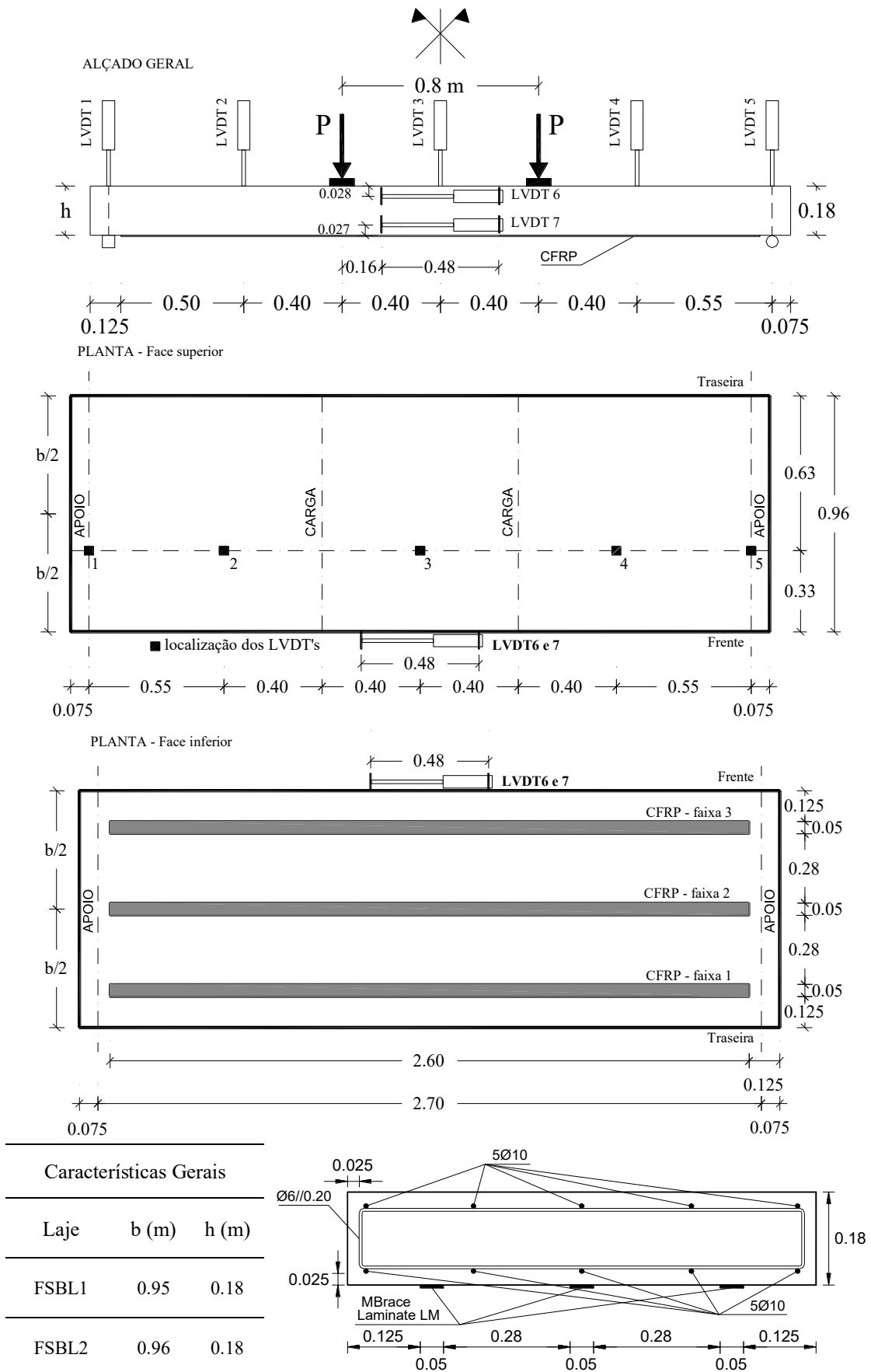


Figura 3.4 - Modelos FSBL (Costeira Silva, 2008)

No pré-dimensionamento dos reforços considerou-se um momento fletor resistente mínimo de 45 kNm/m. As características das lajes e os sistemas de reforço foram detalhadamente documentados para permitir a comparação e validação dos modelos numéricos. A Tabela 3.1 apresenta as características dos modelos de laje.

Tabela 3.1 - Características dos modelos (adaptado de Costeira Silva, 2008)

Série	Modelo	Armadura	ρ_s (%)	CFRP	ρ_f (%)	Observações
RC	FSRC1 FSRC2	5Ø10	0.20	-	-	Série de referência
BM	FSBM1 FSBM2	5Ø10	0.20	Manta	0.07	Série reforçada com manta flexível
BL	FSBL1 FSBL2	5Ø10	0.20	Laminado	0.11	Série reforçada com laminado pré-fabricado

Em que “ ρ_s ” é a percentagem de armadura ordinária e “ ρ_f ” é a percentagem de reforço.

É fundamental ressaltar algumas características dos materiais, a Tabela 3.2 apresenta as características do betão que serão utilizadas nesse trabalho baseada nas estimativas e nos ensaios realizados por Costeira Silva (2008).

Tabela 3.2 - Características do betão (adaptado de Costeira Silva, 2008)

Série	Modelo	Idade na data de ensaio (dias)	f_{cm} (N/mm ²)	f_{ctm} (N/mm ²)	E_{cm} (GPa)
RC	FSRC1	1295	46.0	3.4	34.8
	FSRC2	1306			
BM	FSBM1	1290	46.1	3.4	34.8
	FSBM2	1299			
BL	FSBL1	1313	46.1	3.4	34.8
	FSBL2	1319			

Foram utilizadas, nos 6 modelos, armaduras nervuradas de diâmetros Ø6 e Ø10 de classe A400 (SNT 40). As características dessas armaduras estão resumidas na Tabela

3.3, tendo-se considerado o módulo de elasticidade da armadura de $E_s = 200$ GPa, conforme estabelecido no Eurocódigo 2 (2004).

O reforço das lajes nesses modelos foi executado utilizando dois sistemas compósitos unidirecionais de fibras de carbono: o laminado pré-fabricado na série FSBL e a manta flexível pré-impregnada na série FSBM. A Tabela 3.4 apresenta as características de cada sistema CFRP, conforme especificações técnicas e valores mínimos fornecidos pelos produtores.

Tabela 3.3 - Características da armadura (adaptado de Costeira Silva, 2008)

Armadura Ø6 nervurado	Armadura Ø10 nervurado
Tensão de cedência: $f_{sym} = 569.7$ N/mm ²	Tensão de cedência: $f_{sym} = 460.3$ N/mm ²
Extensão de cedência: $\varepsilon_{ym} = 0.26$ %	Extensão de cedência: $\varepsilon_{ym} = 0.22$ %
Tensão de rotura: $f_{sum} = 677.9$ N/mm ²	Tensão de rotura: $f_{sum} = 575.8$ N/mm ²
Extensão na rotura: $\varepsilon_{sum} = 16.0$ %	Extensão na rotura: $\varepsilon_{sum} = 21.9$ %

Tabela 3.4 - Características dos sistemas de CFRP utilizados (adaptado de Costeira Silva, 2008)

Sistema CFRP		Principais Características				
Tipo	Componentes	Resistência à Tração (N/mm ²)	Módulo de Elast. (GPa)	Extensão na Rotura (%)	Densidade (g/cm ³)	Espessura (mm)
MBrace Manta C1-20	Putty	23	0.26	16.0	1.26	-
	Primário	12	0.72	30.0	1.10	-
	Resina	54	3.03	25.0	1.04	-
	Manta	3800	240.00	15.5	1.70	0.117
MBrace Laminado LM	Putty	23	0.26	16.0	1.26	-
	Primário	12	0.72	30.0	1.10	-
	Adesivo	s/i	8.15	s/i	s/i	-
	Laminado	>2800	150.00	14.0	1.60	1.400

Para caracterizar a aderência da interface betão-CFRP foram realizados ensaios de arrancamento por tração direta “*Pull-off*”. Os resultados obtidos nesses ensaios estão resumidos na Tabela 3.5.

Tabela 3.5 - Resultados dos ensaios de *Pull-off* (adaptado de Costeira Silva, 2008)

Série	Modelo	$f_{ct,p}$ (N/mm ²)	$f_{ctm,p}$ (N/mm ²)
FSBM	FSBM2	3.88	3.60
		3.35	
		3.58	
		3.62	3.84
		3.76	
		4.13	
FSBL	FSBL1	3.84	3.85
		4.02	
		3.69	
		4.13	4.07
		4.09	
		3.98	

3.84

3.2. Resultados Experimentais

A fase de pré-fendilhação só não foi realizada no modelo FSBM2. O critério estabelecido correspondia à aplicação de uma carga sensivelmente superior à carga de início de fendilhação (estimada em 42 kN). Na Tabela 3.6 apresentam-se os principais resultados obtidos nesta fase 1 e na Figura 3.5 apresenta-se o diagrama de cargas-deslocamento para os modelos não reforçado e reforçado.

Tabela 3.6 - Principais resultados da Fase 1 (adaptado de Costeira Silva, 2008)

Modelos	Carga Máxima (kN)	Carga de Fendilhação P_{cr}	
		Valor (kN)	Deslocamento Central δ (mm)
FSRC1	36.9	36.9	0.78
FSBM1	54.0	42.4	1.18
FSRC2	46.6	39.6	1.03
FSBM2	-	-	-
FSBL1	63.8	40.8	1.27
FSBL2	73.8	40.6	1.31

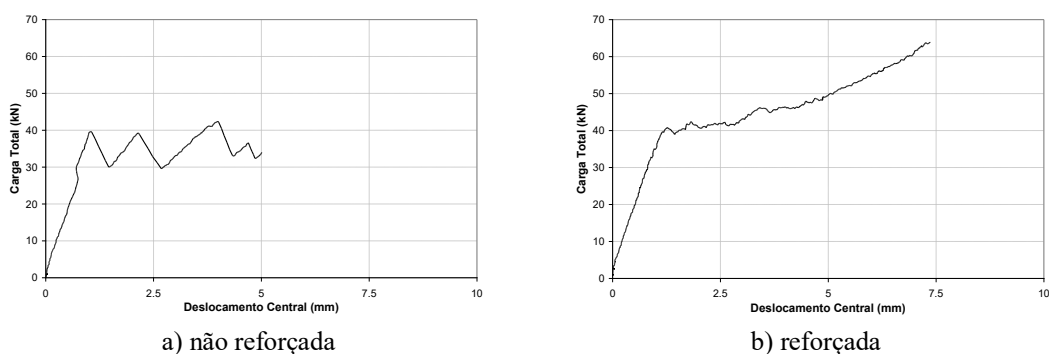


Figura 3.5 - Diagrama de carga-deslocamento central na fase de pré-fendilhação

A carga de fendilhação registada no modelo FSRC1 foi a menor e a que mais se afastou do valor estimado (42 kN).

Na fase 3, de ensaio à rotura, a carga foi aplicada de forma monotónica a uma velocidade de 0.01 mm/s nos modelos não reforçados, série FSRC, e de 0.015 mm/s nos modelos reforçados, séries FSBM e FSBL, até atingir a rotura.

Na Figura 3.6 apresentam-se os principais resultados para os modelos FSRC, nomeadamente a distribuição das fendas e os valores do afastamento médio entre fendas, das principais deformações e da carga máxima e da carga de plastificação.

Na Figura 3.7 e na Figura 3.8 apresentam-se os principais resultados para os modelos FSBM e FSBL, respetivamente. É possível constatar os modos de ruína, o padrão de fendilhação, juntamente com alguns valores obtidos nesta fase de ensaio (cargas máximas, extensões máximas, entre outros).

Nas Figura 3.9, Figura 3.10 e Figura 3.11 apresentam-se os diagramas de carga-deslocamento central obtidos nos ensaios à flexão das lajes das 3 séries, apresentando, no caso das lajes reforçadas, os instantes em que ocorreu o destacamento dos sistemas de CFRP.

Para finalizar a apresentação dos resultados desta campanha de ensaios, ilustram-se nas Figura 3.12, Figura 3.13, Figura 3.14 e Figura 3.15 os diagramas de extensões no CFRP *versus* a carga total aplicada para os quatro modelos de lajes reforçados.

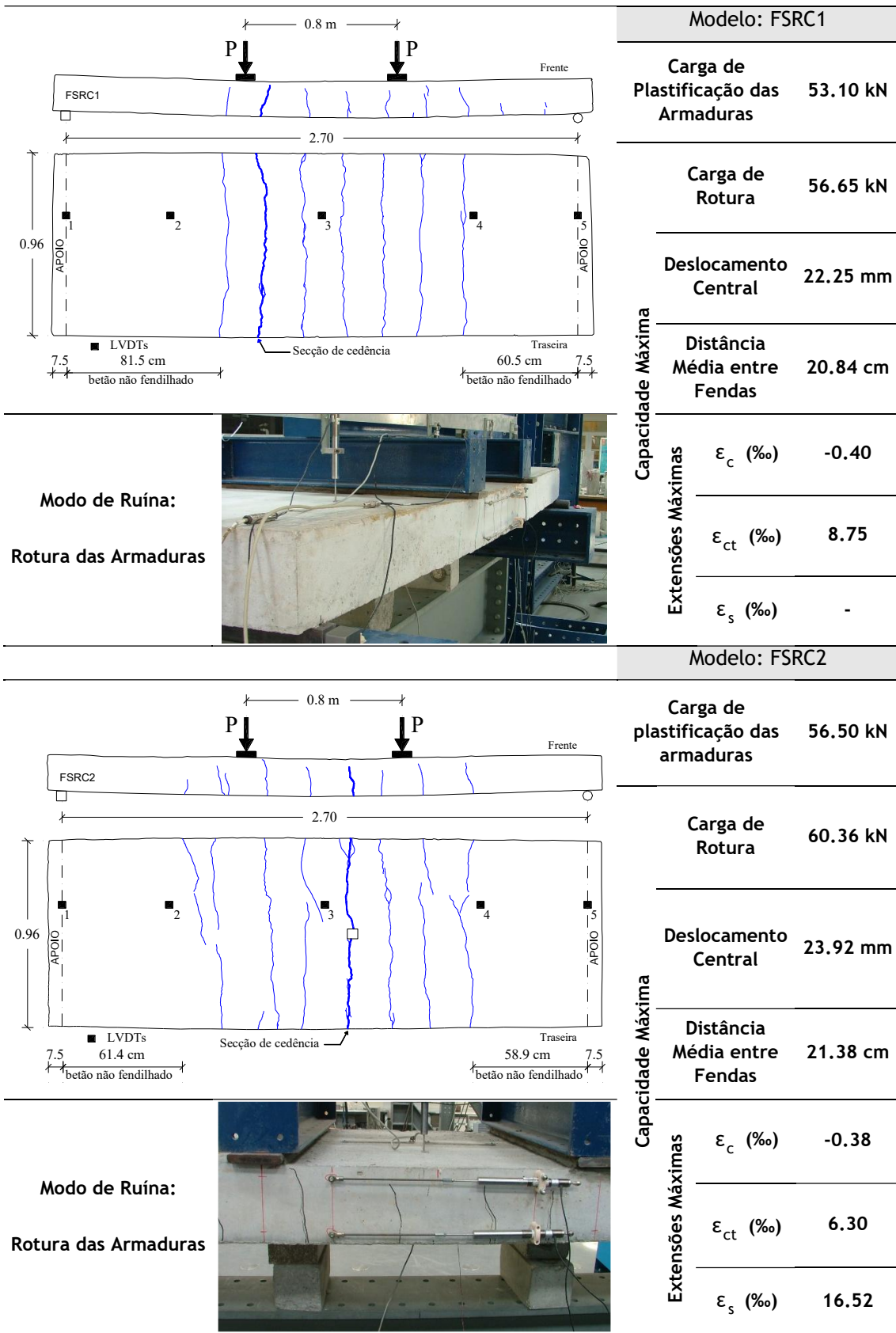


Figura 3.6 - Resultados do ensaio à rotura das lajes da série FSRC (Costeira Silva, 2008)

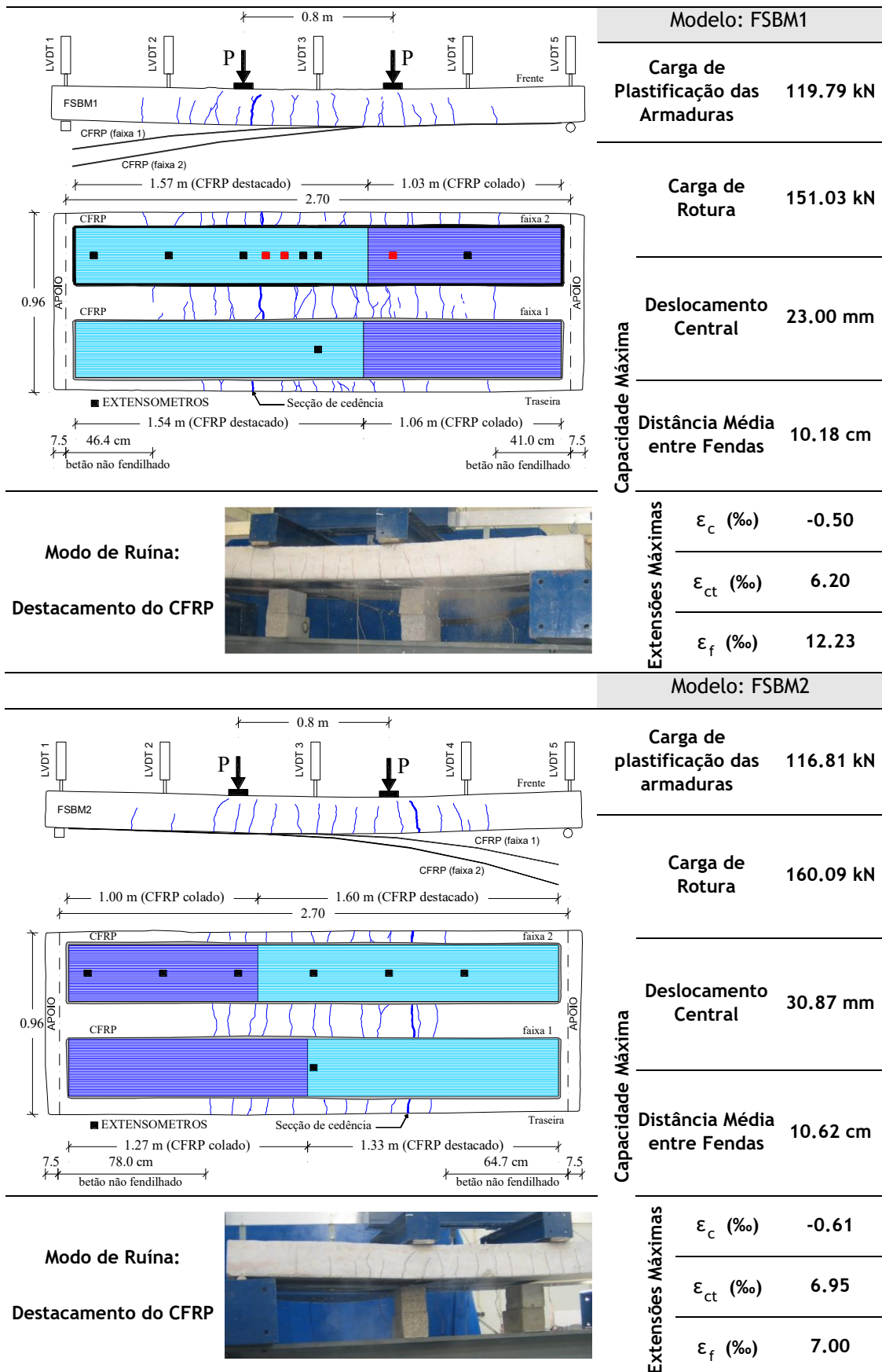


Figura 3.7 - Resultados do ensaio à rotura das lajes da série FSBM (Costeira Silva, 2008)

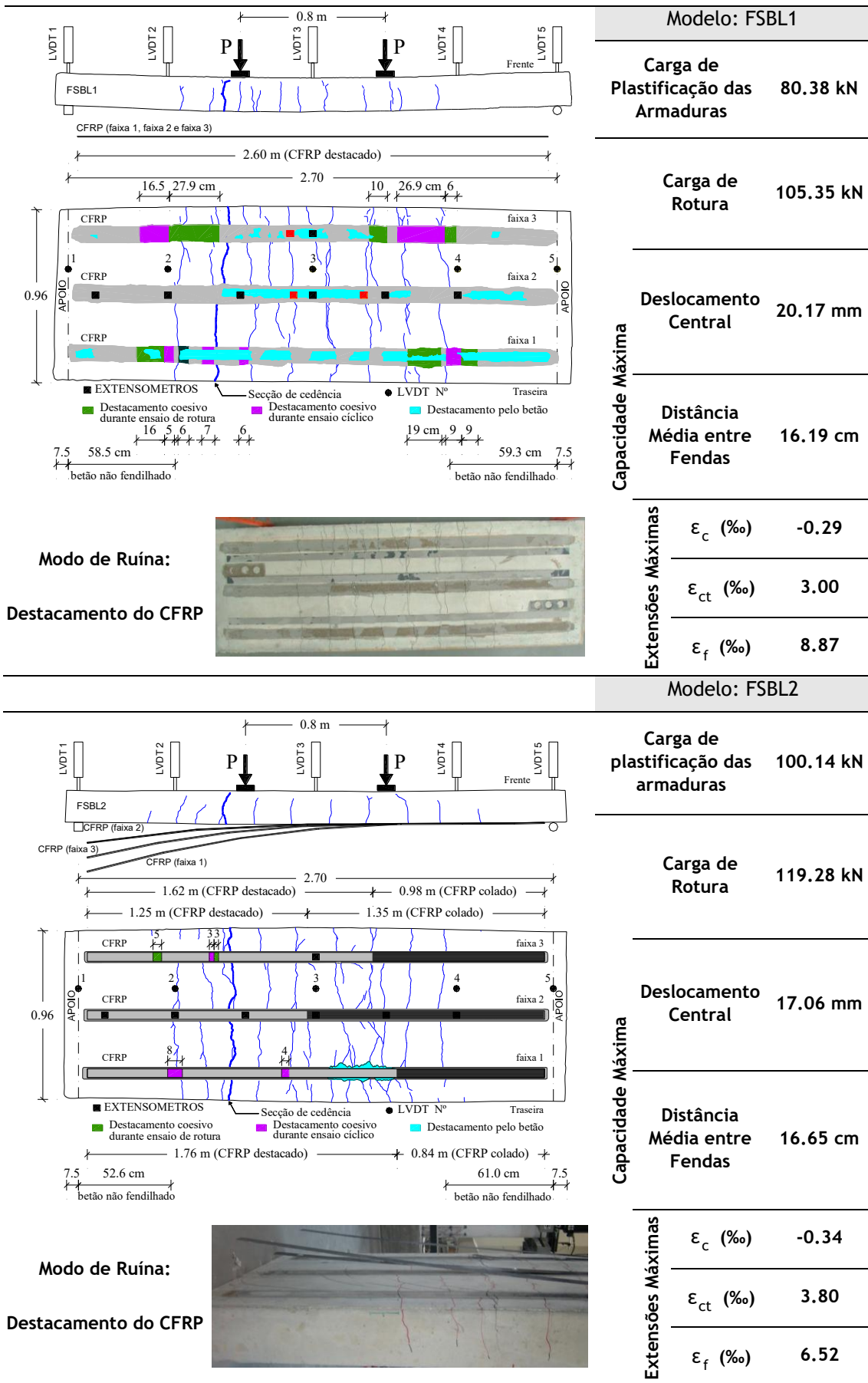


Figura 3.8 - Resultados do ensaio à rotura das lajes da série FSBL (Costeira Silva, 2008)

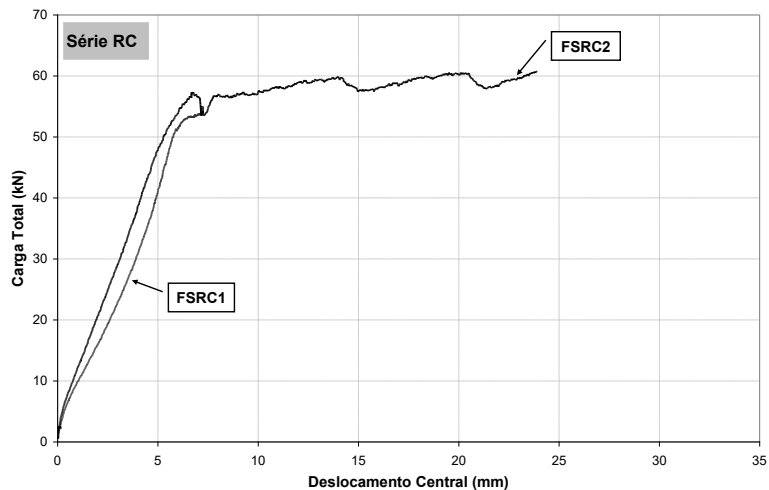


Figura 3.9 - Diagrama carga – flecha das lajes da série FSRC (ensaio à rotura)

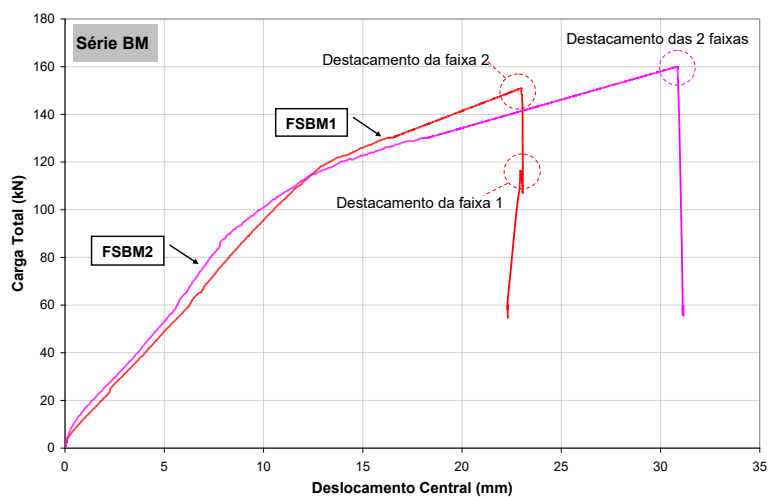


Figura 3.10 - Diagrama carga – flecha das lajes da série FSBM (ensaio à rotura)

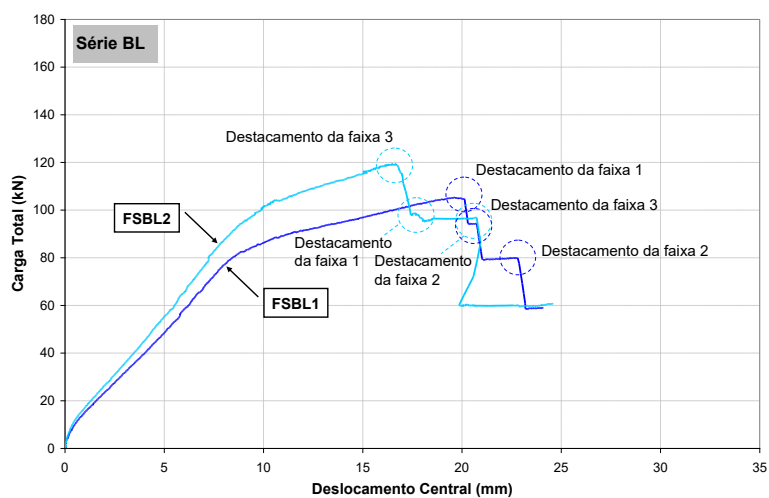


Figura 3.11 - Diagrama carga – flecha das lajes da série FSBL (ensaio à rotura)

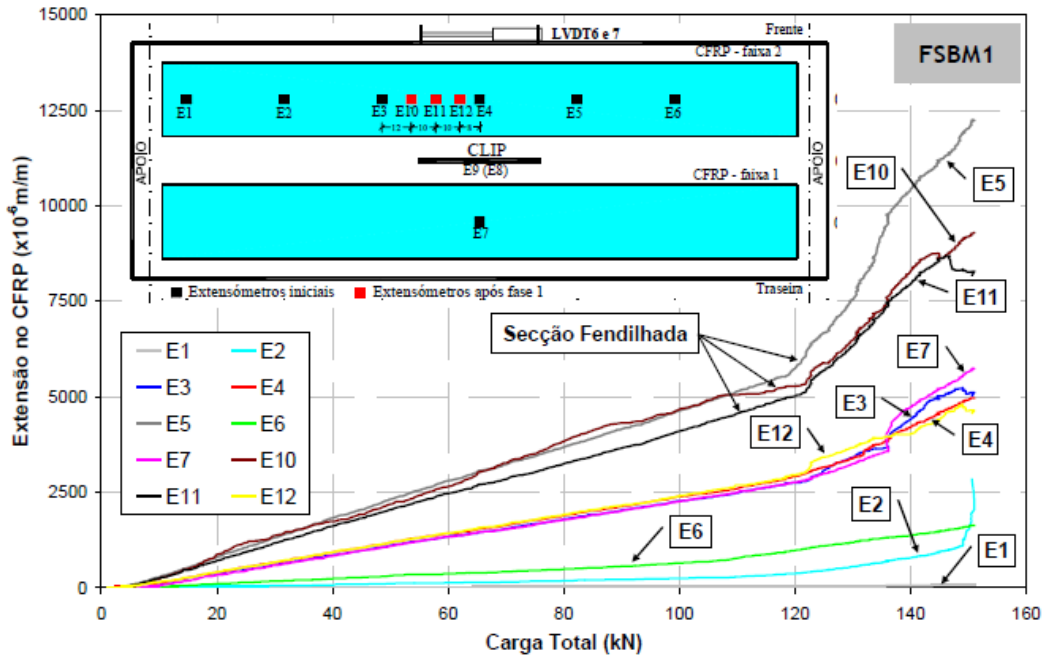


Figura 3.12 - Evolução das extensões no CFRP em função da carga total aplicada no modelo FSBM1 (Costeira Silva, 2008)

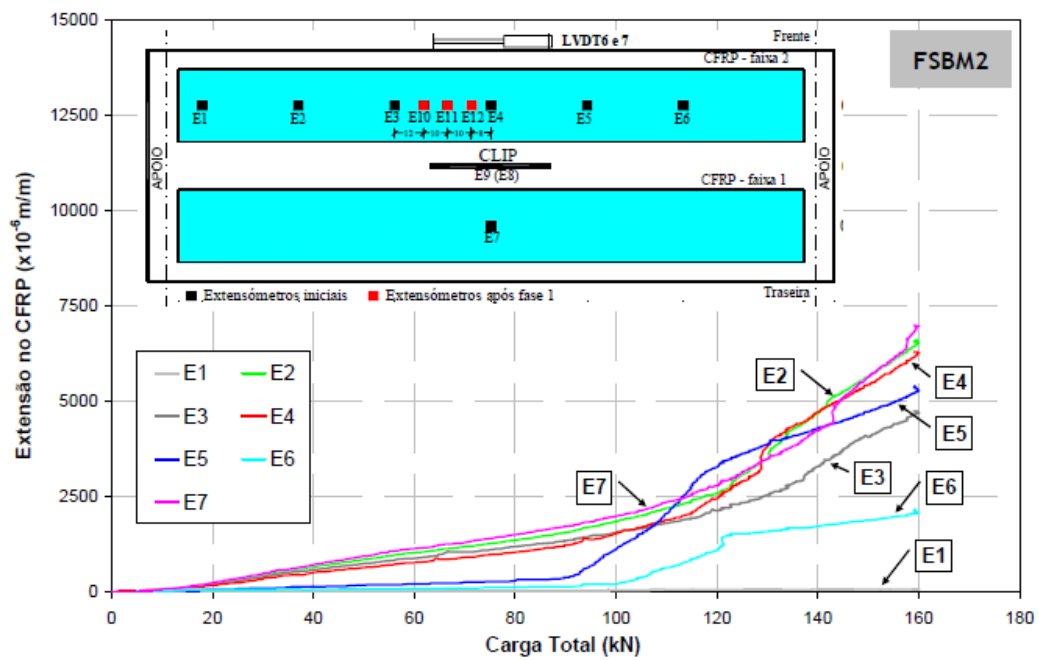


Figura 3.13 - Evolução das extensões no CFRP em função da carga total aplicada no modelo FSBM2 (Costeira Silva, 2008)

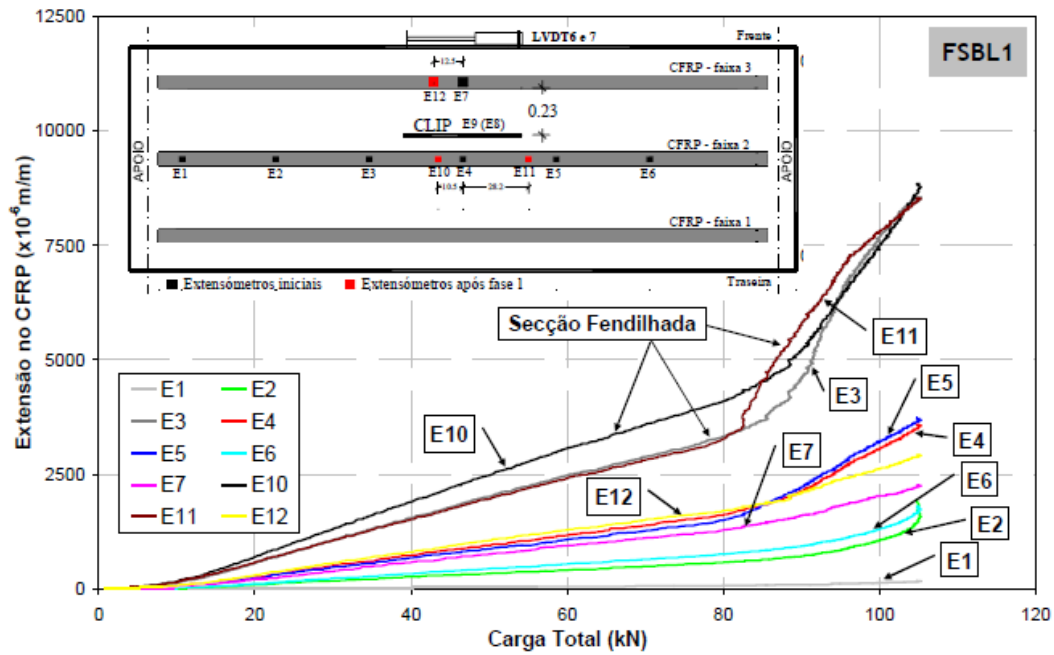


Figura 3.14 - Evolução das extensões no CFRP em função da carga total aplicada no modelo FSBL1 (Costeira Silva, 2008)

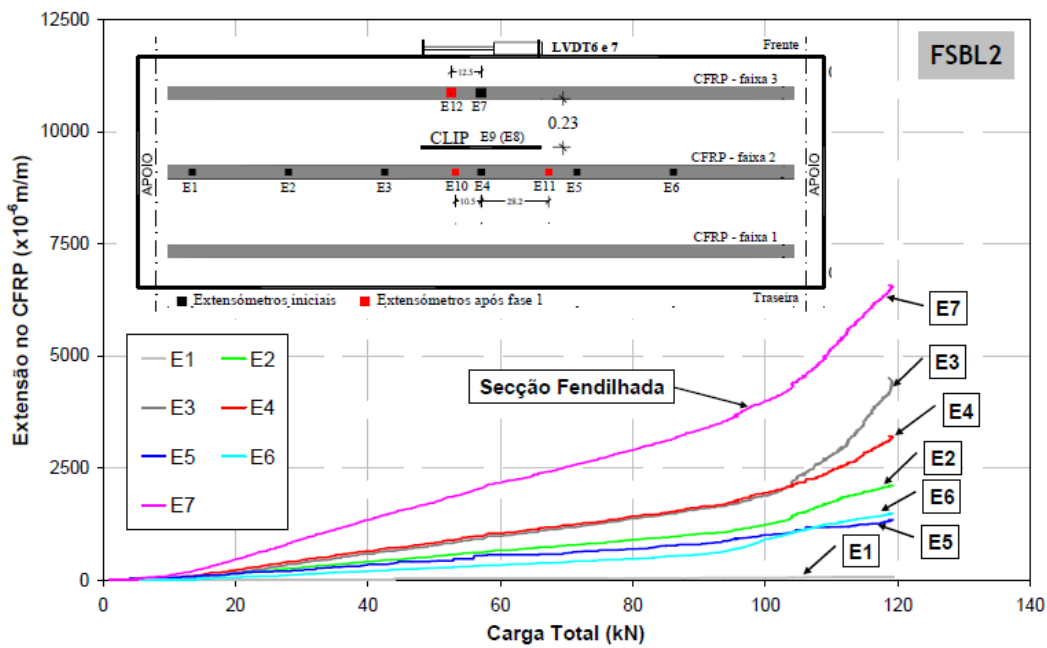


Figura 3.15 - Evolução das extensões no CFRP em função da carga total aplicada no modelo FSBL2 (Costeira Silva, 2008)

4. MODELAÇÃO NUMÉRICA DA LAJE DE BETÃO ARMADO

A calibração do modelo numérico, fundamentada dos resultados de ensaios experimentais de Costeira Silva (2008), foi realizada por meio do software *Femix* 4.0 (Azevedo *et al.*, 2003; Ventura-Gouveia, 2011). Esse programa destaca-se pela sua versatilidade na análise estrutural, permitindo a modelação e simulação de elementos estruturais com comportamentos não lineares materiais e geométricos, incluindo efeitos diferidos. A versão atual do software inclui uma ampla gama de tipos de elementos finitos, abrangendo também elementos unidimensionais, sendo especialmente útil para simular o comportamento do betão armado em condições reais. A solução dos sistemas de equações não lineares, resultantes do método incremental-iterativo, é obtida pelo método de *Newton-Raphson*, recorrendo à técnica do *arc-length*, garantindo precisão nas simulações.

No desenvolvimento das análises numéricas, foram utilizados três módulos do software: *Prefemix*, *Femix* e *Posfemix*. O *Prefemix* processa o ficheiro de dados com extensão *gl.dat*, verifica as informações contidas e as grava em um novo ficheiro, *gl.bin*. Em seguida, o *Femix* lê esse ficheiro e realiza os cálculos necessários. Por fim, o *Posfemix* é responsável pelo pós-processamento dos resultados obtidos.

Além dos módulos mencionados, também foram utilizados o *Excel* e o software *DrawMesh* (Azevedo *et al.*, 2003). O *Excel* foi utilizado para organizar e manipular os resultados extraídos do pós-processamento realizado pelo *Posfemix*, utilizando arquivos *.csv* para leitura e análise adicional dos dados. Ele permitiu a realização de cálculos, organização dos resultados e geração de gráficos para facilitar a interpretação. Já o *DrawMesh* é um *software* específico para a visualização das malhas e resultados numéricos, capaz de ler os ficheiros *.s3d* ou *.pva* gerados pelo *Posfemix*. Ele possibilita a visualização gráfica das da malha, da deformada, das tensões, das deformações, do padrão de fendilhação e outros parâmetros ao longo da malha, contribuindo para uma análise mais visual do comportamento estrutural.

A estrutura do ficheiro de dados *gl.dat* que é processada pelo *Prefemix* é organizada em blocos, cada um com uma função específica para definir a modelação e a análise estrutural.

Este capítulo destina-se à descrição detalhada da fase de modelação numérica da laje de betão armado (série FSRC) ensaiada experimentalmente por Costeira Silva (2008).

4.1. Malha e Propriedades dos Materiais

Tendo em conta a configuração das lajes apresentadas no capítulo 3, para as simulações numéricas utilizaram-se para o betão elementos finitos quadriláteros de estado plano de tensão (*PlaneStressQuad*), de 8 nós e 4 pontos de integração, e para o aço elemento finitos unidimensionais, de 2 nós e 2 pontos de integração. Estes elementos finitos unidimensionais (*EmbCable2D*), são considerados embebidos nos elementos de betão. Considerou-se perfeita aderência entre os elementos do aço e do betão. A título de exemplo, a Figura 4.1a ilustra a malha de elementos finitos para a discretização do betão. Estão ainda representados os apoios (marca a azul) e as cargas, cujos pontos de aplicação estão de acordo com o a configuração do ensaio experimental representado na Figura 3.2. Na Figura 4.1b e Figura 4.1c representam-se ainda as malhas de elementos finitos utilizadas, aquando do estudo do refinamento da malha.

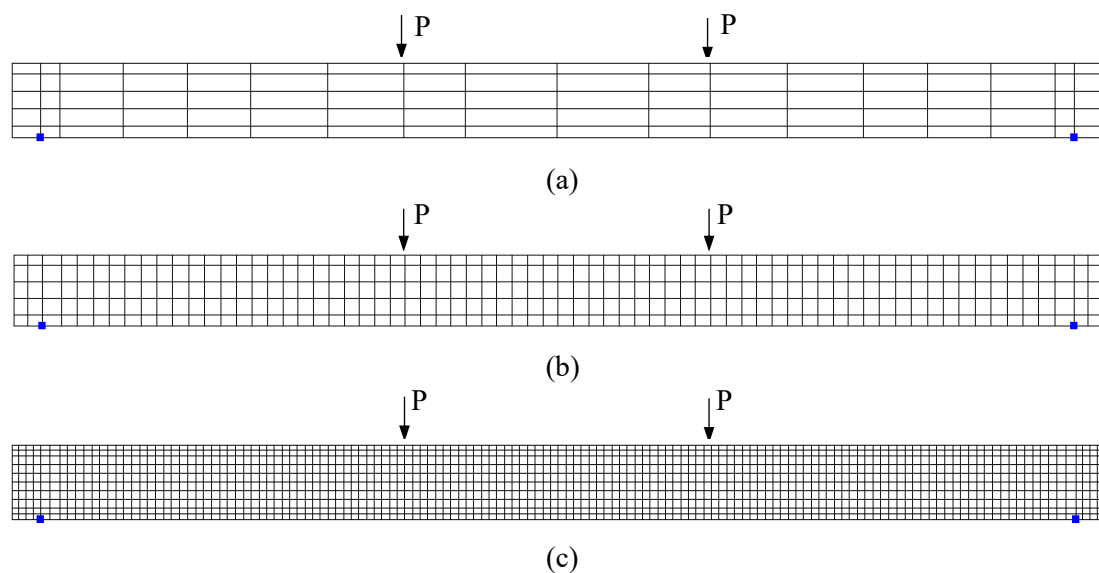


Figura 4.1 - Ilustração das malhas: (a) Malha 1; (b) Malha 2; (c) Malha 3

Um aspeto relevante a ser referido é que, no modelo numérico, a altura da laje foi considerada como sendo de 185 mm, uma vez que os ensaios experimentais indicaram uma variação entre 180 mm e 190 mm entre as séries, conforme apresentado na secção 3.1. Assim, adotou-se o valor médio de 185 mm. Adicionalmente, o comprimento da laje modelada foi de 2850 mm.

A Tabela 4.1 apresenta a espessura total a utilizar nos elementos finitos (*PLANE_STRESS_QUAD*) correspondentes ao betão, a área total a utilizar nos

elementos finitos (*_EMB_CABLE_2D*) da armadura longitudinal (5Ø10) e a área total dos elementos finitos (*_EMB_CABLE_2D*) da armadura transversal (2Ø6).

Tabela 4.1 - Espessura e área usada nos elementos finitos referentes ao betão e às armaduras

Tipo de Elemento	Material	Parâmetro	Valor
<i>_PLANE_STRESS_QUAD</i>	Betão	Espessura	960 mm
<i>_EMB_CABLE_2D</i>	Armaduras	Área total das secções	5Ø10 → 392.699 mm ² (longitudinal)
			2Ø6 → 56.549 mm ² (transversal)

A análise não linear material das distintas configurações de laje foi efetuada por intermédio de um modelo de fendilhação distribuída implementado no código computacional *Femix* (Azevedo *et al.*, 2003; Ventura-Gouveia, 2011), considerando-se um comportamento linear à compressão do betão, tendo em consideração a espessura da laje.

A lei trilinear representada na Figura 4.2, disponível no código computacional utilizado neste estudo, para a simulação do comportamento à tração, foi adaptada para simular o comportamento do betão simples, resultando numa relação tensão de tração-abertura de fenda bilinear, conforme ilustrado na Figura 2.10 e sugerido pelo *fib* Model Code 2010 (2013).

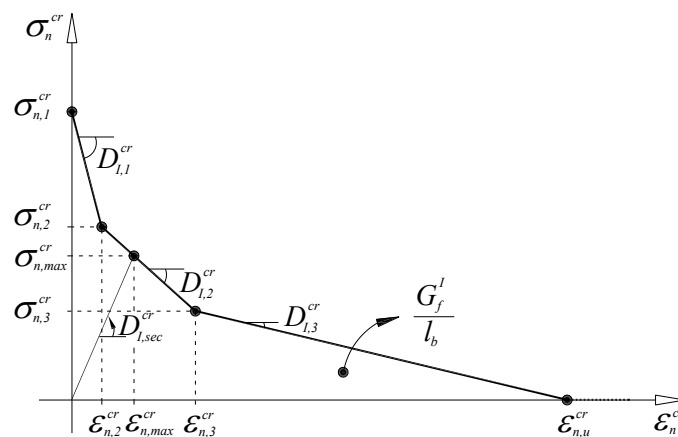


Figura 4.2 - Diagrama trilinear tensão-deformação normal à fenda para simular a propagação da fenda em modo de fratura I ($\sigma_{n,1}^{cr} = f_{ct}$, $\sigma_{n,2}^{cr} = \alpha_1 \sigma_{n,1}^{cr}$, $\sigma_{n,3}^{cr} = \alpha_2 \sigma_{n,1}^{cr}$, $\varepsilon_{n,2}^{cr} = \xi_1 \varepsilon_{n,u}^{cr}$, $\varepsilon_{n,3}^{cr} = \xi_2 \varepsilon_{n,u}^{cr}$) (Ventura-Gouveia, 2011)

Os parâmetros de fractura indicados na Figura 4.2, $\xi_1, \alpha_1, \xi_2, \alpha_2, G_f, l_b$, que definem a lei que governa o modo I de fratura são apresentados nas secções seguintes, para cada simulação numérica.

Para a rigidez de corte do betão fendilhado foi utilizado o conceito do fator de retenção de tensões de corte, β , definido pela equação (4.1):

$$\beta = \left(1 - \frac{\varepsilon_n^{cr}}{\varepsilon_{n,ult}^{cr}} \right)^{p_1} \quad (4.1)$$

onde ε_n^{cr} é a deformação normal à fenda e $\varepsilon_{n,ult}^{cr}$ a extensão última normal à fenda. Quando se assume uma diminuição linear de β com o aumento de ε_n^{cr} , então $p_1=1$. Valores mais elevados do expoente correspondem a uma diminuição mais rápida do parâmetro β (Barros, 1995).

Em relação à modelação do comportamento uniaxial dos varões de aço, foi utilizada a lei representada na Figura 4.3. Os valores foram obtidos a partir dos ensaios experimentais realizados para a caracterização do aço das lajes ensaiadas por Costeira Silva (2008). As leis constitutivas incluem a deformação ao final do primeiro ramo (ε_{sy}), a tensão ao final do primeiro ramo (σ_{sy}), a deformação ao final do segundo ramo (ε_{sh}), a tensão ao final do segundo ramo (σ_{sh}), a deformação ao final do terceiro ramo (ε_{su}) e a tensão ao final do terceiro ramo (σ_{su}). Nos casos em estudo, o terceiro ramo foi simulado por um troço linear. A Tabela 4.2 apresenta os valores utilizados para caracterizar o comportamento dos varões de aço.

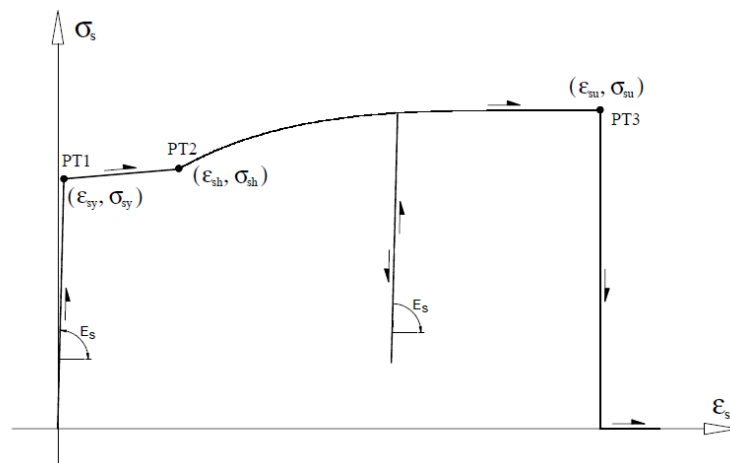


Figura 4.3 - Comportamento do aço (Sena-Cruz, 2005)

Tabela 4.2 - Leis constitutivas do aço

Parâmetro	Varão Ø6	Varão Ø10
ε_{sy}	0.0026	0.0022
$\sigma_{sy} (N/mm^2)$	570	460
ε_{sh}	3.64E-02	3.08E-02
$\sigma_{sh} (N/mm^2)$	570	460
ε_{su}	0.16	0.219
$\sigma_{su} (N/mm^2)$	678	576

As simulações numéricas foram efetuadas recorrendo-se à técnica do *arc-length* com controlo de deslocamento no ponto onde foi medido experimentalmente o deslocamento vertical (ver na Figura 3.2 a posição do LVDT3).

4.2. Análise da Sensibilidade da Malha

Para identificar a malha que melhor representava a curva experimental, procedeu-se a uma análise de sensibilidade das malhas. Esse processo teve início com uma análise linear, seguindo-se uma análise não linear. O objetivo foi determinar o grau de refinamento mais adequado para a malha de elementos finitos, utilizando a laje de betão armado FSRC na calibração do modelo.

i. Análise linear

Nesta fase utilizaram-se as malhas apresentadas na Figura 4.1, modelando-se o comportamento do betão sem a presença das armaduras.

Foi calculado o valor teórico do deslocamento, utilizando a equação (4.2), permitindo uma comparação direta com os resultados numéricos obtidos (ver Figura 4.4). Nessa equação, δ_{max} representa o deslocamento máximo, P representa a força aplicada, a corresponde à distância horizontal entre o apoio e o ponto de aplicação da carga, que neste caso é de 950 mm, l é a distância entre os apoios, igual a 2700 mm, E refere-se ao módulo de elasticidade do betão, com um valor de 34.8 GPa, enquanto I representa o momento de inércia, determinado pela equação (4.3), sendo b a largura da laje igual a 960 mm e h a sua altura, neste caso igual a 185 mm.

$$\delta_{max} = \frac{Pa(3l^2 - 4a^2)}{24EI} \quad (4.2)$$

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (4.3)$$

A Figura 4.4 ilustra que a resposta força-deslocamento a meio vão, obtida numericamente para cada uma das três malhas em estudo, é semelhante à obtida considerando o resultado teórico, indicando que as três malhas se comportam na análise linear de uma forma idêntica.

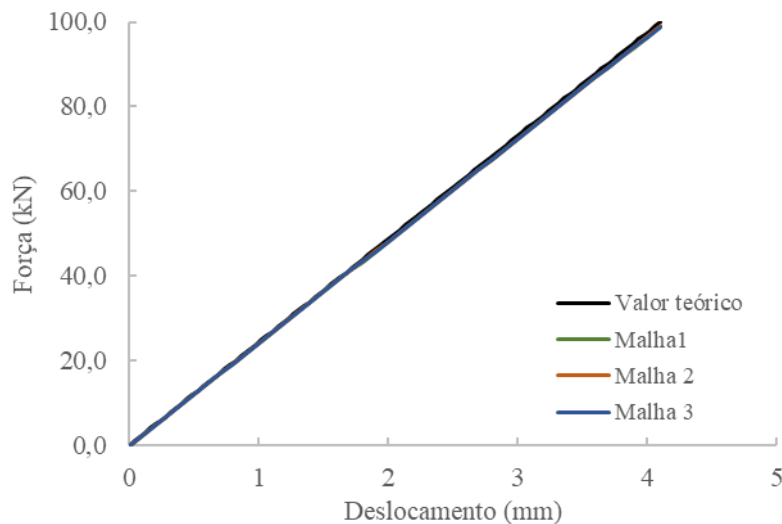


Figura 4.4 - Comparação entre o valor teórico e numérico para as três malhas em estudo

ii. Análise não linear

Na análise não linear, tomou-se a decisão de modelar apenas metade da laje, considerando a sua simetria. Essa abordagem permitiu otimizar o processamento de dados sem comprometer a precisão dos resultados. A Figura 4.5 mostra as malhas correspondentes já com os elementos da armadura longitudinal e da armadura transversal. Para essa configuração, foram inseridos apoios que restringem o deslocamento horizontal no plano de simetria da laje original.

Na Malha 2 e na Malha 3, inseriu-se uma chapa de aço sob a zona da aplicação da carga, para simular a chapa utilizada nos ensaios experimentais (ver Figura 3.6). Essa chapa foi modelada como material linear, com módulo de elasticidade (E) de 200 GPa e

coeficiente de Poisson (ν) de 0.3, usando elementos *_PLANE_STRESS_QUAD* de 8 nós. A altura considerada foi de 10 mm. Na Malha 1, essa chapa não foi inserida, pois, devido à largura da malha, ficaria desproporcional em relação ao que foi usado nos ensaios experimentais.

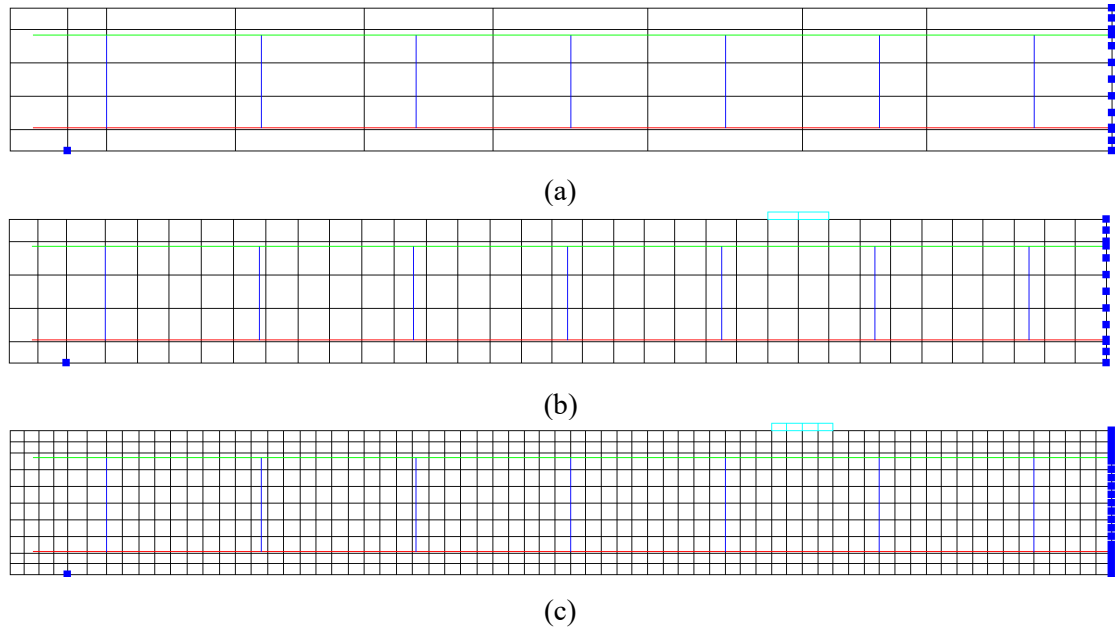


Figura 4.5 - Malhas considerando a simetria: (a) Malha 1; (b) Malha 2; (c) Malha 3

Conforme destacado no Capítulo 2 deste trabalho, a energia de fratura desempenha um papel fundamental na modelação do betão à tração, bem como o diagrama de retenção de tensões pós-fendilhação. Consultando os resultados experimentais das lajes de betão armado (série FSRC) (Costeira Silva, 2008), verifica-se que foram ensaiados cubos à compressão aos 31 dias. Na idade do ensaio, a tensão de compressão foi estimada, utilizando as expressões do Eurocódigo2 (2004), obtendo-se um valor de f_{cm} igual a 46 N/mm², de 3.4 N/mm² para f_{cm} e 34.8 GPa para o módulo de elasticidade (ver Tabela 3.2).

Utilizou-se o valor de G_f recomendado pelo *fib* Model Code 2010 (2013), que propõe um cálculo baseado na resistência à compressão do betão, conforme apresentado na equação (4.4).

$$G_f = 73 f_{cm}^{0.18} \quad (4.4)$$

resultando num valor de G_f igual a 145.42 Nm/m².

Para a lei bilinear foram utilizados os valores apresentados na Tabela 4.3, obtido de acordo com o preconizado *fib* Model Code 2010 (2013). Na transformação de $\sigma-w$ em $\sigma_n^{cr} - \varepsilon_n^{cr}$ admitiu-se que $\sigma = \sigma_n^{cr}$ e $w = \varepsilon_n^{cr} l_b$, sendo l_b a largura da banda de fendilhação, considerada nas simulações igual à raiz quadrada da área do correspondente elemento finito. O coeficiente de *Poisson* foi considerado igual a 0.2.

Analisando os resultados obtidos na Figura 4.6, verifica-se que todas as respostas numéricas apresentam uma capacidade de carga superior à obtida experimentalmente. Com os resultados expostos, concluiu-se que os modelos com as Malhas 2 e 3 apresentam comportamentos um pouco mais semelhantes, em comparação com a Malha 1, principalmente na primeira fase do ensaio. Deste modo, face ao baixo nível de refinamento, decidiu-se não utilizar a Malha 1 para as restantes análises. Por outro lado, considerando o tempo de processamento de cálculo da Malha 3 em comparação à Malha 2, optou-se pela utilização da Malha 2.

Tabela 4.3 - Lei bilinear baseada no *fib* Model Code 2010

Parâmetro	Valor
ξ_1	0.2
α_1	0.2
ξ_2	0.6
α_2	0.1
G_f (N/mm)	0.145

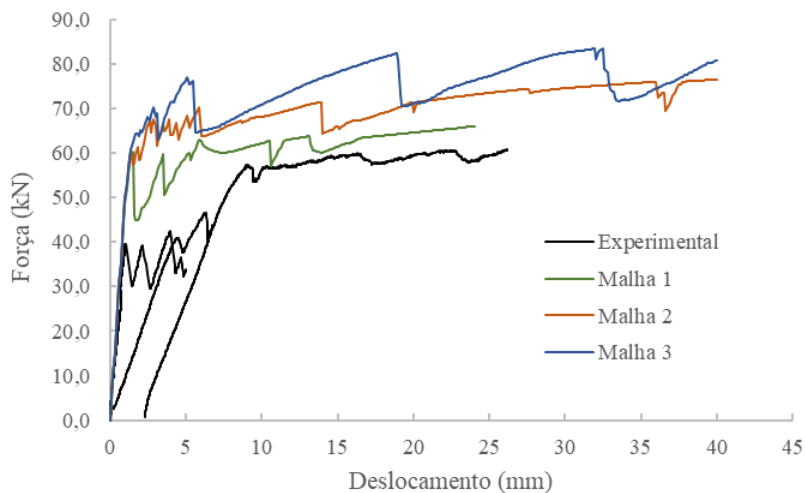


Figura 4.6 - Calibração comparando as três malhas

4.3. Calibração do modelo

Conforme evidenciado na secção anterior, a resposta numérica da Malha 2, bem como das outras malhas, apresentou uma capacidade de carga superior à resposta experimental. Na tentativa de analisar a influência dos parâmetros de fratura no comportamento da resposta numérica, realizaram-se diversas simulações. Para tal, consideraram-se as equações e propostas pelo CEB-FIP Model Code 1990 (1993), que difere do *fib* Model Code 2010, pois faz depender a energia de fratura também da dimensão máxima do inerte utilizado na composição do betão. Tendo em vista que não se possui dados relativos a este parâmetro, optou-se por efetuar 3 simulações, considerando para a dimensão máxima do agregado o valor de 8 mm, de 16 mm e de 32 mm. A fórmula para o cálculo da energia de fratura é dada pela equação (4.5), com o valor de f_{cm} em N/mm² e GF_0 com o valor de 0.025 Nmm/mm², 0.03 Nmm/mm² e 0.058 Nmm/mm², para a dimensão máxima de 8 mm, 16 mm e 32 mm, respetivamente.

$$G_f = GF_0 \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{0.7} \quad (4.5)$$

Na Tabela 4.4, apresentam-se os valores obtidos de acordo com o preconizado no CEB-FIP Model Code 1990 (1993), sendo os mesmos depois utilizados, considerando a Malha 2, nas simulações numéricas representadas na Figura 4.7.

Tabela 4.4 - Leis bilineares baseadas no CEB-FIP Model Code 1990

Parâmetro	MC 1990_dmáx8	MC 1990_dmáx16	MC 1990_dmáx32
ξ_1	0.1	0.1357	0.25
α_1	0.15	0.15	0.15
ξ_2	0.55	0.5679	0.625
α_2	0.075	0.075	0.075
G_f (N/mm)	0.0728	0.0873	0.1688

Da análise das respostas numéricas da Figura 4.7 ressalta a dependência da forma da curva bilinear utilizada para simular a retenção de tensões de tração, bem como da energia de fratura atribuída. A título de ilustração apresentam-se na Figura 4.8 as relações tensão-abertura de fenda utilizadas nas diferentes simulações.

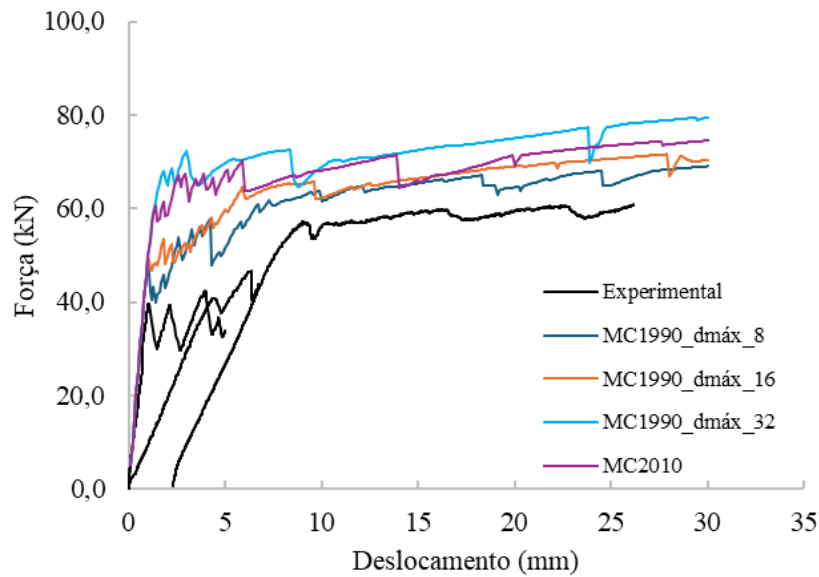


Figura 4.7 - Comparação de repostas numéricas, utilizando diferentes leis bilineares

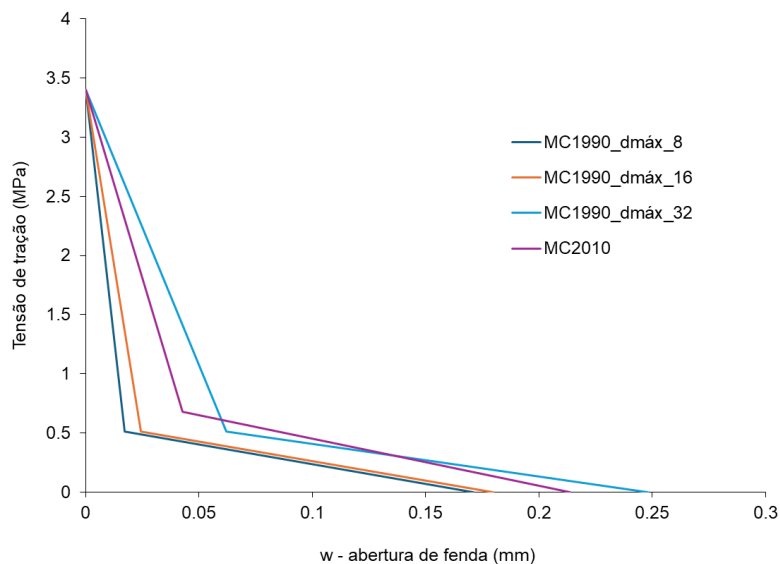


Figura 4.8 - Leis tensão de tração – abertura de fenda segundo MC1990 e MC2010

A curva que mais se ajusta à resposta numérica é aquela que menor energia de fratura tem e a que mais queda abrupta teve no primeiro ramo da lei bilinear. Verifica-se ainda que a carga de fendilhação está um pouco sobrestimada, o que indica que a tensão de resistência à tração pode ter sido inferior à usada.

De acordo com o referido anteriormente, o f_{cm} foi calculado tendo em conta a evolução do f_{cm} , também estimado a partir da fórmula apresentada no Eurocódigo 2 (2004). Para além disso, os parâmetros de fratura, podem ser obtidos por análise inversa,

fazendo-se ensaios em vigas entalhadas (Ventura-Gouveia, 2011). Deste modo, face à ausência de ensaios experimentais, pode-se considerar razoável, uma diminuição de 10% no valor do f_{ctm} e uma adaptação dos parâmetros da curva, de modo que a queda do primeiro ramo seja mais abrupta. Foram assim utilizados os valores apresentados na Tabela 4.5 e o resultado da simulação encontra-se apresentado na Figura 4.9, observando-se uma melhor aproximação à curva experimental, mesmo na obtenção da carga de fendilhação.

Tabela 4.5 - Lei bilinear ajustada

Parâmetro	Valor
ξ_1	0.02
α_1	0.15
ξ_2	0.55
α_2	0.075
G_f (N/mm)	0.0873
f_{ctm} (N/mm ²)	3.06

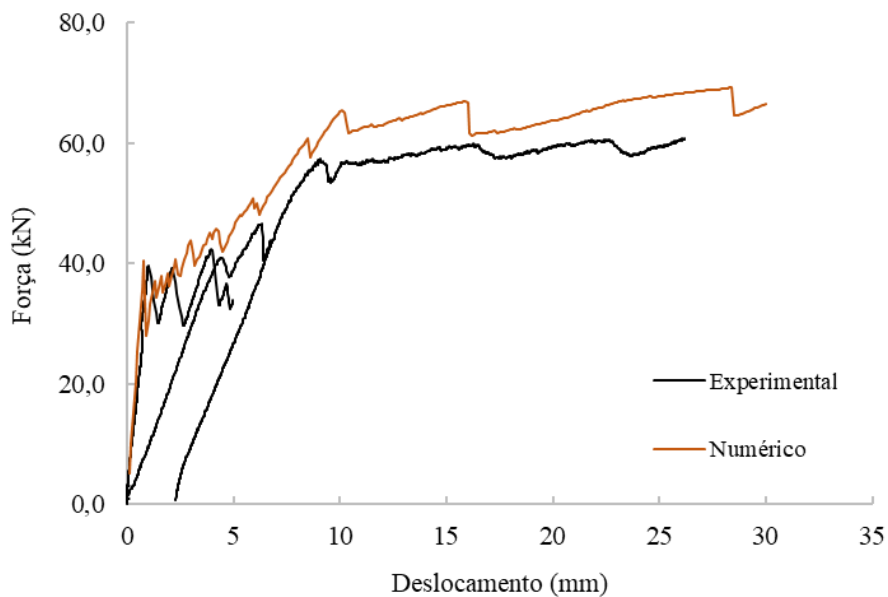


Figura 4.9 - Força-deslocamento a meio vão utilizando a lei bilinear ajustada

Na Tabela 4.6 apresentam-se os valores de alguns parâmetros que caracterizam o comportamento experimental das lajes de betão armado e os valores obtidos numericamente.

Tabela 4.6 - Resultados experimentais e numéricos (série FSRC)

Parâmetro	Experimental		Numérico
	FSRC1	FSRC2	FSRC
Carga de Fendilhação (kN)	36.90	39.60	40.38
Carga de Plastificação das Armaduras (kN)	53.10	56.50	70.80 ¹
Carga de Rotura (kN)	56.65	60.36	68.26 ²
Deslocamento Central (mm)	22.25	23.92	26.00
Extensão Máxima de Compressão no Betão (%)	-0.40	-0.38	-0.47
Extensão Máxima de Tração no Betão (%)	8.75	6.30	3.00 ³
Extensão Máxima de Tração na Armadura (%)	-	16.52	54.00 ⁴

(1) Carga correspondente ao deslocamento central de 35.2 mm; (2) Carga correspondente ao deslocamento central de 26 mm; (3) Registado num elemento não fendilhado; (4) Registado num elemento fendilhado.

Na Tabela 4.6 constata-se que a carga de fendilhação obtida numericamente apresenta um valor superior à carga experimental do primeiro ensaio de cerca de 9%, mas apresenta somente uma diferença de 2% superior comparado à carga do segundo ensaio experimental. No que diz respeito à carga de plastificação das armaduras, o valor numérico é consideravelmente superior aos valores experimentais, tendo sido alcançada para um deslocamento de 35.2 mm, junto de um elemento correspondente ao betão fendilhado, e para um valor do deslocamento superior ao correspondente ao da carga de rotura. Já para a carga de rotura, a diferença também é significativa, com o valor numérico sendo 18% superior ao FSRC1 e 11% superior ao FSRC2. Esses resultados indicam que o modelo numérico tende a sobrestimar as cargas em comparação com os ensaios experimentais.

Na Figura 4.10 representa-se o padrão de fendilhação da simulação numérica para um deslocamento a meio vão de 26 mm e o obtido experimentalmente para os dois modelos da série (FSRC1 e FSRC2). Verifica-se que existem duas fendas de flexão claramente abertas, assinaladas a cor-de-rosa, bem como outras em fase de abertura (vermelho), em reabertura (cyan), em fecho (verde) e fechadas (azul). Este padrão de fendilhação é semelhante ao obtido experimentalmente na zona de flexão pura da laje.

Para analisar a influência do número de nós dos elementos, efetuou-se ainda uma análise considerando 4 nós por elemento em vez de 8 nós. Os resultados apresentados na Figura 4.11 indicam que com 4 nós a resposta tornou-se mais rígida para o caso em análise.

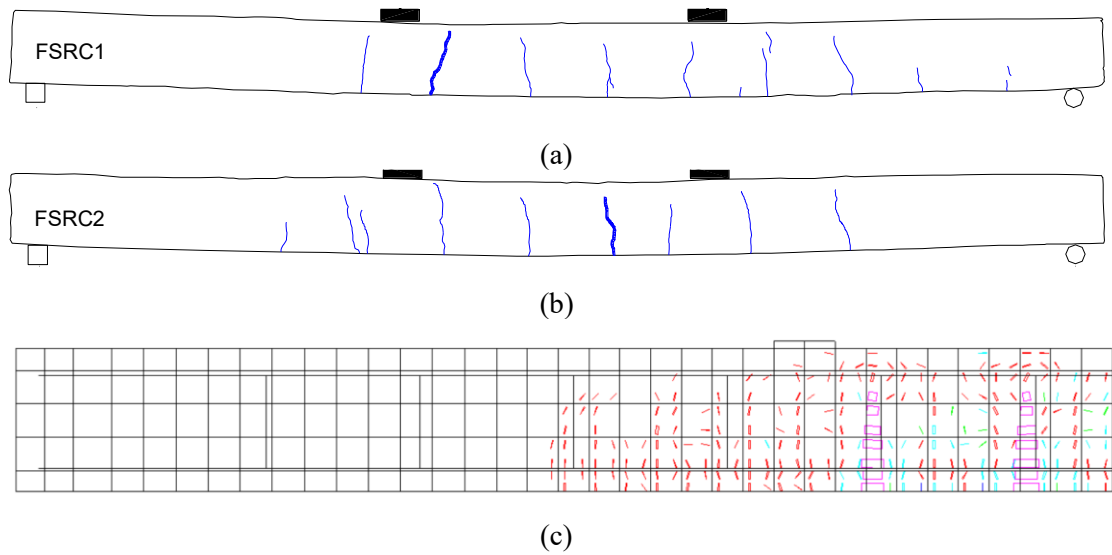


Figura 4.10 - Padrão de fendilhação: (a) FSRC1; (b) FSRC2; (c) Numérico (meia laje)

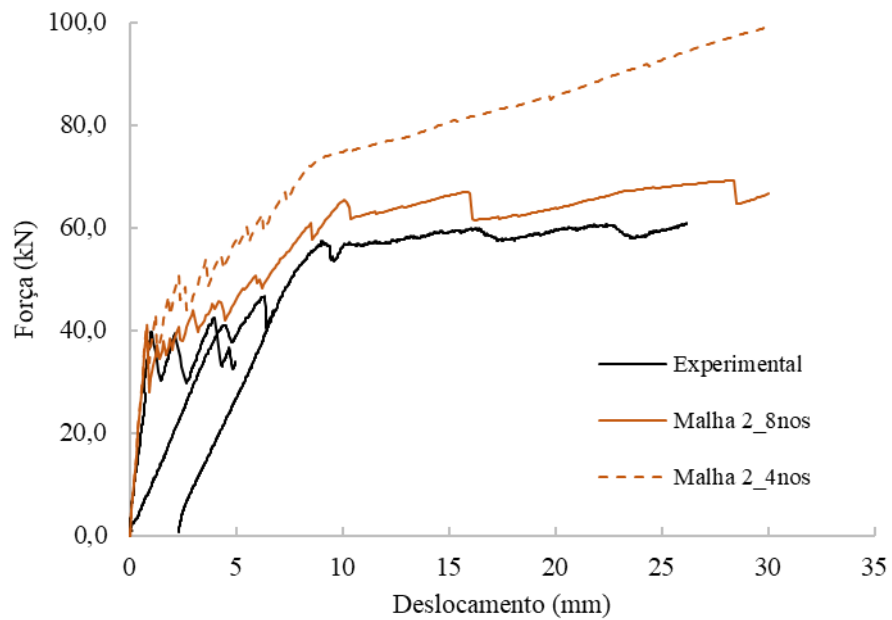


Figura 4.11 - Força-deslocamento usando elementos de 8 nós e de 4 nós e lei bilinear ajustada

5. MODELAÇÃO NUMÉRICA DAS LAJES REFORÇADAS COM CFRP

Após a modelação da laje de betão armado (FSRC) e a calibração do modelo, apresentada no capítulo anterior, procedeu-se à modelação numérica das lajes reforçadas com CFRP, considerando as configurações com manta (FSBM) e laminado (FSBL) ensaiadas experimentalmente e representadas nas Figuras 3.3 e 3.4, respetivamente. Para isso, a modelação do FSRC foi adaptada às novas simulações.

5.1. Malha e Modelação do Comportamento do Reforço

À malha de elementos finitos representada na Figura 4.5b, foram acrescentados dois novos elementos: o reforço e a interface. As propriedades desses materiais foram definidas como: *_CABLE_2D* para o reforço, de 3 nós e 2 pontos de integração e *_INTERFACE_LINE_2D* para a interface, com 6 nós e 2 pontos de integração. A Tabela 5.1 apresenta os parâmetros necessários para essa definição, bem como os valores adotados com base nos ensaios experimentais.

Tabela 5.1 - Propriedade dos CRFP e da interface

Tipo de Elemento	Material	Parâmetro	Valor
<i>_CABLE_2D</i>	CFRP	Área total das secções	FSBL → 210.0 mm ²
			FSBM → 140.4 mm ²
<i>_INTERFACE_LINE_2D</i>	Interface	Espessura	FSBL → 150.0 mm
			FSBM → 600.0 mm

Tendo em conta o reforço, diferentes leis constitutivas foram aplicadas ao betão em duas alturas do modelo, conforme ilustrado na Figura 5.1. Nas proximidades das armaduras (primeiras duas camadas), considerou-se o efeito *tension stiffening*, enquanto em regiões mais distantes das armaduras, na parte superior, foi adotado o comportamento *tension softening*, já adotado aquando da simulação da laje FSRC.

A Tabela 5.2 apresenta os valores utilizados para as duas camadas. Assumiu-se para a energia de fratura o triplo da energia de fratura usada para a simulação do amolecimento do betão à tração. Este valor foi o que melhor se ajustou às simulações dos ensaios experimentais respetivos, conforme representado na Figura 5.6 e na Figura 5.15.

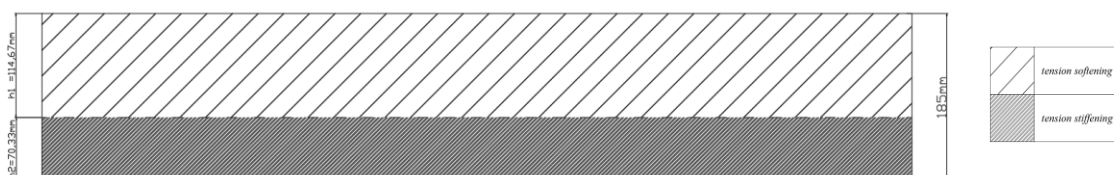


Figura 5.1 - Divisão da altura da malha

Tabela 5.2 - Lei bilinear para o *Tension Softening* e *Tension Stiffening*

Parâmetro	<i>Tension Softening</i>	<i>Tension Stiffening</i>
ξ_1	0.02	0.02
α_1	0.15	0.15
ξ_2	0.55	0.55
α_2	0.075	0.075
G_f (N/mm)	0.0873	0.2619
f_{cm} (N/mm ²)	3.06	3.06

Quanto ao CFRP, tanto a manta quanto o laminado foram modelados como materiais linearmente elásticos. A Tabela 5.3 apresenta as leis constitutivas consideradas para ambos os materiais, incluindo o módulo de elasticidade (E) e a resistência à tração (f_f).

Tabela 5.3 - Leis constitutivas dos CFRP

Leis Constitutivas	Manta	Laminado
E (GPa)	240	150
f_f (N/mm ²)	3800	2800

Em relação à modelação do comportamento da interface, foram analisadas seis possíveis leis constitutivas, cinco das quais apresentadas no trabalho de Augusthus-Nelson *et al.* (2024) (ver Figura 2.18), nomeadamente: Neubauer e Rostasy, Monti *et al.*, Nakaba *et al.*, Lu *et al.* (Modelo Bilinear) e Lu *et al.* (Modelo Simplificado), e ainda uma das leis constitutivas propostas pelo *fib* Bulletin 90. As cinco primeiras propostas representam modelos dos tipos A, D e H (ver Figura 2.16), enquanto a lei proposta pelo *fib* enquadra-se nos modelos do tipo D. A Figura 5.2 apresenta as curvas Tensão de Aderência (N/mm) – Escorregamento (mm) para cada uma dessas seis propostas aplicadas à interface Betão–Manta, enquanto a Figura 5.3 ilustra o mesmo para a interface Betão–Laminado.

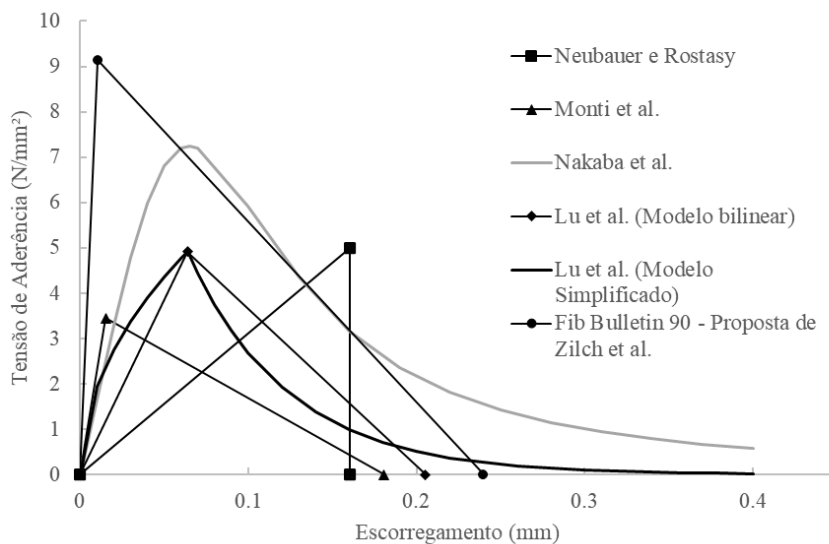


Figura 5.2 - Curvas Tensão de Aderência (N/mm²) – Escorregamento (mm) correspondentes às seis propostas de leis constitutivas analisadas para a interface Betão–Manta.

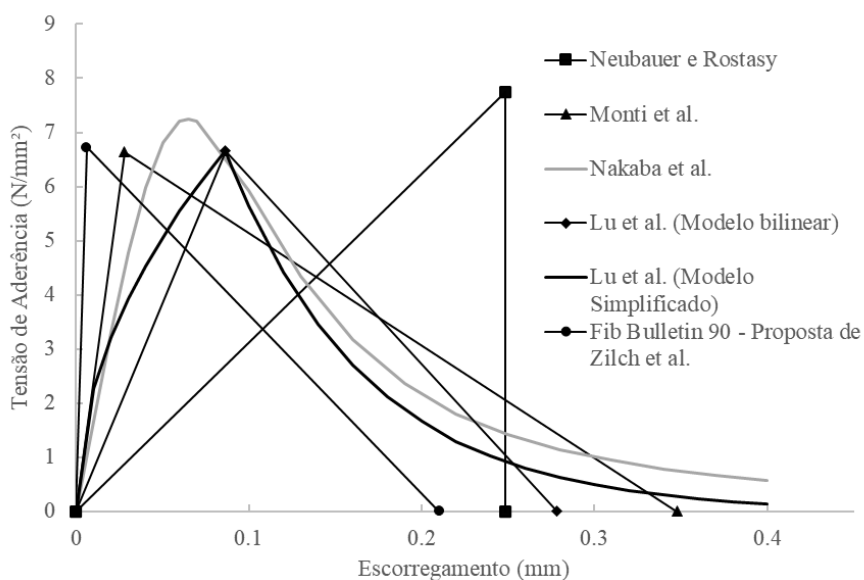


Figura 5.3 - Curvas Tensão de Aderência (N/mm²) – Escorregamento (mm) correspondentes às seis propostas de leis constitutivas analisadas para a interface Betão–Laminado.

Após a análise das propostas, optou-se por modelar a lei proposta por *Lu et al.* (Modelo Simplificado), por se ajustar de forma mais adequada às leis disponíveis no software *Femix*. A Figura 5.4 apresenta a curva de *Lu et al.* (Modelo Simplificado) comparada com a simulada no *Femix* para a interface Betão–Manta, enquanto a Figura 5.5 ilustra a comparação para a interface Betão–Laminado.

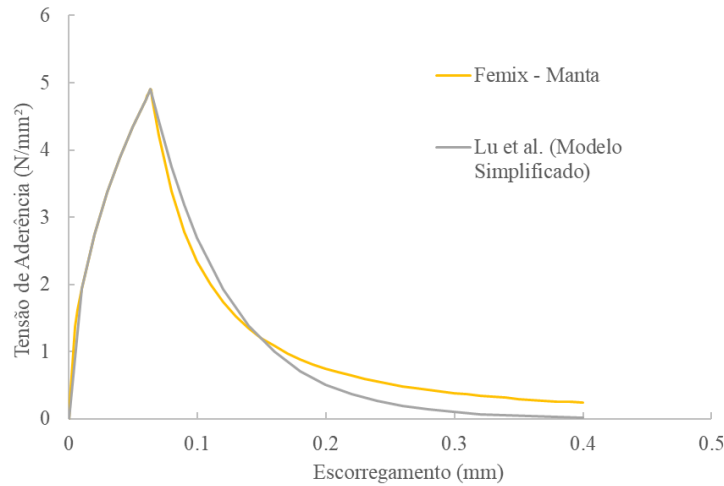


Figura 5.4 - Comparação entre a curva de Lu *et al.* (Modelo Simplificado) e a curva simulada no *Femix* para a interface Betão–Manta

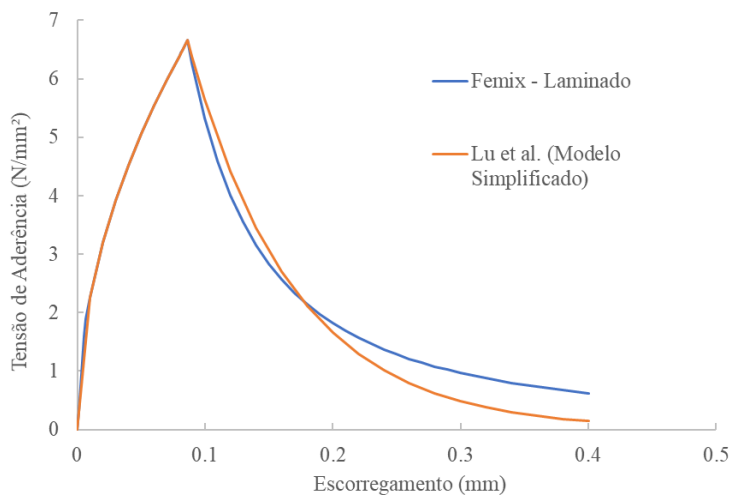


Figura 5.5 - Comparação entre a curva de Lu *et al.* (Modelo Simplificado) e a curva simulada no *Femix* para a interface Betão–Laminado

A lei utilizada (ver Figura 2.17) inclui o deslocamento no final da relação de tensão-deslocamento linear (δ_0), o deslocamento no pico da tensão de aderência (δ_m), a tensão de aderência no pico (τ_m), o parâmetro utilizado na definição da relação de tensão-deslocamento pré-pico (β_1), o parâmetro utilizado na definição da relação de tensão-deslocamento pós-pico (β_2) e a rigidez normal (K_n). Na Tabela 5.4 apresentam-se os valores utilizados para as séries FSBL e FSBM.

Tabela 5.4 - Leis constitutivas das interfaces

Propriedade	Interface da manta	Interface do laminado
β_1	0.5	0.5
β_2	1.65	1.55
δ_0 (mm)	0.005	0.005
δ_m (mm)	0.0638	0.0866
τ_m (N/mm ²)	4.911	6.659
K_n (N/mm ³)	1.00E+04	1.00E+04

5.2. Apresentação e Discussão dos Resultados

Após a modelação das séries FSBM e FSBL, apresentam-se, de seguida, os resultados obtidos, procedendo-se à sua comparação com os dados experimentais disponíveis, de forma a avaliar a coerência e a representatividade do modelo adotado.

5.2.1 Lajes reforçadas com mantas de CFRP

Na Figura 5.6 apresenta-se o diagrama força-deslocamento a meio vão das lajes reforçadas com mantas de CFRP (FSBM). Para estas lajes existem duas respostas experimentais. A curva numérica acompanha razoavelmente bem o comportamento global das curvas experimentais, principalmente nas fases iniciais e intermediárias do carregamento. Isso indica que o modelo é eficaz na simulação da rigidez inicial e no início do ganho de resistência. Além disso, a resposta numérica mostra-se coerente com o processo de fendilhação, reproduzindo de forma satisfatória a influência das mantas no desempenho estrutural da laje. Apenas a plastificação das armaduras de aço, observada nas respostas experimentais aquando da mudança de inclinação das curvas (entre os 100 kN e os 120 kN), não é visível na curva numérica, que faz uma transição mais suave.

Na Figura 5.7 apresenta-se o padrão de fendilhação obtido na simulação numérica da laje FSBM para um deslocamento a meio vão de 23 mm, comparado com o observado na série FSBM1.

Na Figura 5.8 mostra-se a mesma análise para um deslocamento de 33 mm, em correspondência com a série FSBM2. Os deslocamentos foram selecionados com base nos resultados dos ensaios experimentais, uma vez que, em ambos os casos, a carga máxima foi atingida para esses valores. À semelhança da laje FSRC, verifica-se que

existem fendas de flexão claramente abertas, assinaladas a cor-de-rosa, bem como outras em fase de abertura (vermelho), em reabertura (cyan), em fecho (verde) e fechadas (azul).

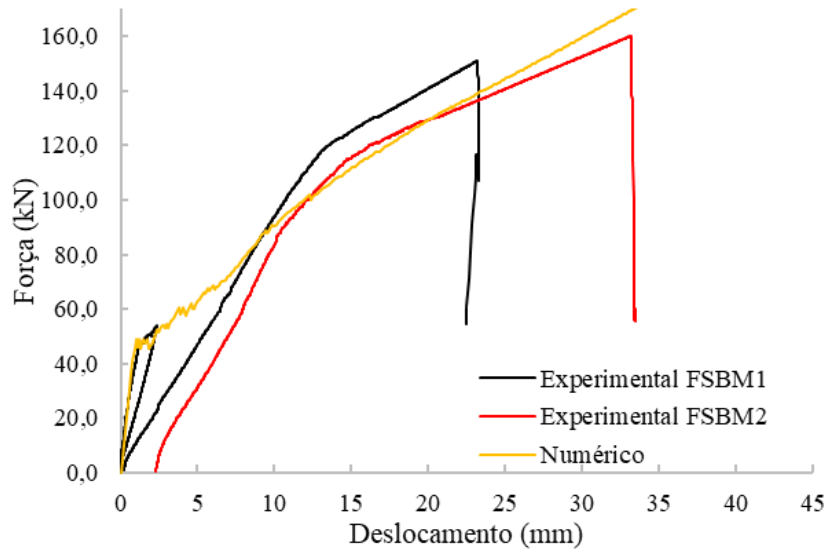


Figura 5.6 - Força-deslocamento a meio vão das lajes reforçadas com mantas FSBM

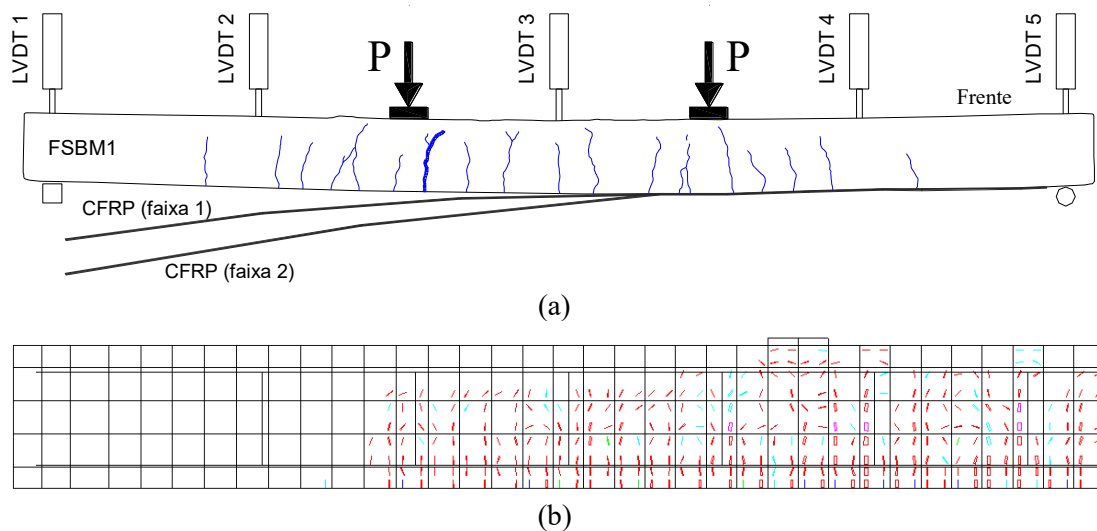
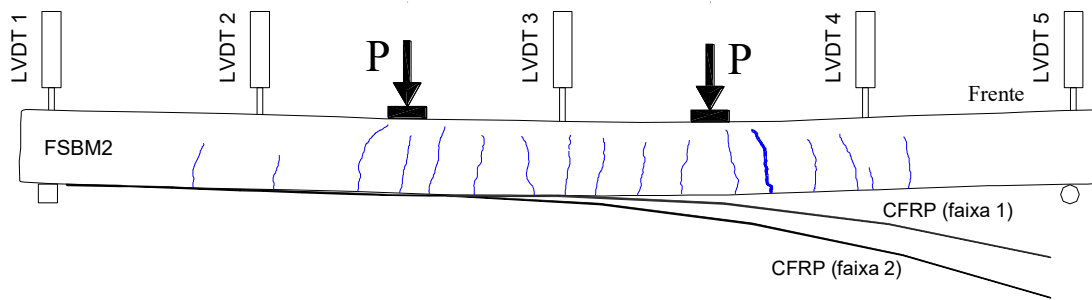
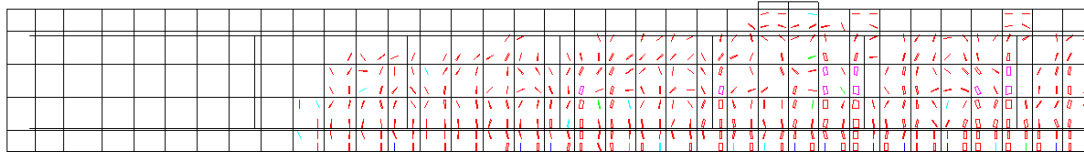


Figura 5.7 - Padrão de fendilhação: (a) FSBM1; (b) Numérico (meia laje)

No que diz respeito às tensões normais no betão, no plano da secção, a Figura 5.9 e a Figura 5.10 apresentam a distribuição obtida na simulação numérica, representada por uma escala de cores, para dois estados de deslocamento: 23 mm e 33 mm. Esses valores foram escolhidos por corresponderem aos deslocamentos nos quais, experimentalmente, as lajes atingiram a carga máxima nas séries FSBM1 e FSBM2, respetivamente.



(a)



(b)

Figura 5.8 - Padrão de fendilhação: (a) FSBM2; (b) Numérico (meia laje)

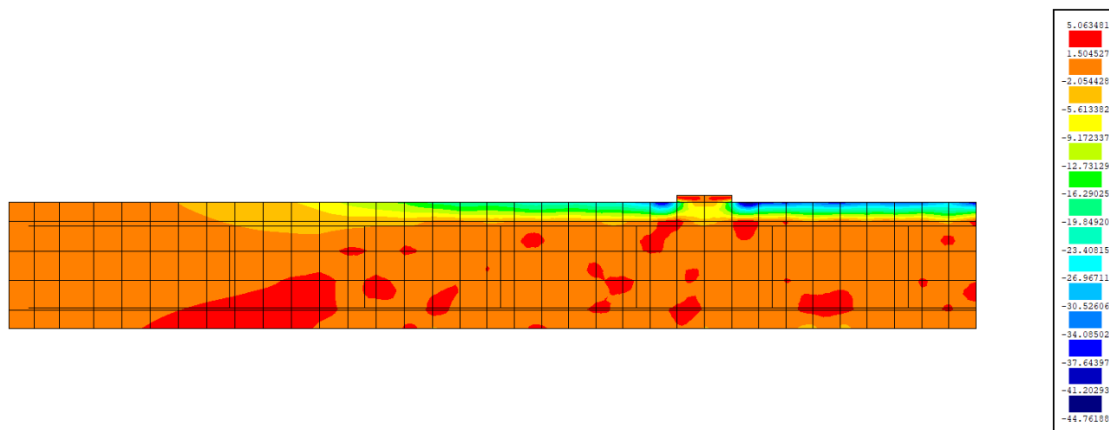


Figura 5.9 - Distribuição das tensões normais na laje FSBM, obtida numericamente, para o deslocamento a meio vão de 23 mm (série FSBM1)

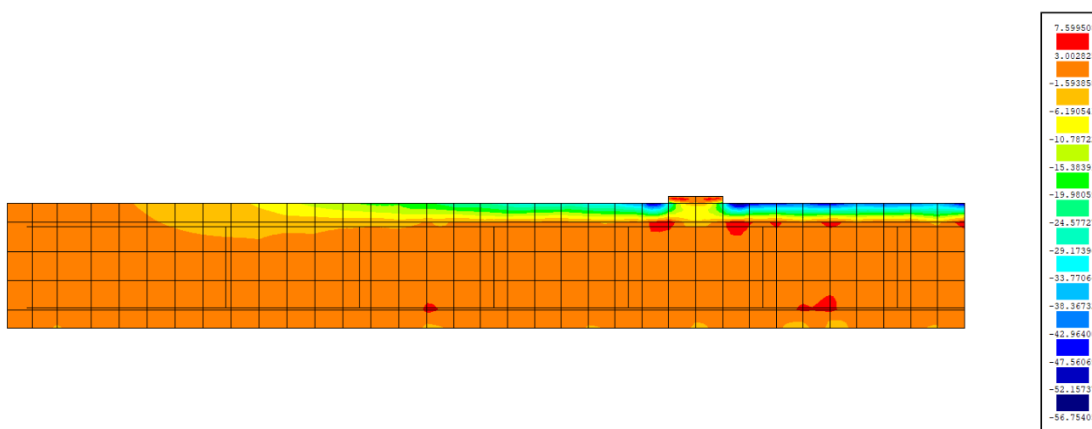


Figura 5.10 - Distribuição das tensões normais na laje FSBM, obtida numericamente, para o deslocamento a meio vão de 33 mm (série FSBM2)

É possível observar na Figura 5.9 e na Figura 5.10, a existência de concentração de tensões de compressão no betão, na zona de aplicação da carga e numa camada superior muito superficial. Estes valores de tensão ultrapassam os 46 N/mm², porque o comportamento modelado para este material é linear. Ainda assim, a análise numérica com betão linear à compressão mostra-se coerente com o comportamento geral observado.

Experimentalmente, foram inseridos extensómetros nas mantas de CFRP com o objetivo de analisar a evolução das deformações em função da carga aplicada ao modelo (ver Figura 3.12 e Figura 3.13). No âmbito da modelação numérica, o software *Femix* permite a avaliação das deformações no CFRP por meio da seleção de um elemento e de um ponto de Gauss específico. Para fins de comparação com os resultados experimentais, foram obtidos os valores das deformações nos pontos de Gauss mais próximos das coordenadas dos extensómetros posicionados experimentalmente, tendo-se atribuído a mesma designação do extensómetro. Dessa forma, foi possível avaliar as extensões numéricas correspondentes à aplicação progressiva de carga e compará-las com os dados obtidos experimentalmente. Na Figura 5.11 apresenta-se a comparação das extensões nas mantas de CFRP, na zona de flexão pura, para a laje FSBM1, enquanto na Figura 5.12 se ilustram as extensões nas mantas de CFRP na região de flexão simples.

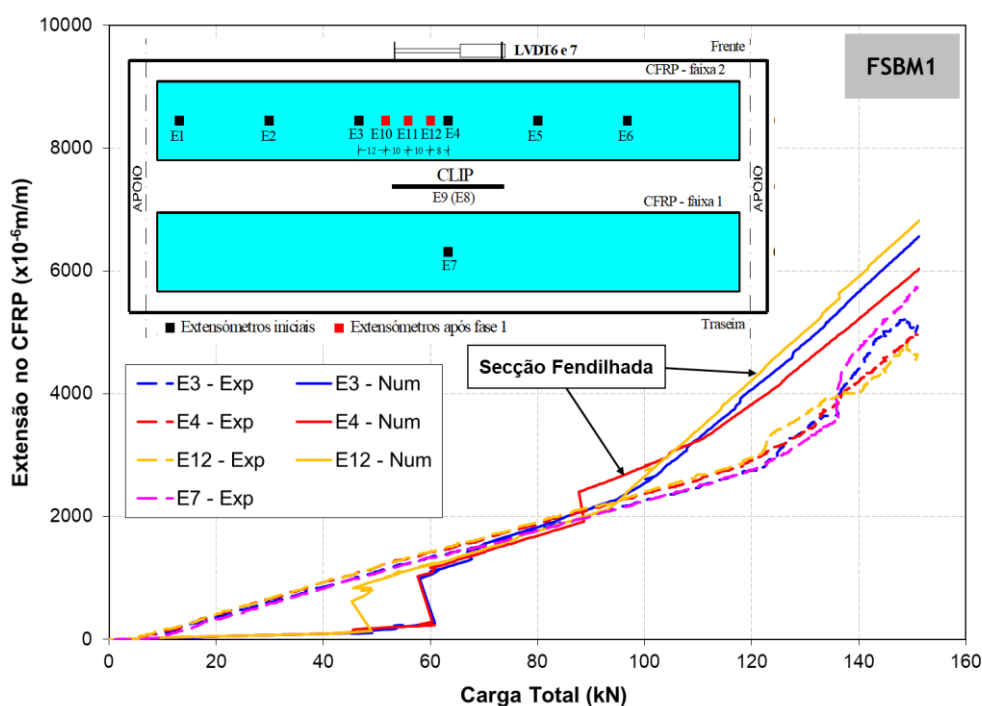


Figura 5.11 - Extensões na manta de CFRP na região de flexão pura (FSBM1)

Na Figura 5.11, é possível observar, para uma carga entre os 40 kN e os 60 kN, o efeito da fendilhação do betão e a transferência das tensões para as mantas de CFRP, provocando o acréscimo súbito das deformações. Esta descontinuidade nas extensões ocorre primeiro na zona de flexão pura, enquanto na zona de flexão simples as fendas ocorreram para uma carga mais elevada. Nas curvas experimentais as extensões apresentam uma variação contínua porque as lajes antes de serem ensaiadas à rotura tiveram duas fases de carregamento (uma de pré-fendilhação e outra de aplicação de ciclos de carga) que provocaram a estabilização das fendas (ver Figura 3.1). A partir de uma carga aproximada de 60 kN, os extensómetros E3, E4 e E12 passam a apresentar um comportamento semelhante ao experimental, demonstrando boa correlação até cerca de 90 kN. A partir desse ponto, nota-se que os valores numéricos ultrapassam os experimentais, especialmente na seção fendilhada da laje. Cabe ainda destacar que o extensómetro E7, embora alocado em outra manta, partilha da mesma coordenada que o extensómetro E4 e, por isso, apresenta a mesma resposta numérica.

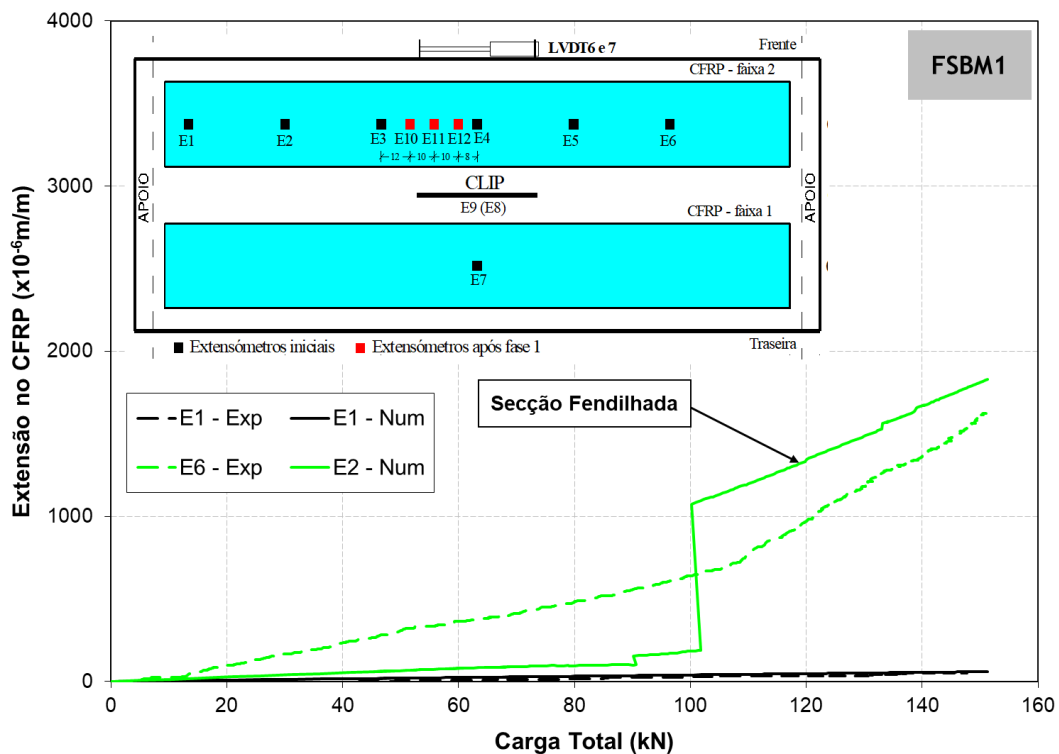


Figura 5.12 - Extensões na manta de CFRP na região de flexão simples (FSBM1)

Na Figura 5.12, observa-se que, na região de flexão simples da laje FSBM1, o extensómetro E2 do modelo numérico apresentou uma descontinuidade para uma carga

próxima dos 100 kN, possivelmente motivada pela transferência de tensões de tração para a manta de CFRP, em virtude fendilhação do betão, mais tardia nesta região mais próxima dos apoios. A resposta numérica só começou a aproximar-se da experimental em torno de 100 kN, carga a partir da qual as extensões simuladas superaram as registadas experimentalmente.

O mesmo procedimento foi aplicado à laje FSBM2, sendo que na Figura 5.13 se apresenta a comparação das extensões nas mantas de CFRP, na região de flexão pura, e na Figura 5.14 a comparação é feita na região de flexão simples.

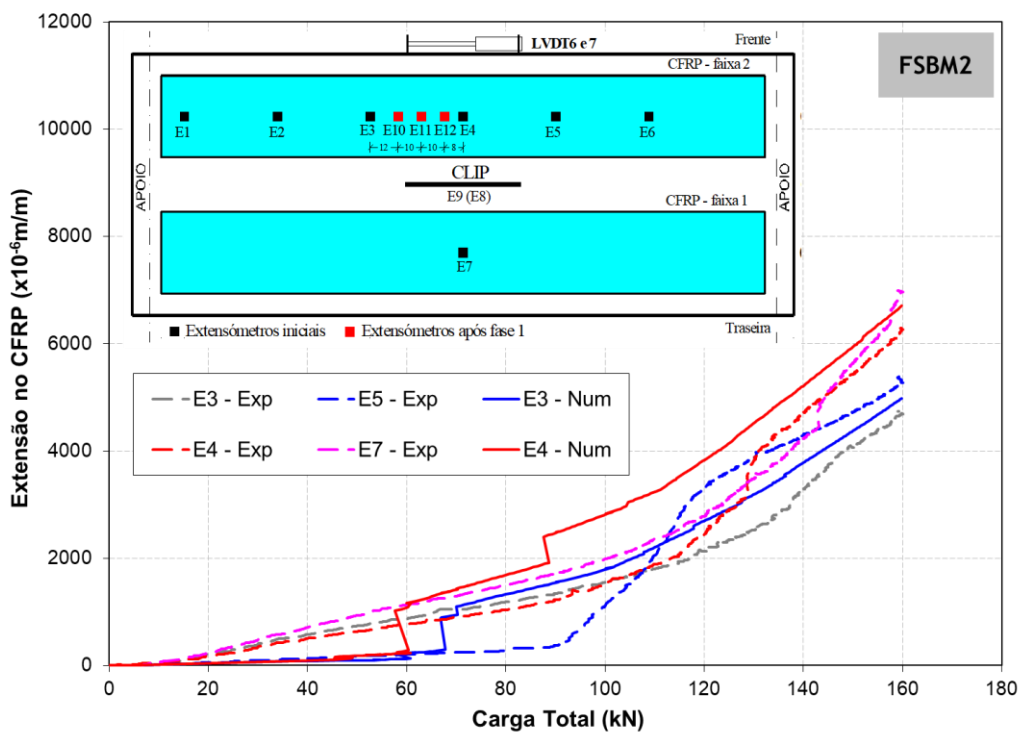


Figura 5.13 - Extensões na manta de CFRP na região de flexão pura (FSBM2)

Comparando os resultados numéricos com os experimentais na região de flexão pura, observa-se que a resposta numérica identificada por E3 é representativa das extensões experimentais registadas tanto no extensómetro E3 como no E5, considerando que a modelação foi realizada apenas para metade da laje e que os extensómetros E3 e E5 se encontram posicionados de forma simétrica. A resposta numérica do E3 demonstrou um bom alinhamento com o comportamento do E3 experimental, especialmente a partir da carga de aproximadamente 60 kN. Os valores experimentais no extensómetro E5 são inicialmente inferiores aos restantes, possivelmente por essa secção não estar fendilhada,

aumentando progressivamente a partir dos 90 kN. A resposta numérica do E3 posiciona-se entre as respostas experimentais dos extensómetros E3 e E5.

De forma análoga, também se registou uma boa concordância nas extensões obtidas experimentalmente nos extensómetros E4 e E7 em comparação com a resposta numérica E4, uma vez que se localizam na mesma coordenada longitudinal. Os resultados numéricos do E4 são mais próximos da resposta experimental do extensómetro E7, embora, a partir da carga aproximada de 60 kN, se tenham registado extensões superiores às experimentais, o que indica uma tendência de sobrestimação por parte do modelo numérico nesse ponto específico, apesar de conseguir captar adequadamente a evolução do comportamento.

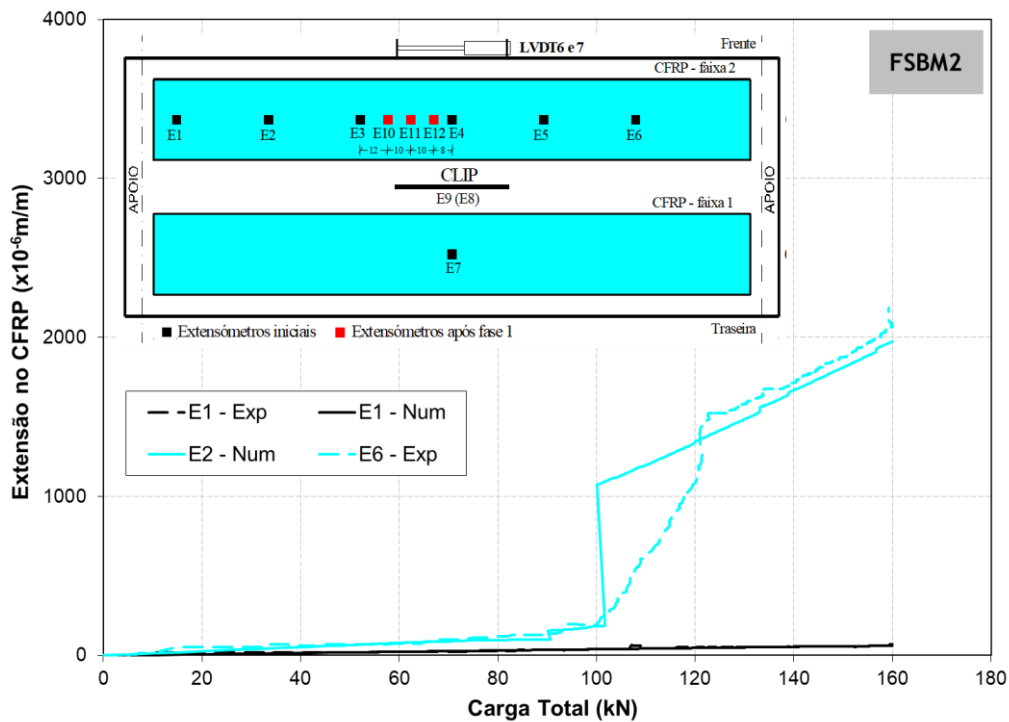


Figura 5.14 - Extensões na manta de CFRP na região de flexão simples (FSBM2)

Na região de flexão simples, o modelo numérico demonstrou boa capacidade de representação do comportamento experimental, com respostas coerentes ao longo da aplicação da carga. As curvas experimentais dos extensómetros E1 e E6 foram bem aproximadas pelas simulações correspondentes.

Adicionalmente, o resultado numérico E2 apresentou uma evolução compatível com a resposta esperada, indicando que o modelo conseguiu captar adequadamente os

mecanismos de transferência de esforços nesta zona da laje. De forma geral, observa-se uma correspondência satisfatória entre os resultados experimentais e numéricos nesta região.

Por fim, na Tabela 5.5 apresentam-se os valores de alguns parâmetros que caracterizam o comportamento experimental das lajes FSBM e os valores obtidos numericamente.

Tabela 5.5 - Resultados experimentais e numéricos (série FSBM)

Parâmetro	Experimental		Numérico
	FSBM1	FSBM2	FSBM
Carga de Plastificação das Armaduras (kN)	119.79	116.81	141.86 ¹
Carga de Rotura (kN)	151.03	160.09	168.92 ²
Deslocamento Central (mm)	23.00	30.87	33.00
Extensão Máxima de Compressão no Betão (‰)	-0.50	-0.61	-1.04 ³
Extensão Máxima de Tração no Betão (‰)	6.20	6.95	7.39 ⁴
Extensão Máxima de Tração no Manta (‰)	12.23	7.00	8.21

(1) Carga correspondente ao deslocamento central de 24.2 mm; (2) Carga correspondente ao deslocamento central de 33 mm; (3) Registrado num elemento não fendilhado; (4) Registrado num elemento fendilhado.

Na Tabela 5.5 constata-se que a carga de plastificação das armaduras obtida numericamente é superior aos valores experimentais, tendo sido alcançada para um deslocamento de 24.2 mm, junto de um elemento correspondente ao betão fendilhado. A carga é atingida para um valor do deslocamento central inferior ao da carga de rotura, evidenciando a contribuição do reforço das mantas de CFRP para a capacidade de carga total da laje. Já para a carga de rotura, a diferença é mais significativa na laje FSBM1 do que na laje FSBM2, com o valor numérico sendo 11.84% superior ao experimental na FSBM1 e 5.51% superior na FSBM2. Esses resultados indicam que o modelo numérico tende a sobrestimar as cargas em comparação com os ensaios experimentais. A extensão obtida numericamente no laminado encontra-se no intervalo dos resultados experimentais. No entanto, para o betão as extensões obtidas numericamente apresentam valores diferentes dos obtidos experimentalmente, sendo mais significativa essa diferença na zona de compressão.

5.2.2 Lajes reforçadas com laminados de CFRP

A Figura 5.15 apresenta o diagrama força-deslocamento a meio vão das lajes reforçadas com laminados de CFRP (FSBL). Para estas lajes existem duas respostas experimentais. A curva numérica mostra boa aproximação à resposta da série FSBL2, com valores ligeiramente superiores na fase inicial, antes da fendilhação. Em relação à FSBL1, a divergência é mais significativa, com o modelo numérico a sobrestimar a capacidade resistente observada experimentalmente. Ainda assim, o comportamento global é bem representado, sobretudo nas fases iniciais e intermediárias do carregamento.

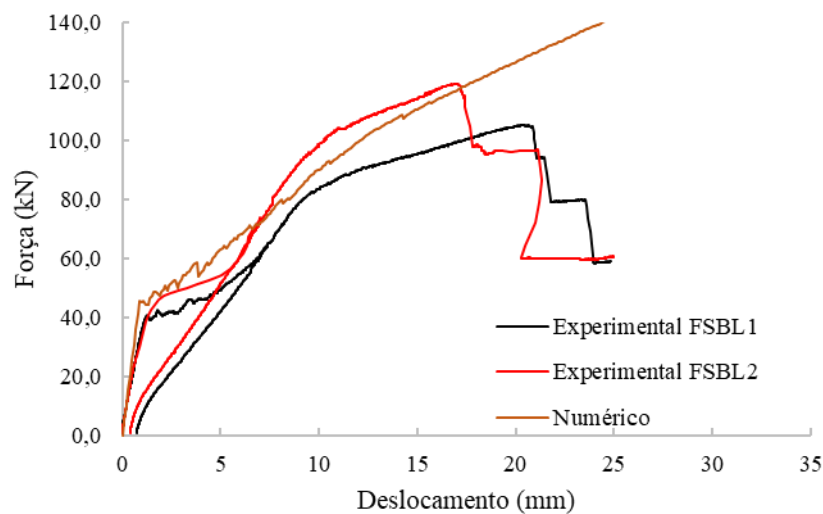


Figura 5.15 - Força-deslocamento a meio vão das lajes reforçadas com mantas FSBL

Na Figura 5.16 apresenta-se o padrão de fendilhação da simulação numérica da laje FSBL para um deslocamento a meio vão de 20 mm, comparando-o com o padrão obtido experimentalmente na laje FSBL1.

Na Figura 5.17 mostra-se o padrão de fendilhação da simulação numérica da laje FSBL para um deslocamento de 17 mm, confrontando-o com os resultados experimentais da laje FSBL2.

Os deslocamentos foram seleccionados com base nos ensaios experimentais, uma vez que, em ambos os casos, a carga máxima foi atingida nesses valores. É possível verificar a presença de fendas de flexão claramente abertas, assinaladas em cor-de-rosa, bem como outras em fase de abertura (vermelho), em reabertura (ciano), em fecho (verde) e fechadas (azul).

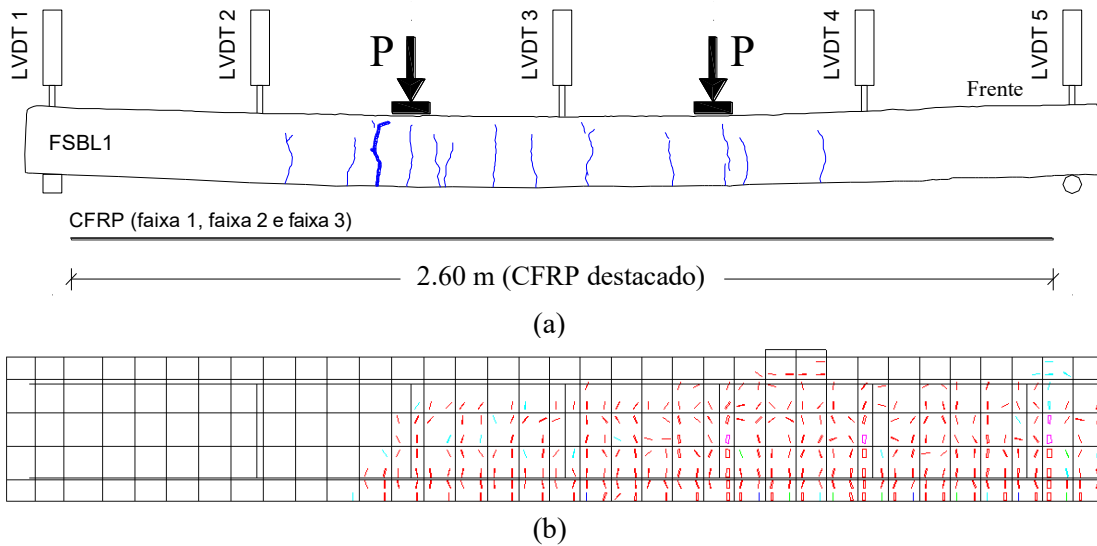


Figura 5.16 - Padrão de fendilhação: (a) FSBL1; (b) Numérico (meia laje)

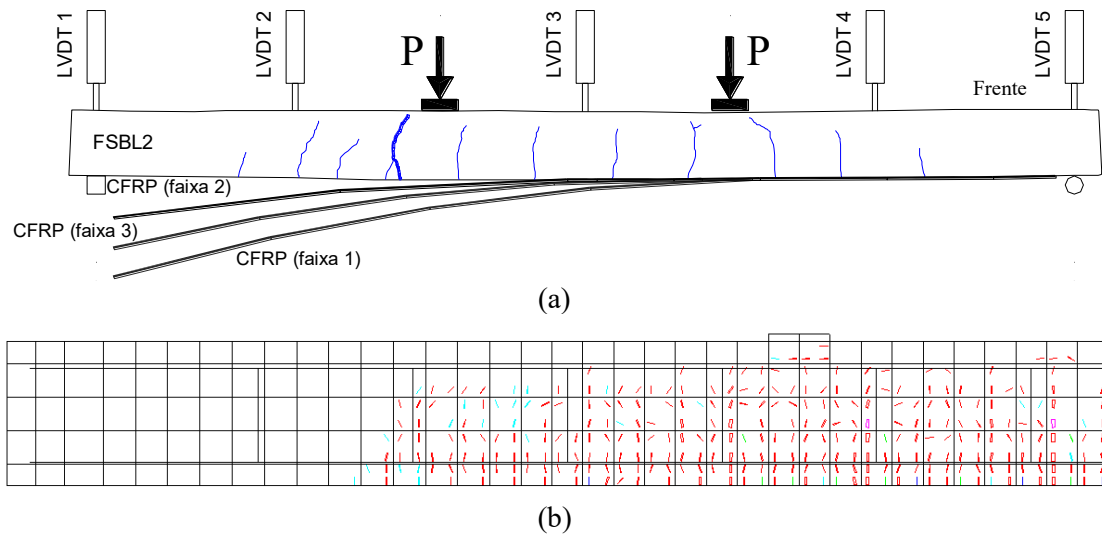


Figura 5.17 - Padrão de fendilhação: (a) FSBL2; (b) Numérico (meia laje)

Na Figura 5.18 apresenta-se a distribuição de tensões normais no betão, no plano da secção, obtidas na simulação numérica da laje FSBL, representada por uma escala de cores para os estados correspondentes aos deslocamentos de 20 mm e 17 mm. Esses valores foram escolhidos por corresponderem aos deslocamentos nos quais, experimentalmente, as lajes atingiram a carga máxima nas séries FSBL1 e FSBL2, respetivamente.

É possível observar, na Figura 5.18 e na Figura 5.19, que os maiores valores de tensão de compressão no betão também se concentram na zona de aplicação da carga e numa camada superior muito superficial. As tensões normais observadas são ligeiramente

inferiores às obtidas para as lajes reforçadas com mantas de CFRP, como era esperado, uma vez que a carga máxima é inferior nestas lajes. Em nenhum ponto da laje esses valores ultrapassam a resistência à compressão do betão (46 N/mm^2), nem mesmo na zona de aplicação da carga. Dessa forma, a suposição de comportamento linear do betão permanece válida para a modelação das lajes reforçadas com laminado.

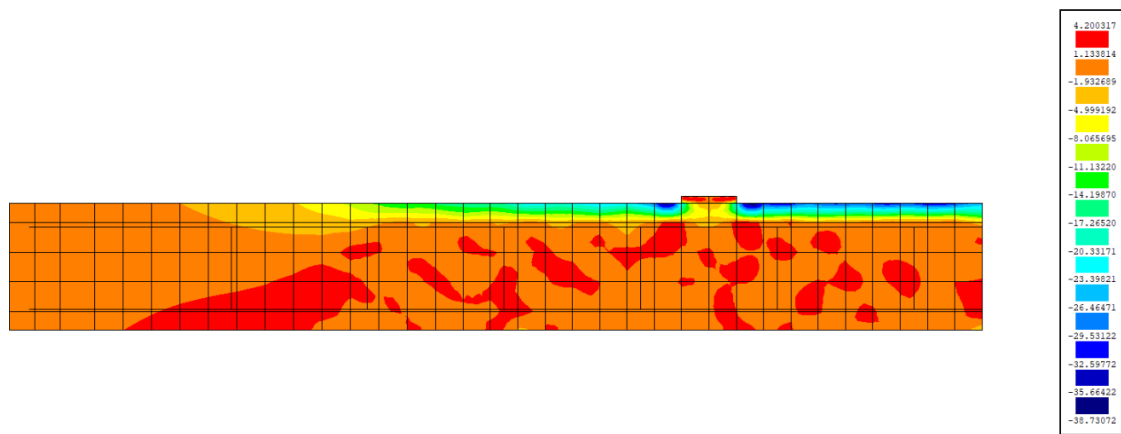


Figura 5.18 - Distribuição das tensões na laje FSBM obtida numericamente para deslocamento a meio vão de 20 mm (série FSBL1)

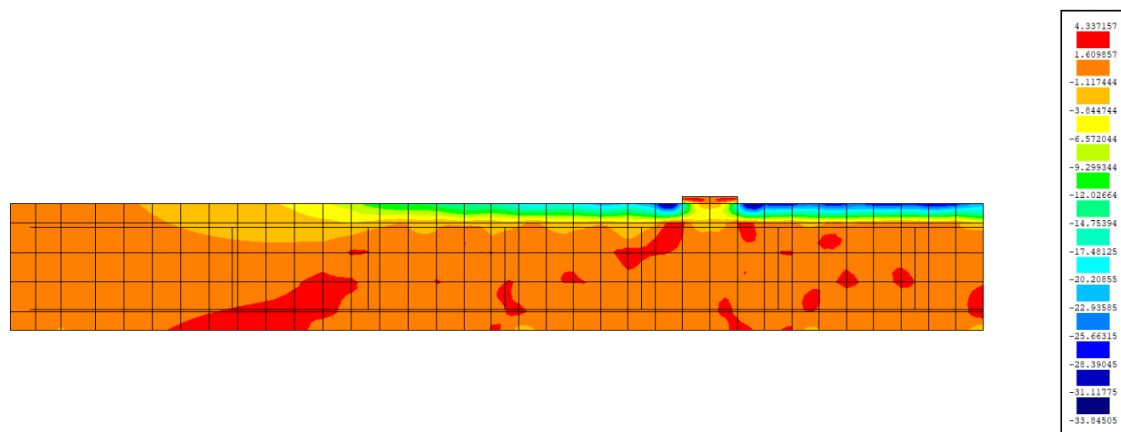


Figura 5.19 - Distribuição das tensões na laje FSBM obtida numericamente para deslocamento a meio vão de 17 mm (série FSBL2)

À semelhança do que foi realizado para as lajes reforçadas com mantas de CFRP, também se procurou comparar as extensões no laminado de CFRP obtidas numericamente com as registadas experimentalmente. Na Figura 5.20 apresentam-se as extensões que melhor se ajustaram na laje FSBL1 e na Figura 5.21 exibem-se os resultados numéricos que mais se distanciaram, evidenciando as limitações do modelo em determinadas regiões

ou condições específicas de carregamento. Os valores numéricos foram obtidos nos pontos de Gauss correspondentes às coordenadas dos extensómetros inseridos experimentalmente (ver Figura 3.14 e Figura 3.15).

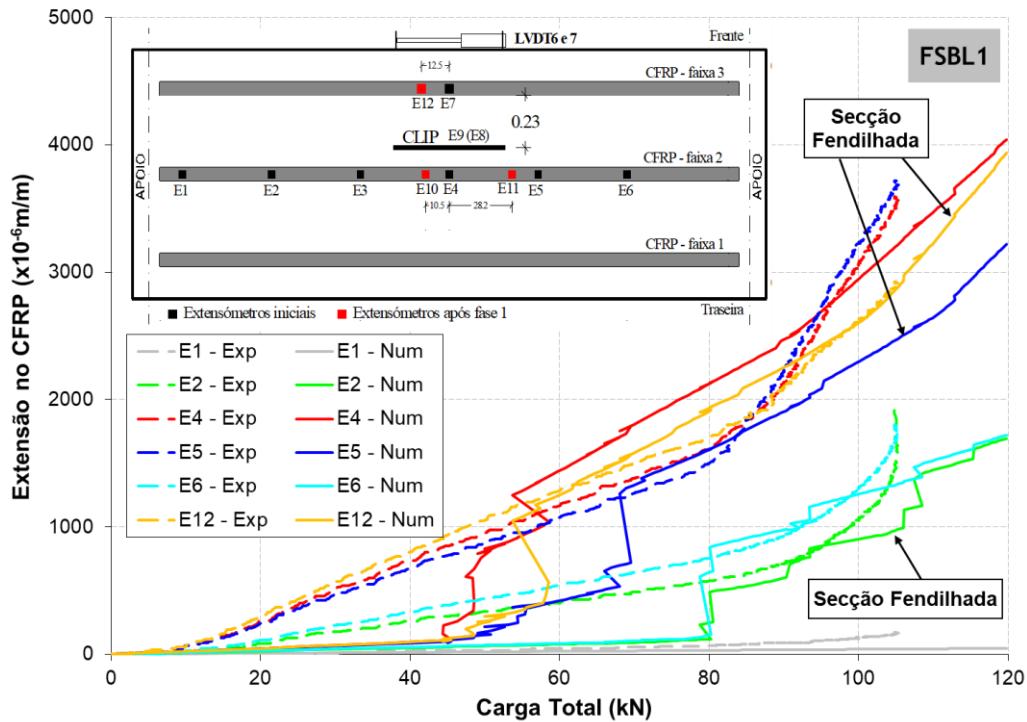


Figura 5.20 - Extensões no laminado de CFRP que melhor se ajustaram (FSBL1)

A Figura 5.20 revela uma boa correlação entre os dados obtidos numericamente e os registados experimentalmente pelos extensómetros E1, E2, E5, E6 e E12. Nota-se nas distribuições das extensões numéricas a fase de fendilhação do betão e de transferência das tensões de tração do betão para os laminados de CFRP. Na zona de flexão pura (E4, E5 e E12) isso ocorreu para uma carga entre os 40 kN e os 60 kN, enquanto na zona de flexão simples (E2 e E6) as fendas surgiram para uma carga próxima dos 80 kN. Na extremidade do laminado (E1) não parece ter ocorrido fendilhação, porque as extensões são muito reduzidas e apresentam uma evolução contínua sem descontinuidades. A partir da carga de 60 kN, os valores numéricos nos E4, E5 e E12 passam a apresentar respostas bastante próximas das experimentais, o mesmo sucedendo para os valores numéricos nos E2 e E6, mas para uma carga superior a 80 kN. Como referido anteriormente essa fase de acréscimo súbito de extensão não é visível nas curvas experimentais porque as lajes já

estavam com a fendilhação estabilizada (fases 1 e 2 de ensaio ilustradas na Figura 3.1) quando se iniciou o ensaio à rotura.

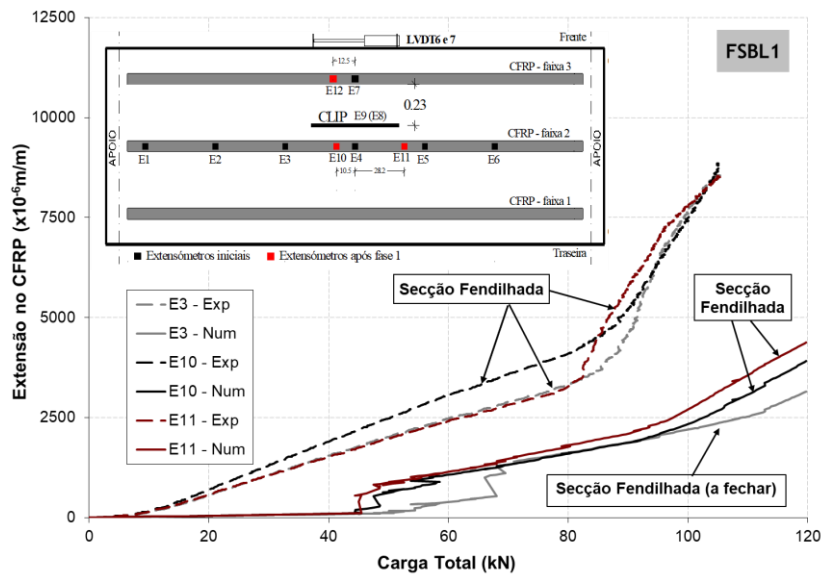


Figura 5.21 - Extensões no laminado de CFRP que mais divergiram (FSBL1)

Em contrapartida, a Figura 5.21 mostra discrepâncias significativas entre as extensões numéricas e as registadas nos extensómetros E3, E10 e E11. Essas diferenças indicam que o modelo não conseguiu prever nesse ponto uma abertura de fenda de acordo com a observada experimentalmente. É possível observar, ainda, que esses três extensómetros — E3, E10 e E11 — apresentaram, experimentalmente, valores de extensão superiores aos demais extensómetros representados na Figura 5.20, tendência essa já poderia ser observada anteriormente na Figura 3.14.

A Figura 5.22 apresenta a comparação entre as extensões no laminado de CFRP obtidas numericamente com a série FSBL2, especificamente na região de flexão simples. Considerando que a laje em estudo é simétrica e que, na modelação numérica, foi analisada apenas metade da sua geometria, os extensómetros E2 e E6 compartilham a mesma referência numérica.

É possível observar que o modelo numérico apresentou boa capacidade de previsão do comportamento experimental, especialmente para o extensómetro E1, cuja curva se aproxima significativamente ao longo do carregamento. Apesar da simetria da laje, nota-se uma divergência entre as respostas experimentais dos extensómetros E2 e E6. Nesse cenário, destaca-se que a resposta numérica se mostrou mais condizente com os valores

experimentais obtidos pelo E2 a partir dos 80 kN, reforçando a coerência do modelo na captação do comportamento do laminado na zona de flexão simples, ao menos do lado da laje considerado na análise.

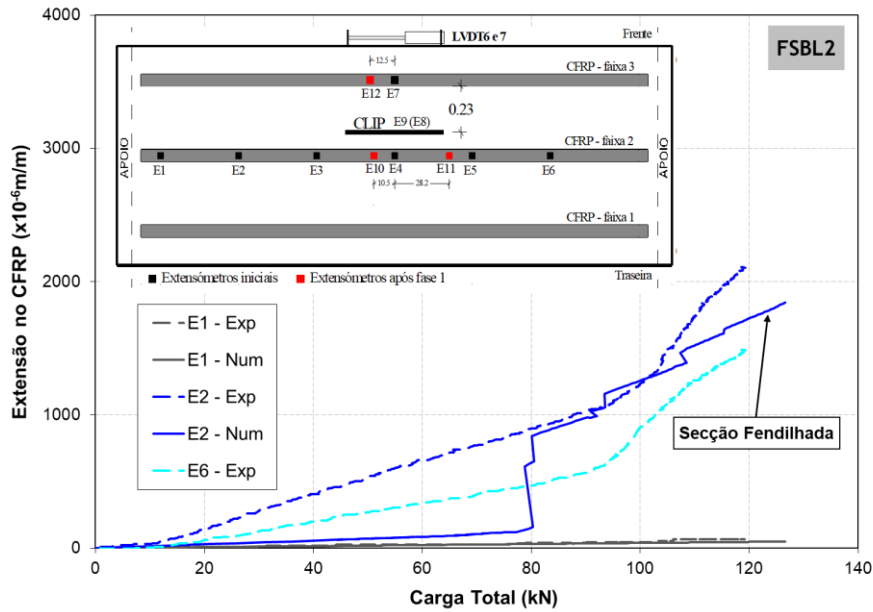


Figura 5.22 - Extensões no laminado de CFRP na região de flexão simples (FSBL2)

Por fim, procedeu-se à comparação entre os resultados numéricos e experimentais da série FSBL2 na região de flexão pura, conforme apresentado na Figura 5.23.

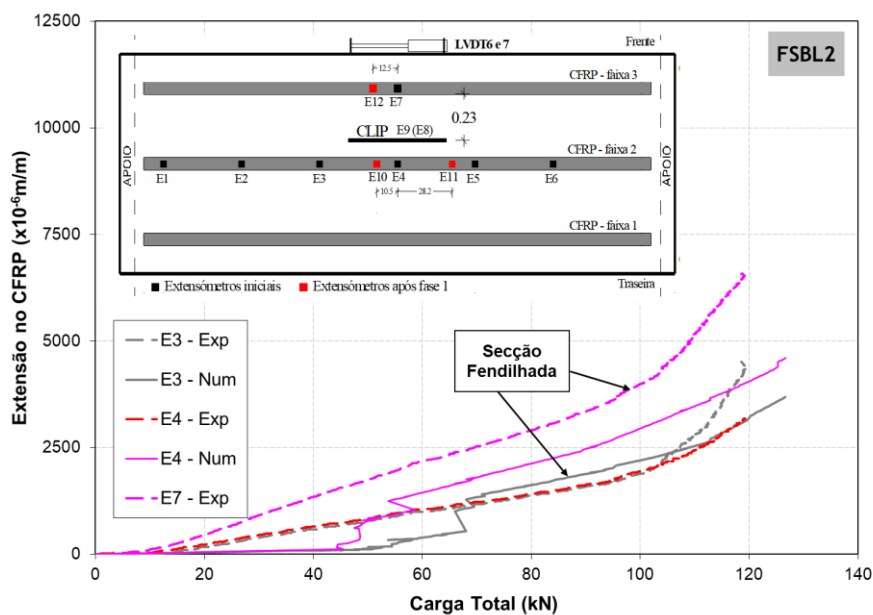


Figura 5.23 - Extensões no laminado de CFRP na região de flexão pura (FSBL2).

A análise concentrou-se nos extensómetros E3, E4 e E7, sendo que os dois últimos estão posicionados na mesma coordenada longitudinal da laje. No entanto, é importante destacar que, no ensaio experimental, o extensómetro E7 foi colocado num elemento distinto do laminado, o que pode justificar algumas variações em relação ao E4.

Observa-se que o modelo numérico foi capaz de representar com elevada precisão a resposta do E3, especialmente a partir de cargas superiores a 60 kN, evidenciando uma boa correlação com os dados experimentais. No caso do E4, a resposta numérica situou-se entre os valores registados experimentalmente pelos extensómetros E4 e E7, indicando uma aproximação razoável, embora com alguma dispersão.

Por fim, na Tabela 5.6 apresentam-se os valores de alguns parâmetros que caracterizam o comportamento experimental das lajes FSBL e os valores obtidos numericamente.

Tabela 5.6 - Resultados experimentais e numéricos (série FSBL)

Parâmetro	Experimental		Numérico
	FSBL1	FSBL2	FSBL
Carga de Plastificação das Armaduras (kN)	80.38	100.14	92.44 ¹
Carga de Rotura (kN)	105.35	119.28	117.04 ²
Deslocamento Central (mm)	20.17	17.06	17.00
Extensão Máxima de Compressão no Betão (%)	-0.29	-0.34	-0.57 ³
Extensão Máxima de Tração no Betão (%)	3.00	3.80	6.37 ⁴
Extensão Máxima de Tração no Laminado (%)	8.87	6.52	4.25

(1) Carga correspondente ao deslocamento central de 10.5 mm; (2) Carga correspondente ao deslocamento central de 17 mm; (3) Registado num elemento não fendilhado; (4) Registado num elemento fendilhado.

Na Tabela 5.6 constata-se que a carga de plastificação das armaduras obtida numericamente, junto de um elemento de betão fendilhado, encontra-se no intervalo das cargas obtidas experimentalmente. A carga é atingida para um valor do deslocamento central inferior ao da carga de rotura, evidenciando a contribuição do reforço dos laminados de CFRP para a capacidade de carga total da laje. A carga de rotura também se encontra nos intervalos das cargas de rotura obtidas experimentalmente, sendo a diferença mais significativa na laje FSBL1 (11,10% superior) do que na laje FSBL2 (0.02% inferior). A extensão obtida numericamente no laminado é significativamente

inferior aos resultados experimentais. Para o betão as extensões numéricas apresentam valores diferentes dos experimentais, sendo mais significativo o desvio na zona de tração.

6. CONCLUSÕES GERAIS E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Neste trabalho, foi realizada uma análise numérica de lajes de betão armado reforçadas com CFRP, considerando três tipologias: lajes de betão armado (FSRC), lajes reforçadas com manta (FSBM) e lajes reforçadas com laminado (FSBL). A comparação com os resultados experimentais de Costeira Silva (2008) evidenciou a importância da calibração das leis constitutivas para aproximar a resposta numérica da observada em ensaios.

A análise de sensibilidade da malha permitiu avaliar diferentes refinamentos, tendo sido escolhido o refinamento intermédio para garantir um equilíbrio entre precisão e eficiência computacional. Além disso, a comparação entre diferentes leis constitutivas do betão, com base no CEB-FIP Model Code 1990 (1993) e no *fib* Model Code 2010 (2013), demonstrou que a energia de fratura desempenha um papel essencial na modelação do comportamento do betão à tração, influenciando diretamente a formação e propagação das fendilhações.

A análise das energias de fratura revelou que a curva que melhor representou a resposta numérica foi aquela associada a uma menor energia de fratura, caracterizada por uma queda mais abrupta no primeiro ramo da lei bilinear. Além disso, verificou-se que a carga correspondente a f_{ctm} poderia estar ligeiramente sobrestimada devido à idade do betão nos ensaios experimentais, sugerindo a necessidade de ajustes nesse valor e nas demais leis constitutivas para melhorar a correspondência entre os modelos numérico e experimental. Na série FSRC, a carga numérica máxima foi aproximadamente 13% superior à obtida experimentalmente, apontando para a necessidade de um refinamento adicional na calibração do modelo.

A influência do número de nós por elemento também foi analisada, concluindo-se que a utilização de 4 nós, em vez de 8, resultou numa resposta mais rígida.

Na modelação das lajes reforçadas com CFRP, verificou-se que a consideração do efeito *tension stiffening* junto às armaduras e do comportamento *tension softening* nas regiões mais afastadas permitiu representar adequadamente o efeito do confinamento induzido pelo reforço. Tanto para as lajes reforçadas com manta quanto para as reforçadas com laminado, as curvas numéricas captaram de forma adequada o comportamento observado experimentalmente. Considerando que foram realizados dois ensaios para cada

tipo de laje, as curvas numéricas posicionaram-se entre os resultados experimentais, refletindo com precisão as variações observadas.

Os resultados evidenciaram que o programa *Femix* foi eficaz na identificação dos pontos de fendilhação, demonstrando a capacidade do modelo em representar a resposta do betão sob carregamento monotónico até à rotura. Além disso, verificou-se que a modelação adequada das interfaces entre CFRP e betão é essencial para garantir a precisão da simulação, uma vez que a calibração desses parâmetros influencia diretamente a fiabilidade da previsão do comportamento estrutural.

A lei constitutiva proposta por Lu *et al.* (Modelo Simplificado) utilizada para modelar o comportamento da interface betão-compósito CFRP mostrou-se eficaz para reproduzir o comportamento até à rotura, apesar de não reproduzir os fenómenos de descolamento das mantas e dos laminados que caracterizaram a rotura das lajes reforçadas.

Ainda no âmbito da modelação das lajes reforçadas com CFRP, foram analisadas as extensões no reforço, comparando os resultados numéricos com os dados experimentais para as quatro séries ensaiadas (FSBM1, FSBM2, FSBL1 e FSBL2). Apesar de algumas divergências pontuais, é possível concluir que a modelação numérica foi capaz de representar adequadamente o comportamento observado experimentalmente, evidenciando boa correspondência nas extensões ao longo das diferentes fases de carregamento.

6.1. Desenvolvimentos Futuros

Uma limitação deste estudo foi a adoção do estado plano de tensões, o que simplifica a modelação em comparação com uma abordagem tridimensional. Assim, para trabalhos futuros, recomenda-se a utilização de um modelo 3D, possibilitando uma análise mais detalhada das deformações e falhas nas estruturas reforçadas.

Relativamente às leis constitutivas dos materiais, sugere-se a utilização de uma lei não linear para modelar o comportamento do betão à compressão, em substituição do comportamento elástico adotado neste estudo. Também se poderá avaliar o comportamento da interface betão-compósito comparando diferentes leis de aderência-escorregamento (*bond-slip*), algumas referenciadas neste estudo e apresentadas no trabalho de Augustus-Nelson *et al.* (2024).

Por fim, como desenvolvimento futuro também se poderá estudar, no caso das lajes reforçadas com laminados ou com mantas, o efeito *tension stiffening* no betão tracionado, avaliando diferentes propostas para simular a retenção de tensões de tração entre o betão, as armaduras de aço e os compósitos de CFRP.

REFERÊNCIAS

Ahmad, M. A., Subramaniam, K. V., Ghosn, M. (2006). Experimental investigation and fracture analysis of debonding between concrete and FRP sheets. *Journal of Engineering Mechanics*, 132(9), 914–921. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2006\)132:9\(914\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2006)132:9(914))

Aljidda, O., El Refai, A., Alnahhal, W. (2024). Experimental and numerical investigation of the flexural behavior of one-way RC slabs strengthened with near-surface mounted and externally bonded systems. *Construction and Building Materials*, 421, 135709. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2024.135709>

Alva, G. M. S., El Debs, A. L. H. C., Kaminski Jr, J. (2010). Nonlinear analysis of reinforced concrete structures in design procedures: application of lumped dissipation models. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, 3, 149–178.

ASCE (1982). State of the art report on finite element analysis of reinforced concrete. American Society of Civil Engineers (ASCE), ASCE Task Committee on FEA of RC Structures of the Structural Division Committee on Concrete and Masonry Structures, New York, US, 553 pp.

Augusthus Nelson, L., Weekes, L., Milani, G., Al-Allaf, M. (2024). Generalised analytical solutions for linear and non-linear bond–slip models for externally bonded FRP to a concrete substrate. *Engineering Structures*, 298, 117025. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.117025>

Azevedo, A. F. M., Barros, J. A. O., Sena-Cruz, J. M., Ventura-Gouveia, A. (2003). Software no ensino e no projecto de estruturas. In J. S. Gomes, C. F. Afonso, C. C. António, A. S. Matos (Eds.), *Anais do 3º Congresso Luso-Moçambicano de Engenharia* (Vol. 1, pp. 81-92). Maputo, Moçambique, 19-21 de agosto.

Azevedo, D. M. M. (2008). *Reforço de estruturas de betão com colagem de sistemas compósitos de CFRP: recomendações para dimensionamento* (Dissertação de mestrado). Instituto Politécnico de Bragança.

Barros, J. A. O., Figueiras, J. A., Póvoas, R. H. C. F. (1994). Modelos constitutivos para o betão armado fendilhado. In *5º Encontro Nacional Betão Estrutural* (pp. 55-70).

Barros, J. A. O; Fortes, A. S. (2005). Flexural strengthening of concrete beams with CFRP laminates bonded into slits. *Cement and Concrete Composites*, 27.4: 471-480.

Barros, J. A., Correia, L. L. G. (2022). Structural strengthening with FRP systems: a review of research and applications in Portugal. *Concrete International*. <https://hdl.handle.net/1822/81928>

Barros, J.A.O. (1995), “Comportamento do betão reforçado com fibras - análise experimental e simulação numérica”, tese de doutoramento, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Barros, J.A.O.; Baghi, H.; Ventura-Gouveia, A., Assessing the applicability of a smeared crack approach for simulating the behaviour of concrete beams flexurally reinforced with GFRP bars and failing in shear, *Engineering Structures Journal*, 227, 111391, January 2021. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111391>

Bastos, P. S. dos S. (2011). *Fundamentos do concreto armado*. Universidade Estadual Paulista, UNESP. São Paulo.

Brosens, K, Van Gemert D. (1998). Plate end shear design for external CFRP laminates, vol. 3. In: *Fracture mechanics of concrete structures*. AEDIFICATIO Publishers; p. 1793–804.

CEB-FIP, (1993), Comité Euro-International du Béton, CEB-FIP Model Code 1990 - Design code, Thomas Telford Ltd.

Chajes, M., et al., (1996), Bond between FRP plates and concrete, *Proceedings of the 4th International Symposium on Fiber Reinforced Polymer Reinforcement for Concrete Structures (FRPRCS-4)*, American Concrete Institute, USA, pp. 289-301.

Chen W.F., Han, D.J. (1988). *Plasticity for structural engineers*. Springer-Verlag, New York, US.

Chen, J.F., Teng, J.G. (2003). Shear capacity of FRP-strengthened RC beams: FRP debonding. *Construction and Building Materials*, 17, 27-41.

Coelho, M. R. F., Silva, L., Sena-Cruz, J., Barros, J. A. (2011). Estudo comparativo de diferentes técnicas no reforço à flexão de vigas de betão armado com recurso a CFRP's sob ações monotónicas e de fadiga. *Revista de Engenharia Civil*, 19(3), 1-11

Costeira Silva, P. (1999). *Modelação e análise de estruturas de betão reforçadas com CFRP* (Tese de mestrado). Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Costeira Silva, P. A. S. M. (2008). Comportamento de estruturas de betão reforçadas por colagem exterior de sistemas de CFRP [Tese de doutoramento, Universidade do Porto]. Repositório da FEUP. <http://hdl.handle.net/10216/10946>

Dai, J. G., Ueda, T. (2003). Local bond stress slip relations for FRP sheets-concrete interfaces. In *Fibre-reinforced polymer reinforcement for concrete structures* (pp. 143–152). World Scientific.

Dai, J., Ueda, T., Sato, Y. (2005). Development of the Nonlinear Bond Stress-Slip Model of Fiber Reinforced Plastics Sheet-Concrete Interfaces with a Simple Method. *Journal of Composites for Construction*, 9(1), 52–62. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0268\(2005\)9:1\(52\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0268(2005)9:1(52))

Dalfré, G. M., Sarti, L. A., Araújo, C. J. R. V. (2021). Protocolo acelerado de degradação do sistema de reforço EBR-CFRP aplicado em vigas de concreto armado. *Ambiente Construído*, 21(3), 273–293.

Dalfré, G., Parsekian, G. (2021). Possibilidades de reforço com o uso de FRPs. In *Anais do III Workshop de Tecnologia de Processos e Sistemas Construtivos*, (pp. 1-6). <https://eventos.antac.org.br/index.php/tecsic/article/view/1313>

De Lorenzis, L., Teng, J. G. (2007). Near-surface mounted FRP reinforcement: An emerging technique for strengthening structures. *Composites Part B: Engineering*, 38(2), 119–143. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2006.08.003>

De Oliveira, L. F. F., Tinoco, M. P., Silva Filho, J. J. H. (2023). Análise do dimensionamento de reforço estrutural à força cortante utilizando CFRP em vigas de concreto armado. *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas*.

Deuring, (1996), Efficient strengthening by using the Sika CarboDur-System, Sika AG Zürich, Switzerland, CFK-COPP. DOC 2, 15 pp.

Dias, S. J. E., Barros, J. A. O. (2005). *Reforço ao corte de vigas T de betão armado usando a técnica NSM com laminados de CFRP*. Universidade do Minho, Escola de Engenharia.

- Earij, A., Alfano, G., Cashell, K., Zhou, X. (2017). Nonlinear three-dimensional finite-element modelling of reinforced-concrete beams: Computational challenges and experimental validation. *Engineering Failure Analysis*, 82, 92–115. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2017.08.025>
- Erik, M. A., Heffernan, P. J. (1995). Reinforced concrete slabs externally strengthened with FRP materials. *Nonmetallic (FRP) reinforcement for concrete structures*. London: E&FN Spon, 509-16.
- Eurocódigo 2, (2004), Eurocodigo 2 Projecto de estruturas de betão Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios, CEN, Abril.
- Fernandes, P., Silva, P., Sena-Cruz, J., Azenha, M., Barros, J. (2014). Comportamento à fadiga de elementos de betão reforçados através de sistemas NSM CFRP. In *1º Congresso Brasileiro de Patologia das Construções*, Foz do Iguaçu, PR, Brasil, 21-23 de maio.
- Ferreira, M., Oliveira, M., Neto, A., Tapajós, L., Nascimento, A., Freire, M. (2019). Influência da ancoragem na resistência à flexão de vigas reforçadas com mantas de PRFC. *Revista ALCONPAT*, 9(1), 30-47. <https://doi.org/10.21041/ra.v9i1.269>
- Fib (2010), Fédération Internationale du Béton, Model Code for Concrete Structures 2010. Ernst & Sohn, Wiley, 2013.
- Fib (2019). Fédération Internationale du Béton, fib Bulletin 90. Externally applied FRP reinforcement for concrete structures. Technical report. <https://doi.org/10.35789/fib.BULL.0090>
- Figueiras, J. A., Juvandes, L. F. P. (2001). *Reforço de pontes por colagem de sistemas CFRP: Caso da Ponte de N.S. da Guia*. FEUP.
- Ghaleh, R. Z., Mostofinejad, D. (2022). Behaviour of EBRIG CFRP sheet-concrete joint: Comparative assessment with EBR and EBROG methods. *Construction and Building Materials*, 346, 128374. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2022.128374>
- Juvandes, L. F. P. (1999). *Reforço e reabilitação de estruturas de betão usando materiais compósitos de "CFRP"* (Tese de doutoramento). Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. <http://hdl.handle.net/10216/11552>

Juvandes, L. F. P., Dias, S. J. E., Figueiras, J. A. (1998). *Comportamento Experimental de Faixas de Laje de Betão Armado Reforçado com Compósitos de CFRP Unidireccionais* (Relatório Técnico). DECivil, FEUP.

Juvandes, L. F. P., Marques, A. T., Figueiras, J. A. (1996). *Materiais Compósitos no Reforço de Estruturas de Betão* (Relatório Técnico). DECivil, FEUP.

Kaiser, H.P. (1989). "Strengthening of reinforced concrete with epoxy-bonded carbon-fiber plastics", Doctoral Thesis, Eidgenössischen Technischen Hochschule (ETH), ETH Nr. 8918, Zurich, 224 pp.

Ko, H., Matthys, S., Palmieri, A., Sato, Y. (2014). Development of a simplified bond stress–slip model for bonded FRP–concrete interfaces. *Construction and Building Materials*, 68, 142–157. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2014.06.037>.

Kupfer, H., Hilsdorf, H. K., Rusch, H. (1969). Behavior of concrete under biaxial stresses. *ACI Journal Proceedings*, 66(8). <https://doi.org/10.14359/7388>

Lee, D., Cheng, L., Yan-Gee Hui, J. (2013). Bond characteristics of various NSM FRP reinforcements in concrete. *Journal of Composites for Construction*, 17(1), 117-129.

Lourenço, P. B. (1996). *Computational strategies for masonry structures* (PhD Thesis). Delft University of Technology, The Netherlands.

Lu, X. Z., Teng, J. G., Ye, L. P., Jiang, J. J. (2005). Bond–slip models for FRP sheets/plates bonded to concrete. *Engineering Structures*, 27(6), 920–937. <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2005.01.014>.

Maeda, T., Asano, Y., Sato, Y., Ueda, T., Kakuta, Y. (1997). Bond behavior of FRP to concrete, *Proceedings of the 3rd International Symposium on Fiber Reinforced Polymers for Reinforced Concrete Structures (FRPRCS-3)*, Japan Concrete Institute, Japão, Outubro, pp. 67-75.

Matos, L. M. P., Barros, J. A. O., Ventura-Gouveia, A., Calçada, R. A. B. (2021). A new inverse analysis approach for predicting the fracture mode I parameters of fibre reinforced concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 246, 107613. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2021.107613>

Meier, U. (1987). Bridge repair with high performance composite materials. *Material und Technik*, 4.

- Meier, U. (1997). Post strengthening by continuous fiber laminates in Europe. In Japan Concrete Institute (Ed.), *Proceedings of the 3rd International Symposium on Non-Metallic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures (FRPRCS-3)* (pp. 41-56). Japan Concrete Institute.
- Mhanna, H. H., Hawileh, R. A., Abdalla, J. A. (2019). Shear strengthening of reinforced concrete beams using CFRP wraps. *Procedia Structural Integrity*, 17, 214–221. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2019.08.029>
- Monti, G., Renzelli, M., Luciani, P. (2003). FRP adhesion in uncracked and cracked concrete zones. In *Fibre-reinforced polymer reinforcement for concrete structures* (pp. 183-192). World Scientific.
- Mostofinejad, D., Shameli, S. M., Hosseini, A. (2014). EBROG and EBRIG methods for strengthening of RC beams by FRP sheets. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 18(6), 652–668. <https://doi.org/10.1080/19648189.2014.900523>
- Nakaba, K., Kanakubo, T., Furuta, T., Yoshizawa, H. (2001). Bond behavior between fiber-reinforced polymer laminates and concrete. *ACI Structural Journal*, 98(3), 359–367. <https://doi.org/10.14359/10224>
- Neto, P., Vinagre, J., Alfaiate, J. (2004, 17-19 de novembro). Modelação da aderência entre o betão e materiais de reforço. In *Encontro Nacional Betão Estrutural*, Porto, Portugal. <http://hdl.handle.net/10400.26/5141>
- Neubauer, U., Rostasy, F. S. (1999). Bond failure of concrete fiber reinforced polymer plates at inclined cracks-experiments and fracture mechanics model. *ACI Symposium Publication*, 188. <https://doi.org/10.14359/5638>
- Owen, D. R. J., Figueiras, J. A. (1983). Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19(2), 323–350.
- Pan, J., Wu, Y.-F. (2014). Analytical modeling of bond behavior between FRP plate and concrete. *Composites Part B: Engineering*, 61, 17–25. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.01.026>

Petrauski, M. C. (2016). *Simulação numérica do comportamento de vigas mistas de aço e concreto com conectores CRESTBOND* (Dissertação de mestrado). Universidade Federal de Viçosa, Viçosa.

Pfeil, W. (1989). *Concreto armado* (5a ed., Vols. 1, 2 e 3). Livros Técnicos e Científicos.

Póvoas, R. H. C. de F. (1991). *Modelos não-lineares de análise e dimensionamento de estruturas laminares de betão incluindo efeitos diferidos*, Tese de doutoramento. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. <http://hdl.handle.net/10216/12165>

Roberts, G. D., Li, K. N. K. (2015). Simplified Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Slabs and Beams. <https://doi.org/10.5923/j.jce.20150506.06>

Rolland, A., Argoul, P., Benzarti, K., Quiertant, M., Chataigner, S., Khadour, A. (2020). Analytical and numerical modeling of the bond behavior between FRP reinforcing bars and concrete. *Construction and Building Materials*, 231, 117160. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2019.117160>

Rostásy, F.S., (1997), On durability of FRP in aggressive environments, proceedings of the *3rd Int. Symp. on Non Metallic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures (FRPRCS-3)*, JCI, Japão, Outubro, pp. 107-114.

S&P. Reforço estrutural com compósitos em fibra S&P FRP SYSTEMS. Disponível em: <https://www.sp-reinforcement.pt/pt-PT/sistemas/sistema-de-reforco-frp>. Acesso em março de 2025.

Savioa M, Farracuti B, Mazzotti D. (2003). Non-linear bond–slip law for FRP concrete interface. In: Proc. of *6th international symposium on FRP reinforcement for concrete structures*. Singapore: World Scientific Publications. p. 163–72.

Sena-Cruz, J. (2005). *Strengthening of concrete structures with near-surface mounted CFRP laminate strips*, Tese de doutoramento. Universidade do Minho. <https://hdl.handle.net/1822/11781>

Shahawy, M. A., Arockiasamy, M., Beitelman, T., Sowrirajan, R. (1996). Reinforced concrete rectangular beams strengthened with CFRP laminates. *Composites Part B: Engineering*, 27(3), 225–233. [https://doi.org/10.1016/1359-8368\(95\)00044-5](https://doi.org/10.1016/1359-8368(95)00044-5)

Sharaky, I. A., Elamary, A. S., Alharthi, Y. M. (2023). Experimental and numerical investigation on the flexural performance of RC slabs strengthened with EB/NSM CFRP

reinforcement and bonded reinforced HSC layers. *Engineering Structures*, 289, 116338. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.116338>

Sharma, S. K., Mohamed Ali, M. S., Goldar, D., Sikdar, P. K. (2006). Plate–concrete interfacial bond strength of FRP and metallic plated concrete specimens. *Composites Part B: Engineering*, 37(1), 54–63. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2005.05.011>

Subramaniam, K. V., Carloni, C., Nobile, L. (2007). Width effect in the interface fracture during shear debonding of FRP sheets from concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(4), 578–594. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2006.09.002>

Teng, J. G., Chen, J. F., Smith, S. T., Lam, L. (2002). *FRP: Strengthened RC structures*. Chichester: Wiley.

Tiwary, A. K., Zandonini, R. (2021). Finite element modeling of tension stiffening and cracking of reinforced concrete components: State of art. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 889(1), 012082. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/889/1/012082>

Torabian, A., Isufi, B., Mostofinejad, D., Ramos, A. P. (2020). Flexural strengthening of flat slabs with FRP composites using EBR and EBROG methods. *Engineering Structures*, 211, 110483. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.110483>

Triantafillou, T. C., Deskovic, N., Deuring, M. (1992). Strengthening of concrete structures with prestressed fiber reinforced plastic sheets. *ACI Structural Journal*, 89(3), 235-244.

Ueda, T., Dai, J. (2005). Interface bond between FRP sheets and concrete substrates: Properties, numerical modeling and roles in member behaviour. *Progress in Structural Engineering and Materials*, 7(1), 27-43. <https://doi.org/10.1002/pse.187>

Ventura-Gouveia, A. (2011). *Constitutive models for the material nonlinear analysis of concrete structures including time dependent effects*, Tese de doutoramento. Departamento de Engenharia Civil, Universidade do Minho. <https://hdl.handle.net/1822/19653>

Wang, Y., Surahman, R., Zhou, C., He, X., Chen, Y. (2024). Analytical study on flexural strengthening of narrow RC beams with hybrid anchored CFRP sheets. *Journal of Building Engineering*, 88, 109095. <https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2024.109095>

- Willam, K. J., Warnke, E. P. (1975). Constitutive models for the triaxial behavior of concrete. *LABSE Proceedings*, 19, 1-30.
- Wu, Y.-F., Xu, X.-S., Sun, J.-B., Jiang, C. (2012). Analytical solution for the bond strength of externally bonded reinforcement. *Composite Structures*, 94(11), 3232-3239. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.04.026>
- Yuan, H., Teng, J. G., Seracino, R., Wu, Z. S., Yao, J. (2004). Full-range behavior of FRP-to-concrete bonded joints. *Engineering Structures*, 26(5), 553-565. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2003.11.006>
- Yun, Y., Wu, Y.-F., Tang, W. C. (2008). Performance of FRP bonding systems under fatigue loading. *Engineering Structures*, 30(11), 3129-3140. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2008.04.026>
- Zhou, C., Wang, L., Wang, Y., Fang, Z. (2023). Experimental study on the flexural strengthening of one-way RC slabs with end-buckled and/or externally bonded CFRP sheets. *Engineering Structures*, 282, 115832.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Zhu, J. Z. (2005). *The finite element method set its basis and fundamentals* (6^a ed.). ScienceDirect.