Vamos Jogar no Totoloto?

ANA CRISTINA BICO MATOS
CARLA HENRIQUES
Departamento de Matemática,
Escola Superior de Tecnologia de Viseu

Tendo como objectivo despertar o interesse dos alunos pelo cálculo de probabilidades, as autoras desta sessão de trabalho, pegaram num tema bem conhecido de todos, o jogo do Totoloto, e fizeram dele um tema de trabalho em probabilidades para cerca de uma hora.

As autoras começaram por despertar nos alunos a curiosidade por saber quais são as chances de ganhar o 1º, 2º, 3º, 4º e 5º prémio, no jogo do Totoloto, fazendo apenas uma aposta. Para alguns, o cálculo da probabilidade de ganhar o 1º prémio já não era novidade, mas o mesmo já não se passava no que diz respeito aos 2º, 3º, 4º e 5º prémios.

A sessão destinava-se a alunos do 12º ano de escolaridade, pois só estes dispunham das ferramentas necessárias ao cálculo das referidas probabilidades.

Foram apresentadas duas formas diferentes de fazer o cálculo das probabilidades. Numa primeira fase, abordou-se o problema sem recorrer ao cálculo combinatório, apenas fazendo uso do conceito clássico de probabilidade e da chamada regra da multiplicação. Posteriormente, resolveu-se o problema recorrendo ao cálculo combinatório.

Relembremos o conceito clássico de probabilidade: dada uma experiência aleatória com n resultados possíveis, todos equiprováveis, a probabilidade de ocorrência de um acontecimento aleatório é igual ao número de resultados favoráveis a esse acontecimento sobre n.

A regra da multiplicação, para três acontecimentos aleatórios, traduz-se da seguinte maneira:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,.\,P(B \mid A)\,.\,P(C \mid A \cap B)$$

isto é, a probabilidade da ocorrência simultânea de A, B e C, $P(A \cap B \cap C)$, é igual ao produto da probabilidade de ocorrência de A, $P(A)$, pela probabilidade de ocorrência de B sabendo que ocorreu A, $P(B|A)$, e pela probabilidade de ocorrência de C sabendo que ocorreram simultaneamente A e B, $P(C|A \cap B)$. Para n acontecimentos aleatórios a regra da multiplicação é:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\,.\,P(A_2 \mid A_1)\,.\ldots\,.\,P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Vamos então supor que fazemos apenas uma aposta no Totoloto. Para ganhar o 1º prémio é necessário acertar nos seis números sorteados.

Consideremos os seguintes acontecimentos aleatórios:

$A_1 \equiv$ "Acertar no 1º número extraído no sorteio"

$A_2 \equiv$ "Acertar no 2º número extraído no sorteio"

$\vdots$

$A_6 \equiv$ "Acertar no 6º número extraído no sorteio"

$A_S \equiv$ "Acertar no número suplementar"

Então, a probabilidade de ganhar o 1º prémio é, usando a regra da multiplicação,

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6) = \\ &\quad = P(A_1)\,.\,P(A_2 \mid A_1)\,.\,P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\,.\ldots\,.\,P(A_6 \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_5) = \\ &\quad = \frac{6}{49} \times \frac{5}{48} \times \frac{4}{47} \times \frac{3}{46} \times \frac{2}{45} \times \frac{1}{44} = \frac{1}{13983816} = 0.00000007151 \end{aligned}$$

O 2º prémio é atribuído a quem acertar em cinco números e no número suplementar, então,

$$
\begin{aligned}
P(\text{"Ganhar o 2º prémio"}) = {} & P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap \overline{A}_6 \cap A_S\right) + \\
& + P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \overline{A}_5 \cap A_6 \cap A_S\right) + \\
& + P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_S\right) + \\
& + P\left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_S\right) + \\
& + P\left(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_S\right) + \\
& + P\left(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_S\right)
\end{aligned}
$$

onde $\overline{A}_i$ representa o complementar de A_i, isto é,

$\overline{A}_i \equiv$"Não acertar no i-ésimo número extraído no sorteio".

Calculemos a primeira parcela da soma anterior.

$$
\begin{aligned}
& P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap \overline{A}_6 \cap A_S\right) = \\
& \quad = P(A_1) \,.\, P(A_2 \mid A_1) \,.\, P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \,. \\
& \qquad .\, P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) \,.\, P(A_5 \mid A_1 \cap \Lambda \cap A_4) . \\
& \qquad .\, P\left(\overline{A}_6 \mid A_1 \cap A_2 \cap \Lambda \cap A_5\right) . \\
& \qquad .\, P\left(A_S \mid A_1 \cap A_2 \cap \Lambda \cap A_5 \cap \overline{A}_6\right) \\
& \quad = \frac{6}{49} \times \frac{5}{48} \times \frac{4}{47} \times \frac{3}{46} \times \frac{2}{45} \times \frac{43}{44} \times \frac{1}{43}
\end{aligned}
$$

Como facilmente se pode verificar todas as restantes parcelas têm o mesmo valor, donde,

$$P(\text{"Ganhar o 2º prémio"}) = 6\times\left(\frac{6}{49}\times\frac{5}{48}\times\frac{4}{47}\times\frac{3}{46}\times\frac{2}{45}\times\frac{43}{44}\times\frac{1}{43}\right)=$$

$$=\frac{6}{13983816}=0.000000429.$$

O 3º prémio vai para quem acertar em cinco números sorteados e não acertar no número suplementar. Então,

$$\begin{aligned}P(\text{"Ganhar o 3º prémio"}) = {} & P\left(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5\cap \overline{A}_6\cap \overline{A}_S\right)+\\ & +P\left(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap \overline{A}_5\cap A_6\cap \overline{A}_S\right)+\\ & +P\left(A_1\cap A_2\cap A_3\cap \overline{A}_4\cap A_5\cap A_6\cap \overline{A}_S\right)+\\ & +P\left(A_1\cap A_2\cap \overline{A}_3\cap A_4\cap A_5\cap A_6\cap \overline{A}_S\right)+\\ & +P\left(A_1\cap \overline{A}_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5\cap A_6\cap \overline{A}_S\right)+\\ & +P\left(\overline{A}_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5\cap A_6\cap \overline{A}_S\right)\end{aligned}$$

Tal como anteriormente, todas as parcelas têm o mesmo valor, donde

$$P(\text{"Ganhar o 3º prémio"}) = 6\times\left(\frac{6}{49}\times\frac{5}{48}\times\frac{4}{47}\times\frac{3}{46}\times\frac{2}{45}\times\frac{43}{44}\times\frac{42}{43}\right)$$

$$= 0.000018.$$

Para calcular a probabilidade de ganhar o 4º ou o 5º prémio, o raciocínio é semelhante.

- $P(\text{"Ganhar o 4º prémio"}) = P(\text{"Acertar em quatro números sorteados"}) =$

$$\begin{aligned} = {} & P\left(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap \overline{A}_5\cap \overline{A}_6\right)+\\ & +P\left(A_1\cap A_2\cap A_3\cap \overline{A}_4\cap A_5\cap \overline{A}_6\right)+\\ & +P\left(A_1\cap A_2\cap \overline{A}_3\cap A_4\cap A_5\cap \overline{A}_6\right)+\Lambda\ +\\ & +P\left(\overline{A}_1\cap \overline{A}_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5\cap A_6\right)\end{aligned}$$

O número de parcelas na soma anterior é C_2^6 (combinações de seis dois a dois). Assim,

$$P(\text{"Ganhar o 4º prémio"}) = C_2^6 \times \left(\frac{6}{49} \times \frac{5}{48} \times \frac{4}{47} \times \frac{3}{46} \times \frac{43}{45} \times \frac{42}{44} \right) =$$

$$= 0.000969.$$

• $P(\text{"Ganhar o 5º prémio"}) = P(\text{"Acertar em três números sorteados"}) =$

$$\begin{aligned} &= P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4 \cap \overline{A}_5 \cap \overline{A}_6\right) + \\ &\quad + P\left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4 \cap A_5 \cap \overline{A}_6\right) + \\ &\quad + P\left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4 \cap \overline{A}_5 \cap \overline{A}_6\right) + \Lambda + \\ &\quad + P\left(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6\right). \end{aligned}$$

Agora temos C_3^6 parcelas, logo

$$P(\text{"Ganhar o 5º prémio"}) = C_3^6 \times \left(\frac{6}{49} \times \frac{5}{48} \times \frac{4}{47} \times \frac{43}{46} \times \frac{42}{45} \times \frac{41}{44} \right) =$$

$$= 0.001765.$$

As mesmas probabilidades podem ser calculados usando cálculo combinatório. O número de resultados possíveis na extracção dos números do Totoloto é $C_6^{49} \times 43$, sendo C_6^{49}, as possibilidades para os primeiros seis números sorteados, e 43 as possibilidades para o número suplementar. Então,

$$P(\text{"Ganhar o 1º prémio"}) = \frac{43}{C_6^{49} \times 43} = 0.00000007151;$$

$$P(\text{"Ganhar o 2º prémio"}) = \frac{6 \times 43}{C_6^{49} \times 43} = 0.000000429;$$

$$P(\text{"Ganhar o 3º prémio"}) = \frac{6 \times 42 \times 43}{C_6^{49} \times 43} = 0.000018\,;$$

$$P(\text{"Ganhar o 4º prémio"}) = \frac{C_2^{6} \times C_2^{43} \times 43}{C_6^{49} \times 43} = 0.000969\,;$$

$$P(\text{"Ganhar o 5º prémio"}) = \frac{C_3^{6} \times C_3^{43} \times 43}{C_6^{49} \times 43} = 0.01765\,.$$

Assim, os alunos tomaram contacto com uma das inúmeras aplicações práticas do cálculo de probabilidades e sentiram a flexibilidade do mesmo, constatando que por dois processos diferentes se chegam aos mesmos resultados.