



**Politécnico  
de Viseu**

Escola Superior de  
Educação de Viseu

## **Materiais didáticos na aprendizagem da Matemática**

Vera Lúcia Costa Santos

Mestrado em Ensino do 1.º CEB e Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB

Trabalho efetuado sob a orientação de  
Professora Doutora Helena Vasconcelos Gomes  
Professora Doutora Ana Patrícia Martins

Viseu, junho de 2021



INSTITUTO POLITÉCNICO DE VISEU

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE VISEU

### DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE CIENTÍFICA

Vera Lúcia Costa Santos, n.º 11675 do curso de Mestrado em Ensino do 1.º CEB e de Matemática e Ciências Naturais do 2.º CEB declara sob compromisso de honra, que o Projeto Final é inédito e foi especialmente escrito para este efeito.

Viseu, 18/6/2021

O aluno, Vera Lúcia Costa Santos

*“Ensinar não é transferir conhecimento,  
mas criar as possibilidades para a sua  
própria produção ou a sua construção”.*

**(Paulo Freire)**

## **AGRADECIMENTOS**

A realização do presente Relatório Final de Estágio reflete uma fase muito especial na minha vida, pois não só significa a conclusão de um ciclo acadêmico, como também a concretização de uma meta pessoal bastante marcante para mim. Por isso, importa agradecer a um conjunto de pessoas que se tornaram essenciais no seu desenvolvimento, pelo seu apoio, carinho, orientações e sugestões.

A Deus, pela força e coragem para lutar pelos meus objetivos, pois foi Ele quem guiou o meu caminho até aqui e permitiu que este sonho se tornasse realidade.

Aos meus pais e ao meu namorado, por me terem apoiado nesta “caminhada” de cinco anos, sempre me dando todo o suporte e apoio necessários do início ao fim. Sem o vosso incondicional apoio, carinho, amor e atenção, nada seria possível. Obrigada por terem sido incansáveis, pelas palavras de conforto e encorajamento e por terem acreditado sempre em mim!

À avó Maria e ao avô Armando, que, infelizmente, não me viram concluir esta etapa da minha vida, mas, onde quer que estejam, sei que continuam a torcer muito por mim...

A todos os professores que me acompanharam estes anos, na Licenciatura em Educação Básica e no Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) e em Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB, que contribuíram para a minha formação académica, profissional e, também, pessoal e que sempre me auxiliaram em todos os momentos.

Às professoras cooperantes e às assistentes operacionais por me terem feito sentir parte da equipa, por todas as aprendizagens que partilharam. Foram, sem dúvida, experiências muito enriquecedoras e que contribuíram positivamente para a construção da minha identidade profissional.

Aos alunos que se cruzaram nesta “caminhada” comigo e que, também, me acolheram sempre muito bem, com quem aprendi, partilhei conhecimento e que fizeram com que eu tivesse a certeza de que esta é a profissão que quero exercer.

Aos amigos e colegas, pela amizade, pelo incentivo e pelo apoio prestado.

A todos, e por tudo, o meu muito obrigada!

## RESUMO

O presente relatório final de estágio foi realizado no âmbito do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB e pretende apresentar o trabalho desenvolvido nas unidades curriculares das Práticas de Ensino Supervisionadas desenvolvidas em ambos os ciclos, assim como o projeto de investigação na área disciplinar de Matemática, no âmbito do 2.º CEB.

Este projeto de investigação teve como foco o ensino-aprendizagem da Matemática apresentando como questão problema *Em que medida o recurso a materiais didáticos no ensino da Matemática no 2.º CEB potencia aprendizagens significativas?*, tendo como objetivos identificar as potencialidades do uso de barras de Cuisenaire, tangram, espelhos, mira, papel vegetal e torre de Hanói, no ensino-aprendizagem da Matemática no 2.º CEB e conceber tarefas matemáticas com recurso a materiais didáticos que sejam potenciadoras de aprendizagens significativas.

A partir da revisão detalhada da literatura sobre o tema, criou-se e analisou-se um conjunto de tarefas matemáticas, com recurso a materiais didáticos, apresentando-se propostas de roteiros numa perspetiva de ensino exploratório, sendo o público-alvo alunos do 2.º CEB.

O estudo trata-se de uma Investigação Baseada em Design (IBD), apoiando-se numa experiência de prática pedagógica. Esta metodologia parte de uma hipótese, tratando-se neste caso da questão problema já mencionada anteriormente, à qual a investigação pretende dar resposta.

As tarefas matemáticas construídas com base no ensino exploratório e com recurso a materiais didáticos, designadamente barras de Cuisenaire, tangram, espelhos, mira, papel vegetal e torre de Hanói, permitiram concluir que o uso de materiais didáticos é potenciador de aprendizagens significativas.

As barras de Cuisenaire e o tangram apresentam potencialidades para trabalhar os números racionais não negativos. Todavia a tarefa apresentada com recurso às barras de Cuisenaire aborda o sentido da fração como relação parte-todo e medida, enquanto que a tarefa em que se utiliza o tangram trabalha-se o sentido da fração como medida. A tarefa com recurso a espelhos, mira e papel vegetal revelou potenciar aprendizagens significativas ao nível das isometrias do plano, nomeadamente nas simetrias de reflexão e rotação. Também, a tarefa apresentada com recurso à torre de Hanói demonstrou proporcionar aprendizagens significativas nos conteúdos das sequências e regularidades e potências de expoente natural. As tarefas matemáticas apresentadas neste trabalho com utilização dos materiais didáticos potenciam aprendizagens significativas, dado o material facilitar a abordagem dos conteúdos curriculares, promover o trabalho em grupo e proporcionar ainda as discussões matemáticas coletivas, sendo estes aspetos caracterizadores do ensino exploratório.

**Palavras-Chave:** Materiais didáticos, Ensino exploratório da Matemática, Aprendizagens significativas, 2.º CEB.

## ABSTRACT

This final internship report was made within the scope of the Master's in Teaching the 1<sup>st</sup> Cycle of Basic Education, and of Maths and Natural Sciences in the 2<sup>nd</sup> Cycle of Basic Education and intends to present the work developed in the curricular units of Supervised Teaching Practice, developed in both cycles, as well as the research project in the disciplinary area of mathematics, within the 2<sup>nd</sup> Cycle of Basic Education.

This research project focused on the teaching and learning of mathematics, with the problem question *To what extent the use of didactic materials in the teaching of mathematics in the 2<sup>nd</sup> Cycle of Basic Education promotes significant learning?*, Its goals were to identify the potential of using Cuisenaire rods, tangram, mirrors, crosshairs, tracing paper and tower of Hanói, in the teaching and learning of mathematics in the 2<sup>nd</sup> Cycle of Basic Education and to design mathematical tasks using didactic materials that promote significant learning.

Based on the detailed literature review on the subject, a set of mathematical tasks was created and analysed, using didactic materials, presenting proposals for roadmaps in an exploratory teaching perspective, being the target audience the 2<sup>nd</sup> Cycle of Basic Education.

The study is a Design-Based Research based on a pedagogical practice experience. This methodology is based on a hypothesis, in this case the problem question mentioned above, to which the research aims to answer.

The mathematical tasks based on exploratory teaching and using teaching materials, namely Cuisenaire rods, tangram, mirrors, crosshairs, tracing paper and tower of Hanói, led to the conclusion that the use of teaching materials promotes significant learning.

The Cuisenaire rods and tangram have the potential to work with non-negative rational numbers. However, the task presented using Cuisenaire rods addresses the meaning of fraction as part-whole relationship and measure, while the task using tangram works the meaning of fraction as measure. The task using mirrors, crosshairs and tracing paper proved to enhance significant learning at the level of plane isometries, namely in reflection and rotation symmetries. Moreover, the task using the tower of Hanói provided significant learning in the contents of sequences and regularities and powers of natural exponent.

The mathematical tasks included in this essay with the use of didactic materials enhance significant learning, since the material facilitates the approach to curriculum content, promotes workgroup, and also provides collective mathematical discussions, which are characteristic aspects of exploratory teaching.

**Keywords:** Didactic materials, Exploratory teaching of maths, Significant learning, 2<sup>nd</sup> Cycle of Basic Education.

## Índice

Introdução geral .....	1
Parte I - Reflexão crítica sobre as práticas em contexto .....	2
1. Nota introdutória.....	2
2. Contextualização dos estágios desenvolvidos.....	3
2.1. Contexto do 1.º CEB .....	3
3. Apreciação crítica das competências desenvolvidas .....	6
3.1. No 1.º CEB.....	6
3.2. No 2.º CEB.....	9
4. Síntese global .....	11
Parte II – Trabalho de Investigação .....	13
1. Nota Introdutória .....	13
2. Definição do problema.....	13
2.1. Enunciado do problema e objetivos do estudo .....	13
2.2. Justificação e relevância do estudo .....	13
3. Revisão da literatura .....	14
3.1. Materiais didáticos no ensino .....	15
3.1.1. Materiais estruturados e materiais não estruturados .....	17
3.1.2. Materiais didáticos no ensino-aprendizagem da Matemática.....	18
3.1.2.1. Estudos empíricos centrados na utilização de materiais didáticos no ensino-aprendizagem da Matemática .....	19
3.1.3. Materiais didáticos usados no design da experiência de ensino.....	22
3.1.3.1. Potencial didático e limitações dos materiais didáticos usados no design da experiência de ensino.....	25
3.1.3.1.1. Barras de Cuisenaire .....	28
3.1.3.1.2. Tangram .....	29
3.1.3.1.3. Mira, espelhos e papel vegetal .....	31
3.1.3.1.4. Torre de Hanói.....	32
3.2. Aprendizagens significativas .....	33
3.2.1. Papel do professor e dos alunos .....	35
3.2.2. Comunicação na sala de aula de Matemática .....	36
3.2.3. Planificação para aulas de ensino exploratório.....	40
3.3. Ensino exploratório na aula de Matemática .....	43
4. Metodologia.....	45
5. Propostas de trabalho para a sala de aula de Matemática envolvendo materiais didáticos .....	47
5.1. Nota introdutória.....	47
5.2. Barras de Cuisenaire.....	48
5.3. Tangram.....	63
5.4. Mira, espelhos e papel vegetal .....	78

5.5 Torre de Hanói .....	92
Conclusões do estudo.....	101
Considerações finais .....	105
Referências Bibliográficas .....	107

## Introdução geral

O presente Relatório Final de Estágio teve por base o trabalho desenvolvido nas Práticas de Ensino Supervisionadas no 1.º CEB I e II e Prática de Ensino Supervisionada em Matemática e ciências Naturais no 2.º CEB I e II. A prática profissional permite aproximar do que realmente é ser professor, em vários anos de escolaridade, pois o Mestrado em Ensino do 1.º CEB e Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB forma profissionais com conhecimentos e competências para lecionar, tanto no 1.º CEB como no 2.º CEB. Além de permitir vivenciar várias situações, aprimoraram-se as planificações, estratégias de ensino ou materiais que apoiaram as práticas. Este relatório inclui, ainda, a realização de um estudo sobre estas mesmas práticas. Neste sentido, pretende-se saber *"Em que medida o recurso a materiais didáticos no ensino da Matemática no 2.º CEB potencia aprendizagens significativas?"*

Este Relatório Final de Estágio intitula-se "Materiais didáticos na aprendizagem da Matemática", estando dividido em duas partes.

Na primeira, faz-se alusão às práticas desenvolvidas em todas as Práticas de Ensino Supervisionadas ao longo dos dois anos de Mestrado em Ensino do 1.º CEB e Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB. Nesta secção apresenta-se uma breve contextualização dos estágios desenvolvidos ao nível do 1.º e 2.º CEB, bem como uma apreciação crítica das competências desenvolvidas baseadas na análise das competências e conhecimentos profissionais desenvolvidos, tendo por base os "Padrões de Desempenho Docente". Para terminar a primeira parte, faz-se uma síntese global da reflexão, onde se evidenciam aspetos comuns ao 1.º e 2.º CEB. Esta reflexão permitiu verificar a evolução enquanto profissional, as dificuldades que foram sendo sentidas e como foram ultrapassadas.

A segunda parte é composta pelo trabalho de investigação.

Primeiramente, contextualiza-se o problema, justifica-se a sua pertinência e definem-se os objetivos que orientaram este estudo. Posteriormente, faz-se uma revisão da literatura, sendo apresentada a metodologia, propostas de trabalho para a sala de aula em Matemática envolvendo materiais didáticos, nomeadamente com as barras de Cuisenaire, tangram, espelhos, mira, papel vegetal e torre de Hanói.

O relatório termina com as conclusões do estudo e considerações finais, onde se evidencia o trabalho efetuado ao longo destes anos e se reflete sobre toda esta jornada e ainda sobre a importância da formação para o futuro profissional.

## **Parte I - Reflexão crítica sobre as práticas em contexto**

### **1. Nota introdutória**

As Práticas de Ensino Supervisionadas são as unidades curriculares que mais se aproximam da vivência do que realmente um profissional da docência realiza, não descurando as outras unidades curriculares, que também são uma mais valia, dado que facultam os conhecimentos científicos necessários e essenciais para a prática de docência. Para além disto permite contactar com diferentes escolas, agrupamentos, professores cooperantes, alunos e conhecer as orientações curriculares em vigor (neste caso, “Programa e Metas Curriculares” e “Aprendizagens Essenciais”). Efetivamente, as Práticas de Ensino Supervisionadas potenciam uma reflexão sobre as ações, metodologias, interações, ao mesmo tempo que desenvolvem a capacidade de planificar, preparar e mobilizar materiais necessários para auxiliar as práticas de ensino. A profissão docente exige que o profissional reflita sobre o seu trabalho, que repense a sua atitude relativamente ao processo de ensino-aprendizagem, para que, assim, possa evoluir e melhorar a sua prática de ensino.

Do mesmo modo, a formação contínua é uma dimensão importante para a carreira docente, auxiliando o professor, para que se atualize e responda às solicitações cada vez maiores que decorrem das constantes mudanças educativas e sociais.

Esta parte do relatório encontra-se dividida em dois pontos, onde, inicialmente, se caracterizam os contextos de estágio e, seguidamente, se analisam criticamente as práticas e as competências desenvolvidas em ambos os ciclos de ensino, que ocorreram no primeiro e segundo ano do Mestrado em Ensino do 1.º CEB e Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB.

É absolutamente fundamental o conhecimento do contexto em que se vai concretizar a Prática de Ensino Supervisionada, pelo que, seguidamente, se faz a sua caracterização. Clarifica-se que a Prática de Ensino Supervisionada ocorreu em quatro semestres. No 1.º CEB a Prática de Ensino Supervisionada no 1º CEB I e II) desenvolveu-se em anos de escolaridade diferentes e em agrupamentos de escolas diferentes. Por sua vez, no 2.º CEB a Prática de Ensino Supervisionada em Matemática e Ciências Naturais no 2º CEB I e II ocorreu com os mesmos alunos e com a mesma professora cooperante. Por fim, apresenta-se uma apreciação crítica das competências desenvolvidas, bem como uma síntese global.

## **2. Contextualização dos estágios desenvolvidos**

### **2.1. Contexto do 1.º CEB**

As unidades curriculares Prática de Ensino Supervisionada no 1.º CEB I e Prática de Ensino Supervisionada no 1.º CEB II ocorreram em anos de escolaridade diferentes, bem como agrupamentos de escolas e professoras cooperantes distintas. Nestas instituições de ensino foi possível contactar com os documentos de que cada agrupamento dispõe, como, por exemplo, o “Projeto Educativo”, o “Regulamento Interno”, o “Plano Anual de Atividades”, as planificações mensais e o “Plano de Turma” (PT).

No 1.º semestre, houve oportunidade de contactar com uma turma do 3.º ano de escolaridade, numa escola da zona urbana de Viseu. A turma era constituída por 19 alunos, sendo composta por 11 do sexo masculino e 8 do sexo feminino, com idades compreendidas entre os 8 e os 9 anos de idade.

A turma em questão era heterogénea, com ritmos de aprendizagem diversificados, onde, para além da professora titular de turma, por vezes se encontrava uma professora de apoio para auxiliar e apoiar os alunos com mais dificuldades. Através da análise do PT, foi possível observar a existência de 4 alunos com apoio educativo, 1 aluno com Necessidades de Saúde Especiais (NSE) e com adequações no processo de avaliação. Nesta turma, 10 alunos estavam inscritos em Educação Moral Religiosa Católica (EMRC), 8 em atividades lúdico expressivas, 8 em atividade física e desportiva e todos estavam inscritos em inglês, atividade experimental e conhecimento do meio.

Relativamente ao horário de lecionação desta turma, as aulas iniciavam às 9h00 e terminavam às 16h00, tendo um período de recreio, entre as 10h45 e as 11h15, bem como um período de almoço, das 12h30 até às 14h00. Durante as duas semanas de observação, contactou-se com as metodologias e estratégias utilizadas pela professora cooperante e conheceu-se a turma. Posteriormente, a lecionação ocorreu dois dias por semana (segunda-feira e terça-feira).

O ambiente vivido na sala de aula era potenciador do processo de ensino-aprendizagem, onde os alunos podiam intervir e colocar as suas questões/dúvidas, sempre que considerassem pertinente. Para além disso, a professora cooperante usava alguns materiais didáticos que auxiliavam no processo de ensino-aprendizagem. Os alunos desta turma eram pouco autónomos, uma vez que necessitavam de ajuda, na maioria das vezes, como por exemplo, numa simples construção de uma tabela. No entanto, eram bastante participativos e curiosos.

Estes alunos comunicavam de forma clara, sendo uma turma com bom aproveitamento escolar, apesar de ter alguns elementos mais distraídos. A professora cooperante dava mais importância às áreas disciplinares de Matemática, Português e Estudo do Meio, não dando tanta relevância à área das Expressões.

No 2.º semestre, contactou-se com a turma do 1.º ano de escolaridade, numa escola, também, da zona urbana de Viseu. A turma era constituída por 24 alunos, em que 12 eram do sexo masculino e 12 do sexo feminino, com idades entre os 6 e os 8 anos de idade.

Tal como sucedeu com a turma do 3.º ano, também este grupo de alunos era bastante heterogéneo, fator que se refletia, por exemplo, na autonomia durante a execução de tarefas ou nos diferentes ritmos de trabalho. Por essa razão, os alunos com maiores dificuldades tinham ao seu dispor uma professora de apoio.

Após a consulta do PT, foi perceptível que este documento se encontrava ainda incompleto, por ser a primeira vez que a professora titular contactava com esta turma. Ainda assim, de entre os dados disponíveis,

destacou-se apenas um aluno com NSE, com adequações no processo de avaliação. Por essa razão, usufruía de apoio individualizado prestado por uma professora de apoio.

As aulas desta turma iniciavam às 9h00 e terminavam às 16h00, tendo uma pausa para recreio entre as 10h30 e as 11h00. O período de almoço decorria das 12h00 até às 14h00. Durante a fase de observação, cuja duração foi duas semanas, teve-se o cuidado de examinar as práticas pedagógicas da professora titular e, simultaneamente, conhecer a turma. Estes aspetos revelaram-se de extrema importância para o período de lecionação que se seguiu e que ocorreu durante três dias por semana (segunda-feira, terça-feira e quarta-feira).

Os alunos desta turma respeitavam-se e partilhavam os seus materiais escolares, porém, verificou-se que, sendo alunos do 1.º ano de escolaridade, nem sempre cumpriam as regras de comportamento, levantando-se quando queriam e, por vezes, interrompendo a palavra de alguém que estivesse a falar, ou falando ao mesmo tempo. O esforço docente conjunto foi determinante para alterar estes hábitos, nomeadamente recorrendo a estratégias simples como levar o aluno a colocar-se no lugar do “outro”, sendo importante o respeito e saber ouvir.

A turma em questão era sociável e maioritariamente assídua e pontual. Contrariamente aos alunos do 3.º ano de escolaridade, estes, apesar de frequentarem apenas o 1.º ano de escolaridade, eram bastante autónomos, o que surpreendeu pela positiva.

A professora cooperante pretendeu criar um ambiente em que todos partilhassem e discutissem ideias, trabalhassem em grupo, colaborassem, permitindo assim o desenvolvimento harmonioso da personalidade, incrementando as capacidades dos alunos, fomentando a autonomia e o gosto pelo saber.

Globalmente, a turma tinha bom aproveitamento escolar, apesar de denotarem algumas dificuldades na área disciplinar de Português, quer no desenvolvimento da escrita e da leitura, quer no reconhecimento de alguns grafemas já trabalhados nas aulas. No entanto, no fim do período, foi notória a evolução de alguns alunos na leitura. Contudo, no processo de escrita, poucos eram aqueles que conseguiam escrever frases mais complexas, envolvendo mais do que uma ideia. Alguns apresentavam ter destreza manual, nomeadamente na escrita dos grafismos, pintura e recorte. Outros evidenciavam lacunas ao nível da sua lateralidade e localização espaço-temporal.

A criatividade, o empenho, a participação e a curiosidade foram, talvez, as qualidades que mais sobressaíram nestes alunos, e que foram notórias sempre que era proposta uma atividade em grupo, onde não havia a “confusão” experienciada com a turma do 3.º ano.

No 1.º CEB a interdisciplinaridade era mais notória do que no 2.º CEB, o que resultou numa maior dificuldade neste último ciclo de estudos, porque não havia tanta articulação de conteúdos entre as áreas disciplinares de Matemática e Ciências Naturais.

### **Contexto do 2.º CEB**

A Prática de Ensino Supervisionada em Matemática e Ciências Naturais no 2º CEB I e II ocorreu no 2.º CEB, numa turma do 6.º ano de escolaridade, numa escola da zona urbana de Viseu. A turma era constituída por 25 alunos, 11 do sexo masculino e 14 do sexo feminino, com idades compreendidas entre os 10 e os 14 anos de idade.

No momento em que a professora cooperante fez a diagnose da turma, salientou que era um grupo

bastante heterogéneo e com um rendimento académico baixo. Os alunos necessitavam de desenvolver ritmo de trabalho e autonomia, pois, apesar de serem oriundos de famílias de classe média-alta, não tiravam partido desse aspeto facilitador da aprendizagem.

Da análise do PT, não foi possível concluir quantos alunos usufruíam de apoio educativo, no entanto, através da observação, percebeu-se que alguns alunos frequentavam o apoio a Matemática e Ciências Naturais, para ultrapassarem as suas dificuldades. Cinco alunos apresentavam um percurso escolar marcado por retenções, nomeadamente 2 no 3.º ano de escolaridade, 1 no 4.º ano de escolaridade, 1 no 5.º ano de escolaridade e 1 no 6.º ano de escolaridade. Abrangidos pelo Decreto-Lei n.º 3/2008, de 7 de janeiro, encontravam-se 2 alunos. Nenhum aluno estava inscrito em EMRC.

No PT existia um espaço destinado ao registo das expectativas académicas/profissionais dos alunos, observando-se que 18 alunos pretendiam prosseguir os estudos e 7 alunos ainda não sabiam que profissão queriam exercer no futuro. As expectativas profissionais futuras dos rapazes estavam direcionadas para o desporto (futebolistas); um aluno respondeu que queria ser mecânico e outro paleontólogo. Relativamente às raparigas, só uma respondeu, dizendo que queria ser hoteleira e as restantes referiram que ainda não sabiam. Globalmente, são evidentes dificuldades na expressão e compreensão orais e escritas, bem como falta de métodos de estudo e hábitos de trabalho.

O horário de lecionação da área disciplinar de Matemática nesta turma era à segunda-feira e quarta-feira, das 8h15 às 10h05, e à quinta-feira das 8h15 às 9h05. No que concerne à área disciplinar de Ciências Naturais, o mesmo ocorria à segunda-feira, das 11h20 às 12h10, e à quinta-feira, das 9h15 às 10h05.

A professora cooperante, conhecedora dos seus alunos, criou um ambiente dinâmico e motivador, procurando, desse modo, favorecer a aprendizagem. Para isso foram importantes os momentos em que os alunos puderam intervir e esclarecer as suas dúvidas, formulando questões e tomando decisões.

Ao longo do 1.º semestre, a turma revelou-se pouco sociável, o que levou a que se criasse a ideia de que era uma turma “pouco simpática”. No entanto, apesar do contacto no 2.º semestre ter sido mais reduzido, os alunos mostraram-se mais participativos, mais à vontade, tendo havido uma melhoria nas relações interpessoais.

Na generalidade, os alunos desta turma eram pouco autónomos, uma vez que necessitavam de ajuda, na maioria das vezes, na resolução de tarefas, esperavam que a resolução das mesmas fosse feita no quadro, para copiarem para o caderno, ao invés de as tentarem realizar sozinhos.

Durante a prática pedagógica, sempre que possível, tentou-se partir de situações que fossem familiares e próximas da realidade dos alunos, para que os conteúdos não se afigurassem tão difíceis de compreender, aproveitando o conhecimento prévio dos alunos, recorrendo, também, a alguns materiais didáticos.

A professora cooperante e as professoras supervisoras tiveram um papel imprescindível, dado que prestaram um auxílio inestimável em qualquer dúvida que surgisse, quer ao nível das planificações ou das dinamizações, quer nas reflexões semanais. Caso tivessem observado a aula, evidenciavam os pontos fortes da intervenção, o que poderia ter sido melhorado, dando sugestões, em tempo útil, para futuras intervenções.

No decorrer das práticas de ensino vivenciaram-se situações que permitiram desenvolver algumas competências enquanto futura profissional da área da docência. Posteriormente, apresentar-se-á uma breve

apreciação crítica, baseada nos “Padrões de Desempenho Docente” que se encontram divididos em quatro dimensões.

### **3. Apreciação crítica das competências desenvolvidas**

Ao definir um perfil geral de desempenho profissional não se está a avaliar, nem a determinar, a ação do docente, mas sim a dar orientações para refletir sobre o seu desempenho e, assim, poder enriquecer a sua prática profissional.

O ato de levar um professor a refletir é bastante importante, pois só com a reflexão se pode melhorar a prática pedagógica, partilhando conhecimentos, proporcionando aprendizagens significativas para os alunos, motivando-os para o processo de ensino-aprendizagem. Efetivamente, a partilha de conhecimento foi fundamental, pois também se aprendeu muito com os alunos e todos os momentos foram determinantes para o desenvolvimento profissional.

O profissional de educação, na sua prática, depara-se com situações muito diversificadas e específicas que exigem conhecimento científico e didático amplo e diversificado. Assim, tem de ter capacidade de questionamento, análise e reflexão, na medida em que, ao tomar consciência de si, da sua ação e da sua prática, pode mudar as suas intenções e a sua prática de ensino (Cunha, 2008).

Ser professor reflexivo é benéfico, pois esta capacidade liberta-o do comportamento rotineiro, capacita-o para agir de maneira deliberada, melhorando assim a prática de ensino e motivando os alunos. A reflexão crítica permanente deve ser uma prioridade que se reflete na procura de formação contínua para mudar as suas práticas.

De acordo com Perrenoud (1993), o professor confronta-se diariamente com inúmeras questões às quais tem de fazer face em tempo útil, não dispondo, muitas vezes, de tempo ou meios para pesar os prós e contras das suas decisões. Isso deixa-o com um certo sentimento de insatisfação, fazendo-o pensar se a escolha que fez terá sido a mais acertada naquele contexto.

Neste sentido, e tendo em atenção o pensamento crítico reflexivo, bem como os “Padrões de Desempenho Docente” que se encontram divididos em quatro dimensões (vertente profissional, social e ética; desenvolvimento do ensino e da aprendizagem; participação na escola e relação com a comunidade educativa; e desenvolvimento e formação profissional ao longo da vida), apresenta-se uma análise das práticas ocorridas no 1.º e 2.º CEB.

#### **3.1. No 1.º CEB**

Tanto a Prática de Ensino Supervisionada no 1.º CEB I como a Prática de Ensino Supervisionada no 1.º CEB II implementaram-se no 1.º CEB em anos de escolaridade diferentes, sendo que a Prática de Ensino Supervisionada no 1.º CEB I foi com alunos do 3.º ano de escolaridade e a Prática de Ensino Supervisionada no 1.º CEB II com alunos do 1.º ano de escolaridade. Esta unidade curricular é essencial para evolução pessoal e profissional, permitindo aprimorar um leque de aspetos essenciais para a profissão.

Estes estágios proporcionaram experiências riquíssimas e até surpreendentes. Por exemplo, ao nível do 1.º ano, alunos que estavam a adquirir métodos de trabalho, a iniciar o processo de leitura e escrita, em que tudo era novo para eles, conseguiam ser mais autónomos e independentes do que os alunos do 3.º ano de escolaridade.

Várias pessoas contribuíram para que os estágios fossem desenvolvidos com sucesso. Por um lado, as professoras cooperantes davam sugestões para os conteúdos a serem lecionados, bem como viam sempre os materiais enviados, de modo a poderem efetuar alterações, caso fosse necessário. Por outro lado, os professores supervisores da Escola Superior de Educação de Viseu (ESEV) que sempre se mostraram disponíveis para ajudar a esclarecer qualquer dúvida que surgisse (conteúdos, planificações, sugestões de melhoramento). Por último, mas não menos importante, salienta-se o acolhimento e a receção extraordinários por parte dos alunos, sempre receptivos e curiosos, com vontade de aprender.

Foi na Prática de Ensino Supervisionada no 1.º CEB I que se experienciou o primeiro impacto com o ato de planificar e se compreendeu a importância que este tem na prática profissional. Com efeito, são as planificações que orientam a aula, não sendo estanques e, por esse motivo, foram sofrendo alterações de acordo com as situações que iam surgindo ao longo das aulas. Nas planificações teve-se em consideração a necessidade e os interesses dos alunos, de modo a que se lhes proporcionassem aprendizagens significativas.

Neste ciclo de ensino, é fulcral a interdisciplinaridade entre todas as áreas disciplinares, sendo que, no início, se sentiram algumas dificuldades neste âmbito, porém, este aspeto foi sendo melhorado. As planificações construíram-se de forma cada vez mais precisa, rigorosa, coerente e flexível. Inicialmente, a planificação era seguida à risca. Todavia, sempre que se verificava questionamento por parte dos alunos, havia a perceção de que não faria grande sentido prosseguir a aula sem qualquer desvio à planificação. Assim, foi ficando clara a ideia de que esta é o ponto de partida, mas pode admitir adaptações e, por isso, deve ser flexível. Ainda no que concerne à tarefa de planificar, outro constrangimento sentido teve a ver com a duração das atividades propostas. Embora os objetivos estivessem de acordo com essas mesmas atividades, a verdade é que, por vezes, essa planificação era ambiciosa e o tempo disponibilizado para as tarefas não era suficiente.

Relativamente à preparação das aulas, todo o processo foi feito em grupo, onde as professoras cooperantes, no final de cada semana, apresentavam os conteúdos que teriam de ser trabalhados com os alunos. O grupo discutia ideias para a construção das planificações e dos materiais necessários para uma melhor compreensão dos conteúdos. Estes materiais visavam a motivação dos alunos e uma interação mais lúdica com a turma, tornando as aprendizagens mais significativas. Neste âmbito, merece destaque o caso de um aluno com problemas ao nível do sistema nervoso central que tinha muitas dificuldades de aprendizagem. Sempre que eram utilizados materiais didáticos, isso fazia com que o aluno se focasse na atividade, manifestando fascínio e interesse pelos conteúdos trabalhados.

Considera-se que os materiais realizados estiveram de acordo com os conteúdos a serem trabalhados, bem como com o objetivo de levar os alunos a ser mais ativos no processo de ensino-aprendizagem, ou seja, os materiais permitiam interação, havendo dinâmica nas aulas. Para isso utilizaram-se vídeos e jogos existentes na plataforma Escola Virtual, fizeram-se cartazes com destacáveis, apresentações de diapositivos digitais, jogos em equipas, jogos de pares, fantoches, dramatizações, manuseamento de materiais didáticos, tais como, tangram, berlindes, geoplano, tablets utilizando a plataforma *Kahoot*, entre outros. Numa das aulas em que tinha de ser trabalhada a grandeza dinheiro, solicitou-se aos alunos, na semana anterior, que todos os produtos que fossem acabando por casa, fossem levados para a sala, não lhes tendo sido dito o objetivo. Na semana seguinte, organizou-se um minimercado com vários setores (bolachas, lacticínios,

produtos de higiene, azeites e óleos, brinquedos, entre outros). Em cada espaço, construíram-se representações de notas e moedas de euro, bem como cartazes com informação acerca dos preços dos produtos. A turma foi organizada em pequenos grupos, constituídos de forma heterogénea tendo em conta as dificuldades dos alunos e com o objetivo de tornar os grupos mais equilibrados. Os alunos assumiam diferentes papéis, uns eram os compradores e outros os vendedores. Ao longo dessa atividade, os vendedores e os consumidores realizavam trocas comerciais entre si, havendo constantemente a manipulação de dinheiro para pagamentos e trocos. Todos os alunos experienciaram o papel de vendedor e comprador, com auxílio dos adultos presentes na sala, pois era um conteúdo lecionado recentemente. Este episódio merece especial destaque pelo excelente contributo que deu na posterior aplicação de exercícios. Efetivamente, compreenderam-nos muito bem. Uma atividade lúdica conseguiu transformar o espaço de uma clássica sala de aula num momento de aprendizagem significativa.

Durante todo o período de lecionação, houve a preocupação em percorrer toda a sala para apoiar os alunos e, dessa maneira, esclarecer possíveis dúvidas. Ao mesmo tempo, permitiu perceber se os conteúdos tinham sido compreendidos e prestar um ensino mais individualizado. O trabalho colaborativo entre os alunos foi uma constante, fomentando-se o espírito de entreajuda. Assim, quando um aluno acabasse primeiro, ajudava o colega do lado com mais dificuldades. O mesmo aconteceu em momentos de trabalho em grupo. Também se teve em consideração os conhecimentos prévios dos alunos, partindo do que estes já sabiam sobre os vários temas trabalhados.

As reflexões semanais foram um espaço privilegiado de crescimento profissional. Quer os aspetos evidenciados pela professora cooperante, quer o ponto de vista da colega, relativamente àquilo que não fora bem conseguido, permitiu melhorar. Do mesmo modo, caso houvesse lugar a aulas observadas pelos professores supervisores, essa reflexão era feita logo após a implementação na sala de aula.

Em ambos os locais de estágio houve sempre a preocupação em estabelecer uma boa relação profissional e pessoal com toda a comunidade educativa, nomeadamente com a professora cooperante, os alunos e os professores supervisores. É graças a todos eles que tudo se torna possível, pois acolhem, recebem e dispõem dos seus alunos para que os formandos se possam tornar bons profissionais.

Para Perrenoud (2002) o ato de ensinar define-se como aquele que exige uma ação urgente, através de decisões tomadas na incerteza mas que reflitam competência. Não se poderia estar mais de acordo com a posição de Perrenoud, pois um professor tem de ter um conhecimento científico sólido que se consegue também pela formação contínua, para assim estar sempre atualizado, procurando novos saberes que permitirão inovar as suas práticas.

A passagem pelo 1.º CEB permitiu a aquisição de competências científicas, didáticas e pedagógicas, fundamentais para um bom profissional. Uma das questões que se coloca a um professor que trabalha com alunos desta faixa etária é a adequação da linguagem. É um facto que existiram momentos em que se receou que, da parte dos alunos, não houvesse a compreensão dos conteúdos, quer pela forma como estavam a ser apresentados, quer pelo próprio vocabulário utilizado. Espera-se que o professor, para ensinar, tenha presentes os objetivos delineados para a aula e só depois aprofunde e pesquise os conteúdos, ao mesmo tempo que seleciona as melhores metodologias e materiais que permitam que os alunos compreendam o que está a ser trabalhado. Para além disso, é essencial que o professor domine e compreenda os conteúdos que vai trabalhar e, a partir daí, selecione a informação mais importante para partilhar com os alunos, tendo

em consideração as suas características e interesses.

Futuramente, aplicar-se-ão as aprendizagens obtidas na Prática de Ensino Supervisionada no 1.º CEB I e II e outras serão melhoradas, de modo a proporcionar aos alunos aprendizagens significativas através de atividades motivadoras. Dessa forma, estes terão gosto em saber mais e não considerarão a escola um espaço desmotivador e sem interesse, pelo contrário, entendê-la-ão como um local onde podem obter conhecimento e oportunidades para a sua vida futura. É importante salientar que o 1.º CEB é um ciclo de ensino exigente para o professor, devido a ser um regime de monodocência, que implica um conhecimento profundo dos alunos, dos conteúdos e da interdisciplinaridade entre todas as áreas disciplinares. Não esquecer, ainda, a vertente colaborativa com toda a comunidade educativa.

### **3.2. No 2.º CEB**

A PES (III e IV) ocorreu no 2.º CEB com alunos do 6.º ano de escolaridade, onde as práticas de ensino recaíram nas áreas disciplinares de Matemática e Ciências Naturais. Ao contrário do que aconteceu no 1.º CEB, no 2.º CEB tanto no 1.º semestre como no 2.º semestre manteve-se a turma de estágio, a mesma professora cooperante e a mesma escola, o que foi um aspeto facilitador, dado que já se conhecia a turma, sendo mais fácil selecionar as estratégias e métodos mais apreciadas pelos alunos da turma em questão.

Houve sempre a preocupação de fazer com que as aulas tivessem um fio condutor, recorrendo a linguagem clara e objetiva, de modo a que todos os alunos compreendessem e partilhassem conhecimento. Consideraram-se também os conhecimentos prévios dos alunos face aos conteúdos que foram lecionados, proporcionando-lhes aprendizagens significativas e promovendo a sua autonomia na construção do seu próprio saber, não esquecendo que cabe ao aluno um papel ativo na aquisição do conhecimento e das suas aprendizagens.

Nas aulas de Matemática, sempre houve lugar à realização de tarefas e exercícios, promoveu-se a sua realização a pares e em pequenos grupos de trabalho, de modo a que os alunos pudessem partilhar conhecimento e ultrapassar eventuais dificuldades. Com efeito, por vezes, a linguagem de um colega pode facilitar a compreensão de um determinado conteúdo que não tenha ficado tão bem esclarecido. Assim, considera-se que a promoção de trabalhos em grupo é uma mais valia, no sentido em que permite o desenvolvimento da comunicação matemática, a partilha de conhecimentos e o aumento da entreajuda entre os colegas da turma.

A área disciplinar de Ciências Naturais incidiu, maioritariamente, no desenvolvimento da literacia científica dos alunos. É essencial que estes utilizem corretamente os termos e sejam, assim, cidadãos que compreendam o mundo em que estão inseridos e sejam detentores de conhecimentos que façam deles pessoas esclarecidas. Mais uma vez, foram tidos em consideração os conhecimentos prévios dos alunos, pelo que se notou, frequentemente, que estes gostavam de participar e partilhar as suas vivências, sendo mais participativos nestas aulas. Nestes momentos de participação mais ativa, foi-se complementando o conhecimento do aluno, corrigindo ideias erradas que tinha sobre o tema a ser trabalhado. O trabalho de grupo, também, foi estimulado através pesquisas sobre algumas temáticas que foram abordados nas aulas.

Os alunos manifestaram interesse na partilha dos seus conhecimentos e vivências, principalmente quando se incidiu sobre os sistemas que constituem o corpo humano. Este foi um tópico de conteúdo que despertou grande interesse e entusiasmo.

O uso das tecnologias foi uma constante, pois reconhece-se que estas são um apoio no processo de ensino-aprendizagem. Por isso recorreu-se à projeção de vídeos, a apresentações em PowerPoint, ao ambiente de geometria dinâmica (AGD) *geogebra*, a pesquisas, a caixa de sólidos, entre outros.

No que concerne às duas áreas disciplinares lecionadas, é de salientar o maior à vontade sentido no âmbito das Ciências Naturais. Na realidade, foram sentidas algumas dúvidas relativas a conteúdos matemáticos que, de algum modo, condicionavam a autoconfiança. Todavia, tal constrangimento foi sendo superado e a insegurança foi vencida, facto a que não foi alheia a experiência entretanto adquirida. Neste momento, reconhece-se um reforço desta confiança, bem como o sentimento de uma melhor preparação para enfrentar as dificuldades que possam surgir, pois, como diria o poeta castelhano António Machado, “o caminho faz-se caminhando” e, com a experiência que se vai adquirindo, certos anseios vão igualmente desaparecendo.

O estágio desenvolvido permitiu perceber que um professor deve querer saber sempre mais e não se acomodar, deve-se manter em formação e atualização, relativamente aos conteúdos programáticos, mas também em relação à sociedade e ao mundo, dado que os alunos são questionadores por natureza. Do mesmo modo, a pandemia que se instalou em todo o mundo, devido ao covid-19, fez com que se sentisse a necessidade de repensar o mundo laboral, obrigando à adoção de outras metodologias que dessem continuidade ao trabalho já iniciado, independentemente de todas as adversidades possíveis.

Para além do planeamento de aulas e da leção das práticas, a professora cooperante consentiu a participação nas reuniões de avaliação de final de período, em que eram discutidas as avaliações dos alunos em todas as áreas disciplinares, bem como eram partilhadas informações importantes sobre os alunos, para que, com a colaboração de todos os professores, se pudessem discutir e objetivar métodos e estratégias que promovessem o sucesso dos alunos. Concluiu-se, nestes momentos, acerca da necessidade do trabalho colaborativo entre professores enquanto futura profissional da educação.

A professora cooperante concedeu a oportunidade de corrigir os testes de avaliação das áreas disciplinares que lecionava, bem como questões aulas da área disciplinar de Matemática e trabalhos de pesquisa na área disciplinar de Ciências Naturais. Foram momentos determinantes na perceção da complexidade e responsabilidade inerentes ao ato de avaliar.

Como no 2.º semestre apenas se lecionaram 4 semanas de aulas presenciais, sendo as restantes 9 semanas de ensino à distância, pode afirmar-se que é muito melhor estar presencialmente numa sala de aula com os alunos a partilhar conhecimento. Apesar de terem sido elaborados materiais para as duas áreas disciplinares e terem-se corrigido tarefas dos alunos, durante o ensino online não foi possível ter uma perceção real das dificuldades que os alunos tinham, nem era fácil esclarecê-los como desejável. No decorrer do ensino à distância, foram lecionadas duas aulas de microensino a Matemática e outras duas a Ciências Naturais, as quais também não tiveram o mesmo efeito de uma aula presencial. Contudo, foi a melhor maneira encontrada, para que se pudesse concluir a prática de ensino.

A experiência de leção em ambos os ciclos de ensino, que jamais será esquecida, contribuiu significativamente para a construção pessoal e profissional. Permitiu um grande envolvimento no processo de ensino-aprendizagem e perceber a importância da formação e constante atualização de conhecimento. Acresce, ainda, sublinhar que, a par da atividade de leção propriamente dita, existe uma vertente burocrática muito forte que, por vezes, ocupa grande parte do tempo do professor.

#### 4. Síntese global

As Práticas de Ensino Supervisionadas que ocorreram no 1.º CEB e no 2.º CEB revelaram-se fulcrais, pois mostraram aspetos que a profissão docente exige, permitindo o contacto e o trabalho com anos de escolaridade distintos. Numa fase inicial, observaram-se as práticas dos professores cooperantes para que houvesse uma perceção das suas metodologias e estratégias de ensino, aspeto relevante numa fase em que não se conhecem os alunos.

Após o período de observação, dinamizaram-se as práticas pedagógicas, através das quais se registou uma evolução a nível pessoal e profissional, enriquecida com uma panóplia de competências que são inerentes a um profissional da área da educação.

Outra componente presente em todas as práticas realizadas foram os momentos de reflexão porque, era dado feedback sobre os aspetos bem conseguidos e orientações específicas para os que haviam de ser melhorados. Após a partilha, foi fundamental haver um momento de introspeção individual de modo a que os mesmos erros não fossem cometidos novamente.

Considerando que as relações interpessoais são uma componente fundamental na docência, em ambos os ciclos de ensino estabeleceu-se sempre uma boa relação com os alunos, com as professoras cooperantes, com as assistentes operacionais, pois é graças a este acolhimento e receção que a experiência enquanto professora se torna possível.

Uma das maiores dificuldades sentidas prendeu-se com a interdisciplinaridade no 2.º CEB, na medida em que não havia tanta articulação dos conteúdos programáticos da área disciplinar de Matemática e Ciências Naturais, ao contrário do que acontecia no 1.º CEB, em que esta prática era feita constantemente em todas as áreas disciplinares. Tal como referenciado já anteriormente, inicialmente no 2.º CEB na área disciplinar de Matemática sentiram-se algumas inseguranças que foram sendo ultrapassadas através da partilha de conhecimentos com a colega de estágio, com a professora cooperante e com as professoras supervisoras. A passagem pelo 1.º e 2.º CEB facilitou uma melhor postura em sala de aula e uma maior confiança a nível pessoal e profissional.

Um das tarefas mais relevantes de qualquer professor é a planificação das suas aulas, as quais têm um papel imprescindível na prática pedagógica. São elas que orientam a aula, não sendo estanques e, por esse motivo, suscetíveis de sofrer alterações de acordo com as situações que surgiam ao longo das aulas. Em ambos os ciclos, na conceção das planificações foram tidas em conta as necessidades e os interesses dos alunos, pois só dessa forma se podem proporcionar aprendizagens significativas aos alunos. Zabalza (2003) refere que a planificação é importante para o sucesso educativo, onde estão presentes os aspetos da ação. O mesmo autor define ainda o ato de planificar como

converter uma ideia ou um propósito num curso de ação. Prever possíveis cursos de ação de um fenómeno e plasmar de algum modo as nossas previsões, desejos, aspirações e metas num projeto que seja capaz de representar, dentro do possível, as nossas ideias acerca das razões pelas quais desejaríamos conseguir, e como poderíamos levar a cabo, um plano para as concretizar (p. 47 e 48).

Todas as aulas lecionadas no 1.º e 2.º CEB tiveram um “fio” condutor, com linguagem clara e objetiva, respeitando os ritmos de aprendizagens dos alunos, fornecendo-lhes feedback, relativamente ao seu desempenho, com o intuito de que se sentissem motivados e melhorassem as suas aprendizagens,

destacando a boa relação estabelecida com os mesmos. As aulas decorreram a um ritmo adequado, verificando-se a compreensão de conteúdos e envolvimento dos alunos nas atividades propostas.

Em corolário, as práticas desenvolvidas foram uma mais valia em todo este processo, quer nos aspetos bons quer naqueles que foram sendo melhorados. Destaca-se o trabalho colaborativo e a boa relação estabelecida com a colega de estágio. As aulas e materiais foram preparados em conjunto de modo a proporcionar, o melhor que foi possível, aprendizagens significativas aos alunos. Roldão (2007) defende que o trabalho colaborativo é um elemento facilitador do processo de ensino-aprendizagem, porém, é necessário que cada professor disponha de métodos de trabalho individuais, para preparar e aprofundar o seu trabalho. Em todos os contextos por onde se passou houve a preocupação e o esforço para desempenhar o melhor papel, tendo como objetivo principal ensinar com a maior qualidade possível para os alunos.

Para além disso, o contacto e intervenções nas Práticas de Ensino Supervisionadas capacitaram de algum modo para a vida profissional, com ferramentas que corresponderão aos desafios que serão colocados nesta área. Não pode descurar-se a necessidade da formação contínua, na certeza de que há parâmetros que irão sendo aperfeiçoados com a experiência que o futuro trará.

Assim se conclui este momento de reflexão global, tendo por base os “Padrões do Desempenho Docente”, sobre o que foi o percurso em todas as Práticas de Ensino Supervisionadas, lembrando com um sorriso as recordações que ficam da vivência nas escolas, sendo elas muito gratificantes e inesquecíveis.

Finalizada a primeira parte deste Relatório Final de Estágio, apresenta-se de seguida o trabalho de investigação.

## **Parte II – Trabalho de Investigação**

### **1. Nota Introdutória**

Para poder concluir o Mestrado, no âmbito da unidade curricular da Prática de Ensino Supervisionada, integrada no plano de Estudos de Mestrado, foi proposta a realização de um trabalho de investigação, com uma temática pretendida. Deste modo, esta investigação incidiu na área disciplinar de Matemática, no 2.º CEB e procurou dar resposta à questão-problema *Em que medida o recurso a materiais didáticos no ensino da Matemática no 2.º CEB potencia aprendizagens significativas?*.

A temática relacionada com a utilização de materiais didáticos afigurou-se uma boa opção. Esta sustentou-se no interesse sentido relativamente ao modo como esses mesmos materiais poderiam ser uma mais valia no processo de ensino-aprendizagem de uma disciplina onde existe algum insucesso. Para além disso, já se fizera uso de alguns materiais durante as práticas realizadas no 1.º CEB. Constatou, ainda, que poucos ou nenhuns materiais didáticos eram utilizados pelas professoras cooperantes. Decidiu-se, então, que os materiais a utilizar durante a Prática de Ensino Supervisionada se baseariam em situações de ensino-aprendizagem no domínio de Geometria e Medida, Números e Operações e Álgebra, nomeadamente no conteúdo de isometrias do plano, números racionais e sequências e regularidades.

A parte II do Relatório Final de Estágio inicia-se com uma breve apresentação do estudo realizado para alunos do 2.º CEB. Contextualiza-se o problema, justifica-se a sua pertinência e definem-se os objetivos que orientaram este estudo. Segue-se uma revisão da literatura, a apresentação da metodologia, das tarefas e dos roteiros realizados.

### **2. Definição do problema**

#### **2.1. Enunciado do problema e objetivos do estudo**

A investigação pretende responder à questão-problema *Em que medida o recurso a materiais didáticos no ensino da Matemática no 2.º CEB potencia aprendizagens significativas?*

Tendo em consideração o problema enunciado anteriormente, os objetivos gerais desta investigação são:

- Identificar as potencialidades do uso de barras de Cuisenaire, tangram, espelhos, mira, papel vegetal e torre de Hanói, no ensino-aprendizagem da Matemática no 2.º CEB;
- Conceber tarefas matemáticas com recurso a materiais didáticos que sejam potenciadoras de aprendizagens significativas.

#### **2.2. Justificação e relevância do estudo**

O interesse pela temática desta investigação surgiu através da PES ocorrida no 1.º CEB, pois, durante esse percurso, observou-se que poucos eram os materiais didáticos efetivamente utilizados pelas professoras cooperantes. Para além disso, durante as práticas pedagógicas, constatou-se que, quando se utilizavam materiais didáticos na aula, os alunos estavam mais envolvidos, concentrados, tornavam-se mais participativos e recordavam melhor os conteúdos abordados. As aulas eram mais dinâmicas, participativas, não sendo o professor o protagonista, havendo partilha de conhecimentos entre todos.

Deste modo, como a utilização de materiais didáticos foi uma experiência tão positiva no 1.º CEB,

considerou-se pertinente identificar as potencialidades do uso de materiais didáticos no ensino-aprendizagem da Matemática no 2.º CEB. Pretendeu-se conceber tarefas matemáticas em que se utilizassem materiais didáticos, para tornar as aprendizagens mais significativas para os alunos e envolvê-los mais em tarefas produtivas e ricas. É essencial que se reflita sobre o modo como o material didático vai auxiliar os alunos na construção do seu conhecimento. A utilização de materiais permite que as aprendizagens sejam mais próximas e concretas da realidade dos alunos, tornando a Matemática menos abstrata, promovendo, simultaneamente, a comunicação matemática. Primeiramente, os alunos resolvem a tarefa em pequenos grupos de trabalho e, após um trabalho significativo na discussão da mesma, o professor solicita a explicação e justificação dos seus raciocínios, havendo participação e envolvimento de toda a turma. Assim, os alunos são agentes ativos no seu processo de ensino-aprendizagem.

Os materiais didáticos assumem importância no currículo, especialmente nas Aprendizagens Essenciais, de Matemática, no 2.º CEB. Ao analisar este documento verifica-se que, na operacionalização das aprendizagens essenciais, encontram-se explanados o tema/conteúdos de aprendizagem, objetivos essenciais de aprendizagem conhecimentos, capacidades e atitudes, a saber:

- “Recorrendo a situações e contextos variados, incluindo a utilização de materiais diversificados e tecnologia, os alunos devem resolver tarefas que requeiram a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemáticos”;
- “Devem ser criadas condições de aprendizagem para que os alunos, em experiências individuais e de grupo”;
- “Realizar tarefas de natureza diversificada (projetos, explorações, investigações, resolução de problemas, exercícios, jogos)”;
- “Utilizar materiais manipuláveis e outros recursos, incluindo os de tecnologia digital, nomeadamente aplicações interactivas, programas computacionais específicos e calculadora, na resolução de problemas e em outras tarefas de aprendizagem” (Aprendizagens Essenciais, 2018, p. 7).

Portanto, considera-se relevante investigar sobre a utilização de materiais didáticos nas aulas de Matemática do 2.º CEB e como o seu uso beneficia o ensino-aprendizagem dos alunos.

### **3. Revisão da literatura**

Nesta secção tecem-se algumas considerações gerais sobre o uso de materiais didáticos no ensino, distinguindo-se materiais estruturados de não estruturados, focando-se, em seguida, no ensino-aprendizagem da Matemática. Apresentam-se, também, alguns estudos empíricos que se centraram na utilização de materiais didáticos no ensino-aprendizagem da Matemática, bem como os materiais didáticos usados no design desta experiência de ensino, destacando o seu potencial e algumas fragilidades que estes acarretam. O uso de materiais didáticos tem por base um ensino exploratório da Matemática, portanto, é importante falar acerca do ensino exploratório, bem como do papel do professor e dos alunos, da comunicação na sala de aula de matemática e, por fim, mas não menos importante, da planificação para aulas de ensino exploratório.

O uso de materiais didáticos no ensino torna as aprendizagens matemáticas mais significativas. Para tal, é necessário que o professor planifique as suas aulas e exista uma seleção criteriosa das tarefas que o

professor pretende explorar e trabalhar com os seus alunos.

### **3.1. Materiais didáticos no ensino**

A revisão da literatura existente sobre materiais didáticos permite concluir que o termo ou expressão “material didático” apresenta variadas designações, podendo significar materiais concretos, instrumentos de aprendizagem, objetos de aprendizagem, materiais manipuláveis, entre outros (Leite, s.d).

Já Lorenzato (2006) define que material didático é qualquer um que seja útil para o ensino-aprendizagem, tais como o giz, a calculadora, jogos, caderno, caneta. O autor refere que o material didático concreto se pode categorizar em palpável e impalpável. Classifica, ainda, o material concreto manipulável em dois tipos: manipulável estático e manipulável dinâmico. Embora ambos possibilitem o manuseio e a observação, o primeiro diz respeito ao material físico que não se modifica, enquanto o material manipulável dinâmico altera o seu aspeto físico com a manipulação.

Para Mansutti (1993) um material didático tem um cariz instrucional, constituindo-se como um recurso que é utilizado quando se está perante uma atividade de aprendizagem e formação, em sala de aula. A diversidade destes recursos vai desde os livros didáticos, até às calculadoras e computadores, passando por vídeos e materiais concretos ou manipuláveis.

Para Schmitt e Ferreira (2004), os materiais concretos são os que facilitam o processo de ensino-aprendizagem, possibilitando aos alunos que ampliem os seus conhecimentos, atribuindo-lhes significado nas tarefas matemáticas que desenvolvem.

Ribeiro (1995) foca-se na utilidade destes materiais, definindo-os como qualquer recurso que seja utilizado na sala de aula, com o intuito de promover a aprendizagem. Botas e Moreira (2013) identificam-nos como um meio que promove a conexão entre a própria aprendizagem e a formação.

No entender de Turrioni e Perez (2006), o material concreto é importante no processo de ensino-aprendizagem, pois o seu uso apura a capacidade de observação, logo, promove a análise e leva o aluno a reforçar o raciocínio lógico-crítico. Assim, são inegáveis as suas potencialidades na construção efetiva do conhecimento.

De acordo com Leite (s.d), os materiais didáticos na sala de aula potenciam a interação, bem como a socialização, desenvolvendo simultaneamente a autonomia. Para além disso, o autor menciona que o uso de materiais didáticos, conduz a alunos mais criativos, mais confiantes, mais responsáveis e mais motivados.

Leite (s.d) afirma que, se o material didático for utilizado corretamente na sala de aula, com objetivos definidos, o material pode auxiliar no processo de ensino-aprendizagem e contribuir para que o aluno tenha aprendizagens significativas.

Serrazina (1990, citado por Botas & Moreira, 2013) realça que qualquer material didático deve proporcionar aprendizagens significativas, as quais dependem claramente da planificação que o professor perspetivou relativamente aos materiais didáticos que selecionou.

O uso de materiais apresenta vantagens como: permite desenvolver o raciocínio, permite auxiliar o conteúdo que se pretende trabalhar, ajudando deste modo os alunos na construção dos seus saberes, isto é, deve ser visto como um mediador entre o professor, o aluno e o conhecimento (Leite, s.d).

Por seu lado, Santos e Belmiro (2013, s.p.) enfatizam as vantagens da utilização de materiais didáticos, de entre as quais se destacam o despertar da curiosidade dos alunos, o potenciar de situações concretas

de observação, o desenvolvimento do espírito crítico e ainda o desejo de participar ativamente nas atividades propostas pelo professor. No entanto, é essencial que os materiais didáticos sejam utilizados como um meio e não como um fim em si mesmo, do mesmo modo que os profissionais devem conhecer as potencialidades dos recursos didáticos.

Silva e Victor (2016) salientam que o uso de materiais didáticos se deve basear em objetivos definidos, plasmados numa planificação bem pensada e pormenorizada. De acordo com estes autores, a manipulação dos materiais não deve alhear-se da sua função educativa e nem ficar pelo mero ludismo. De facto, quando o professor decide usar materiais didáticos, deve fazer um estudo sobre aqueles que pretende utilizar, tendo em consideração os conteúdos que podem ser trabalhados, as motivações e condições para usar esse recurso, ou seja, o professor tem que saber integrá-lo na sua prática de ensino, de acordo com as necessidades dos seus alunos. Os autores acrescentam também que a utilização dos materiais didáticos permite ao aluno visualizar e construir significados, levando-o ao raciocínio. Através dos recursos didáticos o professor observa, relaciona informações, procura soluções para os problemas apresentados, o que conduz à abstração.

Há autores, como Kaleff (2006), que referem a importância de os alunos manusearem o material concreto manipulável, pois, apesar de existirem simulações online do material que se pretende utilizar, no computador as representações tridimensionais aparecem planas. Portanto, o autor menciona que ambas as experiências se complementam, todavia, salienta que é essencial a manipulação do material.

Santos e Belmiro (2013, s.p.) acrescentam o seu papel nas simulações de situações, experimentações, demonstrações:

Os recursos didático-pedagógicos são componentes do ambiente educacional estimuladores do educando, facilitando e enriquecendo o processo de ensino e aprendizagem. Dessa forma, tudo o que se encontra no ambiente onde ocorre o processo ensino-aprendizagem pode se transformar em um ótimo recurso didático, desde que utilizado de forma adequada. Eles auxiliam nas simulações de situações, experimentações, demonstrações.

Estes autores acrescentam, ainda, que o professor, ao recorrer ao material didático, transporta para a realidade concreta do aluno o saber expresso no livro. Deste modo, o professor pode utilizar os materiais para melhorar e aprimorar o seu processo de ensino-aprendizagem. Assim, a aula será mais dinâmica e proveitosa e, conseqüentemente, tornará as aprendizagens dos alunos mais significativas.

Durante o processo de seleção de materiais, o professor deve ter em consideração que o uso de material concreto, por si só, não significa que esteja a proporcionar aprendizagens significativas, pois os benefícios da sua utilização estão relacionados com o uso que o professor fará dele quando estiver a mediar uma atividade (Lorenzato, 2006).

Mansutti (1993) sublinha que a seleção dos materiais a utilizar está relacionada com o ano de escolaridade, com os conteúdos programáticos, tratamento didático e progressão, por isso deve haver uma escolha criteriosa na conceção e seleção dos mesmos. Nesta linha de pensamento, é essencial que a seleção dos materiais didáticos tenha, também, em conta os aspetos científicos, pedagógicos e institucionais.

Berticelli (2013) afirma que a escolha dos materiais didáticos é importante e o professor tem de

conhecer bem os seus alunos, “elaborar novos projetos, redefinir objetivos, buscar conteúdos significativos e novas formas de avaliar, visando propostas metodológicas inovadoras, com o intuito de viabilizar a aprendizagem” (p. 25583).

Por sua vez, Adelino (2016) realça o facto de os materiais didáticos serem materiais que englobam dimensões ou áreas do conhecimento que se relacionam entre si.

Para além disso, Lorezanto (2006) refere que, quando o professor decide utilizar algum recurso didático, este deve fazer uma escolha criteriosa do material, planear com tempo as atividades, deve conhecer bem o material que vai utilizar, dar tempo aos alunos para se adaptarem à atividade, promover a comunicação matemática e a troca de ideias, promover a autonomia dos alunos, realizar discussões sobre as estratégias e resultados obtidos, efetuar registos sobre dúvidas e conclusões a que se chegaram.

Rêgo e Rêgo (2006) descrevem um conjunto de cuidados a ter durante a utilização do material didático, designadamente:

1. O professor deve escolher criteriosamente o material didático;
2. O professor deve planear antecipadamente as tarefas e conhecer bem o(s) material(ais) didático(s) que vai/vão auxiliar a resolução da tarefa;
3. O professor deve, sempre que necessário, envolver os alunos na construção do material;
4. Os alunos devem ter tempo para explorar e conhecer o material didático;
5. O professor deve proporcionar a discussão coletiva, fomentando a partilha de ideias e de raciocínios;
6. O professor, sempre que necessário, pode colocar questões e solicitar que os alunos efetuem registos sobre ações realizadas, conclusões ou dúvidas.

Um dos constrangimentos sentidos no que respeita à questão dos materiais didáticos em sala de aula prende-se com alguma falta de formação específica dos professores. Esta lacuna parece reduzir a possibilidade dos professores utilizarem os materiais didáticos como estratégias didáticas de formação dos seus alunos (Adelino, 2016). Já em 1993, Mansutti alertava para esta questão, ao referir que alguns materiais didáticos, por vezes, não eram utilizados na sala de aula devido à falta de informação sobre os mesmos. Efetivamente, uma visão limitada sobre alguns dos materiais foi comprometendo o seu uso no ensino, mais concretamente no ensino da Matemática.

Por este motivo, o trabalho de investigação que se apresenta parte da necessidade de referir a importância dos professores conhecerem bem o papel que os materiais didáticos trazem para o ensino-aprendizagem, em geral, e ensino-aprendizagem da Matemática, em particular, tal como a seguir se expõe.

### **3.1.1. Materiais estruturados e materiais não estruturados**

Para Ribeiro (1995) um material didático é qualquer recurso usado na sala de aula com o intuito de facilitar a aprendizagem, havendo aqueles que foram feitos com uma finalidade educativa, os quais se designam como materiais estruturados. Para o autor, englobam-se, nesta tipologia, os tradicionais manuais escolares, as fichas de trabalho disponibilizadas aos alunos, sólidos geométricos ou modelos de demonstração. Para além dos materiais estruturados, existem, ainda, outros que foram concebidos sem qualquer intenção pedagógica, mas que podem ser facilitadores da aprendizagem, sendo estes designados como materiais não estruturados. A título de exemplo, o autor menciona os computadores e as calculadoras.

Esta designação relativa à tipologia de materiais didáticos é igualmente defendida por Hole (1977, citado por Botas & Moreira, 2013). Com efeito, este autor define os materiais didáticos como meio de aprendizagem e ensino e distingue os estruturados como os objetos que materializam adequadamente estruturas matemáticas.

Para Royo (1996, citado por Caldeira, 2009, p. 225), um material estruturado tem como foco principal a sua funcionalidade. Por sua vez, o material não estruturado caracteriza-se pela sua polivalência, pelo seu baixo custo e múltiplos intuitos. É possível recolhê-lo na natureza ou até mesmo em casa, na medida em que objetos ou desperdícios podem utilizar-se com um fim educativo.

Ainda segundo este autor, relativamente ao material não estruturado,

A sua utilização principal é estarem à disposição da criança, como elemento de construção, de expressão, para desenvolver o pensamento lógico, realizando actividades de comparação, agrupamentos, e classificação, ordenação. Estes podem ser conchas, pedras, pétalas, tubos de cartão, tampas, revistas, esponjas, caixas” entre outros (p. 225).

### **3.1.2. Materiais didáticos no ensino-aprendizagem da Matemática**

Ferreira, Nogueira e Oliveira (s.d) afirmam que para o ensino-aprendizagem da Matemática é preciso selecionar recursos didáticos que ajudem os alunos a pensar matematicamente e apoiem o professor na mediação do conhecimento. Os alunos também têm de ter predisposição para aprender, pois a aprendizagem só é significativa se houver predisposição para a aquisição de conhecimento.

Neste sentido, os mesmos autores defendem que o uso de materiais didáticos pode ser um elemento facilitador que pode contribuir para que a aprendizagem seja, de facto, significativa. Na verdade, estes estimulam os alunos, desencadeando atitudes positivas na aprendizagem da Matemática, tais como pesquisar, criar e envolver-se nas atividades que são propostas.

Numa aula de Matemática pode-se recorrer a recursos didático-pedagógicos para além do quadro e do giz, assim como a materiais didáticos diversificados que auxiliam o processo de ensino-aprendizagem. Estes permitem que os alunos passem de agentes passivos a agentes ativos da sua própria aprendizagem (Santos & Belmiro, 2013).

Jesus e Fini (2005 citados por Ferreira, Nogueira & Oliveira, s.d) assinalam que os recursos e materiais manipuláveis fazem com que o aluno centre a sua atenção e concentração no conteúdo matemático que tem de aprender e aumenta a motivação na aprendizagem da disciplina.

Gomide (1970, citado por Botas & Moreira, 2013) refere que a utilização de materiais didáticos é uma das formas de proporcionar aprendizagem matemática enriquecedora, pois a sua utilização assume um papel fulcral numa disciplina de carácter tão abstrato como a Matemática. Gomide (1970, citado por Botas & Moreira, 2013, p. 254) menciona que

apesar da utilização do material não determinar por si só a aprendizagem, é importante proporcionar diversas oportunidades de contacto com materiais para despertar interesse e envolver o aluno em situações de aprendizagem matemática, já que os materiais podem constituir um suporte físico através do qual as crianças vão explorar, experimentar, manipular e desenvolver a observação.

A utilização de recursos didáticos pode contribuir para uma aprendizagem significativa da Matemática, pois o ensino desta disciplina não pode só ser ministrado através de aulas expositivas, pelo que o uso de recursos didáticos auxilia os alunos a entenderem os conceitos (Ferreira, Nogueira & Oliveira, s.d).

A escolha dos materiais didáticos no processo de ensino-aprendizagem da Matemática está relacionada com saberes ligados à pedagogia, aos conteúdos programáticos, sempre com a preocupação de os alunos serem agentes ativos na sua aprendizagem. A motivação é um aspeto fulcral que depende também de um bom relacionamento entre o aluno e o próprio material (Berticelli, 2013).

### **3.1.2.1. Estudos empíricos centrados na utilização de materiais didáticos no ensino-aprendizagem da Matemática**

Seguidamente, apresentam-se alguns estudos empíricos sobre a utilização de materiais didáticos no ensino-aprendizagem da Matemática.

No estudo de Silva (2014) a questão problema era “de que forma o uso de materiais didáticos, em aulas do 1.º Ciclo do Ensino Básico, influencia a aprendizagem da Matemática num tópico muito particular: números racionais?”. Os objetivos deste estudo prenderam-se com “identificar as principais dificuldades sentidas pelos alunos, na aprendizagem da Matemática; perceber a importância do recurso a materiais didáticos, em aulas de Matemática no 1.º CEB” e “compreender de que forma a utilização de materiais didáticos influencia a aprendizagem da Matemática, por parte dos alunos” (p. 43). A investigadora baseou-se em três tarefas para a utilização de materiais didáticos (tiras de papel-material não estruturado e geoplano e barras de Cuisenaire-material estruturado).

Silva (2014, p. 100) questiona “como reagem os alunos ao interagirem com materiais didáticos?”, apresentando como resposta que reagem positivamente, adotando uma postura de confiança na resposta às questões das tarefas, existindo uma maior motivação na realização das tarefas matemáticas.

A mesma autora coloca a questão “qual o impacto que os materiais didáticos têm na aprendizagem da matemática?” (p. 100), ao qual responde afirmando ter um impacto positivo, onde verificou que os alunos ficam mais motivados para a aprendizagem dos conteúdos, melhorando significativamente os resultados, visto que os materiais “levavam para um contexto real, dando-lhes significado” (p. 100).

O estudo é de natureza qualitativa e os participantes foram 3 alunos que frequentavam o 4.º ano de escolaridade (uma aluna com bom aproveitamento escolar a Matemática, uma aluna média e um aluno com baixo aproveitamento escolar a Matemática).

Nas conclusões do seu estudo, Silva (2014) refere que o uso de materiais didáticos apresenta vantagens no ensino-aprendizagem da Matemática, dado que os participantes envolvidos no estudo compreenderam melhor os números racionais após a implementação das tarefas matemáticas com recurso a materiais didáticos. Os três participantes, envolvidos no estudo de Silva (2014), mostraram entusiasmo, reagiram positivamente à utilização de diferentes materiais didáticos. Os alunos lamentaram o facto de estes materiais serem pouco utilizados na sala de aula, dado que, quando são utilizados, apresentam um impacto positivo na aprendizagem da Matemática, nomeadamente no estudo dos números racionais.

Uma das alunas do estudo referiu na entrevista que, quando usou as barras de Cuisenaire, concretizou as suas aprendizagens e referiu ainda que é divertido usar materiais. Outro aluno do estudo mencionou que, apesar de não gostar de Matemática, gostou de resolver as tarefas matemáticas propostas pela

investigadora, com recurso a diferentes materiais didáticos. Este aluno acrescentou ainda que, com os materiais utilizados, conseguiu compreender melhor os conteúdos (Silva, 2014).

Ferreira (2015) realizou uma investigação intitulada “O contributo dos materiais didáticos no processo de ensino e aprendizagem da matemática: um estudo no 4.º ano de escolaridade”, tendo como objetivos “compreender se o uso de materiais didáticos e respetivas tarefas ajudaram neste processo” (p. iii). Para tal foram colocadas duas questões “1) Que tipos de materiais didáticos e tarefas potenciam o desempenho dos alunos em matemática?; 2) Como se caracteriza o trabalho dos alunos quando exploram materiais? Que dificuldades manifestam?” (p. iii). Esta investigação enquadra-se numa metodologia qualitativa, privilegiando o método descritivo e interpretativo. Os materiais didáticos utilizados nas tarefas foram materiais de uso corrente (caixa com palhinhas, madeiras e cordas), papel (folha de papel quadrangular, folha de papel retangular, figuras geométricas em papel e círculo de papel), objetos do dia a dia (tesoura dos ângulos, relógio dos ângulos), imagens (quadros, sinais de trânsito, painel de azulejos, azulejos) e jogo (dominó dos ângulos). Os participantes deste estudo foram uma turma do 4.º ano de escolaridade.

Ferreira (2015) menciona que o uso de materiais didáticos ajuda os alunos a estabelecerem relações entre a experiência com materiais e a abstração dos conceitos, proporcionando aulas mais dinâmicas, suscitando o interesse, espírito de investigação e aumento da curiosidade dos alunos. O uso de materiais auxilia na construção de novas aprendizagens e estruturação das mesmas.

A realização de tarefas matemáticas desafiantes com recurso a materiais didáticos, possibilita aos alunos que desenvolvam mais facilmente o seu raciocínio matemático (Ferreira, 2015).

A mesma autora refere que o professor deve encorajar os alunos a trabalharem com diversos materiais (estruturados e não estruturados) para desenvolver o raciocínio e a comunicação matemática. Também Ferreira (2015) evidencia que o uso de materiais por si só não garante uma aprendizagem eficaz. O professor tem que desempenhar o papel de orientador e deve ir mediando e articulando as experiências e os conceitos, para se alcançar o nível de abstração e sistematização.

Nas conclusões do estudo de Ferreira (2015) aparece resposta à questão “Que tipo de materiais didáticos e tarefas potenciam o desempenho dos alunos no ensino e aprendizagem da matemática?” (p.149), à qual a autora apresentou como resposta que as tarefas devem ser apropriadas aos conteúdos que se pretendem trabalhar, utilizando materiais que auxiliem na compreensão. A autora partilha ainda que o uso de materiais didáticos, na sala de aula de matemática, é um benefício para a aprendizagem da disciplina, melhorando a compreensão dos conceitos envolvidos, permitindo concretizar conceitos mais abstratos.

Ferreira (2015) relata ainda que os materiais e tarefas desafiantes envolvem mais ativamente os alunos, promovendo aprendizagens significativas e efetivas. A autora conclui também que o uso de materiais didáticos e respetivas tarefas resultou no melhoramento da aprendizagem dos alunos, onde estes demonstraram interesse, empenho, motivação e envolvimento, no momento da exploração e realização dos materiais e tarefas utilizados.

Faustino (2018) realizou uma investigação intitulada “Utilização do material manipulável como facilitador das aprendizagens matemáticas no Jardim de Infância e no 1.º Ciclo do Ensino Básico”. A investigadora pretendia compreender de que modo a utilização de materiais manipuláveis pode contribuir para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

A metodologia utilizada foi de cariz qualitativo, tratando-se de um estudo caso. Este estudo comprovou

que a utilização de materiais didáticos ajuda na compreensão de conceitos matemáticos, bem como no desenvolvimento da comunicação matemática, dado que possibilita aos alunos falarem dos materiais para explicarem os seus raciocínios. A mesma autora defende ainda que o manuseio de materiais leva os alunos a vivenciarem “experiências reais” (p. 36).

Com o uso de materiais didáticos na sala de aula é possível trabalhar distintos conceitos, tornando os que são mais abstratos em concretos, pois os alunos tocam, sentem, manipulam e experimentam (Faustino, 2018).

A mesma autora refere, nas conclusões, que com a utilização de materiais didáticos, na resolução de tarefas, os alunos demonstraram progredir no raciocínio e pensamento matemático, bem como construíram o seu próprio conhecimento. As aulas com recurso a materiais mostram-se mais dinâmicas e os alunos tornam-se mais participativos.

Faustino (2018) conclui, ainda, com o seu estudo, que a utilização de materiais didáticos apresenta vantagens, tais como a comunicação matemática, aulas dinâmicas, exaltando curiosidade, concentração e espontaneidade, dado possibilitar “experiências visuais, táteis e imagináveis” (p.55).

Heitor (2018) realizou uma investigação sobre “A utilização de materiais manipuláveis na aprendizagem de números racionais representados na forma de fração”. O objetivo deste estudo era compreender o contributo dos materiais manipuláveis na aprendizagem de números racionais representados na forma de fração.

Trata-se de uma investigação de natureza qualitativa e segue a metodologia de uma investigação-ação. Participaram neste estudo 9 alunos do 3.º ano, inseridos numa turma mista do 3.º e 4.º anos, com idades entre os 8 e 9 anos, sendo alunos com baixo aproveitamento escolar a Matemática, havendo apenas um sem dificuldades na disciplina.

De acordo com Heitor (2018, p. 31), tarefas com recurso a materiais didáticos potenciam “o espírito crítico e a capacidade de desenvolver o pensamento e rigor matemático fazem dos alunos gestores do seu próprio conhecimento, aprendendo pelos seus próprios meios e conjeturas”.

Também Heitor (2018), nas suas conclusões, averiguou que os alunos revelaram uma evolução nos conteúdos abordados, dado que, através da manipulação, construíram aprendizagens significativas, estabeleceram relações e distinguiram os conceitos trabalhados. Esta autora defende ainda que os seus alunos se interessaram bastante por propostas de tarefas que envolveram os materiais didáticos, onde questionavam e partilhavam as suas ideias, havendo entreajuda entre os colegas de turma, construindo o seu próprio conhecimento.

Silva (2019) realizou um estudo sobre “A utilização de Barras Cuisenaire no ensino e aprendizagem da Matemática: Uma experiência com alunos do 1.º e do 2.º Ciclo do Ensino Básico”, tendo como questões de investigação “Q1 - De que forma é que as Barras Cuisenaire foram utilizadas pelos alunos durante a realização das tarefas propostas?; Q2 - De que forma é que a utilização das Barras Cuisenaire em sala de aula ajudou os alunos na realização das tarefas propostas?; Q3 - Quais foram as dificuldades sentidas pelos alunos durante a utilização das Barras Cuisenaire?; Q4 - Os alunos conseguem transferir as aprendizagens construídas com o auxílio das Barras Cuisenaire para outras questões curriculares?” (p. v).

Este estudo teve como participantes alunos do 3.º e 6.º ano de escolaridade, sendo a metodologia utilizada o modelo de investigação-ação.

Silva (2019, p. 18) menciona que os materiais didáticos possibilitam que o conhecimento matemático seja construído através de objetos concretos, dado que dessa maneira o aluno consegue “confrontar e relacionar os múltiplos aspetos que o envolvem”.

A utilização de materiais didáticos permite que os alunos atribuam, com maior facilidade, significado às aprendizagens. Para além disso, permite que a “abstração matemática seja desenvolvida de uma forma mais intuitiva” (Silva, 2019, p. 18).

Nas conclusões de Silva (2019), para responder à Q1, a investigadora apresenta como resposta que foi um material que despoletou curiosidade, havendo espaço para a exploração livre (objetivo da primeira aula). Relativamente ao uso das barras de Cuisenaire, a autora assegura que “o contacto, a movimentação e a exploração do material contribuíram para a estimulação dos vários sentidos e, principalmente para a capacidade de se exprimirem oralmente” (Almiro, 2004, Velosa, 2008, Abreu, 2013, citados por Silva, 2019, p.107).

Para responder à Q2, Silva (2019), afirma que as barras de Cuisenaire auxiliaram os alunos na medida em que efetuaram conjecturas que foram comprovadas através da manipulação do material. A utilização deste material possibilitou ainda a comunicação matemática, a explicação de raciocínios e a cooperação entre pares. Este material didático estruturado permitiu que os alunos fossem autónomos nas suas próprias criações e desenvolveram “competências transversais tais como o espírito investigativo e a criatividade que os ajudou a ponderar a veracidade das suas conjecturas” (p. 109).

Na resposta à Q3 a investigadora afirma que os alunos, por vezes, sentiam alguma dificuldade em expressarem as suas ideias e raciocínios com as barras de Cuisenaire.

Para dar resposta à Q4, Silva (2019) menciona que as aprendizagens construídas com o material verificaram-se nas aulas em que os alunos “tinham de aplicar os conhecimentos nas resoluções das fichas de trabalho” (p. 111).

A investigadora aponta que o uso do material, por si só, não garante que ocorram aprendizagens; se o material for usado por alunos com maiores dificuldades, os alunos vão ser resistentes em utilizá-los, comprometendo a eficiência dos materiais; o professor não conhecer bem o material pode retirar potencial ao material e, por fim, a utilização de um material diferente na sala de aula pode levar a que os alunos se dispersem do que é pretendido.

### **3.1.3. Materiais didáticos usados no design da experiência de ensino**

#### **Breve contextualização histórica**

##### Barras de Cuisenaire

Segundo Boldrin (2009), o material designado de barras de Cuisenaire foi criado pelo professor belga Émilie Georges Cuisenaire Hottele (1891-1980), um professor de ensino primário e músico belga. Este criou as barras porque sentia que os seus alunos, com esse material, podiam compreender melhor os conteúdos matemáticos, principalmente no estudo dos números e operações. As barras surgiram para que os alunos não recorressem meramente à memorização, vivenciando, deste modo, experiências e aprendizagens significativas.

Este material didático estruturado é composto por dez barras coloridas de madeira ou em plástico (em

forma de prismas quadrangulares regulares), com dez tamanhos diferentes (Boldrin, 2009). A barra branca é mais pequena e habitualmente, quando os alunos trabalham os números naturais, esta barra, como tem menor comprimento, serve de unidade de medida.

Cuisenaire, durante 23 anos, fez experiências com o material, antes de divulgá-lo. A divulgação foi feita através do livro “Cuisenaire, Georges, & Gattegno, Caleb (1954). *Numbers in colour: A new method of teaching arithmetic in primary schools*. London, UK: Heinemann”, juntamente com o professor Caleb Gattegno que se aliou a Cuisenaire (Boldrin, 2009).

O professor Caleb Gattegno, na altura secretário-geral da Comissão Internacional, era responsável pela melhoria do ensino da Matemática. Caleb ficou impressionado não só com o trabalho desenvolvido por George Cuisenaire com as barras, como também com a facilidade com que os alunos aprendiam os conteúdos matemáticos, com este material (Márquez, 1967).

As barras de Cuisenaire passaram a ser utilizadas em várias nações, assumindo diversas designações consoante o país, tais como: “barra Cuisenaire, escala Cuisenaire, material Cuisenaire, números em cores” (Boldrin, 2009, p.5).

### Tangram

O tangram é um material didático não estruturado que surgiu na China, usado em vários países e é manipulado por pessoas de diversas faixas etárias.

Segundo Souza (2010, p.2, citado por Pollon & Leineker, 2013), a palavra tangram tem várias designações. Uma delas refere-se ao final da palavra “gram”, que diz respeito a algo desenhado ou escrito, como um diagrama. Já a palavra inicial “Tan” diz-se estar relacionada com a dinastia Tang (618-906), sendo esta a mais poderosa e longa da história chinesa. Deste modo, tangram significa “quebra-cabeça chinês”.

De acordo com Pollon e Leineker (2013), o tangram era visto como um quebra-cabeças, usado pelos monges e pela dinastia Tang.

Não se sabe quem foi o seu criador, apenas que apareceu há mais de 4 000 anos e ficou conhecido no ocidente em meados do século XIX (Cunha & Lima, 2011).

Existem várias histórias sobre a origem do tangram, sendo a mais popular “O discípulo e o mestre”. A história retrata um jovem chinês que se estava a despedir do seu mestre, pois ia fazer uma viagem pelo mundo. De modo a que o jovem pudesse registar tudo o que observasse durante a sua viagem, o mestre ofereceu-lhe um espelho com a forma de um quadrado, para que depois lhe mostrasse tudo quando regressasse. O jovem ficou confuso e questionou o mestre como poderia mostrar-lhe tudo o que observasse na sua viagem, através de um espelho. Após ter colocado esta questão, o espelho caiu-lhe das mãos e partiu-se em sete peças. O mestre respondeu-lhe que, com aquelas sete peças, podia construir figuras para demonstrar o que visse durante a sua viagem (Secretaria da Educação, s.d, s.p).

O tangram também tem como designação “as sete tábuas da habilidade” e tem duas regras que devem ser cumpridas, nomeadamente a obrigatoriedade de usar todas as peças sem qualquer sobreposição das mesmas (Cunha & Lima, 2011). Estes autores referem-se ao tangram como um quebra-cabeças, composto por 7 peças, “resultante da decomposição de um quadrado, que representa o modelo original deste jogo.” (p. 27). É constituído por 2 triângulos com dimensões maiores, 1 triângulo médio, 2 triângulos pequenos, 1 quadrado e 1 paralelogramo. Os cinco triângulos que constituem o tangram são triângulos retângulos e

isósceles (Alves, Gaideski & Junior, 2010). Com o tangram é possível construir várias figuras, tais como pessoas, plantas, animais, objetos, entre outros (Secretaria da Educação, s.d).

### Mira

A mira, ou georefletor, é um material plástico e semi opaco, transparente que pode ser utilizado para trabalhar a simetria de reflexão. Através da mira pode-se observar a figura completa, ao contrário do que acontece com o espelho, conseguindo-se ver o prolongamento da figura através dela (Veloso, Bastos & Figueirinhas, 2009).

### Espelho

O espelho é um material didático estruturado, dado que a sua função ser educativa, apresentando potencialidades para se trabalharem as isometrias, nomeadamente a reflexão axial.

Os espelhos são superfícies metálicas polidas, sendo que a camada metálica pode ser, por exemplo, prata ou alumínio, servindo como espelho. A base desta camada metálica é um vidro, cuja função é de suporte e proteção. Podem encontrar-se espelhos planos, esféricos, parabólicos, elípticos, cilíndricos, entre outros (Almeida, 2003).

### Papel vegetal

Com o papel vegetal podem-se decalcar as figuras e rodá-las em volta de um centro, “deslizar ao longo de um segmento, ou virar o papel, fazendo coincidir uma determinada recta” (Veloso, Bastos & Figueirinhas, 2009, p. 26).

Com este material, é possível trabalhar a simetria rotacional. Se se rodar a imagem decalcada para o papel vegetal sobre a imagem original, facilmente se verifica se possui ou não simetria rotacional.

### Torre de Hanói

A torre de Hanói, também designada de “quebra-cabeças do fim do mundo” e “torre de Bramanismo”, foi criada no ocidente, pelo matemático Francês Édouard Anatole Lucas (1842-1891). A torre original era composta por oito discos e três hastes onde os discos são inseridos. Inicialmente este material didático era visto como um brinquedo e estava ligado a uma lenda, que se encontra registada no livro “Lucas, F. (1883). *Récréations mathématiques*. Paris: Gauthier-Villars”. Brama, ao criar o mundo, teria colocado numa das agulhas 64 discos de ouro, que se sobrepunham em diâmetros decrescentes, isto é, o maior estaria junto à placa e o menor no topo da pilha. Brama ordenou aos sacerdotes do templo que transferissem a pilha de discos para um dos outros dois pinos, obedecendo a duas regras, sendo estas: mover um disco de cada vez e nunca colocar um disco maior sobre um disco menor. De acordo com o mito, a vida decorreria durante a realização do desafio proposto aos sacerdotes e, quando estes terminassem o desafio, o mundo deixaria de existir (Watanabe, 2004).

Os modelos mais utilizados da torre de Hanói são construídos em madeira. A base tem três pinos que se dispõem na vertical e cinco ou mais discos com diâmetros decrescentes e perfurados no centro. Este material didático educativo exige o cumprimento de duas regras: mover um disco de cada vez e não colocar um disco sobre outro menor do que ele (Santos, Carvalho & Muller, s.d).

Nascimento, Coutinho, Souza, Costa e Santana (2017) indicam algumas regras para a utilização da torre de Hanói, tais como

transferir todos os discos de um pino para o outro; transferir apenas um disco por movimento; utilizar um pino como auxiliar; colocar os discos sempre na ordem decrescente, ou seja, o disco maior nunca deverá sobrepor um menor; realizar o menor número de movimentos possíveis (s.p).

Santos, Neto e Silva (2007) aludem a estas regras referindo que os discos devem estar na haste mais à esquerda, onde, na base, se encontra a peça maior e terminando na menor, obtendo-se, assim, uma torre. O objetivo do jogo é mover a torre da coluna da esquerda para a coluna da direita. No entanto, o jogo apresenta algumas restrições para movimentar as peças: só se pode mover um disco de cada vez; não se pode colocar um disco maior sobre um disco menor (ou seja, a torre ficar invertida), não há restrição à movimentação de um qualquer disco para uma haste que esteja vazia e só se é vencedor se se realizar o menor número de movimentos para colocar todas as peças na haste mais à direita.

### **3.1.3.1. Potencial didático e limitações dos materiais didáticos usados no design da experiência de ensino**

Nas “Aprendizagens Essenciais para o 1.º ano” (2018), os objetivos referem a importância de utilizar materiais diversificados, bem como a tecnologia, para “resolver tarefas que requeiram a resolução de problemas, raciocínio e a comunicação matemáticos” (p. 7).

Assim veja-se como tal se concretiza em alguns domínios e objetivos.

#### a) Números e Operações - adição e subtração

“Reconhecer e memorizar factos básicos da adição e da subtração e calcular com os números inteiros não negativos recorrendo à representação horizontal do cálculo, em diferentes situações e usando diversas estratégias que mobilizem relações numéricas e propriedades das operações” (p.7);

#### b) Geometria e Medida - resolução de problemas

“Conceber e aplicar estratégias na resolução de problemas envolvendo a visualização e a medida em contextos matemáticos e não matemáticos, e avaliar a plausibilidade dos resultados” (p. 10). Nestes objetivos são apresentadas condições de aprendizagem para os alunos, em grupo ou individualmente, utilizarem materiais manipuláveis estruturados e não estruturados e outros recursos com vista à resolução de problemas e/ou tarefas;

Do mesmo modo, nas “Aprendizagens Essenciais para o 2.º ano” (2018), se reforça a necessidade do recurso a materiais didáticos em alguns domínios e objetivos.

#### a) Números e Operações - adição, subtração, multiplicação e divisão

“Reconhecer e memorizar factos básicos das operações e calcular com os números inteiros não negativos recorrendo à representação horizontal do cálculo, em diferentes situações e usando

diversas estratégias que mobilizem relações numéricas e propriedades das operações” (p. 7);

b) Geometria e Medida - raciocínio matemático

“Expressar, oralmente e por escrito, ideias matemáticas, e explicar raciocínios, procedimentos e conclusões” (p. 10). Neste objetivo, faz-se referência ao uso de materiais manipuláveis estruturados e não estruturados.

A importância dos materiais didáticos em sala de aula é igualmente reconhecida nas “Aprendizagens Essenciais para o 3.º ano” (2018), nos vários domínios.

a) Números e Operações - adição, subtração, multiplicação e divisão

“Reconhecer relações numéricas e propriedades das operações e utilizá-las em situações de cálculo” (p. 7);

b) Geometria e Medida - Medida (comprimento e área, volume e capacidade, massa, dinheiro e tempo)

“Expressar, oralmente e por escrito, ideias matemáticas, e explicar raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da matemática (convenções, notações, terminologia e simbologia)” (p. 9). Neste objetivo, apela-se à utilização de materiais manipuláveis estruturados e não estruturados e instrumentos variados (incluindo os de tecnologia digital e a calculadora).

Por fim, também as “Aprendizagens Essenciais para o 4.º ano” (2018) reforçam as mais valias associadas aos materiais didáticos em vários domínios.

a) Números e Operações - adição, subtração, multiplicação e divisão

“Reconhecer relações numéricas e propriedades das operações e utilizá-las em situações de cálculo” (p. 7);

b) Geometria e Medida - resolução de problemas

“Expressar, oralmente e por escrito, ideias matemáticas, e explicar raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da matemática (convenções, notações, terminologia e simbologia)” (p. 10). Neste objetivo alude-se ao uso de materiais didáticos estruturados e não estruturados e também, ao uso de tecnologia digital.

Tal como acontece no 1.º CEB, também no 2.º CEB é inquestionável o valor de que se reveste a utilização diversificada a materiais didáticos. Ao analisar os programas curriculares, tendo como referência as “Aprendizagens Essenciais para o 5.º ano” (2018), percebe-se que os alunos devem ter oportunidade de “utilizar materiais manipuláveis e outros recursos, incluindo os de tecnologia digital e a calculadora, na resolução de problemas e em outras tarefas de aprendizagem” (p. 8).

a) Números e Operações - números naturais

“Representar números racionais não negativos na forma de fração, decimal e percentagem, e estabelecer relações entre as diferentes representações, incluindo o numeral misto” (p. 8);

“Utilizar modelos geométricos e outros materiais manipuláveis, e instrumentos variados, incluindo os de tecnologia digital, nomeadamente aplicações interactivas, programas computacionais

específicos e calculadora, na exploração de propriedades de figuras planas e de sólidos geométricos” (p. 10);

“Utilizar instrumentos de medida e desenho (régua, compasso, esquadro e transferidor) na construção de objetos geométricos” (p. 10);

b) Geometria e Medida - figuras planas e sólidos geométricos

“Reconhecer casos de possibilidade de construção de triângulos e construir triângulos a partir de elementos dados (amplitude de ângulos, comprimento de lados)” (p.10);

“Utilizar materiais manipuláveis e instrumentos variados, incluindo os de tecnologia digital, nomeadamente aplicações interactivas, programas computacionais específicos e calculadora, na resolução de problemas e em outras tarefas de aprendizagem” (p.12);

c) Álgebra - resolução de problemas

“Conceber e aplicar estratégias de resolução de problemas envolvendo expressões numéricas, em contextos matemáticos e não matemáticos” (p.12).

Por fim, e numa lógica de ciclo a mesma linha de pensamento está plasmada em vários domínios e objetivos das “Aprendizagens Essenciais para o 6.º ano” (2018).

a) Números e Operações - números racionais não negativos

“Reconhecer relações numéricas e propriedades dos números e das operações, e utilizá-las em diferentes contextos, analisando o efeito das operações sobre os números” (p. 7). Neste objetivo faz-se apelo ao uso de materiais manipuláveis, incluindo os de tecnologia digital “nomeadamente aplicações interactivas, programas computacionais específicos e calculadora, na resolução de problemas e em outras tarefas de aprendizagem” (p. 7).

b) Geometria e Medida - Medida

“Calcular perímetros e áreas de figuras planas, incluindo o círculo, recorrendo a fórmulas, por enquadramento ou por decomposição e composição de figuras planas” (p. 9);

“Utilizar modelos geométricos e outros materiais manipuláveis, e instrumentos variados incluindo os de tecnologia digital, nomeadamente aplicações interactivas, programas computacionais específicos e calculadora, na exploração de propriedades de figuras planas e de sólidos geométrico” (p. 9).

c) Álgebra - sequências e regularidades

“Determinar uma lei de formação de uma sequência numérica ou não numérica e uma expressão algébrica que represente uma sequência numérica em que a diferença entre termos consecutivos é constante” (p. 11). Através deste objetivo pretende-se que se proporcione o uso de materiais manipuláveis, o uso de tecnologia digital, mais especificamente aplicações interativas, programas computacionais e calculadora.

Também no “Programa e Metas Curriculares de Matemática no Ensino Básico” se faz referência, no domínio de Números e Operações (NO), à utilização/manipulação de objetos, mais especificamente, para adicionar, subtrair, multiplicar e dividir números naturais. Este mesmo documento orientador, em relação às metodologias, assinala que as escolas e os professores devem optar pelas metodologias e recursos que consideram mais adequados para os alunos para alcançarem os desempenhos propostos nas “Metas

Curriculares”, aumentado deste modo a liberdade pedagógica (Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2013).

A sua relevância é, também, reconhecida nos documentos curriculares e no “Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória”. Neste documento sublinha-se a importância de “manipular e manusear materiais e instrumentos diversificados para controlar, utilizar, transformar, imaginar e criar produtos e sistemas”, bem como “executar operações técnicas, segundo uma metodologia de trabalho adequada, para atingir um objetivo ou chegar a uma decisão ou conclusão fundamentada, adequando os meios materiais e técnicos à ideia ou intenção expressa” (p. 26). São necessárias estratégias pedagógicas e didáticas que proporcionem aprendizagens significativas aos alunos e, simultaneamente, encontrar a melhor maneira e os recursos mais eficazes para que todos os alunos aprendam e haja uma “apropriação efetiva dos conhecimentos” (Martins, Gomes, Brocardo, Pedroso, Carilho, Silva, Encarnação, Horta, Calçada, Nery & Rodrigues, 2017, p. 32).

### **3.1.3.1.1. Barras de Cuisenaire**

#### **Conteúdos programáticos que podem ser trabalhados com as barras de Cuisenaire**

A análise dos documentos curriculares, como as “Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar” (OCEPE), “Aprendizagens Essenciais referentes ao Ensino Básico” e o “Programa e Metas Curriculares de Matemática no Ensino Básico”, explica os conteúdos programáticos que podem justificar um trabalho com as barras de Cuisenaire na sala de aula.

Uma das suas potencialidades mais comuns prende-se com o apoio que oferece na aprendizagem dos números e operações, nomeadamente na composição e decomposição de números, ao nível da Educação Pré-Escolar (EPE) ou dos primeiros anos do 1.º CEB. Uma vez que as barras de Cuisenaire têm diferentes cores e comprimentos, o potencial surge pelo facto de se poder associar a cada barra um número ou uma relação entre números.

A associação a um número é intuitiva e, a partir daí, a “decomposição” de uma barra com outras de comprimento menor, ou o processo inverso, pode traduzir-se na composição ou decomposição dos números que elas representam.

Quando se estabelece uma comparação entre as barras de Cuisenaire e os números, através da decomposição das barras, pode-se verificar que a barra branca representa 1 unidade, a barra vermelha 2 unidades, a barra verde-claro 3 unidades, a barra rosa 4 unidades, a barra amarela 5 unidades, a barra verde-escuro 6 unidades, a barra preta 7 unidades, a barra castanha 8 unidades, a barra azul 9 unidades e a barra laranja 10 unidades. No entanto, os alunos é que devem associar os números às respetivas barras, tendo, deste modo, a oportunidade de descobrirem as relações existentes entre os diferentes comprimentos das barras, através da observação e manipulação, como, por exemplo, quando se trabalha nos primeiros anos os números naturais, as operações aritméticas e, posteriormente, os números racionais.

Após a análise dos documentos orientadores expõem-se, em seguida, as mais valias do uso das barras de Cuisenaire no 1.º e 2.º CEB.

Assim, no 1.º CEB, no domínio de NO, apresentam potencial para se trabalhar os números naturais, sistema de numeração decimal, adição, subtração, multiplicação, divisão inteira, números racionais não negativos, adição, subtração, multiplicação e divisão de números racionais não negativos representados por frações. No domínio Geometria e Medida (GM) na localização e orientação no espaço, figuras geométricas,

medidas de distância e comprimento.

Boldrin (2009) refere que as barras de Cuisenaire podem ser utilizadas desde a EPE e servir de apoio pedagógico nos primeiros anos, dado que este material tem como intuito ajudar na compreensão de alguns conceitos, tais como “sucessão de números naturais ou a decomposição de uma adição em diferentes parcelas”, bem como nas subtrações. “Nas atividades, os conceitos trabalhados são: sucessor, antecessor, estar entre, antes de, depois de, maior e menor” (p. 4). Pode-se ainda trabalhar com as operações como a multiplicação e a divisão.

Costa, Alves, Coelho e Tavares (2009) mencionam algumas valências das barras de Cuisenaire, nomeadamente, realização de construções livres ou, a partir de representações no plano, cobrir superfícies desenhadas em papel, ordenação de números, compor e decompor números, explorar as propriedades de operações aritméticas elementares, explorar frações e decimais, explorar simetrias e padrões, medir perímetros, construção de itinerários, entre outros.

No 2.º CEB, no domínio de NO, as barras de Cuisenaire apresentam grande potencial para trabalhar os conteúdos números racionais não negativos.

Ao utilizar as barras de Cuisenaire exploram-se conteúdos matemáticos, tais como os números naturais, as operações (adição, subtração, multiplicação e divisão), frações, área, perímetro, comparações de comprimentos, entre outros (Cunha & Lima, 2011).

### **Limitações e dificuldades das barras de Cuisenaire**

Embora reconhecendo as vantagens do uso deste material, existem algumas limitações a considerar.

Efetivamente, os alunos, ao manipularem este material, convém que não memorizem o código de cores das barras, pois o que interessa é o estabelecimento de relações entre as diferentes barras que constituem o material. Deste modo, é importante que os alunos tenham capacidade de abstração, uma vez que pode acontecer que a barras distintas estejam associados os mesmos números ou a barras iguais números diferentes.

#### **3.1.3.1.2. Tangram**

##### **Conteúdos programáticos que podem ser trabalhados com o tangram**

Com base nos documentos curriculares, como as “OCEPE”, “Aprendizagens Essenciais referentes ao Ensino Básico” e no “Programa e Metas Curriculares de Matemática no Ensino Básico”, são perceptíveis os conteúdos programáticos que podem justificar um trabalho com o tangram na sala de aula.

No 1.º CEB, no domínio de NO, o tangram pode apresentar potencial nos conteúdos números racionais não negativos e representação decimal de números racionais não negativos. Do mesmo modo, potencia o trabalho desenvolvido no domínio de GM, nomeadamente localização e orientação no espaço; figuras geométricas: ângulos e propriedades geométricas; medida: distância e comprimento e área.

Benevenuti e Santos (2016, p.5) referem que o tangram “contribui para o desenvolvimento da capacidade de concentração, coordenação e orientação espacial na formação do educando” bem como “estimula o espírito de investigação, o interesse, a criatividade, a curiosidade e o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas” (p.6).

Segundo Padilha e Martini (2010), o tangram é um material didático que pode ser utilizado no ensino da Matemática “pois além de despertar o interesse dos alunos de uma forma lúdica, sua confecção é simples

e tem um custo baixo, podendo-se aproveitar restos de materiais, como cartolina, madeira, EVA e forro de PVC” (s.p).

Para se construir um tangram, parte-se da forma geométrica de um quadrado que pode ser feita com régua, compasso ou através de dobras no papel. Através da construção do tangram, podem-se trabalhar alguns conceitos matemáticos, tais como, diagonal, equidistância, ponto médio, segmento de reta, vértice, paralelismo e perpendicularidade, congruência, simetria, semelhança de triângulos, área, perímetros, ângulos, nome de polígonos, entre outros (Youssef, 2014).

Uma das formas para se construir um tangram, apresentado por Alves, Gaideski e Junior (2010, s.p),

Traçando uma das diagonais, o quadrado se divide em dois triângulos congruentes. Num dos lados do quadrado, determina-se o ponto médio e por ele trace um segmento paralelo à diagonal. Neste segmento traçado, determine o ponto médio e trace outro segmento perpendicular à diagonal até o vértice mais distante do quadrado. Até aqui, construímos três triângulos retângulos e dois trapézios retângulos. Determine os pontos médios das bases maiores dos trapézios, e por um deles trace a altura de um dos trapézios. Pelo outro ponto médio, trace um segmento até o vértice oposto do trapézio com os lados formando um ângulo reto. Obtém então o Tangram por completo.

Padilha e Martini (2010) defendem que, como o tangram é constituído por figuras geométricas, apresenta potencial para o desenvolvimento da percepção e da visualização.

Nos primeiros anos, para que o aluno explore as formas geométricas, o professor pode pedir às crianças que construam figuras (de pessoas, animais, objetos, entre outros) utilizando as peças do tangram (Padilha & Martini, 2010).

A Secretaria de Educação (s.d) afirma que este material didático permite desenvolver habilidades em várias áreas. Assim, é possível “exercitar a resolução de problemas”, pois, quando se quer criar uma figura, é necessário planejar onde a peça será colocada. Para além disso, uma das mais valias é “estimular a criatividade”, dado que as peças possibilitam originar várias figuras, sendo “que algumas dessas imagens podem ser montadas de maneiras distintas”. Por fim, pode ainda “melhorar a noção espacial”, visto que possibilita que as peças possam ser posicionadas e rodadas, levando ao reconhecimento e posicionamento de formas geométricas.

O uso do tangram permite desenvolver a visão espacial, explorar a criatividade, classificar formas geométricas e, ainda, melhorar a capacidade para resolver problemas, trabalhando a lógica matemática e a abstração (Secretaria da Educação, s.d).

Forster e Horbach (2012) ainda acrescentam que o uso do tangram não se limita apenas a ensinar figuras geométricas planas. Com este material também se exploram conteúdos relativos a números e operações e álgebra, desenvolvendo a criatividade e o raciocínio lógico.

Para Benevenuti e Santos (2016), através do tangram é possível trabalhar não só as frações, como também as percentagens, isto é, representar números racionais não negativos na forma de fração, decimal e percentagem e estabelecer relações entre as diferentes representações, conceito de área, sendo “possível facilitar o entendimento das fórmulas utilizadas para calcular a área das figuras geométricas envolvidas, trabalhar o perímetro das figuras e respectivos ângulos internos”.

Nesta linha de pensamento, outros autores advogam que este material didático pode ser utilizado para

o ensino de áreas, perímetros, semelhança de figuras e ângulos. Deste modo os alunos podem calcular as medidas das figuras construídas, utilizando instrumentos de medição como a régua, transferidor, compasso, entre outros (Alves, Gaideski & Junior, 2010).

Ao nível do 2.º CEB o tangram pode ser utilizado no domínio de NO, nomeadamente nos números racionais não negativos e o domínio de GM, nas propriedades geométricas: triângulos e quadriláteros; medida: área e amplitude de ângulos.

Os conteúdos matemáticos que podem ser estudados com este material situam-se ao nível das “formas bidimensionais, formas tridimensionais, composição e decomposição de formas tridimensionais” e “frações: significados e notações” (Secretaria da Educação, s.d).

Cunha e Lima (2011) são de opinião que, ao utilizar o tangram, podem-se explorar conceitos matemáticos “como identificação, comparação, descrição, classificação, congruência, visualização espacial, formas geométricas, área, perímetro, dentre outros” (p. 28).

Do mesmo modo, Pollon e Leineker (2013) especificam alguns conceitos matemáticos que, também, a seu ver, podem ser compreendidos com o uso do tangram, a saber, “identificação, classificação, desenho de formas geométricas planas, visualização e representação dessas figuras, compreensão das propriedades de figuras planas, representação e resolução de problemas usando modelos geométricos, noções de áreas e frações” (s.p). Para além disso, os mesmos autores alegam ainda que este material pode ser utilizado em vários conteúdos relacionados com a geometria, tais como “formas geométricas, trabalhar a lógica, e a criatividade” (s.p).

Uma breve análise comparativa permite compreender que as barras de Cuisenaire, já apresentadas, e o tangram partilham do mesmo potencial para trabalhar os números racionais.

### **Limitações e dificuldades do tangram**

Apesar das vantagens que o tangram pode trazer para a dinâmica de uma aula de Matemática, uma das dificuldades associadas a este material está relacionada com a visualização espacial, isto é, os alunos rodarem as peças/construções para poderem visualizá-las noutras posições. Efetivamente, os alunos podem afirmar que a figura que construíram não está igual à que pretendem, sendo que, por vezes, é necessário rodar as peças.

#### **3.1.3.1.3. Mira, espelhos e papel vegetal**

##### **Conteúdos programáticos que podem ser trabalhados com a mira, espelho e papel vegetal**

Com base nos documentos curriculares, como as “OCEPE”, “Aprendizagens Essenciais referentes ao Ensino Básico” e no “Programa e Metas Curriculares de Matemática no Ensino Básico”, é possível concluir acerca dos conteúdos programáticos que podem justificar um trabalho com o espelho, mira e papel vegetal na sala de aula.

No 2.º CEB no domínio GM, mais concretamente Medida, o uso do espelho, da mira e do papel vegetal justifica-se para trabalhar a amplitude de ângulos e as isometrias do plano.

Batistela (2005) advoga que a utilização de um espelho no ensino da geometria, nomeadamente no conceito de simetria, torna-se bastante eficaz. Este autor diz ainda que com um espelho plano se obtém o simétrico de uma imagem em relação ao espelho, pois este é como se fosse “uma linha de simetria”,

proporcionando aos alunos uma “aprendizagem exploratória de propriedades e conceitos geométricos” (p.3).

Segundo Veloso, Bastos e Figueirinhas (2009, p. 24) com os espelhos planos pode-se explorar a transformação reflexão, tal como as miras, que são constituídas de “um material transparente que também reflecte luz”. Com os espelhos, no plano ou no espaço, podem ser abordados todos os tipos de isometria, porque as isometrias podem ser obtidas como “compostas de reflexões” e, por isso, é viável trabalhar com rosáceas, frisos, padrões e, também, simetrias de alguns poliedros.

Para estudar as isometrias, para além do espelho, é possível recorrer à mira, bem como a folhas de papel vegetal ou papel transparente, ao Geogebra, ao Gerador e Classificador de imagens (Gecla), entre outros. O Geogebra e o Gecla constituem-se como Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD).

### **Limitações e dificuldades do uso do espelho, mira e papel vegetal**

Independentemente das virtudes que se reconhecem do uso de espelhos, importa referenciar também as limitações/dificuldades que este material pode fazer surgir em sala de aula. Com efeito, a utilização de espelhos para trabalhar a simetria de reflexão apresenta alguns entraves no seu uso. Quando se pretende verificar a simetria de uma figura, parte desta fica ocultada pelo espelho, visto que aquela que ficou do lado de trás do espelho não é refletida. Esta situação não acontece quando se recorre à mira, dado que o material que a compõe é transparente e, desse modo, pode-se observar, através dela, a imagem/figura completa. Utilizando o espelho, não se consegue, portanto, verificar se a imagem coincide ou não com a parte que é ocultada pelo mesmo.

Já a mira apresenta como dificuldades o facto de esta ter uma espessura que tem de ser considerada aquando da marcação dos eixos de simetria.

Quanto ao papel vegetal, os alunos não podem estar sempre a mexer com a folha, porque os elementos da figura que estão a passar para o papel vegetal podem ficar no lugar “errado”. Para além disso, o tempo que é despendido para desenhar no papel vegetal é um dos condicionamentos.

#### **3.1.3.1.4. Torre de Hanói**

##### **Conteúdos programáticos que podem ser trabalhados com a torre de Hanói**

Uma análise detalhada dos documentos curriculares, como as “OCEPE”, “Aprendizagens Essenciais referentes ao Ensino Básico” e no “Programa e Metas Curriculares de Matemática no Ensino Básico”, deixa antever utilizando a torre de Hanói na sala de aula de Matemática envolvendo os conteúdos programáticos que podem potenciar o trabalho com o material didático, principalmente ao nível do 2.º CEB.

O seu uso vai desde a EPE até ao ensino superior. Inicialmente, utiliza-se uma quantidade pequena de discos, para se verificar o menor número de movimentos necessários para mover a “torre” de um pino para o outro (Watanabe, 2004).

Pelas suas características, a utilização deste recurso didático permite aos alunos desenvolver destrezas mentais, como, por exemplo, arranjar uma estratégia durante as jogadas (que está associada à resolução de problemas), capacidade de concentração, trabalhar com algoritmos matemáticos, promovendo o trabalho colaborativo e desenvolvimento da capacidade cognitiva (Nascimento, Coutinho, Souza, Costa & Santana, 2017).

Oliveira, Calejon e Brito (2016, p.2), apoiando a ideia de Nascimento, Coutinho, Souza, Costa e

Santana (2017), consideram a torre de Hanói um valioso material didático para o ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos, a saber “trabalhar com o desenvolvimento de habilidades mentais, tais como: estabelecimento de plano de ação durante as jogadas, concentração, trabalhar algoritmos matemáticos, socialização e desenvolvimento da capacidade cognitiva”.

No 1.º CEB no domínio de NO, a torre de Hanói apresenta potencial para se trabalhar resolução de problemas, raciocínio e sequências e regularidades, isto é, problemas que envolvam a determinação de termos de uma sequência dada a lei de formação e a determinação de uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida. Nesta linha de pensamento é viável pedir aos alunos que descubram uma regularidade entre o número de jogadas, conseguindo posteriormente encontrar uma lei de formação para quaisquer números de discos que sejam utilizados (Watanabe, 2004).

No que respeita ao 2.º CEB, e mais concretamente no domínio de álgebra (ALG), a torre de Hanói permite o trabalho de sequências e regularidades, para determinação de termos de uma sequência definida por uma lei de formação recorrente ou por uma expressão geradora, determinação de expressões geradoras de sequências definidas por uma lei de formação recorrente e determinação de uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida. Ainda no domínio de ALG, este material apresenta potencial para trabalhar potências de expoente natural.

Na utilização deste material didático, trabalham-se conceitos matemáticos como a progressão geométrica, sequências numéricas, função exponencial e sequências recursivas/recorrentes, isto é, quando determinado termo pode ser calculado através de termos anteriores (Oliveira, Calejon & Brito, 2016).

Já Nascimento, Coutinho, Souza, Costa e Santana (2017) referem que a torre de Hanói permite, de uma forma lúdica, explorar conteúdos como a função exponencial e de progressão geométrica, trabalhados posteriormente no ensino secundário.

### **Limitações e dificuldades no uso da torre de Hanói**

A par dos benefícios que advêm do uso da torre de Hanói, existem dificuldades que convém registar.

A maior delas prende-se com a dificuldade do jogo, e, portanto, da utilização do material em chegar ao número mínimo de jogadas. Note-se que, inicialmente, quando ainda existe um número reduzido de peças, o grau de dificuldade não é elevado, mas um número maior de peças para movimentar pode levar a demasiados movimentos, não se alcançando o objetivo pretendido. Para se sagrar vencedor tem de se fazer o menor número de movimentos possíveis com as peças.

### **3.2. Aprendizagens significativas**

Uma aprendizagem significativa é a informação que é aprendida e que se relaciona com outras ideias já adquiridas (Pessoa, 2009).

Segundo Santos (2004, s.p)

a promoção da aprendizagem significativa se fundamenta num modelo dinâmico, no qual o aluno é levado em conta, com todos os seus saberes e interconexões mentais. A verdadeira aprendizagem se dá quando o aluno (re)constrói o conhecimento e forma conceitos sólidos sobre o mundo, o que vai possibilitá-lo agir e reagir diante da realidade.

Moreira e Masini (1982) referem que a aprendizagem significativa depende do significado que o indivíduo atribui ao novo conceito e do conhecimento prévio que tem do mesmo.

Por sua vez, Pelizzari, Kriegl, Baron, Finck e Dorocinski (s.d.) sublinham que, para existir aprendizagem significativa, é necessário o aluno ter vontade de aprender, dado que, se este memorizar somente os conteúdos, isso é uma aprendizagem mecânica e os conteúdos que o aluno aprender têm de ter significado para ele.

Para Moreira (2010) a aprendizagem significativa resulta das ideias que interagem com aquilo que o indivíduo já conhece. Isto não acontece com as ideias prévias, mas sim com conhecimentos existentes na estrutura cognitiva do aluno. Os conhecimentos prévios que os alunos têm como conceitos, ideias, esquemas são importantes no processo da aprendizagem significativa de novos saberes, dando, assim, significado a estes conhecimentos. Para ocorrer aprendizagem significativa é necessário que o material seja significativo e o aluno tenha predisposição para aprender, ou seja, relacione os novos conhecimentos com os conhecimentos prévios.

Primeiramente, o professor deve averiguar o conhecimento que os alunos têm do conteúdo a ser trabalhado e, posteriormente, ter em conta os conceitos científicos que o aluno deverá aprender. O professor tem aqui um papel fundamental, pois deve promover desafios, atividades permanentes, atividades em grupo e utilizar materiais didáticos. O autor salienta ainda que as aprendizagens significativas podem ser utilizadas noutros contextos (Gasparin, 2005).

Existem três tipos de aprendizagem significativa, mencionados por Moreira (2010), nomeadamente representacional, conceitual e proposicional. A primeira está relacionada com as representações que os alunos têm, a segunda associa-se com os conceitos e, por último, as proposições em que se parte de um discurso na qual se expõe o assunto que se pretende provar com o objetivo de o tomar como norma ou regra. O mesmo autor assinala também que, analogamente, pode ser definida como aprendizagem significativa por subordinação, superordenação e de modo combinatório. A aprendizagem significativa é dita subordinada “quando os novos conhecimentos potencialmente significativos adquirem significados, para o sujeito que aprende, por um processo de ancoragem cognitiva, interativa, em conhecimentos prévios relevantes mais gerais e inclusivos já existentes na sua estrutura cognitiva” (p. 14). A aprendizagem significativa por superordenação envolve “processos de abstração, indução, síntese, que levam a novos conhecimentos que passam a subordinar aqueles que lhes deram origem” (p. 15). Por último, na aprendizagem significativa de modo combinatório

a atribuição de significados a um novo conhecimento implica interação com vários outros conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva, mas não é nem mais inclusiva nem mais específica do que os conhecimentos originais. Tem alguns atributos criteriais, alguns significados comuns a eles, mas não os subordina nem superordena (p. 16).

Moreira (2010) refere que a aprendizagem significativa se torna facilitadora se o aluno definir inicialmente o que é importante para, posteriormente, “diferenciar e reconciliar significados, critérios, propriedades, categorias” (p. 20).

Na avaliação da aprendizagem significativa, deve salientar-se a “compreensão, captação de

significados, capacidade de transferência do conhecimento a situações não-conhecidas, não-rotineiras” (Moreira, 2010, p. 24).

Mansutti (1993) defende que, para se desenvolver uma aprendizagem significativa, os alunos devem ter contacto com “experiências que os levem a ouvir, ver e manipular materiais”, dado que “quanto mais os sentidos estiverem presentes na aprendizagem, mais eficiente ela será” (p. 23).

A aprendizagem significativa apresenta vantagens, das quais se salientam duas. Por um lado, o conhecimento que se adquire é recordado por mais tempo, não se esquecendo rapidamente do que foi aprendido. Por outro, a capacidade de aprender outros conteúdos vai ser um processo mais fácil e é um facilitador de aprendizagens seguintes (Pelizzari et al., s.d.).

Nesta linha de pensamento, também Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 61) se referem às vantagens que a aprendizagem significativa traz para o aluno:

os conhecimentos adquiridos significativamente ficam retidos por um período maior de tempo; as informações assimiladas resultam num aumento da diferenciação das ideias que serviram de «âncoras», aumentando, assim a capacidade de uma maior facilitação da subsequente aprendizagem de materiais relacionados; as informações que não são recordadas (são esquecidas) após ter ocorrido a assimilação ainda deixam um efeito residual no conceito assimilado e, na verdade em todo o quadro de conceitos.

Por fim, Silva e Guirado (2014) lembram que pode não estar a existir uma aprendizagem significativa se os professores realizam somente exercícios, testes e provas, existindo, nesses casos, apenas memorização dos conteúdos.

### **3.2.1. Papel do professor e dos alunos**

Para que os conhecimentos sejam significativos, o papel do professor é fundamental e inicia-se com a escolha da tarefa a partir da qual se fará a exploração matemática, com o objetivo de atingir as aprendizagens propostas, com base nos programas curriculares.

As interações que se estabelecem entre aluno-aluno apresentam mais potencial do que numa aula orientada maioritariamente pelo professor (Ponte, Oliveira, Cunha & Segurado, 1998). As interações que se estabelecem entre os alunos permitem novas descobertas e constroem um conhecimento efetivo. Estas interações também fazem com que os alunos se sintam mais à vontade do que quando estão em grande grupo. Simultaneamente, vão-se apropriando da sua linguagem matemática, pois, quando falam e ouvem os colegas, clarificam as suas ideias (Buschman, 1995 citado por Martinho & Ponte, 2005).

Quando a discussão ocorre para toda a turma, os alunos acabam por ficar mais calados se não tiverem certezas do que querem dizer, dado quererem agradar ao professor (Alro & Skovsmose, 2002 citados por Martinho & Ponte, 2005).

As interações que se estabelecem entre aluno-aluno são diferentes daquelas que ocorrem entre aluno-professor. Numa aula que não seja só exposição de matéria e resolução de exercícios, o professor assume um papel de coordenador. As questões que coloca na aula são importantes, levando ao desenvolvimento de capacidades de comunicação e raciocínio (Menezes, 1995).

Outro aspeto a ter em consideração é a negociação de significados, uma vez que, na aprendizagem

da Matemática, se vai construindo um conjunto de significados através dos quais o aluno evolui no seu conhecimento matemático. O significado constrói-se a partir das conexões que o aluno estabelece entre o que aprendeu e os seus conhecimentos prévios. Bishop e Goffree (1986, citados por Martinho & Ponte, 2005) mencionam ainda que a negociação de significados diminui se o professor tiver um elevado controlo na dinâmica da aula. Neste sentido, é necessário que exista uma “descentralização da autoridade” (p. 4), pois os alunos devem justificar as suas respostas sempre que se considere oportuno, para poderem verificar o que está certo ou errado (Bishop & Goffree, 1986 citados por Martinho & Ponte, 2005). No entanto, para que os alunos possam verificar a veracidade das suas respostas, é preciso que haja tempo para pensarem e se questionarem (Ponte & Santos, 1998).

### **3.2.2. Comunicação na sala de aula de Matemática**

A comunicação no contexto da sala de aula de Matemática é um processo fundamental.

Ponte e Serrazina (2000, citados por Martinho & Ponte, 2005) definem que a comunicação é um “processo social” em que os intervenientes trocam informações e se influenciam um ao outro. No processo de comunicação é importante ter em consideração a interação e a negociação de significados, isto é, a forma como os participantes interagem com os conceitos e os processos matemáticos.

Por sua vez, Menezes, Ferreira, Martinho e Guerreiro (2014, p. 137) consideram que a comunicação pode acontecer por “transmissão e partilha de informações, conhecimentos e ideias, sustentada no conhecimento e nas formas de circulação desse conhecimento”. A comunicação pode ser utilizada para transmitir informação ou estabelecer uma interação social. Como transmissão de informação, ela tem como intuito que o destinatário reaja de acordo com que o comunicador transmitiu. A comunicação como interação social é um processo em que os sujeitos interagem entre si, onde existe troca de informações, influenciando-se mutuamente e construindo significados que ambos partilham.

Para existir, efetivamente, comunicação é necessário não só que os comunicantes partilhem códigos comuns, como também que o ambiente criado seja propício e que não haja ruídos na transmissão da mensagem. O objetivo do ato comunicativo é o entendimento e a interpretação do outro, onde os intervenientes se complementam e existe reconhecimento de ambas as partes (Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014).

No processo de ensino-aprendizagem, e no que diz respeito à comunicação matemática, é necessário que haja compreensão dos códigos culturais partilhados pelos sujeitos e interações entre o professor e os alunos. Sierpinska (1998, citado por Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014) assegura que a comunicação na sala de aula de Matemática é um processo comunicativo e, por isso, constitui-se como um meio que faz circular o conhecimento matemático, sustentado num procedimento social que ocorre entre aluno e professor.

A comunicação, enquanto transmissão de informação no âmbito da Matemática, implica a decodificação do conhecimento que deve ser transmitido aos alunos numa linguagem entendida por todos. Os códigos utilizados na linguagem matemática constituem-se como um processo de comunicação matemática no ensino (Ellerton & Clarkson, 1996 & Menezes, 2004 citados por Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014).

Na comunicação, entendida como interação social, o conhecimento surge de um discurso que se

desenvolve na sala de aula, decorrente de uma comunicação coletiva e de interações entre o professor e os alunos, existindo interpretação e negociação de significados matemáticos e sociais (Menezes, 1997).

O professor, enquanto comunicador, concretiza quatro ações discursivas principais, sendo estas explicar, questionar, ouvir e responder (Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014).

Nas aulas de Matemática são, de facto, muitos os momentos em que o professor tem de explicar. De acordo com Bishop e Goffree (1986, citados por Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014) o ato de explicar consiste no estabelecimento e conexão entre ideias, ou seja, entre a ideia que está a ser explicada e as outras que são partilhadas entre os intervenientes. Existem quatro tipos de explicações, sendo estas designadas de comuns, disciplinares, instrucionais e autoexplicações.

As explicações comuns fazem parte do quotidiano e emergem do questionamento simples e direto, não estando associadas a nenhum tipo de discurso. As explicações disciplinares estão relacionadas com os conteúdos disciplinares e revestem-se de algum formalismo. As explicações disciplinares encontram-se nos manuais escolares ou numa definição formulada pelo professor. Já as explicações instrucionais são direcionadas principalmente para o ensino, tendo como intuito comunicar o conteúdo a alguém, ou seja, apoiar a aprendizagem. Estas explicações são menos formais e mais redundantes do que as disciplinares, surgindo a partir de exemplos concretos sem uma finalidade normativa. Nas explicações instrucionais, é necessário que o professor conheça bem os seus alunos. Para que a explicação se suporte no conhecimento prévio, isso requer que o professor tenha um conhecimento profundo que lhe permita adequar os conteúdos aos conhecimentos dos alunos. Numa sala de aula, existem discussões coletivas ou trabalhos em grupo, que se designam de diálogos instrucionais, onde o professor deve pedir aos alunos que expliquem para todos as suas formas de pensar. Por fim, as autoexplicações não são tão usuais em sala de aula, pois dizem respeito a questões colocadas e que são respondidas pela própria pessoa. As autoexplicações surgem nas reflexões individuais onde se estabelecem conexões entre os conhecimentos. Na sala de aula, as autoexplicações podem surgir sob as mais variadas formas, desde desenhos, a esquemas, ou a cálculos. Então, o professor regista eventuais possibilidades de resolução para dificuldades encontradas pelos alunos, ou “modela processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas desafiantes” (Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014, p.143).

O poder de comunicação que o professor tem na sala de aula deve levar a que ele reflita sobre o tipo de perguntas que faz. Love e Manson (1995, citados por Martinho & Ponte, 2005) apresentam três tipologias de perguntas: de focalização, de confirmação e de inquirição. As perguntas de focalização têm como intuito focar a atenção do aluno em algo em específico. As de confirmação têm como função testar os conhecimentos, ou seja, o professor pretende ouvir uma determinada resposta quando coloca aquela pergunta. Por fim, as perguntas de inquirição justificam-se quando o professor pretende saber alguma informação do aluno.

A ação discursiva de questionar é uma ação comunicativa que está mais relacionada com o professor, sendo o discurso deste pautado por perguntas, que são dirigidas aos alunos e que podem ser colocadas na forma de questão ou não (Menezes, Guerreiro, Martinho & Tomás Ferreira, 2013 citados por Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014). Do mesmo modo Ainley, Mason e Menezes (1988, 2000, 1995 citados por Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014) distinguem duas tipologias de perguntas. Por um lado, as que visam testar o conhecimento dos alunos, ou seja, pretendem que o aluno transmita informação para

a comparar com o que professor disse, sendo estas chamadas de perguntas teste ou de verificação. Por outro lado, as que são colocadas pelo professor com o objetivo de levar os alunos a compreender o conhecimento matemático denominam-se como perguntas de focalização e inquirição. Com o recurso a perguntas de focalização, o professor direciona a atenção do aluno para um determinado aspeto, ao passo que, com as perguntas de inquirição, solicita ao aluno que expresse o seu raciocínio, para verificar as suas estratégias de pensamento.

Numa aula de Matemática, o professor deve dar oportunidade aos alunos para participarem e, nesses momentos, colocar-se na posição de ouvinte dos seus alunos. Ouvir não é simplesmente prestar atenção ao que foi dito, mas também saber interpretar (Tomás, 2005, citado por Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014). Segundo Davis (1996, citado por Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014) existem três modos de ouvir que se complementam, sendo estes avaliativo, interpretativo e hermenêutico. O ouvir avaliativo tem como função avaliar os saberes dos alunos, enquanto que o ouvir interpretativo pretende compreender as ideias, pensamentos e raciocínios dos alunos. Espera-se que eles desenvolvam o seu raciocínio, que tenham capacidade para explicitar e justificar as suas afirmações. Simultaneamente, melhora-se a interação entre a turma. O ouvir hermenêutico reflete-se quando a função é avaliar a forma de pensar dos alunos com o objetivo de apoiar o processo de ensino-aprendizagem, “participando na exploração e negociação de significados com os alunos” (p.154). O ouvir hermenêutico inclui os alunos em discussões matemáticas que são desafiantes, no entanto, os alunos também têm de ser bons ouvintes. De acordo com o Ministério da Educação e National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2007, 2000, citados por Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014), o ouvir hermenêutico é o que mais se adequa ao ensino-aprendizagem da Matemática.

Responder é um ato comunicativo que, da parte do professor, dá continuidade às intervenções dos alunos. As suas respostas podem ser diretas, para explicar ou dar uma informação adicional. Deve evitar-se a validação de respostas, bem como a comparação das respostas de alunos (Nicol, 1999 citado por Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014).

Por sua vez, as respostas dos alunos dependem da forma como são ouvidas pelo professor, mas também das questões que são colocadas anteriormente. Quando o professor lança uma questão de verificação, a sua resposta pode ser apenas para corrigir a intervenção do aluno (Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014).

As quatro ações comunicativas (perguntar, explicar, ouvir e responder) dependem umas das outras e não podem ser vistas em separado. Por exemplo, as questões de verificação associam-se, habitualmente, a respostas diretas e ao ouvir avaliativo. Já as perguntas de inquirição relacionam-se a um ouvir “globalizante e uma diversidade de respostas do professor às contribuições dos alunos, envolvendo sobretudo o redigir de questões, o aprofundar ou desenvolver de ideias, o explicitar ou partilhar estratégias”. As perguntas de focalização têm a ver com o modo de ouvir interpretativo, onde as respostas do professor tanto podem manter o nível cognitivo da pergunta inicial, como podem diminuí-lo (Ferreira, 2005, citado por Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014, p. 148).

Após se terem analisado as quatro ações comunicativas, importa também referir as dinâmicas comunicativas que ocorrem na sala de aula de Matemática, onde intervém o professor, alunos e o conhecimento matemático. Deste modo é importante falar-se sobre “estilos de comunicação e padrões de

interação; negociação de significados e normas sociomatemáticas; e discussão coletiva” (Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014, p.149).

Segundo Brendefur e Frykholm (2000, citados por Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014) podem considerar-se quatro estilos de comunicação matemática: unidirecional, contributiva, reflexiva e instrutiva. Nos estilos de comunicação unidirecional e contributiva, a comunicação é dominada pelo professor. Na comunicação contributiva existem pequenas intervenções dos alunos, associadas a respostas resultantes de perguntas de verificação que são colocadas pelo professor. A comunicação reflexiva está associada à ação e à reflexão, em que o discurso que ocorre na aula é objeto de discussão. A comunicação instrutiva baseia-se nas ideias, estratégias e dificuldades dos alunos, pelo que o professor tem de “refazer”, frequentemente, o discurso na sala de aula. Nos estilos de comunicação reflexiva e instrutiva, os alunos comunicam matematicamente e os professores desenvolvem nos alunos o pensamento, a capacidade de questionar de comunicar. Deste modo, a comunicação transforma-se “num processo social” (p. 150) em que os intervenientes interagem, trocando informações, e influenciam-se procurando entendimentos.

Os estilos de comunicação indicados anteriormente são padrões de interação social que se estabelecem entre o professor e os alunos. Existem diversos padrões de interação social, tais como: padrão de extração, padrão de discussão, padrão de funil e padrão de focalização (Bauersfeld, Voigt, Wood, 1994, 1985, 1994, citados por Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014). No que respeita ao padrão de extração e discussão, o professor, através do questionamento, consegue que os alunos mostrem o conhecimento, as ideias e raciocínio matemático através das suas respostas. Relativamente ao padrão de extração, o objetivo é verificar o conhecimento do aluno, através de questões que são colocadas pelo professor. No que concerne ao padrão de discussão, este procura verificar o conhecimento dos alunos, onde existe uma discussão coletiva, em que o papel do professor é, somente, gerir a discussão. Já quando se adota o padrão de funil, o professor dirige os alunos até à resposta que pretende ouvir. Por fim, e em relação ao padrão de focalização, após a dificuldade dos alunos ser ultrapassada, o professor incentiva-os para que continuem o seu processo de resolução autonomamente (Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014).

Para que exista discussão coletiva na sala de aula de Matemática, o professor tem de compreender o raciocínio dos alunos e deve apoiar o desenvolvimento das aprendizagens matemáticas. Numa aula de carácter exploratório, dá-se a discussão coletiva, após a resolução de tarefas matemáticas. Estas, por norma, são realizadas em pequeno grupo e, posteriormente, comunicadas matematicamente (Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014).

A discussão matemática, de acordo com Pirie e Schwarzenberg (1988, citados por Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014), é uma conversa que tem uma finalidade, sobre um tema matemático, havendo interação entre alunos e professor. Pressupõe que exista “definição de objetivos partilhados pelo grupo, o trabalho genuíno com ideias matemáticas e o envolvimento ativo, e não meramente reativo, por parte dos alunos, no ouvir crítico-reflexivo e na expressão do seu próprio pensamento” (p. 153).

Nas discussões coletivas na aula de Matemática existe construção, partilha de ideias e pensamentos, onde para além de falar, o ouvir é importante, pois possibilita aos alunos tentar entender os raciocínios dos colegas, arranjar estratégias de resolução, identificar e corrigir os erros (Hintz, 2011, citado por Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014).

A discussão coletiva precisa de ser preparada antes e durante a aula, através dos atos de antecipar,

selecionar e sequenciar as estratégias de resolução, sendo acompanhada pelo professor. Para que a discussão coletiva seja rica, Stein, Engle, Smith e Hughes (2008, citados por Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014) apresentam algumas estratégias. A primeira prática é prever eventuais estratégias de resolução das atividades e também antever dificuldades. Isto ocorre aquando da planificação da aula. Antes da discussão coletiva e durante a realização das tarefas, o professor deve orientar o trabalho, escolher e ordenar as resoluções realizadas pelos alunos.

O sucesso da discussão coletiva vai depender das estratégias adotadas e já mencionadas. Do mesmo modo devem-se estabelecer conexões entre as diversas estratégias, ter em conta os conceitos e procedimentos a adotar e, ainda, destacar-se as principais ideias matemáticas. O professor tem um papel de orientador, ouvindo e respondendo através de questões que coloca aos alunos, promovendo, assim, a comunicação e aprendizagem (Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014).

### **3.2.3. Planificação para aulas de ensino exploratório**

A par dos desafios que se colocam ao professor, já explicitados, neste trabalho há a considerar também a gestão curricular, a qual está relacionada com a forma como o professor interpreta e “(re)constrói” o currículo, tendo em consideração as características dos seus alunos e as suas condições de trabalho. A gestão curricular pode ocorrer a um nível

macro que tem a ver com o planeamento da prática letiva (seja de todo o ano letivo, seja de um período ou de uma unidade didáctica) e um nível micro, que corresponde à realização dessa mesma prática na unidade lectiva básica, a aula (Ponte, 2005, p.11 e 12).

A planificação pode elaborar-se por unidade, semana a semana ou aula a aula, fica ao critério de cada professor escolher o modelo que melhor se adequa, porém, qualquer um exige bastante planeamento, reflexão e flexibilidade em função do desenvolvimento do trabalho (Ponte, 2005).

Ainda segundo este autor, a gestão curricular inicia-se com a planificação da unidade didáctica, seguindo-se a preparação da aula ou da semana de trabalho e termina na gestão do processo ensino-aprendizagem que é realizada no decorrer da aula. Esta gestão é um processo complexo, com tomada de decisões sustentadas na informação que o professor vai recolhendo.

A planificação reflete a estratégia de ensino adotada, sobressaindo a ação do professor (o que vai fazer) e a ação do aluno (o que se espera que o aluno faça) e estabelecendo-se também um tempo ou um determinado número de aulas. Existem duas estratégias para o ensino da Matemática, sendo elas o “ensino direto” e o “ensino exploratório” (Ponte, 2005, p. 12). No ensino direto, o professor tem um papel mais ativo, partilhando informação com os alunos de modo claro e sistematizado. O aluno aprende ouvindo o que o professor diz e faz exercícios, que têm como objetivo aplicar os conhecimentos anteriormente explicados. O aluno, neste tipo de ensino, tem de prestar atenção ao que é dito pelo professor e responder a eventuais questões. O ensino exploratório distingue-se do anterior, pois nele o professor não tem um papel tão ativo, o trabalho de descoberta e de construção de conhecimento assume um papel mais importante para os alunos. Dá-se ênfase a tarefas de exploração e investigação, promovendo-se a discussão entre o professor e os alunos (Ponte, 2005).

Este autor refere que, na planificação de uma unidade didática, são de considerar vários fatores que se influenciam mutuamente. Estes prendem-se não só com o currículo em si, mas também com a turma com que se vai trabalhar, sem esquecer, obviamente, as condições, recursos e materiais disponíveis. Do mesmo modo, é fundamental ter em conta fatores como o contexto escolar e social.

Ao nível do currículo, o professor analisa os objetivos, pois neles estão expressos “conceitos matemáticos, modos de representar conceitos, o domínio de procedimentos, processos de raciocínio”, entre outros (Ponte, 2005, p. 19). O professor tem de decidir qual o nível de profundidade com que quer trabalhar os conteúdos matemáticos, dando prioridade aos objetivos curriculares principais a ter em atenção na unidade. Para além destes, existem ainda os objetivos curriculares transversais como, por exemplo, “o desenvolvimento da autonomia, da iniciativa, da capacidade de cooperação, da solidariedade, do espírito crítico, do sentido de responsabilidade, do gosto pela matemática”, entre outros (Ponte, 2005, p. 19). O professor pode, numa certa unidade, focar a sua atenção num determinado aspeto e, na seguinte, dar importância a outro. Quer isto dizer que a seletividade do professor relativamente aos objetivos e nos objetivos transversais está presente no trabalho realizado ao longo do ano, mas não com uma “preocupação constante e uniforme com todos eles” (Ponte, 2005, p. 19).

Outros aspetos a ter em conta são os alunos, os seus interesses e as suas capacidades. Na diversidade que é uma turma, encontram-se alunos que aceitam bem determinadas atividades e outros que são indiferentes ao que lhes é proposto. Nesta diversidade o professor tem de tentar corresponder às necessidades e interesses de todos os seus alunos (Ponte, 2005).

Intimamente relacionados com a gestão curricular e a planificação estão os materiais que se pretendem utilizar, tais como o manual escolar, outros documentos existentes ou a produzir (como as fichas de trabalho), ou ainda os computadores e as calculadoras disponíveis. No que concerne a estes últimos pode ser necessária uma preparação prévia. Por fim, há a considerar os materiais de geometria (compasso, régua, esquadro, transferidor, sólidos geométricos, geoplano, barras de Cuisenaire, entre outros). As condições e recursos de que a escola dispõe podem facilitar ou dificultar a realização de determinadas atividades (Ponte, 2005).

Associada à escolha dos materiais está a seleção de tarefas que potenciarão a construção do conhecimento. Cabe ao professor questionar-se se o trabalho que está a ser realizado pelos alunos está a contribuir para os objetivos curriculares e transversais delineados para aquela aula. Com efeito, se as tarefas determinam as aprendizagens que são partilhadas com os alunos, já a construção do conhecimento tem a ver com o papel que o aluno desempenha (Ponte, 2005).

No que diz respeito ao contexto escolar e social, o professor deve inteirar-se das informações mais relevantes que podem condicionar a aprendizagem. A título de exemplo, destaca-se o apoio que a escola pode dar às famílias, nomeadamente se os alunos, após terminarem as suas aulas, podem ficar na escola ou se têm de ir logo para casa, ou seja, se a escola dispõe de condições favoráveis para a cooperação (Ponte, 2005).

Inerente à gestão do currículo está a avaliação, sendo esta a forma de regular todo o processo de ensino-aprendizagem. Através dela o professor verifica as dificuldades dos alunos, bem como o reflexo do seu trabalho, o que lhe permite concluir sobre a necessidade de efetuar alterações, quer à sua planificação, quer ao seu modo de trabalho (Ponte, 2005).

Para aulas do ensino exploratório, os materiais manipuláveis assumem importância quando conjugados com as tarefas matemáticas (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2008).

No ensino exploratório, o professor apresenta a tarefa e acompanha o trabalho autónomo dos alunos, circulando pelos grupos para verificar se todos estão empenhados na tarefa e acompanhar as resoluções dos alunos, sem os interromper e, se algum grupo tiver dificuldades, o professor não pode dar demasiada informação, pois isso comprometerá o carácter desafiante das tarefas (Stein & Smith, 2009).

Após todos os grupos terem concluído a resolução da tarefa, o professor deve orientar significativamente as discussões matemáticas, ou seja, segue-se a discussão coletiva. Para orquestrar produtivamente as discussões matemáticas Stein et al., (2008 citados por Canavarro, 2011) destacam cinco práticas, sendo estas: 1. Antecipar; 2. Monitorizar; 3. Selecionar; 4. Sequenciar e 5. Estabelecer conexões.

A antecipação efetua-se ainda na fase da planificação e consiste em o professor prever como os alunos irão relacionar a tarefa proposta com os objetivos que delineou. Quando o professor antecipa, consegue prever as possíveis interpretações e o envolvimento que os alunos terão com a tarefa; consegue prever estratégias de resolução corretas e incorretas, com diferentes graus de complexidade; de acordo com as estratégias de resolução, consegue que os alunos relacionem “conceitos, representações, ou procedimentos que quer que os alunos aprendam e/ou com as capacidades que quer que eles desenvolvam” (Canavarro, 2011, p. 13).

O professor deve dominar bem as tarefas que propõe aos alunos e apresentar várias resoluções, representações e estratégias, pois, através de vários processos de resolução, também consegue verificar algumas dificuldades que possam surgir. Somente através de uma adequada exploração da tarefa, o professor consegue ter confiança para explorá-la com os seus alunos e preparar possíveis respostas e eventuais perguntas, bem como gerir discussões relacionadas com a aprendizagem Matemática (Canavarro, 2011).

A monitorização realiza-se na sala de aula, mas apoia-se muito no trabalho desenvolvido pelo professor na antecipação. A monitorização foca-se nas estratégias e resoluções feitas pelos alunos com o intuito de avaliar o seu potencial a fim de promover a aprendizagem Matemática na turma. Quando o professor monitoriza, este consegue verificar e ouvir os grupos de trabalho; avaliar as ideias, estratégias e resoluções matemáticas; “interpretar e dar sentido ao seu pensamento matemático, mesmo que lhe pareça estranho e/ou não o tenha antecipado; ajudar os alunos em dificuldade a concretizar resoluções que tenham potencial matemático relevante para o propósito matemático da aula” (Canavarro, 2011, p. 13). Uma das formas de monitorização passa por circular pelos grupos de trabalho para recolher informação, tal como o modo como estão a trabalhar, explorar, bem como raciocínios e ideias matemáticas que surjam da resolução da tarefa. Simultaneamente, pode ir fazendo apontamentos das resoluções dos alunos, tomando nota das que estão erradas e que, por isso mesmo, são interessantes para analisar na discussão coletiva. Para além disso, estará mais capaz de decidir que aspetos deve focar e aprofundar mais na discussão (Canavarro, 2011).

Durante a monitorização o professor seleciona os alunos, ou os grupos, que apresentarão resoluções importantes para discutir com a turma, com o objetivo de proporcionar uma panóplia de conceitos matemáticos adequados aos objetivos propostos para a aula. Quando o professor seleciona pode optar por diversas estratégias, tais como

escolher uma resolução que apresenta um erro recorrente a esclarecer; uma resolução particular que se distingue e acrescenta compreensão e/ou ajuda a atingir o propósito matemático da aula; resoluções com diferentes estratégias matemáticas, sobretudo as mais produtivas; resoluções com representações matemáticas diversas (Canavarro, 2011, p. 15).

A prática de sequenciar ocorre quase em simultâneo com a prática de selecionar, tendo em vista o processo de exploração, de acordo com os objetivos matemáticos que se pretendem alcançar. O professor tem de optar pela ordem em que os alunos devem fazer as suas apresentações para a discussão matemática, e para que a síntese tenha sucesso. Quer isto dizer que, se o objetivo da tarefa é que os alunos adquiram um novo conceito, o professor desejará que surjam primeiro as resoluções mais informais e só posteriormente aquelas que sejam mais genéricas. As apresentações das diversas resoluções podem obedecer a critérios distintos. Um deles é iniciar com uma resolução que ajude no princípio da discussão e que se baseie em ideias mais complexas, independentemente da resolução estar correta ou incorreta. Explorar uma resolução incorreta torna-se benéfico para os alunos que erraram, e mesmo para aqueles que acertaram, dado o seu carácter esclarecedor e enriquecedor. Outro critério baseia-se na formalidade com que o aluno resolveu as questões. Neste caso deve-se iniciar pelo grupo que utilizou processos informais e terminar nos grupos que recorreram a processos mais complexos e formais, no que diz respeito às representações matemáticas (Canavarro, 2011, p. 16).

A prática de estabelecer conexões acontece a seguir à discussão das diversas resoluções, podendo ocorrer, também, quando ainda se estão a apresentar as resoluções. O objetivo das discussões é desenvolver as ideias matemáticas através da relação das várias apresentações e posterior síntese das aprendizagens (Canavarro, 2011).

### **3.3. Ensino exploratório na aula de Matemática**

Canavarro (2011) considera que o ensino exploratório é aquele em que os alunos aprendem através do trabalho que efetuam com tarefas, fazendo surgir a necessidade de ideias matemáticas que são sistematizadas na discussão coletiva. Através deste tipo de ensino, os alunos veem surgir os seus conhecimentos e procedimentos matemáticos com significado, ao mesmo tempo que treinam e desenvolvem competências essenciais para a disciplina, destacando-se a capacidade para resolver problemas, para raciocinar e para comunicar matematicamente.

Stein et al. (2008, citados por Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012) afirmam que não basta selecionar uma tarefa para a prática do ensino exploratório da Matemática. O professor tem de saber as potencialidades que a tarefa apresenta junto com os alunos e deve preparar essa exploração. Para esta autora uma aula exploratória pode ser definida para três ou quatro fases, sendo estas a fase de lançamento da tarefa, a fase de exploração pelos alunos e a fase de discussão e sistematização. Na primeira fase, o professor apresenta a tarefa aos alunos, sendo por norma uma tarefa de investigação ou um problema que os alunos têm de interpretar. Nesta etapa o professor deve assegurar-se de que os alunos entenderam o que é para fazer e que os mesmo se sintam desafiados a trabalhar na tarefa. Para além disso, é essencial organizar o trabalho a desenvolver pela turma, estabelecer o tempo a dedicar a cada uma das fases, gerir os recursos a utilizar e definir o modo como os alunos vão trabalhar.

Na fase de exploração, torna-se imprescindível o apoio aos alunos no trabalho autónomo, realizado individualmente ou em pequenos grupos, verificando se todos participam de forma ativa. Os comentários e respostas do professor, na sequência de eventuais dúvidas por parte dos alunos, não devem diminuir a exigência cognitiva da tarefa, pois, se tal acontecer, isso pode influenciar o modo de resolução (sendo a resolução apresentada limitada) e limitar também a discussão matemática. Deve garantir-se que os alunos se preparam para apresentar o seu trabalho à turma. Cabe ao professor seleccionar, através do que foi vendo nas resoluções dos alunos, a ordem pela qual devem ser feitas as apresentações (Stein & Smith, 1998, citados por Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012).

Na discussão coletiva, analisam-se as resoluções que são apresentadas pelos alunos e o professor orienta a discussão, garantindo que as suas explicações e argumentações mantêm a qualidade matemática. É importante que se estabeleçam comparações entre as resoluções que são apresentadas (Ruthven, Hofmann & Mercer, 2011, citados por Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012). Nesta fase é fulcral que também ocorram novas aprendizagens sobre os conceitos, procedimentos e processos utilizados. Através da discussão, institucionalizam-se aprendizagens, que toda a turma deve partilhar, sendo um momento onde podem surgir ou serem aperfeiçoados novos conceitos e procedimentos, estabelecendo conexões com aprendizagens anteriores. Para além disso, podem ser suscitados processos como a representação, “a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática” (Canavarro, 2011, p.11).

São vários os desafios que o ensino exploratório da Matemática coloca ao professor. Primeiramente, tem de escolher criteriosamente as tarefas matemáticas que apresentam potencial que promovam aprendizagens significativas. A par disso, é importante realizar uma adequada exploração da tarefa na fase de planificar e antecipar possíveis resoluções dos alunos, em convergência com os objetivos que pretende com a tarefa. Procurará, ainda, que não exista “perda de tempo” na resolução da tarefa, evitando que esta se conclua na aula seguinte, nomeadamente a discussão coletiva ou a síntese dos conteúdos. De facto, na aula seguinte os alunos podem não estar já tão envolvidos. Do mesmo modo, o professor não deve fazer questões ou comentários que possam limitar as resoluções e, posteriormente, a discussão coletiva. Durante a resolução da tarefa evitará fornecer respostas assertivas aos alunos, pois, no tempo destinado à discussão matemática, os alunos já não terão interesse em partilhar a sua resolução, dado o professor já ter validado a sua resolução anteriormente. Relativamente ao tempo de resolução da tarefa, este não deve ser prolongado, mesmo que alguns grupos ainda não tenham terminado, dado que “as diferenças no grau de completude das resoluções dos alunos favorecem o interesse pela discussão colectiva e pela produção de sínteses matemáticas que complementam o trabalho realizado pelos grupos” (Canavarro, 2011, p. 17). Cabe ao professor, ainda, utilizar recursos que facilitem a comunicação dos alunos na fase de discussão, para que não se perca tempo a passar do quadro (pode-se optar por fotografias digitais, digitalizações, entre outros) e os alunos observem pormenores que são importantes. É de salientar, igualmente, a necessidade de registar os conhecimentos coletivos sistematizados durante a síntese que ocorreu na discussão coletiva e assegurar que os alunos efetuaram registos ou que tenham acesso a estes. Canavarro (2011) sublinha que um dos desafios do professor é, também,

favorecer a discussão efectiva de ideias por parte dos alunos a partir da qual possam aprender conceitos e procedimentos matemáticos, bem como desenvolver as suas capacidades, em particular a

discussão matemática, a discussão e a síntese são muito mais do que um desfile de resoluções distintas apresentadas à vez por diferentes alunos (p.17).

Por último, mas não menos relevante, compete ao professor encorajar os alunos a participar ativamente, a desenvolver o seu trabalho e querer saber do trabalho dos colegas (a ouvir, a falar, a explicar, a questionar) (Canavarro, 2011).

O ensino exploratório da Matemática é uma atividade complexa e difícil para muitos professores, pois implica uma boa gestão do trabalho dos alunos na resolução da tarefa, bem como compreender e interpretar as opções dos alunos na sua resolução, explorando as respostas para articular as ideias com os objetivos que foram perspectivados para aquela atividade (Stein et al., 2008, citados por Canavarro, 2011).

O ensino exploratório da Matemática torna-se, assim, uma mais valia para tornar as aprendizagens mais significativas para os alunos, pois através deste tipo de ensino estabelecem-se conexões entre os conhecimentos (conhecimentos prévios), evoluindo para conhecimentos mais complexos e que serão recordados por muito mais tempo.

#### **4. Metodologia**

De acordo com Rodrigues e Ponte (2020), o estudo trata-se de uma Investigação Baseada em Design (IBD), que tem por base uma experiência de prática pedagógica. Ponte, Carvalho, Mata-Pereira e Quaresma (2016) entendem que a IBD se constitui como uma base teórica sólida em que se apoia o ato de ensinar. Esta metodologia parte de uma hipótese à qual a investigação dará resposta.

O intuito da IBD não é validar a conjectura, mas sim torná-la mais importante e influente. Confrey e Lachance (2000, citados por Ponte et al., 2016) indicam que a conjectura tem duas dimensões que estão relacionadas, sendo estas a de conteúdo e pedagógica, “mas o que é essencial é que ela se reporte aos processos que irão resultar em aprendizagem e que seja efetivamente suscetível de teste e aperfeiçoamento” (p. 81). Deste modo, o presente trabalho de investigação enquadra-se numa IBD adaptada pelas condições impostas pela pandemia.

A IBD partilha com a investigação de carácter qualitativo e quantitativo o facto de serem interventivas e se orientarem para a inovação educacional. De facto,

o que distingue a investigação baseada em design destes tipos de investigação é que esta é orientada para a produção de novas teorias mais do que para o teste de teorias já existentes ou para a comprovação dos bons resultados a que a inovação supostamente conduz (Ponte et al., 2016, p. 82).

De acordo com Prediger, Gravemeijer e Confrey (2015, citados por Ponte et al., 2016) a IBD distingue-se por (i) visar um uso prático e direto de produtos curriculares ou princípios de design e (ii) visar a criação de teorias e processos de ensino-aprendizagem, que possam causar interesse a investigadores como a profissionais. Existe, também, uma preocupação com o facto dos alunos terem um papel ativo no processo de ensino-aprendizagem, tendo por base tarefas estimuladoras e que promovam a participação na sala de aula.

O design inicial deste trabalho de investigação assentou, em primeiro lugar, numa revisão teórica da literatura sobre diferentes aspetos, a saber:

- Materiais didáticos no ensino;
- Materiais estruturados e materiais não estruturados;
- Materiais didáticos no ensino-aprendizagem da Matemática;
- Estudos empíricos centrados na utilização de materiais didáticos no ensino-aprendizagem da Matemática;
- Materiais didáticos usados no design da experiência de ensino;
- Potencial didático e limitações dos materiais didáticos usados no design da experiência de ensino;
- Aprendizagens significativas;
- Ensino exploratório na aula de Matemática;
- Papel do professor e dos alunos;
- Comunicação na sala de aula de Matemática;
- Planificação para aulas de ensino exploratório.

Após uma revisão detalhada da literatura existente, adaptaram-se diferentes tarefas matemáticas e respetivos roteiros como formas de planificação pormenorizada onde o recurso a alguns materiais didáticos, característicos do ensino exploratório, pudesse proporcionar aprendizagens significativas aos alunos.

As tarefas matemáticas apresentadas visaram:

- Estabelecer aprendizagens prévias e visadas, de acordo com o programa e metas curriculares de Matemática no ensino básico;
- Explorar e aperfeiçoar conhecimentos matemáticos utilizando materiais didáticos;
- Prever eventuais dificuldades que os alunos possam ter e como o professor as pode ultrapassar, sem dar respostas “diretas” às dificuldades apresentadas;
- Prever eventuais respostas dadas por alunos nas resoluções das tarefas;
- Promover a discussão matemática onde os alunos são encorajados a discutir com toda a turma.

Neste trabalho de investigação não houve recolha de dados, devido à situação atual de pandemia, que levou ao encerramento das escolas e à implementação da modalidade de ensino à distância. Como este trabalho de investigação pressupõe manipulação de materiais didáticos, o ensino online impossibilitou a recolha de dados. Caso o tema de investigação fosse algo mais teórico, poder-se-ia ter optado por outras alternativas para se poder efetuar a recolha de dados, no entanto, como se pretendia observar como os alunos explorariam e manipulariam os materiais didáticos, bem como se baseariam nos mesmos para responder às questões apresentadas nas tarefas, tal só seria possível na modalidade de ensino presencial.

A pandemia condicionou fortemente a intervenção, portanto, as conclusões são provisórias.

## **5. Propostas de trabalho para a sala de aula de Matemática envolvendo materiais didáticos**

### **5.1. Nota introdutória**

Os professores são constantemente desafiados e têm de dar respostas eficazes às alterações que vão surgindo no sistema educativo.

Durante décadas, o ensino foi essencialmente expositivo onde o professor era o único comunicador na sala de aula, predominando uma comunicação unidirecional, um estilo de trabalho individual, baseado na resolução de exercícios e em que os únicos materiais utilizados eram o quadro e o manual. Atualmente este cenário é bastante diferente, dominando uma diversificação de tarefas, havendo maior comunicação e partilha de conhecimentos entre professor e alunos e em que estes passaram a ter um papel ativo no processo de ensino-aprendizagem. Assim, um futuro profissional da educação tem como missão ajudar os alunos a construir e a partilhar os seus conhecimentos matemáticos, dos quais necessitarão para melhor atuarem em sociedade.

Se é um facto que todo o professor tem como objetivo alcançar bons resultados e contribuir significativamente para as aprendizagens dos seus alunos, isso também implica saber lidar com os desafios com que se depara na sala de aula, entre os quais motivar para a disciplina.

Deste modo, considera-se que a utilização de materiais didáticos na prática pedagógica é uma mais-valia e pode influenciar positivamente o processo de ensino-aprendizagem Matemática.

Nesta parte do relatório descreve-se um conjunto de tarefas e respetivos roteiros, definidos para se utilizarem num contexto com alunos do 2.º CEB, onde se privilegiou o uso de alguns materiais didáticos (estruturados e não estruturados). Nas estruturas dos roteiros encontra-se o enunciado da tarefa, o ano de escolaridade a que se destina, as aprendizagens prévias e visadas, orientações para apresentação e exploração da tarefa, nomeadamente as indicações gerais, a exploração da tarefa e as indicações suplementares e, ainda, possíveis explorações dos alunos. Com a resolução das tarefas matemáticas os conteúdos aprendidos vão-se relacionar com ideias e conceitos já adquiridos. É importante o significado que o aluno atribui aos conceitos bem como o conhecimento prévio que tem dos mesmos. Outro fator importante, para que a aprendizagem seja significativa, é que o material didático seja significativo, para que o aluno relacione os novos conhecimentos com os conhecimentos prévios. O professor tem aqui um papel fundamental, pois deve promover desafios, atividades permanentes, atividades em grupo e utilizar materiais didáticos.

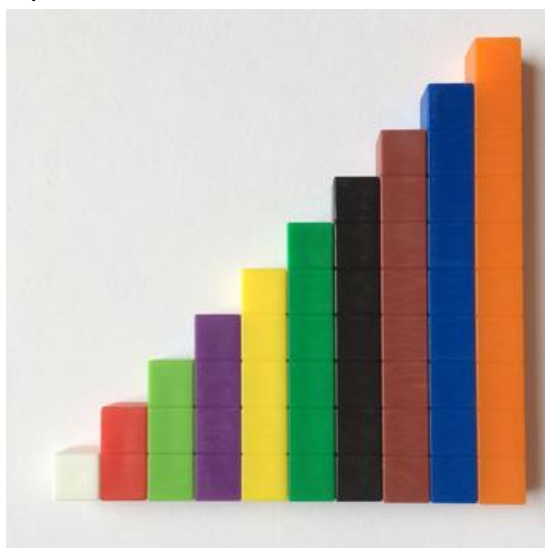
## 5.2. Barras de Cuisenaire

### Roteiro da tarefa

#### Enunciado da tarefa

#### Comparar frações com o Cuisenaire<sup>1</sup>

As barras de Cuisenaire são 10 barras coloridas (em forma de prismas quadrangulares regulares), com 10 tamanhos diferentes, como podes observar na figura. Habitualmente, as barras de Cuisenaire são construídas em madeira ou em plástico.



Este material foi criado pelo professor belga Emile-Georges Cuisenaire (1891-1980) e divulgado, a partir de 1952, pelo professor Caleb Cattegno (nascido em Alexandria). Cuisenaire era professor de Matemática dos primeiros anos de escolaridade e criou as barras porque sentia que os seus alunos, com esse material, podiam compreender melhor os conteúdos matemáticos, principalmente ao nível do estudo dos números e das operações entre números. Habitualmente, o trabalho com as barras de Cuisenaire permite associar a cada barra 1 número ou uma relação entre números.

Em todas as questões descreve o processo que utilizaste para responder. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos, esquemas, cálculos ou as próprias barras de Cuisenaire.

1. Considera como unidade a barra amarela. Qual é a barra que representa  $\frac{4}{5}$  da unidade? E que fração da unidade representa a barra vermelha?
2. Considera agora como unidade a barra laranja. Qual é a barra que representa  $\frac{4}{5}$  da unidade? E que fração da unidade representa a barra vermelha?
3. Nas questões 1. e 2. a barra vermelha é representada por frações diferentes. Explica essa diferença. Em qual dos casos essa fração é maior? Como o explicas?

---

<sup>1</sup> Adaptado de Tarefas em aula-Matemática para a Sala de Aula, ESE do Instituto Politécnico de Viseu-  
<https://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/tarefas2006.htm>.

4. Se a barra verde-claro representa  $\frac{3}{4}$  de alguma barra, qual é a barra que representa a unidade? E qual é a barra que representa  $\frac{1}{2}$  dessa unidade?

5. A partir do estudo que realizaste, diz como se deve proceder, recorrendo às barras de Cuisenaire, para efetuar adições e subtrações com números na forma de fração com denominadores diferentes (Por exemplo:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2}; \frac{2}{3} - \frac{1}{2}).$$

**Ano de escolaridade:** 5.º ano

### **Aprendizagens prévias**

Com o trabalho desenvolvido no 1.º CEB, os alunos devem ser capazes de:

- Utilizar corretamente os termos «numerador» e «denominador»;
- Utilizar as frações para designar grandezas formadas por certo número de partes equivalentes a uma que resulte de divisão equitativa de um todo;

### **Aprendizagens visadas**

Com o trabalho nesta tarefa, os alunos devem ser capazes de:

- Reconhecer que  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a*d+c*b}{b*d}$  (sendo a, b, c e d números naturais);
- Reconhecer que  $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a*d-c*b}{b*d}$  (sendo a, b, c e d números naturais,  $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ );
- Resolver problemas de vários passos envolvendo operações com números racionais representados por frações.

### **Orientações para apresentação e exploração da tarefa**

*Indicações gerais:*

Este problema, destinado ao 5.º ano de escolaridade, recorre ao material didático estruturado barras de Cuisenaire, com o objetivo de trabalhar as frações, no que se refere aos sentidos relação parte-todo e medida, bem como a adição e a subtração de números racionais não negativos. Os alunos, através da resolução desta tarefa, vão conseguir deduzir que  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a*d+c*b}{b*d}$  e  $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a*d-c*b}{b*d}$ .

Nesta aula de ensino exploratório, na fase de lançamento da tarefa, o professor apresenta-a aos alunos. Nesta etapa, o professor deve assegurar-se de que os alunos entenderam o que é para fazer e que os mesmos se sentem desafiados a trabalhar na tarefa.

Esta tarefa vem dar continuidade ao trabalho desenvolvido pelos alunos no 1.º CEB com os algoritmos da adição e subtração de números racionais não negativos, na medida em que aprendem a adicionar e subtrair números racionais não negativos com denominadores diferentes.

As frações são representações de números racionais que assumem diversos sentidos, tais como relação parte-todo (de uma unidade contínua ou de uma unidade discreta), quociente entre dois números inteiros representado pela fração  $\frac{a}{b}$ , operador partitivo multiplicativo, medida e razão entre duas partes de um mesmo todo. Com esta tarefa, a fração surge com maior ênfase nos sentidos de parte-todo e medida. No sentido da fração como parte-todo de uma unidade contínua, é estabelecida a comparação entre a parte e o todo, considerando o todo como sendo a unidade (neste caso, a barra que é considerada como unidade). O denominador indica o número de partes em que a unidade é dividida e o numerador indica o número de partes a considerar. Relativamente ao sentido da fração como medida, entende-se que se tem de dividir a unidade em partes tais, de modo a que a unidade esteja contida um número inteiro de vezes na grandeza a medir (neste caso, o comprimento das barras).

Ainda na fase de lançamento da tarefa, o professor define o modo como os alunos vão trabalhar. Esta tarefa pode ser realizada em pequenos grupos. Para a sua execução prevê-se uma aula de 100 minutos, em que 60 minutos são reservados para a resolução da tarefa, 30 minutos para a discussão do trabalho

realizado, 10 minutos para o registo das conclusões e para a sistematização de resultados e conceitos. No ensino exploratório, os alunos aprendem com o trabalho desenvolvido nesta tarefa, fazendo surgir a necessidade de ideias matemáticas que são sistematizadas na discussão coletiva. Através deste tipo de ensino, os alunos veem surgir os seus conhecimentos e procedimentos matemáticos com significado, ao mesmo tempo que treinam e desenvolvem competências essenciais para a disciplina, destacando-se a capacidade para resolver problemas, para raciocinar e para comunicar matematicamente.

Caso os alunos não tenham acesso ao material didático, podem aceder a este link <https://nrich.maths.org/4348>.

Os alunos devem usar a terminologia e simbologia matemáticas sobre as frações para representarem as informações e os seus raciocínios ao longo da tarefa.

É de referir que os alunos têm de mobilizar alguns dos conhecimentos adquiridos no 1.º CEB, destacando-se os seguintes: “utilizar corretamente os termos «numerador» e «denominador»”, “utilizar as frações para designar grandezas formadas por certo número de partes equivalentes a uma que resulte de divisão equitativa de um todo”.

#### *Exploração da tarefa:*

**Na questão 1.** os alunos pretendem descobrir qual a barra que representa  $\frac{4}{5}$  da barra amarela. Numa primeira fase, os alunos mobilizam os conhecimentos sobre números racionais não negativos como relação parte-todo de uma unidade contínua. Os alunos sabem que a barra amarela foi dividida em 5 partes iguais e dessas consideram-se 4, sendo que 5 é o denominador da fração, que representa o número de partes iguais em que a unidade foi dividida, e 4 é o numerador que indica o número de partes consideradas. Uma das dificuldades que pode surgir nesta questão é que os alunos não reconheçam que a barra amarela está dividida em 5 partes iguais e para tal têm de perceber que necessitam de estabelecer relações entre as diferentes barras, isto é, várias barras iguais ou barras diferentes podem igualar o comprimento da barra em questão. Por exemplo, a barra amarela pode ser decomposta usando 5 barras brancas, pois esta representa  $\frac{1}{5}$  da barra amarela. Os alunos podem também não identificar o que se pretende com  $\frac{4}{5}$  da barra amarela, não tendo presente o conceito de número fracionário, com sentido de parte-todo. O professor pode questionar o que representa o numerador e o denominador da fração em causa.

Outro modo de resolver a primeira parte da questão 1. é os alunos, quando consideram 4 partes da barra amarela, aperceberem-se de que falta  $\frac{1}{5}$  para a unidade ficar completa, pois a barra amarela representa  $\frac{5}{5}$ . Nesta resolução trabalha-se o sentido da fração como medida, pois, dividindo a unidade (barra amarela) em 5 partes iguais, cada parte vai representar  $\frac{1}{5}$  que corresponde à barra branca. Então verifica-se que a barra branca “cabe” 5 vezes na barra amarela e trabalha-se a subtração no sentido de completar. Nesta resolução pode surgir a dificuldade de os alunos identificarem se  $\frac{4}{5}$  é maior ou menor do que a unidade. O professor pode perguntar se  $\frac{4}{5}$  é mais ou menos do que a unidade, levando os alunos a concluir que é menos do que a unidade, pois o numerador 4 é inferior ao denominador 5.

Ainda na questão 1. é solicitado aos alunos que indiquem a fração que a barra vermelha ocupa da barra amarela. Os alunos, nesta segunda parte da questão 1., estabelecem uma relação entre a barra

vermelha e a barra amarela. Quando comparam a barra vermelha com a barra amarela, verificam que faltam  $\frac{3}{5}$  para a barra vermelha igualar o comprimento da barra amarela. Deste modo, chegam à conclusão de que a barra vermelha é  $\frac{2}{5}$  da barra amarela.

**Na questão 2.** os alunos pretendem descobrir qual a barra que representa  $\frac{4}{5}$  da barra laranja. Esta questão diferencia-se da anterior, pois a unidade altera-se. Uma das dificuldades que pode surgir nesta questão é que os alunos não identifiquem  $\frac{4}{5}$  da barra laranja. Os alunos verificaram na questão anterior que uma barra cor-de-rosa corresponde a  $\frac{4}{5}$  de uma barra amarela. Os alunos chegam à conclusão que a barra que corresponde a  $\frac{4}{5}$  da unidade (barra laranja) é a que corresponde a 2 barras cor-de-rosa, ou seja, a barra castanha. Dado a barra laranja ser decomposta por duas barras amarelas, duas barras cor-de-rosa equivalem a uma barra castanha. O professor pode colocar algumas questões, tais como “qual a relação da barra amarela com a barra laranja?”, dado que na questão 1. a unidade ter sido a barra amarela; “visto que se pretende novamente  $\frac{4}{5}$  da unidade, consideram que a barra que vai representar a fração  $\frac{4}{5}$  vai ser maior ou menor, do que na questão 1.?”.

É de salientar que existem várias maneiras de decompor a unidade em causa. Caso os alunos decomponham a barra laranja em 5 barras vermelhas e considerarem  $\frac{4}{5}$  dessas 5 barras vermelhas, o professor pode questionar quanto falta para a unidade ficar completa, nesta situação. Os alunos verificam que falta  $\frac{1}{5}$ , ou seja, falta uma barra vermelha para igualar o comprimento da barra laranja. A barra que corresponde a 4 barras vermelhas é a barra castanha. Nesta questão trabalha-se a subtração com o sentido de completar.

**Na questão 3.** os alunos verificam que a barra vermelha é representada por frações diferentes, dado que a barra que representa a unidade nas duas situações é diferente. Como se tem o mesmo numerador, a comparação dos números baseia-se nos denominadores. Numa das frações a unidade está dividida em 5 partes iguais e dessas pretendem-se 2. Se se reparar, nesta situação faltam  $\frac{3}{5}$  para a unidade ficar completa. Quando se considera a barra laranja como unidade, tem-se a unidade dividida em 10 partes iguais e pretendem-se 2 delas. Neste último caso, verifica-se que faltam  $\frac{8}{10}$  ou na forma de fração irredutível que faltam  $\frac{4}{5}$  para a unidade ficar completa. Deste modo, os alunos verificam que, como falta menos à barra amarela para ficar completa, do que à barra laranja, a fração  $\frac{2}{5}$  é maior do que  $\frac{2}{10}$ . Como na questão 3. é suposto os alunos chegarem à conclusão de que “de entre duas frações com o mesmo numerador é maior aquela que tiver menor denominador”, o professor pode sugerir que, com as barras de Cuisenaire, os alunos transformem  $\frac{2}{5}$  numa fração equivalente, para que possam identificar qual das frações é maior, pois, obtendo o mesmo denominador, torna-se mais fácil identificar se  $\frac{4}{10}$  é maior ou menor do que  $\frac{2}{10}$ .

O professor pode colocar uma questão, como, por exemplo, “se aumentarmos o numerador e mantivermos o denominador, o que acontece ao número representado pela fração?”.

**Na questão 4.,** os alunos podem apresentar dificuldades, pois nas questões 1. e 2. é sempre dita qual a barra que representa a unidade e, nesta questão, sabe-se que a barra verde-claro representa  $\frac{3}{4}$  de alguma

barra que é a unidade. Deste modo, o processo de resolução é diferente das questões anteriores, pois os alunos têm de descobrir qual a barra que vai representar a unidade. Os alunos sabem que a barra que representa a unidade foi dividida em 4 partes iguais e consideraram-se 3. Neste sentido, entendem que falta  $\frac{1}{4}$  para a unidade ficar completa, ou seja, ficar do mesmo comprimento da unidade. Assim, está presente o sentido do número racional como medida e o sentido da operação da subtração em causa é o sentido completar. O professor coloca questões para ir combatendo algumas dificuldades dos alunos, como, por exemplo, “o que representa o numerador 3?,  $\frac{3}{4}$  da barra é mais ou menos do que a unidade?” realçando-se o sentido parte-todo. Para responder à segunda parte da questão 4. os alunos, após descobrirem qual a barra que representa  $\frac{3}{4}$  da unidade, têm de perceber qual a barra que vai representar metade da unidade. O professor pode questionar se a barra que vai representar  $\frac{1}{2}$  da unidade vai ser uma barra maior ou menor.

**Na última questão**, os alunos podem apresentar dificuldades em efetuar a adição e subtração propostas com as barras de Cuisenaire, pois as frações não apresentam o mesmo denominador, sendo que o professor pode questionar se “se pode adicionar ou subtrair frações com denominadores diferentes”. As questões anteriores vão ajudar os alunos na adição e subtração das frações apresentadas. Na adição de  $\frac{3}{4}$  com  $\frac{1}{2}$ , verificam, na questão 3., que a unidade em causa é a barra cor-de-rosa e sabem também que  $\frac{3}{4}$  da barra cor-de-rosa equivalem à barra verde-claro e que  $\frac{1}{2}$  da barra cor-de-rosa equivale à barra vermelha. Como se trata da mesma unidade (barra cor-de-rosa), basta adicionar a barra vermelha com a barra verde-claro, logo,  $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$ .

A subtração de  $\frac{2}{3}$  com  $\frac{1}{2}$ , não é tão evidente, pois as unidades são diferentes em ambas as frações, tratando-se da barra verde-claro e da barra vermelha, respetivamente. Através deste processo não é possível retirar as barras, porque as unidades em causa são diferentes. Deste modo, têm de se procurar barras equivalentes, ou seja, frações equivalentes, para se obter a mesma unidade (o mesmo denominador).

Como os alunos sabem trabalhar com frações equivalentes, estes vão verificar que a unidade tem de ser a barra verde-escuro, porque, se se comparar a barra vermelha com a barra verde-claro, falta  $\frac{1}{3}$  à barra vermelha para igualar o comprimento da barra verde-claro. Assim, tem de se acrescentar outra barra verde-claro, sendo que duas barras verde-claro correspondem à barra verde-escuro. Para a barra vermelha ficar com igual comprimento à barra verde-escuro têm de se adicionar 3 barras vermelhas. De facto, passam a ter as frações  $\frac{4}{6}$  e  $\frac{3}{6}$ , isto é, a barra verde-escuro passa a ser a unidade e os alunos sabem que  $\frac{4}{6}$  corresponde à barra cor-de-rosa e  $\frac{3}{6}$  corresponde à barra verde-claro. Assim, os alunos subtraem o comprimento da barra cor-de-rosa o comprimento da barra verde-claro, obtendo como resultado  $\frac{1}{6}$ .

Na fase de exploração, o professor deve ir acompanhando as resoluções de cada grupo e verificar se todos participam de forma ativa.

A discussão da tarefa é feita quando todos os grupos finalizam a resolução, sendo que, na discussão, devem-se evidenciar as estratégias de resolução, processos utilizados e os resultados a que chegam, de todos os grupos, iniciando com as resoluções mais informais. Na discussão, um elemento de cada grupo explica o seu processo de resolução. Após todos os grupos terem apresentado os resultados a que

chegaram, se existirem processos de resolução diferentes, tentam explicar o raciocínio do grupo que optou por outra resolução diferente, ou seja, o professor pode questionar “o que os outros grupos pensam da estratégia seguida pelo grupo que optou por outro modo de resolução?” e ir colocando as questões acima apresentadas. Na discussão da tarefa podem surgir ideias matemáticas, como, por exemplo, comparações entre frações (com denominadores iguais e numeradores diferentes e vice-versa), diferentes significados das frações, bem como frações equivalentes. Outro aspeto que o aluno tem de deduzir na resolução desta tarefa é a adição e subtração de frações com denominadores diferentes. Nesta fase os alunos apresentam os resultados, devendo usar os termos e vocabulário adequado às frações, como, por exemplo, numerador, denominador, frações equivalentes, frações irredutíveis, frações próprias e impróprias, estando também presente o desenvolvimento da comunicação matemática (oral e escrita). É importante que se estabeleçam comparações entre as resoluções que são apresentadas. Nesta fase é fulcral que também ocorram novas aprendizagens sobre os conceitos, procedimentos e processos utilizados. Através da discussão, institucionalizam-se aprendizagens, que toda a turma deve partilhar, sendo um momento onde podem surgir, ou serem aperfeiçoados, novos conceitos e procedimentos, estabelecendo conexões com aprendizagens anteriores.

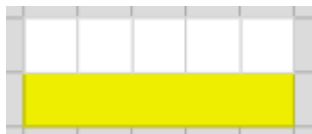
Assim, os alunos devem exprimir por escrito as ideias e processos matemáticos utilizados, usando a notação, simbologia e vocabulário próprio das frações. Na sistematização da discussão matemática coletiva deve-se evidenciar que, mantendo o denominador, a comparação dos números baseia-se na comparação dos numeradores ou, então, entre frações com o mesmo numerador é maior a que tiver menor denominador. Também é registada no quadro a regra das operações da adição e subtração, que os alunos deduzem através da resolução desta tarefa ( $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a*d+c*b}{b*d}$  e  $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a*d-c*b}{b*d}$ ). Por exemplo, na questão 3. e 5., transformam-se as frações em frações equivalentes, o que basicamente é a aplicação da regra.

#### *Indicações suplementares:*

Quando se terminar a discussão e sistematização de ideias da tarefa em grande grupo, o professor fala sobre Cuisenaire e Calleb, na aula (segue-se um link sobre a história das barras de Cuisenaire <https://pedagogiafmu.files.wordpress.com/2010/09/barrinhas-de-cuisenaire-introducao-a-construcao-dos-fatos-fundamentais-da-adicao1.pdf>). Para exploração e continuação do trabalho desenvolvido com esta tarefa segue-se um link de uma tarefa para trabalhar a adição de números racionais designada “Muro das frações” (<https://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/tarefas2006.htm>).

#### **Possíveis explorações dos alunos**

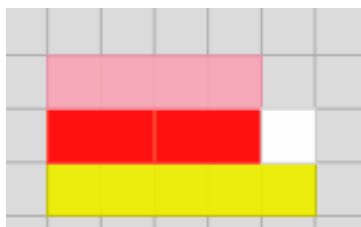
Na **questão 1.**, a barra amarela é a unidade e pretende-se descobrir qual a barra que representa  $\frac{4}{5}$  da unidade. Nesta questão, os alunos mobilizam os conhecimentos adquiridos numa situação que envolve o sentido da fração na relação parte-todo de uma unidade contínua, isto é, os alunos percebem que alguma barra representa  $\frac{4}{5}$  da barra amarela. Então, a unidade está dividida em 5 partes iguais e pretende-se 4 partes da unidade. Assim, começam por decompor a barra amarela em barras brancas.



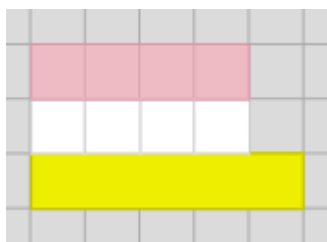
Os alunos verificam que a barra amarela é decomposta em 5 barras brancas. Cada barra branca representa  $\frac{1}{5}$  em relação à barra amarela. Se se pretende  $\frac{4}{5}$  da unidade, os alunos concluem que  $\frac{4}{5}$  da unidade são 4 barras brancas, então, a barra que corresponde a 4 barras brancas é a barra cor-de-rosa. Por outras palavras, os alunos procuram uma barra que meça a quinta parte da barra amarela, encontrando a barra branca; seguidamente juntam mais 3 barras brancas, obtendo  $\frac{4}{5}$  da barra amarela e vão depois procurar a barra que tenha o comprimento dessas 4 barras brancas, sendo a barra cor-de-rosa.



Os alunos podem, ainda, pensar e decompor a barra amarela de outra maneira (visto existirem várias possibilidades de o fazer). Os alunos podem decompor a barra amarela com duas barras vermelhas e uma barra branca. Deste modo, as duas barras vermelhas e uma barra branca igualam em comprimento a barra amarela. Os alunos chegam à conclusão que duas barras vermelhas correspondem a  $\frac{4}{5}$  da barra amarela e verificam ainda que duas barras vermelhas correspondem a uma barra cor-de-rosa. Nesta resolução apresentada, o sentido da fração evidenciado é o sentido medida.

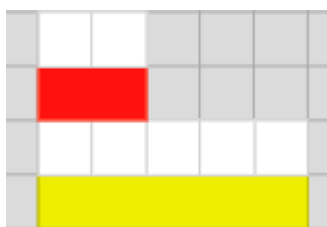


Outro processo de resolução que pode ser apresentado pelos alunos para resolver esta questão é que estes sabem que a barra amarela está dividida em 5 partes iguais e dessas consideram-se 4, logo, a barra representa o produto de 4 por um quinto. Isto é,  $4 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ , em que  $\frac{1}{5}$  da barra amarela corresponde à barra branca, pois a barra amarela decompõe-se em 5 barras brancas. Deste modo  $\frac{4}{5}$  da barra amarela corresponde a 4 barras brancas, que equivalem à barra cor-de-rosa. Nesta resolução evidencia-se o significado da fração como operador partitivo multiplicativo.

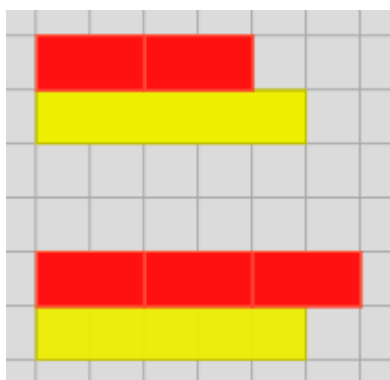


Pode acontecer que os alunos pensem desta maneira, visto a barra amarela ser a unidade e estar dividida em 5 partes iguais, esta representa  $\frac{5}{5} = 1$  (unidade). Pretende-se  $\frac{4}{5}$  da unidade. Os alunos chegam à conclusão que a barra que representa a diferença entre a barra amarela e a barra branca é a barra cor-de-rosa, ou seja, adicionando à barra cor-de-rosa a barra branca obtém-se a barra amarela. Isto é,  $\frac{4}{5} = \frac{5}{5} - \frac{1}{5}$ .

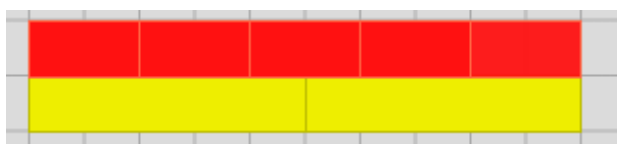
Ainda na questão 1. continuando a barra amarela a ser a unidade, pretende-se saber que fração da unidade representa a barra vermelha. Os alunos, decompondo a barra vermelha em barras brancas, verificam que esta é composta por 2 barras brancas, isto é, a barra vermelha ocupa  $\frac{2}{5}$  da barra amarela.



Outro processo de resolução que pode ser apresentado pelos alunos, para saber que fração da unidade representa a barra vermelha, é a decomposição da barra amarela em barras vermelhas. Porém, verificam que, ao fazer isso, ao colocar a 3.<sup>a</sup> barra vermelha, esta excede a barra amarela, mas, com apenas 2 barras vermelhas, não se preenche a barra amarela na totalidade.



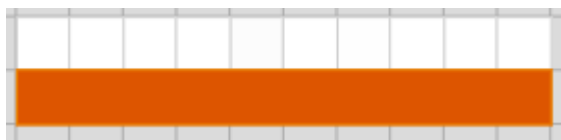
Os alunos verificam que, em ambas as situações, a diferença é de  $\frac{1}{5}$  da barra amarela, portanto, acrescentam outra barra amarela e passam a decompor 2 barras amarelas, ao invés de 1.



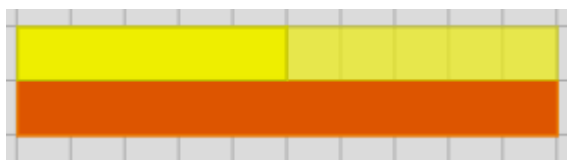
Os alunos verificam que, ao decompor 2 barras amarelas com barras vermelhas, 5 barras vermelhas igualam em comprimento 2 barras amarelas. Então, a relação entre a barra vermelha e barra amarela é de 5 para 2, ou seja, a fração que a barra vermelha representa é  $\frac{2}{5}$  da unidade.

Para responder à **questão 2.**, os alunos têm de considerar a barra laranja como sendo a unidade. Questiona-se qual a barra que representa  $\frac{4}{5}$  da barra laranja.

Os alunos, para saberem a quanto corresponde a barra laranja, decompõem-na em barras brancas.



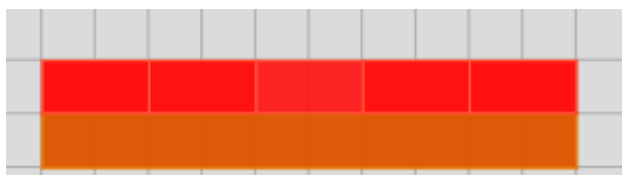
Após os alunos terem verificado que a barra laranja corresponde a 10 barras brancas, e que a barra amarela corresponde a 5 barras brancas, os alunos concluem que 2 barras amarelas correspondem à barra laranja, ou seja, a barra amarela representa  $\frac{5}{10}$  da barra laranja ( $\frac{5}{10} + \frac{5}{10} = \frac{10}{10} = 1$ ).



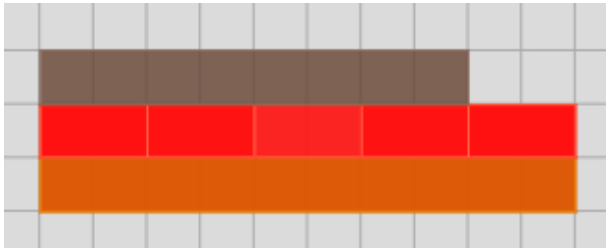
Com esta conclusão, e sabendo que 1 barra cor-de-rosa corresponde a  $\frac{4}{5}$  de 1 barra amarela, os alunos verificam que a barra que corresponde a  $\frac{4}{5}$  da unidade (barra laranja) é a barra que corresponde a 2 barras cor-de-rosa, ou seja, a barra castanha.



Os alunos podem, ainda, pensar e decompor a barra laranja de outra maneira, decompondo a barra laranja com 5 barras vermelhas. Deste modo, as 5 barras vermelhas igualam o comprimento da barra laranja (assim, a fração surge com o sentido de medida).



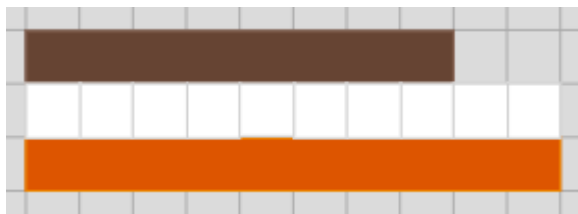
Verificam, ainda, que a unidade passou a estar dividida em 5 barras vermelhas (visto igualar o comprimento da unidade-barra laranja), isto é, a barra vermelha ocupa  $\frac{2}{10}$  da barra laranja, que é o equivalente a ter  $\frac{1}{5}$ . Pretende-se considerar  $\frac{4}{5}$  das 5 barras vermelhas, ou seja, 4 das 5 barras vermelhas que correspondem à unidade. Deste modo, os alunos apercebem-se que 4 barras vermelhas correspondem ao comprimento de 1 barra castanha. Por outras palavras, procuram 1 barra que meça a quinta parte da barra laranja, encontrando a barra vermelha. Seguidamente, juntam mais 3 barras vermelhas, obtendo  $\frac{4}{5}$  da barra laranja e vão depois procurar a barra que tenha o comprimento dessas 4 barras, sendo a barra castanha.



Outro processo de resolução que pode ser apresentado pelos alunos para resolver esta questão é que estes sabem que a barra laranja está dividida em 10 partes iguais, que também pode ser decomposta em 5 barras vermelhas e dessas consideram-se 4, logo, a barra representa o produto de 4 por um quinto. Isto é,  $4 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ , em que  $\frac{1}{5}$  da barra laranja corresponde à barra vermelha, pois, decompondo a barra laranja, corresponde a 10 barras brancas e a barra vermelha corresponde a 2 barras brancas e  $\frac{2}{10}$  é igual a  $\frac{1}{5}$ . Deste modo,  $\frac{4}{5}$  da barra laranja corresponde a 4 barras vermelhas, que equivalem à barra castanha, evidenciando-se o sentido da fração como operador partitivo multiplicativo.

Pode acontecer que os alunos pensem da seguinte maneira: visto a barra laranja ser a unidade e estar dividida em 10 partes iguais, esta representa  $\frac{5}{5} = 1$  (unidade). Pretende-se  $\frac{4}{5}$  da unidade. Os alunos chegam à conclusão que a barra que representa a diferença entre a barra laranja e a barra vermelha é a barra castanha, ou seja, adicionando à barra castanha 1 barra vermelha obtém-se a barra laranja. Isto é,  $\frac{4}{5} = \frac{5}{5} - \frac{1}{5}$ .

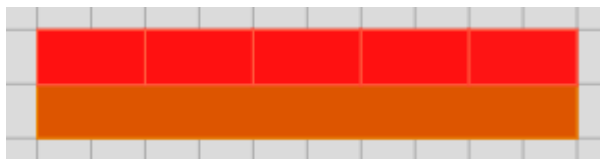
Ou, ainda, os alunos decompõem a barra laranja em 10 barras brancas, identificando a barra que representa a décima parte da unidade. Sabem que  $\frac{2}{10}$  é o mesmo que  $\frac{1}{5}$  (frações equivalentes). Por isso, vão procurar a barra que se identifique com  $\frac{8}{10}$ , sendo a barra castanha.



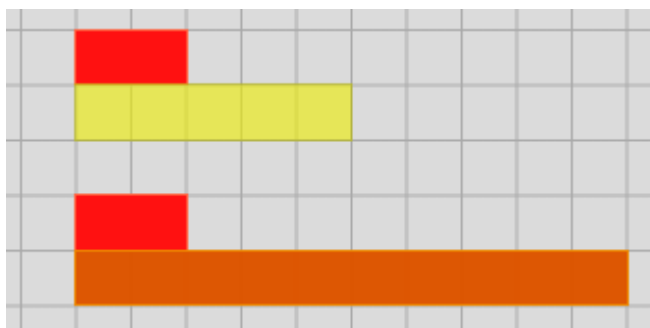
Ainda na questão 2., continuando a barra laranja a ser a unidade, pretende-se saber que fração da unidade representa a barra vermelha. Os alunos, nas resoluções anteriores, verificaram que a barra laranja está dividida em 10 partes iguais utilizando 5 barras vermelhas para igualar o comprimento da unidade. Deste modo, os alunos concluem que a barra vermelha corresponde a  $\frac{2}{10}$  da barra laranja. A fração  $\frac{2}{10}$  é equivalente a  $\frac{1}{5}$ , dado que, se se dividir o numerador e o denominador por 2, obtém-se a fração  $\frac{1}{5}$ .

Os alunos podem verificar, anteriormente, que 5 barras vermelhas correspondem a 1 barra laranja, chegando à conclusão de que a relação entre a barra vermelha e barra laranja é de 5 para 1, ou seja, a

fração que a barra vermelha representa da unidade é  $\frac{1}{5}$ , sendo que a fração assume o sentido como razão entre duas partes de um mesmo todo.



**Na questão 3.** os alunos verificam que as frações  $\frac{2}{5}$  e  $\frac{2}{10}$  têm o mesmo numerador e o seu denominador é diferente.



Como a barra amarela está dividida em 5 partes iguais, a barra vermelha “ocupa”  $\frac{2}{5}$  da unidade e em relação à barra laranja, esta encontra-se dividida em 10 partes iguais e considera-se 2, portanto, representa a fração  $\frac{2}{10}$ . A fração que a barra vermelha ocupa é diferente, pois trabalham-se unidades diferentes. A fração maior é a que representa  $\frac{2}{5}$ , pois os alunos têm de verificar que, como os denominadores são diferentes, o que tiver o denominador mais pequeno, que neste caso é  $\frac{2}{5}$ , vai ser a fração maior. Os alunos podem pensar que, quando se mantém o numerador e o que altera é o denominador, quanto maior este for, mais pequena é a fração. Os alunos, para verificarem que  $\frac{2}{5}$  é maior do que  $\frac{2}{10}$ , podem transformar a fração  $\frac{2}{5}$  numa fração equivalente, de modo a que as frações fiquem com os mesmos denominadores e, deste modo,  $\frac{2}{5}$  é equivalente a  $\frac{4}{10}$ .

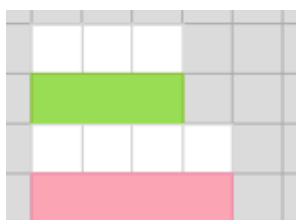


Por comparação, os alunos verificam que a fração  $\frac{4}{10}$  é maior do que  $\frac{2}{10}$ , ou seja, o facto de a unidade ser mais pequena, quando esta é representada pela barra amarela do que quando é representada pela barra laranja, leva a que a barra vermelha assuma uma fração superior da unidade.

**Na questão 4.**, no enunciado diz-se que a barra verde-claro representa  $\frac{3}{4}$  da unidade e quer-se saber qual a barra que representa a unidade.

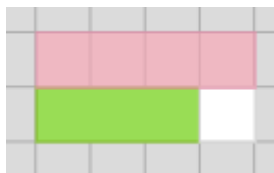
Os alunos têm de entender que a barra verde-claro representa  $\frac{3}{4}$  de alguma barra, isto é, da unidade, o que significa que, para responder, têm que “completar” a unidade. Nesta questão os alunos utilizam o sentido dos números racionais como relação parte-todo.

Os alunos sabem que a unidade foi dividida em 4 partes iguais e dessas consideraram-se 3. Deste modo, a barra verde-claro representa 3 vezes um quarto. Para reconstruir a unidade, os alunos dividem a barra em 3 partes iguais (sendo 3 o numerador da fração, que indica o número de partes consideradas) para identificarem um quarto (4 é o denominador da fração, que representa o número de partes iguais em que a unidade foi dividida).

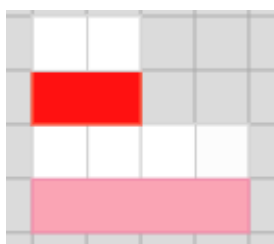


Assim sendo, a barra cor-de-rosa representa a unidade, dado ser composta por 4 barras brancas.

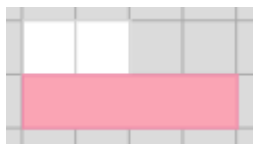
Pode acontecer que os alunos pensem desta maneira: visto a unidade estar dividida em 4 partes iguais, esta representa  $\frac{4}{4} = 1$  (unidade). Pretende-se descobrir qual a unidade, visto a barra verde-claro representar  $\frac{3}{4}$  da unidade. Os alunos apercebem-se que, para a unidade ficar completa, falta  $\frac{1}{4}$  que corresponde à barra branca. Isto é,  $\frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} (=) \frac{4}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ . Por outras palavras, os alunos completam a unidade (sabem que  $\frac{4}{4} = 1$ ) juntando 1 barra branca (que representa  $\frac{1}{4}$  da unidade) à barra verde-claro (que representa  $\frac{3}{4}$  da unidade), procurando depois a barra que tem o mesmo comprimento que as 4 barras e obtêm a barra cor-de-rosa (que representa  $\frac{4}{4}$ ).



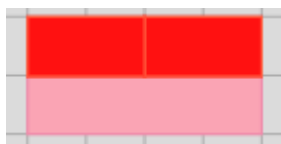
Na questão 4. ainda se pretende saber qual é a barra que representa  $\frac{1}{2}$  dessa unidade, ou seja, da barra cor-de-rosa. Os alunos sabem que metade de 4 é 2, portanto, a unidade continua a ser a barra cor-de-rosa. No entanto, a unidade está dividida em 4 partes iguais e dessas consideraram-se 2. A fração que se obtém é  $\frac{2}{4}$  que é equivalente à fração  $\frac{1}{2}$ . Logo, a barra que corresponde à metade da barra cor-de-rosa é a barra vermelha.



Os alunos tentam descobrir qual a barra que representa  $\frac{1}{2}$  da unidade. Para tal, vão experimentando igualar a barra cor-de-rosa com duas barras da mesma cor, pois os alunos sabem que a relação das barras tem de ser de 1 para 2, como é referido no enunciado.



Os alunos verificam que, com duas barras brancas, não igualam o comprimento da barra cor-de-rosa. Logo, concluem que não é essa a barra que representa  $\frac{1}{2}$  da unidade. De seguida experimentam 2 barras vermelhas.



Quando experimentam as duas barras vermelhas, verificam que igualam o comprimento da barra cor-de-rosa. Então, 1 barra vermelha representa  $\frac{1}{2}$  da unidade.

**Na última questão** os alunos têm de adicionar  $\frac{3}{4}$  e  $\frac{1}{2}$ .

Na questão 4. é dito que a barra verde-claro era  $\frac{3}{4}$  de alguma barra, que se verifica ser a barra cor-de-rosa. Sabe-se ainda que  $\frac{1}{2}$  da barra cor-de-rosa é a barra vermelha. Quando os alunos resolvem esta adição, sabem que a unidade é a barra cor-de-rosa. Quando partem para este exemplo já sabem que  $\frac{3}{4}$  é a barra verde-claro e  $\frac{1}{2}$  é a barra vermelha, tendo subjacente que a unidade é a barra cor-de-rosa. Portanto, os alunos vão adicionar a barra verde-claro e a barra vermelha. Então a soma de  $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$ .

Ainda nesta questão os alunos têm de subtrair  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{1}{2}$ .

A fração  $\frac{2}{3}$  é uma unidade dividida em 3 partes iguais e consideram 2 delas, se a unidade for a barra verde-claro teríamos a barra vermelha. A fração  $\frac{1}{2}$  é como se fossem considerar 1 unidade dividida em 2 partes iguais (barra vermelha) e consideram 1 delas (barra branca). No entanto, por este processo não é possível retirar as barras, porque as unidades em causa, são diferentes (estavam em causa a barra verde-claro e a barra vermelha). Pode-se observar, por exemplo, que, se juntar 2 barras verde-claras, obtém-se a barra verde-escuro e, se juntar 3 barras vermelhas, também se obtém a barra verde-escuro. Portanto, se considerar  $\frac{2}{3}$  representado pela barra vermelha quando a unidade é a barra verde-claro é a mesma coisa do que considerar a barra cor-de-rosa, quando a unidade é barra verde-escuro. Para a fração  $\frac{1}{2}$  procede-se da mesma forma, a barra branca em relação à barra vermelha, é a mesma coisa do que a barra verde-claro em relação à barra verde-escuro, e, quando se faz esta transposição, já se considera como unidade comum a barra verde-escuro. Posteriormente, subtrai-se a barra cor-de-rosa com a barra verde-claro, obtendo-se a barra branca em relação à barra verde-escuro, isto é,  $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ .

Generalizando, para se efetuarem adições e subtrações com números na forma de fração com

denominadores diferentes, tem de se procurar uma barra que tenha um comprimento múltiplo de ambos os denominadores. Se forem denominadores iguais, basta adicionar ou subtrair os numeradores das frações e manter o denominador, porque a unidade estava dividida no mesmo número. Se os denominadores forem diferentes, tem de se procurar barras equivalentes, ou seja, frações equivalentes, para obter a mesma unidade (o mesmo denominador).

### 5.3. Tangram

#### Roteiro da tarefa

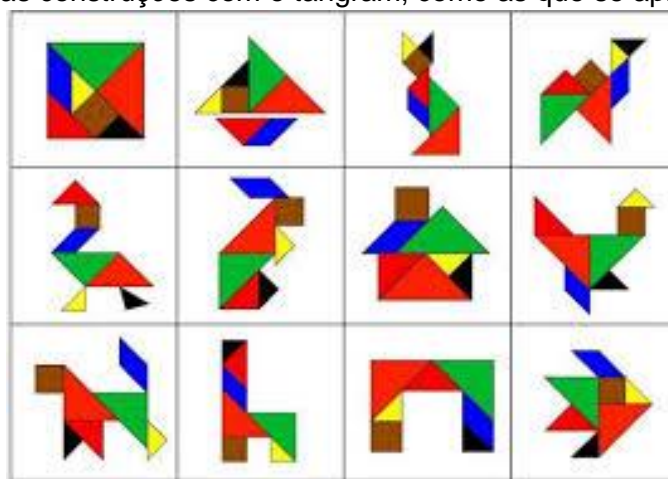
#### Enunciado da tarefa

#### Frações no tangram<sup>2</sup>

O tangram é um jogo matemático que surgiu na China no século XIX. O modelo original do tangram é formado por 7 figuras geométricas, que resultam da decomposição de um quadrado e as peças são, habitualmente, construídas em madeira.

Em todas as questões descreve o processo que utilizaste para responder. Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos, esquemas, cálculos ou o próprio tangram.

1. Identifica as 7 figuras geométricas que compõem o tangram.
2. Considera algumas construções com o tangram, como as que se apresentam seguidamente.



Constrói com as 7 peças do tangram uma figura. Por escrito, apresenta um conjunto de indicações a um colega, que não observa a figura que realizaste com o tangram, para o teu colega tentar reproduzir a figura que fizeste. Compara a que o colega fez com a figura que realizaste inicialmente.

3. O tangram tem duas peças triangulares de maior dimensão. Que fração da área total do tangram ocupam?
4. Que relação existe entre a área da peça triangular menor e a área da peça triangular maior?
5. As peças triangulares ocupam uma fração da área total do tangram. Que fração é essa?
6. Compara a medida de área do paralelogramo com a do triângulo médio e com a do quadrado.
7. Constrói 2 retângulos com área equivalente a 4 peças quadradas e diferente perímetro.

<sup>2</sup> Adaptado de Tarefas em aula-Matemática para a Sala de Aula, ESE do Instituto Politécnico de Viseu-  
<https://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/tarefas2006.htm>.

**Ano de escolaridade:** 5.º ano

### **Aprendizagens prévias**

- Saber que duas figuras equidecomponíveis têm a mesma área e, por esse motivo, qualificá-las como figuras «equivalentes»;
- Utilizar adequadamente os termos «metade», «terça parte», «quarta parte» e «quinta parte», relacionando-os respetivamente com o dobro, o triplo, o quádruplo e o quántuplo;
- Reconhecer que fixada uma unidade de comprimento nem sempre é possível medir uma dada distância exatamente como um número natural e utilizar corretamente as expressões «mede mais/menos do que» um certo número de unidades;
- Identificar o perímetro de um polígono como a soma das medidas dos comprimentos dos lados, fixada uma unidade;
- Medir áreas de figuras efetuando decomposições em partes geometricamente iguais tomadas como unidade de área;
- Reconhecer que figuras com a mesma área podem ter perímetros diferentes;
- Utilizar as frações para designar grandezas formadas por certo número de partes equivalentes a uma que resulte de divisão equitativa de um todo;
- Reconhecer que a soma  $a$  de parcelas iguais a  $\frac{1}{b}$  (sendo  $a$  e  $b$  números naturais) é igual a  $\frac{a}{b}$  e identificar esta fração como os produtos  $a \cdot \frac{1}{b}$  e  $\frac{1}{b} \cdot a$ ;
- Reconhecer que a soma e a diferença de frações de iguais denominadores podem ser obtidas adicionando e subtraindo os numeradores;
- Reconhecer que  $n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{b}$  e que, em particular,  $b \cdot \frac{a}{b} = a$  (sendo  $n$ ,  $a$  e  $b$  números naturais);
- Reconhecer que  $\frac{a}{b} : n = \frac{a}{n \cdot b}$  (sendo  $n$ ,  $a$  e  $b$  números naturais).

### **Aprendizagens visadas**

- Expressar em linguagem simbólica a regra para o cálculo da medida da área de um quadrado em unidades quadradas, dada a medida de comprimento  $c$  dos respetivos lados em determinada unidade (supondo  $c$  racional), designando essa medida por « $c$  ao quadrado» e representando-a por « $c^2$ »;
- Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento e dado um paralelogramo com uma base e uma altura  $a$  ela relativa com comprimentos de medidas respetivamente iguais a  $b$  e  $a$  (sendo  $b$  e  $a$  números racionais positivos), que a medida da área do paralelogramo em unidades quadradas é igual a  $b \times a$ , verificando que o paralelogramo é equivalente a um retângulo com essa área;
- Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento e dado um triângulo com uma base e uma altura  $a$  ela relativa com comprimentos de medidas respetivamente iguais a  $b$  e  $a$  (sendo  $b$  e  $a$  números racionais positivos), que a medida da área do triângulo em unidades quadradas é

igual a metade de  $b \times a$ , verificando que se pode construir um paralelogramo decomponível em dois triângulos iguais ao triângulo dado, com a mesma base que este;

- Resolver problemas envolvendo o cálculo de áreas de figuras planas;
- Reconhecer que  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a*d+c*b}{b*d}$  (sendo  $a, b, c$  e  $d$  números naturais);
- Reconhecer que  $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a*d-c*b}{b*d}$  sendo  $a, b, c$  e  $d$  números naturais,  $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ ).

### **Orientações para apresentação e exploração da tarefa**

#### *Indicações gerais:*

Nesta tarefa de exploração, destinada ao 5.º ano de escolaridade, utiliza-se o material didático não estruturado tangram, para trabalhar as frações, dando ênfase ao significado da fração como medida (o sentido da fração como medida, entende-se que se tem de dividir a unidade em partes tais, de modo a que a unidade esteja contida um número inteiro de vezes na grandeza a medir). Na fase de lançamento da tarefa, o professor apresenta a tarefa aos alunos. Nesta etapa, assegura-se de que os alunos entenderam o que é para fazer e que os mesmos se sentem desafiados a trabalhar na tarefa. Os alunos têm de encontrar relações de grandeza entre as 7 peças que compõem o tangram. Através desta tarefa trabalha-se a localização e orientação no espaço (na segunda questão), os conceitos de área e perímetro, envolvendo os números racionais, permitindo aos alunos entenderem que a unidade de área de uma superfície é comparada com outras, verificando quantas vezes a unidade “cabe” na superfície da qual se pretende saber a área. Neste caso, a unidade de área pode ser qualquer peça do tangram, tendo em consideração a relação de proporcionalidade que existe entre as peças, isto é: o paralelogramo, o quadrado e a peça triangular média ocupam metade da área das peças triangulares maiores; as peças triangulares menores ocupam metade da área das peças do paralelogramo, do quadrado e da peça triangular média; as peças triangulares menores ocupam  $\frac{1}{4}$  das peças triangulares maiores. O conceito de área corresponde ao espaço ocupado de uma superfície, de modo a “pavimentar” essa superfície, isto é, não deixar espaços nem fazer sobreposições. Com as 7 peças que constituem o tangram podem fazer-se novas figuras e perceber que todas têm a mesma área, uma vez que todas são formadas pelas mesmas 7 peças.

Na fase de lançamento da tarefa, o professor define que esta é realizada em pequenos grupos. Para a sua concretização preveem-se duas aulas (uma aula de 100 minutos e outra de 50 minutos), em que 100 minutos são reservados para a resolução da tarefa, 30 minutos para a discussão do trabalho realizado, 20 minutos para o registo das conclusões e para a sistematização de resultados e conceitos.

Caso os alunos não tenham acesso ao material didático, podem aceder a este link <https://nrich.maths.org/14169>.

Os alunos devem usar a terminologia e simbologia matemáticas sobre as frações, área e perímetro para representarem as informações e os seus raciocínios ao longo da tarefa.

É de referir que alunos mobilizam alguns dos conhecimentos adquiridos no 1.º CEB, evidenciados nas aprendizagens prévias.

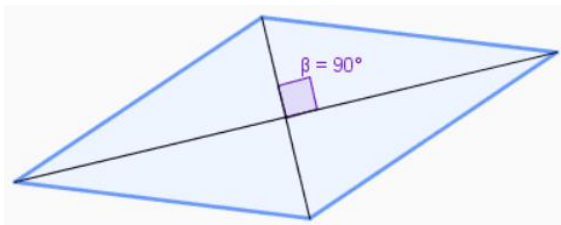
#### *Exploração da tarefa:*

Para responder à maior parte das questões, os alunos têm de estabelecer comparações de área entre

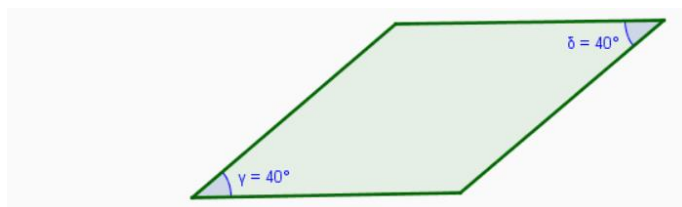
as 7 figuras geométricas que compõem o tangram.

**Na questão 1.** os alunos devem facilmente identificar as figuras geométricas que compõem o tangram, dado que este conteúdo é abordado no 1.º CEB, pois trabalha-se a identificação de figuras geométricas numa composição e efetuam-se composições de figuras geométricas, neste caso, polígonos. No entanto, alguns dos alunos podem identificar o quadrado como um losango. O professor pode questionar “todos os quadrados são losangos?”. Para responder a esta questão, o professor, juntamente com os seus alunos, deve verificar que, de facto, os quadrados são losangos, porque:

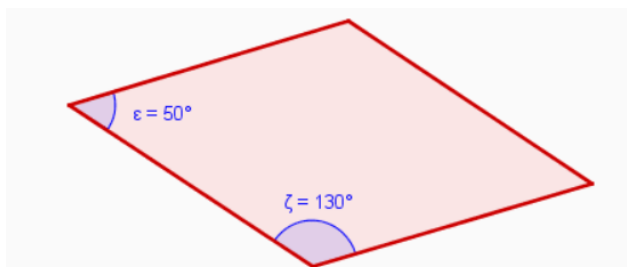
- As suas diagonais internas são perpendiculares entre si;



- Todos os seus lados são congruentes entre si (têm o mesmo comprimento);
- Os ângulos internos opostos são congruentes (têm medidas iguais);



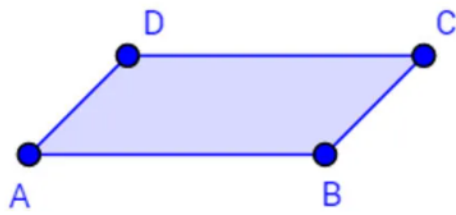
- Os ângulos internos adjacentes são suplementares (a soma é  $180^\circ$ );



O quadrado também preenche todas estas características, logo, ele também é considerado um losango. No entanto, não se pode afirmar que todos os losangos são quadrados, pois têm que ter todas as características enunciadas anteriormente e todos os ângulos internos têm que ser retos.

Pode ainda acontecer que os alunos identifiquem o quadrado como paralelogramo. Perante esta dificuldade o professor pode levantar várias questões “o quadrado é um paralelogramo?”; “todos os quadriláteros que possuem lados opostos paralelos podem-se designar de paralelogramo?”. Deve verificar-se que todos os quadriláteros que tenham lados opostos paralelos podem designar-se de paralelogramos. Então, são paralelogramos:

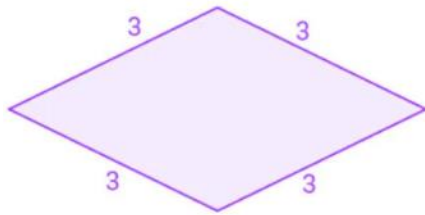
- O paralelogramo (desde que o lado AD seja paralelo ao lado BC e o lado AB e o lado DC também sejam paralelos);



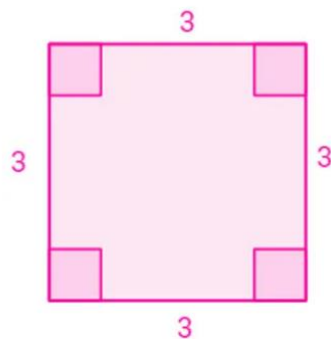
- O retângulo (possui características que o definem como paralelogramo e possui todos os ângulos iguais, pois todos os seus ângulos são retos);



- O losango (todos os lados opostos são paralelos, possuem os lados congruentes, isto é, todos os lados têm a mesma medida);



- O quadrado (os quadrados são polígonos que apresentam características do losango e do retângulo, pois possuem lados opostos paralelos e, por isso, são chamados de paralelogramos; possuem todos os ângulos iguais a  $90^\circ$  e, por isso, são chamados de retângulos e possuem todos os lados congruentes, assim sendo são losangos).



Deste modo pode-se dizer que:

- Todo o retângulo é também um paralelogramo;
- Todo o losango é também um paralelogramo;
- Todo o quadrado é também um paralelogramo;
- Todo o quadrado é também um retângulo;
- Todo o quadrado é também um losango;
- Todo o retângulo que é losango é também um quadrado.

No entanto, é incorreto afirmar-se que:

- Todo o paralelogramo é quadrado, retângulo ou losango;
- Todo o retângulo ou losango é também um quadrado.

A turma em conjunto relembra, em relação às peças triangulares, como se classificam os triângulos em relação aos lados (triângulos equiláteros, isósceles ou escalenos) e como se classificam quanto aos ângulos (triângulos acutângulos, triângulos retângulos ou triângulos obtusângulos).

**A questão 2.** tem como intuito que os alunos explorem o tangram e utilizem expressões de localização e orientação, de modo a que os colegas, a quem apresentam um conjunto de indicações, consigam reproduzir a construção original. A dificuldade que pode surgir nesta questão é quando os alunos têm de referir a rotação de alguma peça. Neste caso, podem dar mais indicações sobre a peça que está ao seu lado, por baixo, entre outras.

**Na questão 3.** os alunos podem não identificar a área que as duas peças triangulares maiores ocupam da área total do tangram, mas o professor pode perguntar “qual a área total do tangram com todas as peças?; “se retirarem todas as peças que compõem o tangram e encaixarem só as peças triangulares de maior dimensão, que restante espaço sobra do tangram?”. Algum dos alunos pode responder que é  $\frac{2}{4}$  dado que cada peça triangular maior ocupa  $\frac{1}{4}$  da área total do tangram. O professor, perante esta situação, pode questionar se  $\frac{2}{4}$  é o mesmo que  $\frac{1}{2}$ . Os alunos verificam que  $\frac{1}{2}$  é o mesmo que  $\frac{2}{4}$ , sendo que  $\frac{1}{2}$  é a fração irredutível de  $\frac{2}{4}$ . O professor pode solicitar ainda frações equivalentes a  $\frac{1}{2}$ .



O professor pode pedir que mencionem a fração  $\frac{1}{2}$  num número decimal e percentagem.

**Na questão 4.** os alunos podem apresentar dificuldades, pois pede-se que estabeleçam uma relação entre a peça triangular menor e a peça triangular maior. Alguns alunos podem primeiro comparar a área ocupada do triângulo médio com o triângulo maior e só depois disso (o triângulo médio é metade do triângulo maior, pois, sobrepondo o triângulo médio sobre o triângulo maior, verificamos que o triângulo médio ocupa metade do triângulo maior) é que fazem a comparação que lhes é solicitada. Ou, então, como se pede que estabeleçam uma relação entre a peça triangular menor e a peça triangular maior, estes podem ver quantas vezes a peça triangular menor cabe na peça triangular maior. Os alunos sobrepõem a peça triangular menor sobre a peça triangular maior e verificam que a peça triangular menor cabe 4 vezes na peça triangular maior. Portanto, os alunos verificam que a peça triangular menor é um quarto da peça triangular maior, ou que a peça triangular maior é o quádruplo da peça triangular menor. O professor pode colocar questões relacionadas com a comparação entre frações, como, por exemplo, “ $\frac{1}{4}$  é maior ou menor que  $\frac{1}{8}$ ?  $\frac{1}{4}$  é maior ou menor que  $\frac{1}{16}$ ?, que relação existe entre  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$  e  $\frac{1}{16}$ ?”. Pode ainda solicitar frações equivalentes às frações dadas.

**A questão 5.** pode ser alvo de algumas dúvidas e um pouco mais complexa que as questões anteriores. Os alunos nesta questão podem optar por adicionar a área de todas as peças triangulares (sobrepondo as peças e procurando relações, sabe-se que a peça triangular maior ocupa  $\frac{1}{4}$  da área total do

tangram, a peça triangular média ocupa metade da peça triangular maior e a peça triangular menor ocupa metade da peça triangular média ou um quarto da peça triangular maior). Por outro lado, podem pensar que as únicas peças no tangram que não são triangulares são o paralelogramo e o quadrado e então à área total retirar a área ocupada por essas duas figuras geométricas (para saber a área ocupada pelo paralelogramo e pelo quadrado, os alunos estabelecem relação com a peça triangular maior que ocupa  $\frac{1}{4}$  da área total do tangram e, como o quadrado e paralelogramo ocupam metade da peça triangular maior, tanto o paralelogramo como o quadrado ocupam uma área de  $\frac{1}{8}$ ).

**Na questão 6.** os alunos podem apresentar alguma dificuldade, pois têm de verificar que o paralelogramo, o quadrado e a peça triangular média ocupam sempre a mesma área de outra peça do tangram, ou seja, vão sempre ocupar metade da área da peça triangular maior, ou dobro da peça triangular menor. O professor pode solicitar aos alunos que, com as 3 figuras geométricas em causa, estabeleçam uma relação com as peças que sobram (sendo a peça triangular menor e a peça triangular maior).

Comparação com a peça triangular maior:



Comparação com a peça triangular menor:



**A questão 7.** pode suscitar algumas dificuldades para os alunos, pois estes podem não identificar a área igual a 4 peças quadradas e não saber o que é o perímetro. Primeiramente, é importante esclarecer os conceitos em causa, sendo o perímetro de um polígono a soma das medidas dos comprimentos dos lados e a área corresponde ao espaço ocupado de uma superfície.

Para construir 2 retângulos com área igual a 4 peças quadradas e diferente perímetro, o professor pode questionar “qual a área que vão ter as figuras construídas, dado estas terem área equivalente a 4 peças quadradas?”. Os alunos, para chegarem à área do quadrado, têm que estabelecer relações, nomeadamente, que as duas peças triangulares maiores ocupam  $\frac{1}{4}$  da área total do tangram; o quadrado, o paralelogramo e o triângulo médio ocupam  $\frac{1}{8}$ , dado que ocupam metade da área da peça triangular maior e as peças triangulares mais pequenas ocupam  $\frac{1}{16}$ , dado preencherem  $\frac{1}{4}$  da peça triangular maior. Logo, como a área do quadrado é  $\frac{1}{8}$  e esta tem de ser igual a 4 peças quadradas, é necessário efetuar o produto de 4

por  $\frac{1}{8}$  ( $4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ). O professor pode questionar ainda se “figuras com a mesma área podem ter perímetros diferentes?” e “se  $\frac{4}{8}$  é maior, menor ou igual a  $\frac{1}{2}$ ?”.

Na fase de exploração da tarefa, o professor deve ir verificando se todos os alunos estão envolvidos na sua execução, acompanhando os processos de resolução.

A discussão da tarefa realiza-se após ter terminado o tempo estipulado para a realização e exploração da mesma com recurso ao tangram. Analisam-se, posteriormente, as resoluções que são apresentadas pelos alunos e o professor orienta a discussão, garantindo que as explicações e argumentações mantêm a qualidade matemática. É importante que se estabeleçam comparações entre as resoluções que são apresentadas.

Na discussão matemática apresenta-se primeiro a resolução dos grupos que resolveram de forma menos complexa as questões e vão-se seguindo os grupos que foram complexificando as resoluções (o professor define, pois foi verificando quando os alunos resolviam a tarefa). Na discussão da tarefa, as ideias matemáticas que podem emergir da resolução são comparar as frações com denominadores diferentes, pelo que o professor pode pedir que identifiquem qual a fração maior ou menor e que representam de diversas formas (na forma de fração, número decimal e percentagem). Para além disso, também se pode falar de frações equivalentes e de frações na forma de fração irredutível, que representam a mesma fração.

Outro aspeto que surge na discussão matemática é o conceito de área e de perímetro.

Nesta fase, é fulcral que também ocorram novas aprendizagens sobre os conceitos, procedimentos e processos utilizados. Através da discussão, institucionalizam-se aprendizagens que toda a turma deve partilhar, sendo um momento onde podem surgir, ou serem aperfeiçoados, novos conceitos e procedimentos, estabelecendo conexões com aprendizagens anteriores.

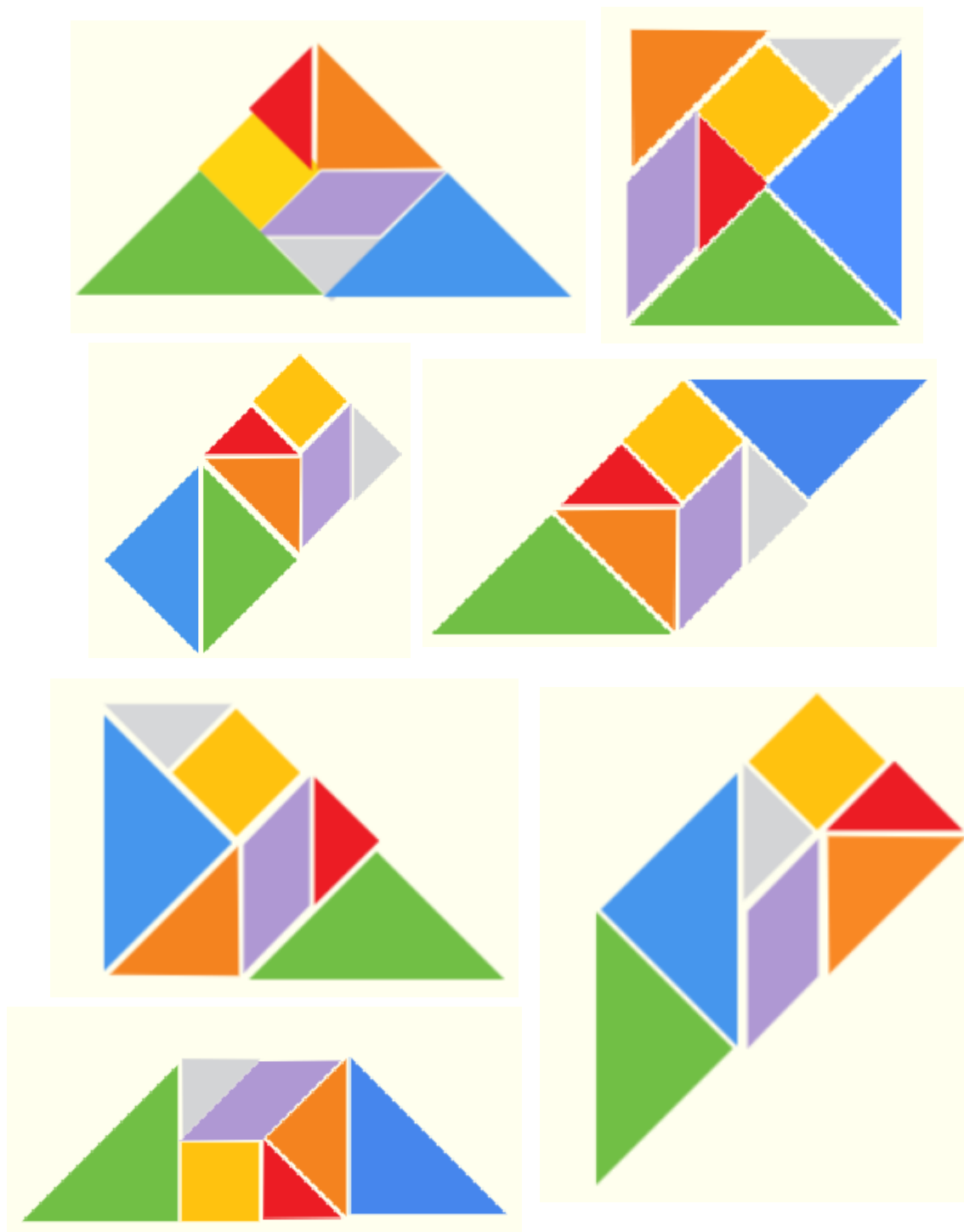
No quadro, podem registar-se os assuntos abordados na discussão para melhor esclarecimento dos alunos.

#### *Indicações suplementares:*

Para iniciar esta tarefa, o professor questiona se algum dos alunos conhece o tangram. Se nenhum conhecer o material ou a sua história, o professor mostra um vídeo sobre a sua origem (<https://www.youtube.com/watch?v=Ezbgq1js8rg>).

O professor pode lançar o desafio para os alunos construírem o seu próprio tangram em casa (<https://www.youtube.com/watch?v=VmYtiwdu3kY>) e tentarem descobrir quantas figuras convexas se podem construir a partir das peças do tangram (são 13 figuras convexas). Recorda-se que uma figura se diz convexa quando qualquer segmento de reta que une 2 pontos da figura está nela contida.





### Possíveis explorações dos alunos

**Na questão 1.** um polígono é uma figura geométrica plana e fechada por segmentos de reta, que são designados de lados. De acordo com a quantidade de lados que formam, as figuras possuem nomes e formatos distintos. Os alunos verificam que o tangram é composto por 2 triângulos com dimensões maiores, 1 triângulo médio, 2 triângulos pequenos, 1 quadrado e 1 paralelogramo. Os 5 triângulos que constituem o tangram são triângulos retângulos e isósceles.

**A questão 2.** surge com o intuito de os alunos explorarem o tangram, tendo de dar indicações a um colega para reproduzir a construção e, no final, verificar se a construção está igual à original. Como nesta questão podem surgir diversas indicações, devido à construção que se realize, os alunos devem utilizar expressões como:

- por cima de, ao lado de, por baixo de, à direita de, à esquerda de, com rotação de, entre, no meio, na extremidade de, à frente de, atrás de, no vértice de, na mesma direção de, mais distante de, entre outras expressões.

**Na questão 3.** os alunos verificam que as peças triangulares de maior dimensão ocupam  $\frac{1}{2}$  da área total do tangram.



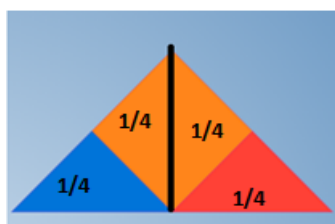
Ou então, verificam que cada peça triangular maior do tangram representa  $\frac{1}{4}$ , logo  $2 * \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .



**Na questão 4.** a relação que existe entre a peça triangular menor e a peça triangular maior é de  $\frac{1}{4}$ .



Os alunos constataam que os triângulos mais pequenos ocupam  $\frac{1}{4}$  da área total da peça triangular maior, pois o triângulo maior pode ser decomposto em 4 triângulos mais pequenos (porém, o tangram constitui-se somente por 2 peças triangulares menores).



**Na questão 5.** os alunos podem optar por 3 processos de resolução. Como as únicas figuras que não são triangulares são o paralelogramo e o quadrado, retira-se, à área total, a área ocupada por essas figuras, a saber:

- $1 - (\frac{1}{8} + \frac{1}{8}) = \frac{3}{4} \rightarrow$  área total ocupada pelas figuras triangulares, sendo que  $\frac{1}{8}$  representa a área ocupada pelo quadrado e o outro  $\frac{1}{8}$  representa a área do paralelogramo, dado que estas figuras ocupam metade da área do triângulo maior que é  $\frac{1}{4}$  da área total do tangram, logo,  $\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{8}$ ;
- Como sabem que cada triângulo maior representa  $\frac{1}{4}$  em relação à área total do tangram, e que o quadrado em relação ao triângulo maior ocupa  $\frac{1}{2}$ , bem como o paralelogramo em relação ao triângulo maior ocupa  $\frac{1}{2}$  deste, logo, como ambos ocupam metade do triângulo maior, podemos fazer  $\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{8}$ ;  $\frac{1}{8} \rightarrow$  representa a área ocupada pelo quadrado em relação ao tangram, o mesmo acontece em relação ao paralelogramo. Logo a área ocupada pelos triângulos é:  $1 - (2 * \frac{1}{8}) = \frac{3}{4}$ ;
- Podem optar por adicionar as áreas das peças triangulares (grande, média e pequena):

Área da peça triangular maior  $\rightarrow \frac{1}{4}$

Área da peça triangular média  $\rightarrow \frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{8}$

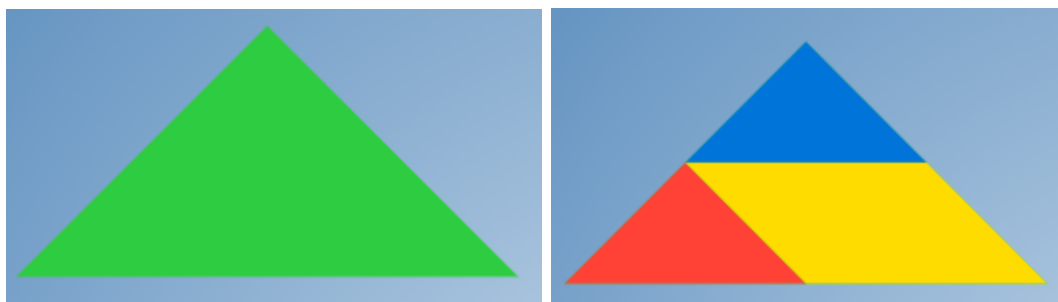
Área da peça triangular menor  $\rightarrow \frac{1}{8} : 2 = \frac{1}{16}$  ou  $\frac{1}{4} : 4 = \frac{1}{16}$

Logo, a área das peças triangulares é:

$$\frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \times 2 = \frac{3}{4}$$

Para os alunos responderem à **questão 6**, precisam de verificar que:

- 1) Os triângulos mais pequenos correspondem a  $\frac{1}{4}$  e o paralelogramo a  $\frac{1}{2}$  do triângulo maior.

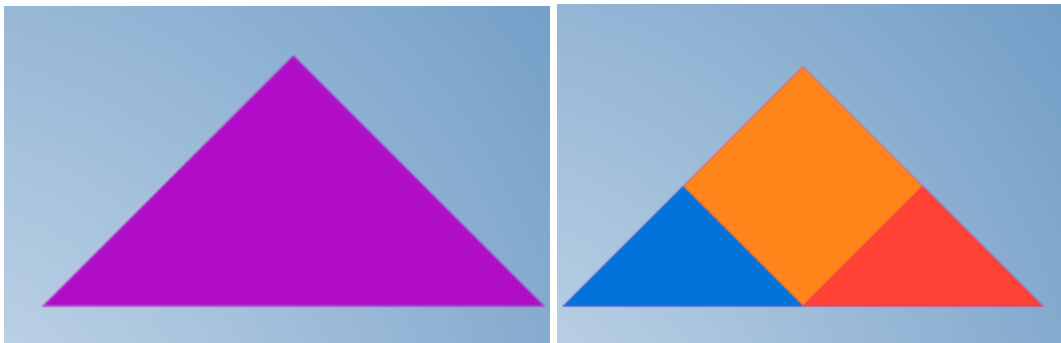


Caso os alunos não cheguem logo à conclusão que o paralelogramo representa  $\frac{1}{2}$  do triângulo maior:

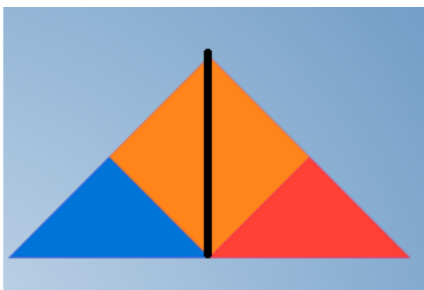


Ao dividir o paralelogramo em 2 triângulos mais pequenos, o triângulo maior fica dividido em 4 triângulos pequenos, logo, cada triângulo pequeno representa  $\frac{1}{4}$ . Assim, o paralelogramo foi dividido em 2 triângulos pequenos  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$  na forma de fração irredutível  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .

2) Os triângulos mais pequenos equivalem a  $\frac{1}{4}$  e o quadrado equivale a  $\frac{1}{2}$  do triângulo maior.

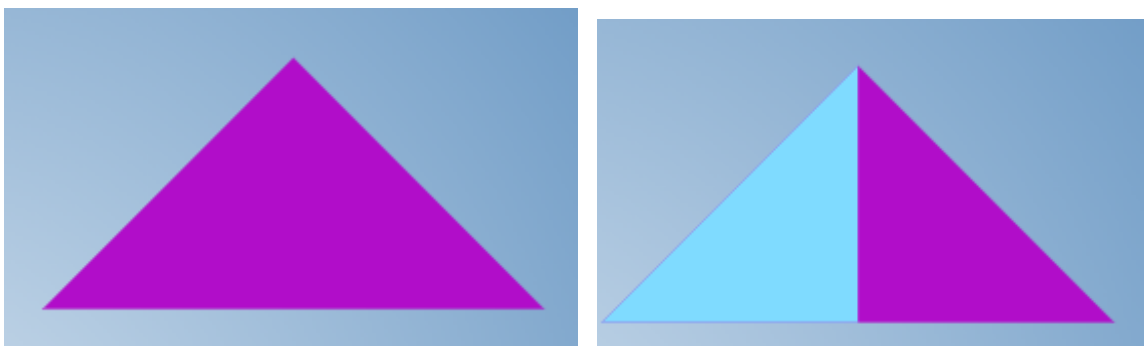


Caso os alunos não cheguem logo à conclusão que o quadrado representa  $\frac{1}{2}$  do triângulo maior:



Ao dividir o quadrado ao meio, o triângulo maior fica dividido em 4 triângulos pequenos, logo cada triângulo pequeno representa  $\frac{1}{4}$ . Assim, o quadrado foi dividido em 2 triângulos pequenos  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$  na forma de fração irredutível  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .

3) O triângulo médio é  $\frac{1}{2}$  do triângulo maior.



Repare-se que no ponto 1) o paralelogramo é  $\frac{1}{2}$  do triângulo maior;

No ponto 2) repare-se que o quadrado é  $\frac{1}{2}$  do triângulo maior;

No ponto 3) repare-se que o triângulo médio é  $\frac{1}{2}$  do triângulo maior.

Portanto, pode-se concluir que a relação entre o triângulo médio, o paralelogramo e o quadrado é de 1, porque os 3 polígonos têm a mesma área, dado ocuparem  $\frac{1}{2}$  do triângulo maior.

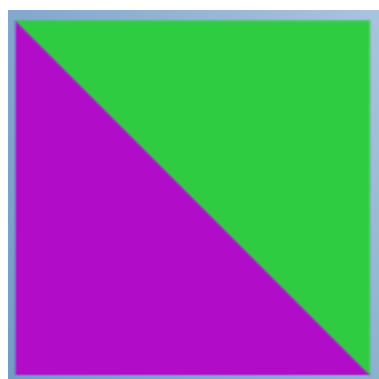
Outro processo de resolução é recorrer ao auxílio das duas peças triangulares mais pequenas para replicar cada uma das 3 figuras geométricas (triângulo médio, quadrado e paralelogramo):



O triângulo médio, o quadrado e o paralelogramo representam a mesma área (representando o dobro da peça triangular menor), dado que com as duas peças triangulares menores, consegue-se reproduzi-las.

Para responder à **questão 7**, os alunos podem apresentar como respostas:

1)



$$\text{Área} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2)



$$\text{Área} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{16} = \frac{8}{16} + \frac{1}{16} + \frac{2}{16} = \frac{11}{16}$$

3)



$$\text{Área} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{16} = \frac{8}{16} + \frac{1}{16} + \frac{2}{16} = \frac{11}{16}$$

Podem-se apresentar como resposta as figuras 1 e 3; as figuras 2 e 3. Não se podem apresentar como resposta as figuras 1 e 2, porque apresentam o mesmo perímetro.

#### 5.4. Mira, espelhos e papel vegetal

#### Roteiro da tarefa

#### Enunciado da tarefa

#### Rosáceas

1. Observa as seguintes figuras.<sup>3</sup>

a)



b)

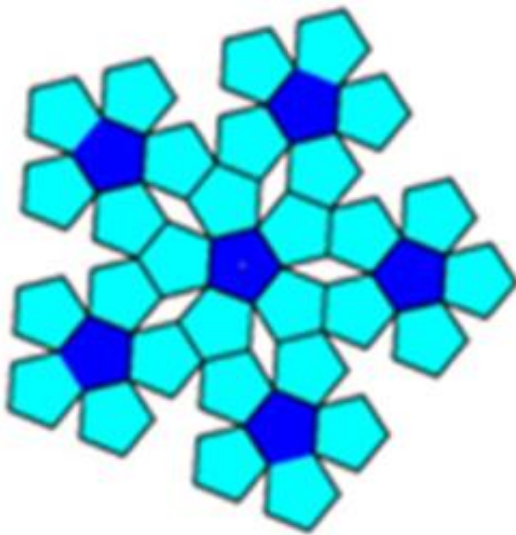


<sup>3</sup> Tarefas em aula-Matemática para a Sala de Aula, ESE do Instituto Politécnico de Viseu-  
<https://www.esv.ipv.pt/mat1ciclo/tarefas2006.htm> consultado em 17 de fevereiro de 2020.

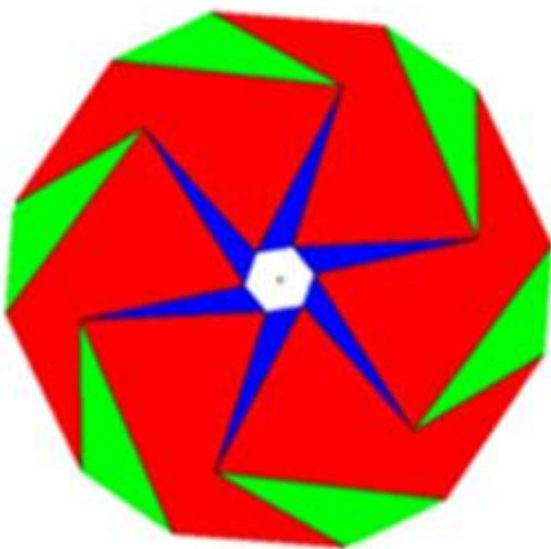
c)



d)



e)



f)



g)

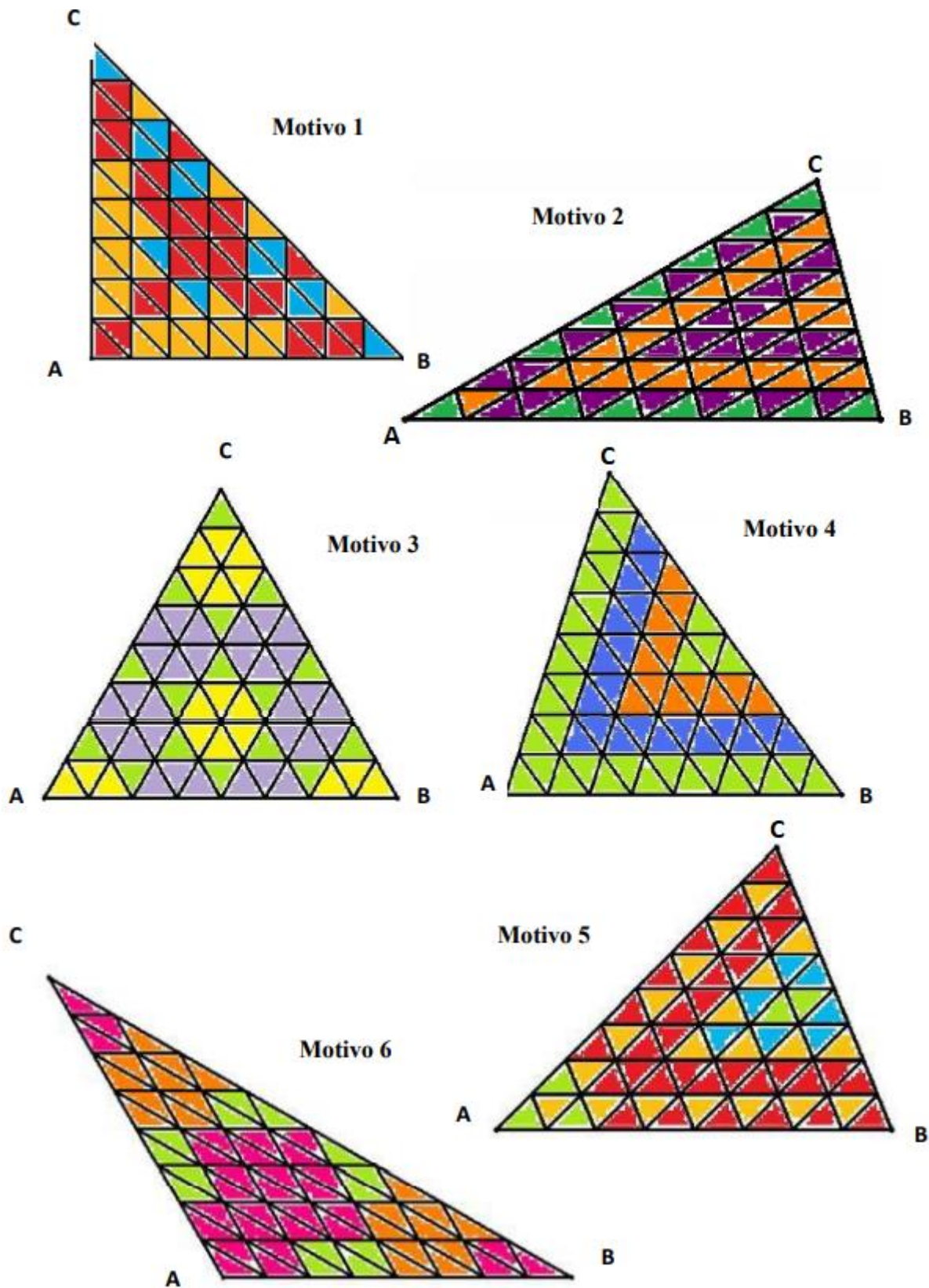


1.1. O que têm em comum as figuras anteriores?

1.2. Analisa a simetria de cada uma delas (podes recorrer à mira, a espelhos e ao papel vegetal).

2. Coloca 2 espelhos sobre os lados  $[AB]$  e  $[AC]$ , em cada uma das figuras seguintes.<sup>4</sup>

2.1. Preenche a seguinte tabela.



<sup>4</sup> Tarefa adaptada da Dissertação de mestrado *Utilização do Geogebra no tópico Reflexão, Rotação e Translação-um estudo no 6.º ano de escolaridade* (<https://iconline.ipleiria.pt/handle/10400.8/723>), p. 105.

Motivo	Polígono obtido	Amplitude do ângulo BAC
1		
2		
3		
4		
5		
6		

O que podes concluir?

3. A rosácea abaixo encontra-se sobre o pórtico principal da Igreja de Santa Maria do Castelo, na Lourinhã.



Carateriza a simetria da rosácea (sem considerar enquadramento do retângulo da fotografia). Podes utilizar mira, espelhos e papel vegetal.<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup> Tarefa adaptada do Relatório Final de Estágio *A Arte no Ensino e Aprendizagem da Simetria: Uma experiência no 2.º Ciclo do Ensino Básico* (<https://repositorio.ipv.pt/handle/10400.19/6049>), p. 55.

**Ano de escolaridade:** 6.º ano

### **Aprendizagens prévias**

- Completar figuras planas de modo que fiquem simétricas relativamente a um eixo previamente fixado, utilizando dobragens, papel vegetal, etc;
- Identificar eixos de simetria em figuras planas utilizando dobragens, papel vegetal, etc.

### **Aprendizagens visadas**

- Identificar uma reta como «eixo de simetria» de uma dada figura plana quando as imagens dos pontos da figura pela reflexão de eixo formam a mesma figura;
- Reconhecer, dados dois pontos  $O$  e  $M$  e um ângulo  $a$  (não nulo, não raso e não giro), que existem exatamente duas imagens do ponto  $M$  por rotações de centro  $O$  e ângulo  $a$  e distingui-las experimentalmente por referência ao sentido do movimento dos ponteiros do relógio, designando uma das rotações por «rotação de sentido positivo» (ou «contrário ao dos ponteiros do relógio») e a outra por «rotação de sentido negativo» (ou «no sentido dos ponteiros do relógio»);
- Saber, dado um ponto  $O$ , um ângulo  $a$  e as imagens  $A'$  e  $B'$  e de dois pontos  $A$  e  $B$  e por uma rotação de centro  $O$  e ângulo  $a$  de determinado sentido, que são iguais os comprimentos dos segmentos  $[AB]$  e  $[A'B']$  e designar, neste contexto, a rotação como uma «isometria»;
- Reconhecer, dado um ponto  $O$ , um ângulo  $a$  e as imagens  $A' B' C'$ , e de três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , e por uma rotação de centro  $O$  e ângulo  $a$  de determinado sentido, que são iguais os ângulos  $A$ ,  $B$  e  $C$  e  $A' B' C'$ ;
- Identificar uma figura como tendo «simetria de rotação» quando existe uma rotação de ângulo não nulo e não giro tal que as imagens dos pontos da figura por essa rotação formam a mesma figura;
- Identificar simetrias de rotação e de reflexão em figuras dadas.

### **Orientações para apresentação e exploração da tarefa**

#### *Indicações gerais:*

Esta tarefa é um problema destinado a alunos do 6.º ano de escolaridade, em que se utiliza o material didático não estruturado, o papel vegetal (para as simetrias de rotação) e o material didático estruturado o espelho (para as simetrias de reflexão). Nas questões 1. e 3., também se pode utilizar a mira (material didático estruturado). Na fase de lançamento da tarefa, o professor apresenta-a aos alunos e assegura-se de que os alunos entenderam o que é para fazer e que os mesmos se sentem desafiados a trabalhar. O material ajuda, numa primeira fase, no desenvolvimento do sentido espacial, pois o estudo das simetrias integra a construção e manipulação de “imagens mentais” de objetos com 2 dimensões. Numa fase posterior, os alunos podem usar o espelho apenas para confirmar as conjeturas, isto é, os “movimentos mentais” que o aluno realiza. Com esta tarefa pretende-se trabalhar a reflexão axial como isometria, eixos de simetria, simetrias de rotação e de reflexão e invariância da amplitude de ângulo. É importante clarificar que o eixo de simetria é uma “linha” que divide uma figura em partes simétricas. Se uma figura tem algum eixo de simetria, diz-se que a figura tem simetria de reflexão. Quando existe uma rotação com ângulo de amplitude diferente

de  $0^\circ$  e de  $360^\circ$  que transforma uma figura na própria figura, diz-se que a figura tem simetria de rotação, ou seja, possui simetria rotacional de ordem  $n$ ,  $n > 1$  quando possui  $n$  rotações, com centro num mesmo ponto e de amplitudes,  $\frac{360 \cdot k}{n}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Também existe a simetria central que é uma rotação com ângulo de amplitude de  $180^\circ$  e centro igual ao centro de reflexão central. Toda a figura com simetria central é uma figura com simetria rotacional e uma figura possui simetria central se a rotação de amplitude  $180^\circ$  fizer parte do grupo de simetrias que essa figura possui.

Para além disto, é importante esclarecer os alunos relativamente às expressões como *motivo* e *rosácea*. Pode-se dizer que o motivo é a imagem fundamental da figura. As rosáceas são figuras compostas por diversos módulos geometricamente iguais que se repetem por rotação. O centro de rotação é sempre o mesmo ponto, a amplitude da rotação é sempre a mesma e a divisão entre  $360^\circ$  e a medida desta amplitude é inteira. As rosáceas podem ser de dois tipos: cíclicas e com grupo diedral. As rosáceas cíclicas possuem apenas simetrias de rotação em número finito e as rosáceas com grupo diedral possuem simetrias de rotação e simetrias de reflexão, em igual número. Ambas as rosáceas aparecem nesta tarefa.

São exemplos de rosáceas com grupo diedral os polígonos regulares. As rosáceas apresentam sempre simetria rotacional e podem, por vezes, apresentar simetrias de reflexão.

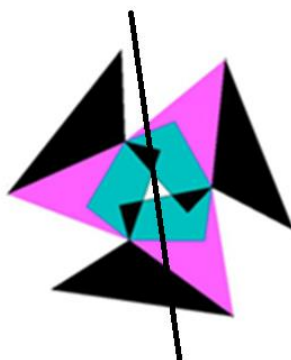
A tarefa pode ser realizada individualmente ou a pares. Para a sua realização prevê-se uma aula de 100 minutos, em que 40 minutos são reservados para a resolução da tarefa, 30 minutos para a discussão do trabalho realizado, 30 minutos para o registo das conclusões e para a sistematização de resultados e conceitos.

Os alunos devem usar a terminologia e simbologia matemáticas sobre as isometrias do plano para representarem as informações e os seus raciocínios ao longo da tarefa, evidenciados anteriormente.

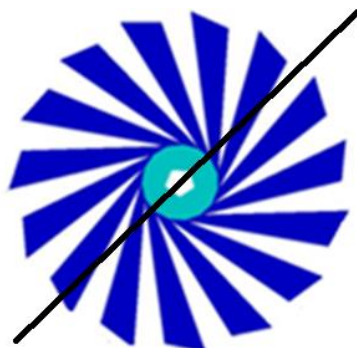
É de referir que alunos têm de mobilizar alguns dos conhecimentos adquiridos no 1.º CEB.

#### *Exploração da tarefa:*

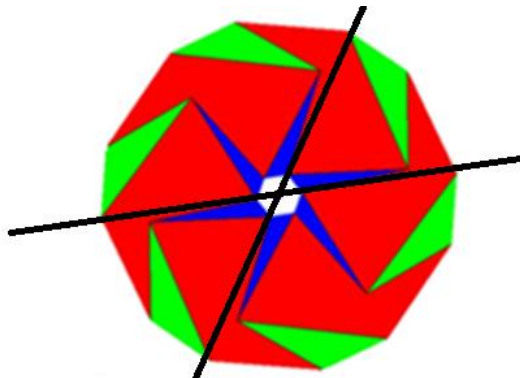
**Na questão 1.1.** os alunos conseguem identificar que as figuras possuem simetrias de reflexão ou de rotação. As figuras têm simetria de reflexão se a imagem da figura pela reflexão do eixo é a própria figura. Possui simetria de rotação se existe uma rotação com ângulo de amplitude diferente de  $0^\circ$  e de  $360^\circ$  que transforma uma figura na própria figura. Ou ainda, que existe uma rotação de ângulo não nulo que deixa a figura globalmente invariante. Já a **questão 1.2.** pode ser alvo de dificuldades na identificação das simetrias presentes em cada uma das figuras. Na figura a), o professor pode questionar os alunos se conseguem identificar algum eixo de simetria. Estes verificam que, em qualquer posição da figura, se traçarem o eixo de simetria, a figura a) pela reflexão do eixo não se obtêm a própria figura (podem confirmar utilizando o espelho ou a mira). Para verificar que só tem simetria de rotação, podem utilizar o papel vegetal.



O mesmo acontece na figura b) que não possui simetria de reflexão/ simetria axial.



No entanto, os alunos podem afirmar que a figura possui simetria de rotação. Para que melhor compreendam que a figura possui simetria de rotação, o professor solicita que passem a figura para o papel vegetal e verifiquem que, rodando o papel vegetal sobre a figura, com determinadas amplitudes, esta fica globalmente invariante, rodando no sentido positivo ou negativo. O professor pode questionar quantas rotações admite a figura b). Alguns alunos podem “cair no erro” de dizerem que a figura b) possui 15 rotações com amplitude de  $24^\circ$ , pois estão a ter somente em consideração o número de partes azuis escuras da figura. Na discussão da tarefa é importante que o professor alerte para o pentágono que se encontra no centro da figura b), pois todos os elementos que constituem a figura podem influenciar o número de rotações que ela admite. Na figura c) e d) os alunos verificam que a figura é refletida em relação a retas, que se denomina de eixo de simetria ou eixo de reflexão, e obtém-se a própria figura. O professor pode pedir aos alunos que posicionem o espelho ou a mira onde consideram que podem marcar o eixo de simetria e verificar que a imagem refletida coincide com a original, ou então que cortem a imagem e efetuem dobragens na mesma, de modo a que todos os pontos e segmentos de reta coincidam. O professor pode questionar: “quantos eixos de simetria esta figura admite?”, “possui simetria rotacional?”. Os alunos com alguma dificuldade no desenvolvimento do sentido espacial utilizam o espelho ou a mira para verificar se os eixos de simetria estão corretamente traçados. O professor, para trabalhar também o sentido das rotações, pode numerar os vértices da imagem na parte azul e questionar se fizer uma rotação com  $80^\circ$  no sentido negativo que vértice obtém e que vértice obtém se for no sentido positivo. Na figura e) os alunos constatam que esta não vai ter simetria de reflexão, pois, em qualquer posição da figura, se traçarem o eixo de simetria, pela reflexão do eixo, não obtêm a própria figura, apresentando somente simetria rotacional.



Para os alunos verificarem que esta figura não possui simetria de reflexão, o professor pode sugerir que coloquem o espelho ou a mira em várias posições e verifiquem se a imagem refletida coincide com a imagem real. Do mesmo modo podem cortar a imagem, dobrá-la e verificarem se a outra metade coincide,

ou não, em todos os pontos ou segmentos de reta. Para verificar que esta figura possui apenas simetria rotacional, o professor pode solicitar que passem a figura para o papel vegetal e vão rodando o papel vegetal sobre a imagem real e verificam que esta, com determinadas amplitudes, fica invariante.

O professor pode questionar se o hexágono que se encontra no centro da figura influencia ou não no número de rotações que ela admite. Caso os alunos não consigam responder a esta questão, o professor pode solicitar que passem a imagem para o papel vegetal. Na figura f), os alunos verificam que esta possui simetria de reflexão, pois concluem que a figura é refletida em relação a retas, obtendo-se a própria figura. O professor pode questionar onde consideram que a imagem vai admitir eixos de simetria e os alunos podem colocar o espelho ou a mira sobre os respectivos eixos e verificarem se a imagem refletida no espelho, ou na mira, coincide com a figura real. O professor pode, ainda, questionar quantas simetrias de reflexão possui, se admite simetria rotacional e quantas rotações admite a figura, podendo também fazer questões sobre o sentido da rotação. Possivelmente, na figura g) os alunos podem dizer que esta tem simetria de reflexão com eixo na vertical e horizontal. O professor deve pedir aos alunos que coloquem o espelho ou a mira nos respectivos eixos de simetria e verifiquem se as cores refletidas no espelho ou na mira são as mesmas que têm na figura g). Pode solicitar também que cortem a figura, a dobrem e verifiquem se as cores da figura coincidem. Pode ainda questionar se admite simetria de rotação, bem como se, na figura g), não tivessem em consideração as cores, se esta figura possuía simetria de reflexão e, se tivesse simetria de reflexão, sem ter em consideração as cores, quantos eixos de simetria se poderiam traçar (sendo possível traçar 2 eixos de simetria). Para além disso, pode perguntar se não se tivessem em consideração as cores, se a figura admitiria simetria de rotação e quantas rotações (tendo 2 rotações de  $180^\circ$  e  $360^\circ$ ).

Na **questão 2.** as dificuldades que podem surgir são quando a amplitude do ângulo BAC é muito pequena. Podem ter alguma dificuldade em contar o número de lados da figura formada, muito especificamente no motivo 2, bem como não identificarem as designações de todos os polígonos. Os alunos devem verificar que todos os motivos são triângulos diferentes, daí obterem polígonos diferentes. Na discussão matemática deve-se referir que, quanto maior o ângulo, menor o número de lados do polígono ou vice-versa, quanto menor o ângulo, maior o número de lados do polígono. Também deve recordar as designações de todos os polígonos consoante o número de lados.

Na **questão 3.** os alunos têm de caracterizar a simetria da rosácea, sendo que o professor pode ter de clarificar o que pretende, ou seja, os alunos têm de indicar as simetrias que admite, as respetivas ordens e, caso exista simetria rotacional, têm também de indicar a amplitude dos ângulos correspondentes. Mais uma vez, como na questão 1.2. b), os alunos podem deduzir erradamente que a rosácea possui 12 simetrias de reflexão e 12 simetrias de rotação, no entanto, as “4 pétalas” que se encontram no centro da figura vão influenciar o número de simetrias que a figura admite.

Na fase de exploração, o professor deve ir acompanhando o trabalho dos alunos e verificar se todos participam de forma ativa.

A discussão da tarefa realiza-se após ter terminado o tempo estipulado para a realização e exploração da mesma com recurso aos espelhos, mira e papel vegetal. Na discussão matemática analisam-se as resoluções que são apresentadas pelos alunos e o professor orienta a discussão. Apresenta-se, primeiro, a resolução dos grupos que resolveram mais informalmente as questões e vão seguindo-se os grupos que foram complexificando as resoluções (o professor define, pois foi verificando quando os alunos resolviam a

tarifa). Na discussão da tarefa, as ideias matemáticas que podem emergir da resolução são a reflexão axial e suas propriedades (mantém o comprimento dos segmentos de reta e transforma ângulos em ângulos iguais), o conceito de que eixo de simetria é o mesmo que eixo de reflexão, sentido positivo (contrário ao dos ponteiros do relógio) e sentido negativo (sentido dos ponteiros do relógio) da rotação e propriedades da rotação (mantém o comprimento do segmento de reta e transforma ângulos em ângulos iguais).

É importante que se estabeleçam comparações entre as resoluções que são apresentadas. Nesta fase é fulcral que também ocorram novas aprendizagens sobre os conceitos, procedimentos e processos utilizados. Através da discussão, institucionalizam-se aprendizagens, que toda a turma deve partilhar, sendo um momento onde podem surgir, ou serem aperfeiçoados, novos conceitos e procedimentos, estabelecendo conexões com aprendizagens anteriores.

No quadro podem-se registar os assuntos abordados na discussão para melhor esclarecimento dos alunos.

#### *Indicações suplementares:*

A partir das situações apresentadas, para exploração e continuação do trabalho desenvolvido com esta tarefa, segue-se o link do Relatório Final de Estágio *A Arte no Ensino e Aprendizagem da Simetria: Uma experiência no 2.º Ciclo do Ensino Básico* (<https://repositorio.ipv.pt/handle/10400.19/6049>). Os alunos, ao realizarem as tarefas deste relatório, têm acesso a rosáceas que existem em cidades de Portugal, havendo uma ligação à realidade dos alunos, bem como a utilização de AGD, mais especificamente a ferramenta *Gecla*.

O Relatório Final de Estágio *Construindo a Profissionalidade Docente: potencialidades das TIC na promoção de atividades de ensino/aprendizagem no âmbito da simetria no 2.º CEB* (<https://repositorio.ipv.pt/handle/10400.19/6046>) apresenta também tarefas similares que envolvem as simetrias, utilizando AGD, neste caso o *Geogebra*.

O professor deve desafiar os alunos a estarem mais atentos às suas realidades e registar fotograficamente simetrias de reflexão, simetrias de rotação, rosáceas, frisos que encontrem em passeios familiares e partilhem nas aulas de Matemática.

#### **Possíveis explorações dos alunos**

Na **questão 1.1.** os alunos devem referir que as figuras anteriores têm a presença de simetrias, exceto a figura g).

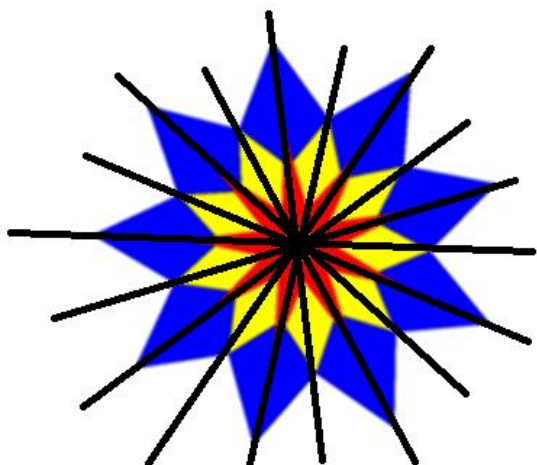
Na **questão 1.2.** os alunos identificam as simetrias existentes em cada figura. Na figura:

a) simetria de rotação/ simetria rotacional (possui 3 simetrias de rotação com amplitude  $120^\circ$  ( $360:3=120^\circ$ ) e as amplitudes dos ângulos de rotação são  $120^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $360^\circ$ );

b) simetria de rotação/ simetria rotacional (possui 5 simetrias de rotação com amplitude  $72^\circ$  ( $360:5=72^\circ$ ) e as amplitudes dos ângulos de rotação são  $72^\circ$ ,  $144^\circ$ ,  $216^\circ$ ,  $288^\circ$ ,  $360^\circ$ );

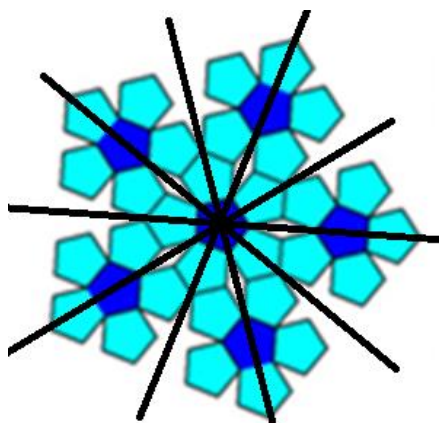
c) simetria de reflexão/ axial e simetria de rotação/ simetria rotacional (tem 9 simetrias de reflexão de ordem 9, possui também 9 simetrias de rotação com amplitude de  $40^\circ$  ( $360:9=40^\circ$ ) e as amplitudes dos ângulos de rotação são  $40^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $160^\circ$ ,  $200^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $280^\circ$ ,  $320^\circ$ ,  $360^\circ$ );

Eixos de simetria/ eixos da reflexão:



d) simetria de reflexão/ axial e simetria de rotação/ simetria rotacional (tem 5 simetrias de reflexão de ordem 5, possui também 5 simetrias de rotação com amplitude de  $72^\circ$  ( $360:5=72^\circ$ ) e as amplitudes dos ângulos de rotação são  $72^\circ$ ,  $144^\circ$ ,  $216^\circ$ ,  $288^\circ$ ,  $360^\circ$ );

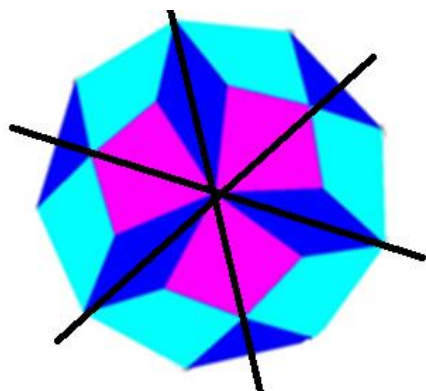
Eixos de simetria/ eixos da reflexão:



e) simetria de rotação/ simetria rotacional (possui 6 simetrias de rotação com amplitude  $60^\circ$  ( $360:6=60^\circ$ ) e as amplitudes dos ângulos de rotação são  $60^\circ$ ,  $130^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $300^\circ$ ,  $360^\circ$ , tem simetria central, dado que a rotação de amplitude  $180^\circ$  faz parte do grupo de simetrias que a figura possui);

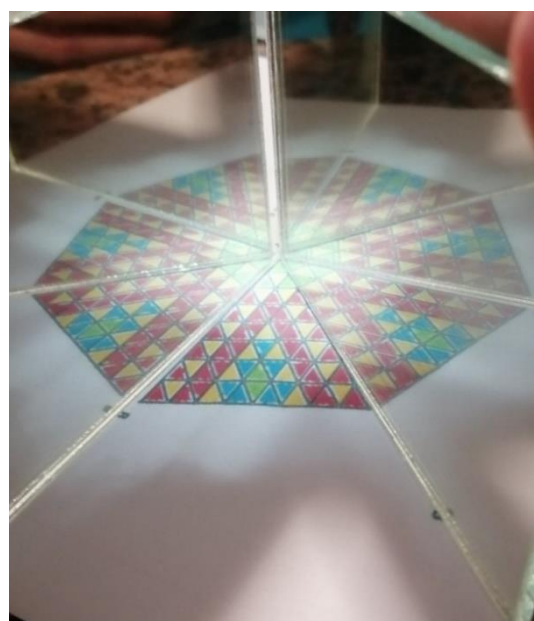
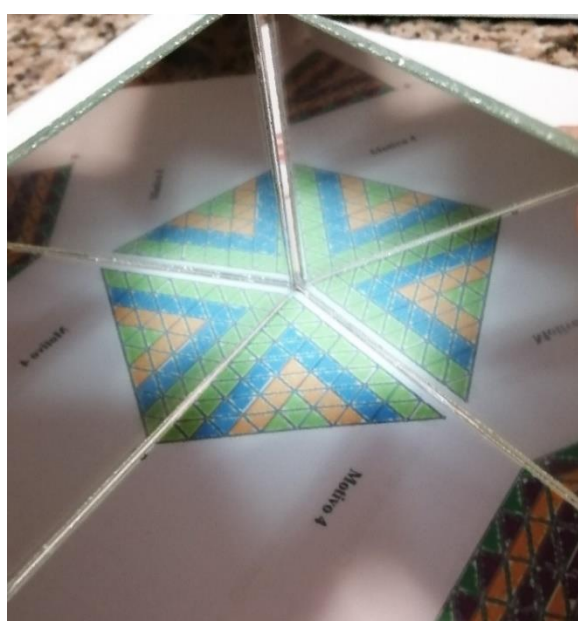
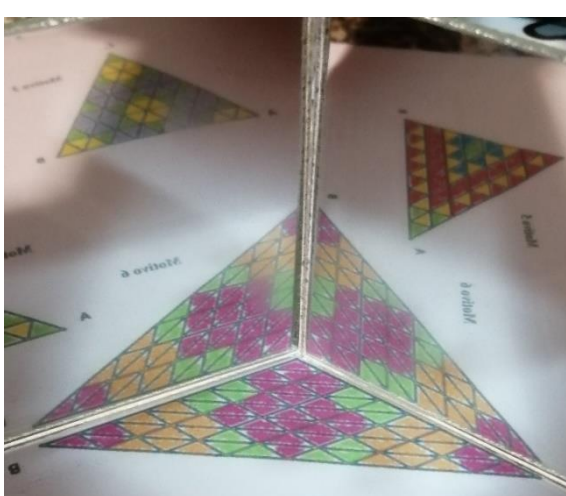
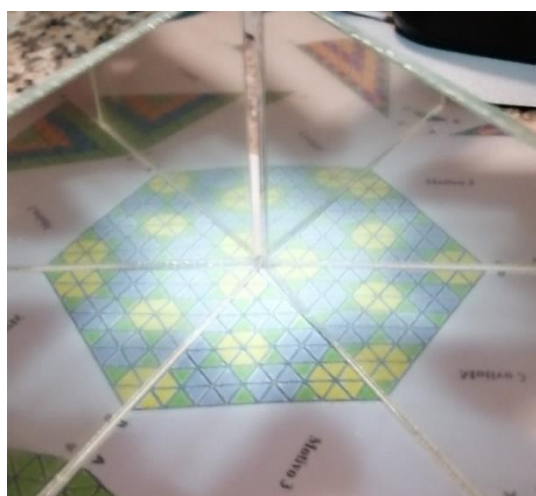
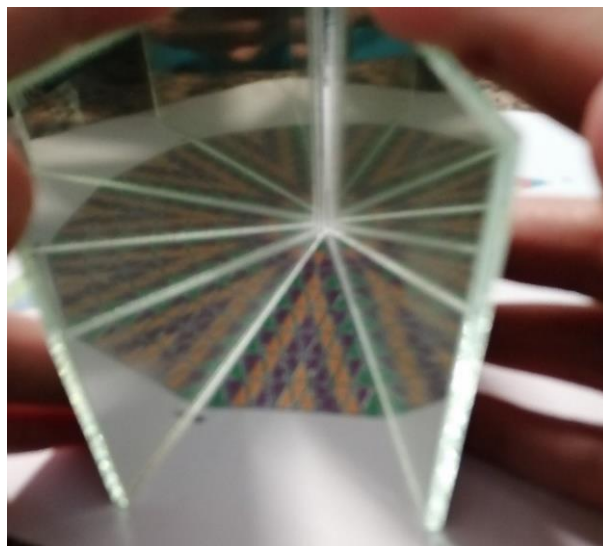
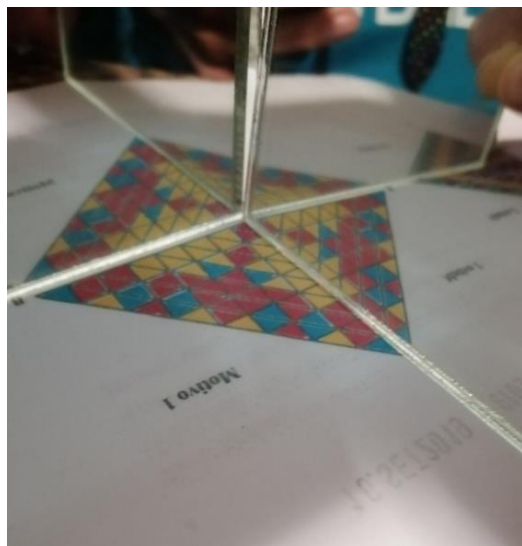
f) simetria de reflexão/ axial e simetria de rotação/ simetria rotacional (tem 3 simetrias de reflexão de ordem 3, possui também 3 simetrias de rotação com amplitude de  $120^\circ$  ( $360:3=120^\circ$ ) e as amplitudes dos ângulos de rotação são  $120^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $360^\circ$ );

Eixos de simetria/ eixos da reflexão:



g) não possui simetrias (por causa da cor).

Na questão 2. os alunos têm de colocar 2 espelhos sobre os lados [AB] e [AC], em cada uma das figuras, e vão obter:



Após os alunos colocarem os 2 espelhos nos segmentos de reta indicados têm de preencher a tabela:

Motivo	Polígono obtido	Amplitude do ângulo BAC
1	Quadrado	$360: 4 = 90^\circ$
2	Dodecágono	$360: 12 = 30^\circ$
3	Hexágono	$360: 6 = 60^\circ$
4	Pentágono	$360: 5 = 72^\circ$
5	Octógono	$360: 8 = 45^\circ$
6	Triângulo	$360: 3 = 120^\circ$

Quando terminam de preencher a tabela, os alunos verificam que, quanto maior é a amplitude do ângulo de abertura (amplitude do ângulo BAC), menor é o número de lados que o polígono tem. Constatam ainda que o produto entre o número de lados e o ângulo obtido é sempre  $360^\circ$ .

**Na questão 3.** os alunos têm de caracterizar a simetria da rosácea, isto é, indicar as simetrias que admite, as respetivas ordens e, caso exista simetria rotacional, têm também de indicar a amplitude dos ângulos correspondentes.

Eixos de simetria/ eixos da reflexão:



Os alunos concluem que a rosácea tem 4 simetrias de reflexão de ordem 4, possui também 4 simetrias de rotação com amplitude de  $90^\circ$  ( $360: 4=90^\circ$ ) e as amplitudes dos ângulos de rotação são  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $360^\circ$ , tem simetria central, dado que a rotação de amplitude  $180^\circ$  faz parte do grupo de simetrias que a figura possui.

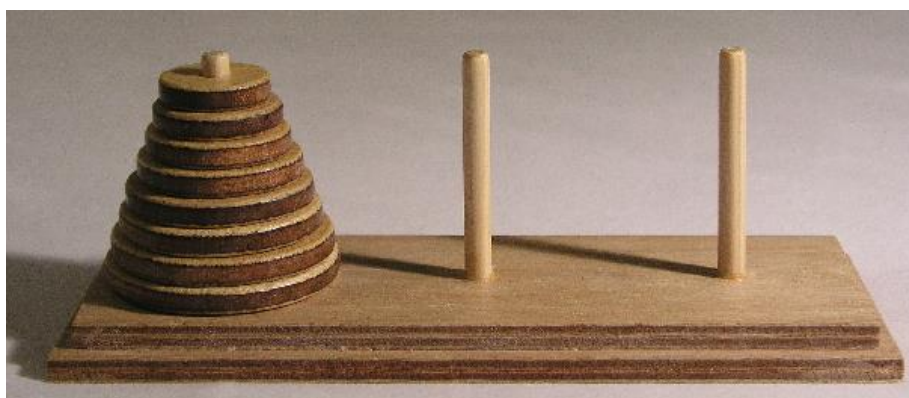
## 5.5 Torre de Hanói

### Roteiro da tarefa

#### Enunciado da tarefa

#### Torre de Hanói<sup>6</sup>

A torre de Hanói, também designada de “quebra-cabeças do fim do mundo” e “torre de Bramanismo”, foi criada no ocidente pelo matemático François Édouard Anatole Lucas (1842-1891). É constituída por uma base com 3 pinos que se dispõem na vertical e uma determinada quantidade de peças com diâmetros decrescentes e perfurados no centro, como podes observar na figura.



O objetivo da torre de Hanói é construir a mesma torre de peças na haste que se situa mais à direita, movendo uma peça de cada vez e sem colocar uma peça maior sobre uma peça mais pequena. Podes movimentar as peças quantas vezes quiseres, mas só serás vencedor se o conseguires fazer com o menor número de movimentos possível. Quanto maior o número de peças, mais difícil se torna o desafio.

1. Explora, com a torre de Hanói, a quantidade de movimentos mínimos que cada peça faz (sendo a peça 1 de menor diâmetro e a peça 5 a de maior diâmetro). O que concluis? Podes fazê-lo utilizando palavras, desenhos, esquemas, tabelas ou a própria torre de Hanói.
2. Qual a lei de formação que te permite descobrir o menor número de movimentos possíveis para qualquer número de peças?
3. Se construíres uma torre com 9 peças utilizando 515 movimentos, terás vencido o jogo? Explica o teu raciocínio.

---

<sup>6</sup> Adaptado de Tarefas de nrnich <https://nrnich.maths.org/6690#>.

**Ano de escolaridade:** 6.º ano

### **Aprendizagens prévias**

- Resolver problemas envolvendo a determinação de termos de uma sequência, dada a lei de formação;
- Resolver problemas envolvendo a determinação de uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida;
- Identificar  $a^n$  (sendo  $n$  número natural maior do que 1 e  $a$  número racional não negativo) como o produto de  $n$  fatores iguais a  $a$  e utilizar corretamente os termos «potência», «base» e «expoente»;
- Reconhecer que o produto de duas potências com a mesma base é igual a uma potência com a mesma base e cujo expoente é igual à soma dos expoentes dos fatores;
- Reconhecer que o produto de duas potências com o mesmo expoente é igual a uma potência com o mesmo expoente e cuja base é igual ao produto das bases;
- Reconhecer que o quociente de duas potências com a mesma base não nula e expoentes diferentes (sendo o expoente do dividendo superior ao do divisor) é igual a uma potência com a mesma base e cujo expoente é a diferença dos expoentes;
- Reconhecer que o quociente de duas potências com o mesmo expoente (sendo a base do divisor não nula) é igual a uma potência com o mesmo expoente e cuja base é igual ao quociente das bases;
- Conhecer a prioridade da potenciação relativamente às restantes operações aritméticas e simplificar e calcular o valor de expressões numéricas envolvendo as quatro operações aritméticas e potências bem como a utilização de parênteses.

### **Aprendizagens visadas**

- Resolver problemas envolvendo a determinação de uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida e formulá-la em linguagem natural e simbólica.

### **Orientações para apresentação e exploração da tarefa**

#### *Indicações gerais:*

Esta tarefa é uma investigação, destinada a alunos do 6.º ano de escolaridade, em que se utiliza o material didático estruturado torre de Hanói. Na fase de lançamento da tarefa, o professor assegura-se de que os alunos entenderam o que é para fazer e que os mesmos se sentem desafiados a trabalhar nela. Com este material pretende-se trabalhar as sequências e regularidades, termos de uma sequência e expressão geradora.

O ensino exploratório é aquele em que os alunos aprendem através do trabalho que efetuam com tarefas. Através desta metodologia, os alunos veem surgir os seus conhecimentos e procedimentos matemáticos com significado, ao mesmo tempo que treinam e desenvolvem competências essenciais para a disciplina, destacando-se a capacidade para resolver problemas, para raciocinar e para comunicar matematicamente.

A tarefa pode ser realizada em pequenos grupos de trabalho. Para a sua realização prevê-se uma aula de 100 minutos, em que 50 minutos são reservados para a resolução da tarefa, 35 minutos para a discussão do trabalho realizado, 15 minutos para o registo das conclusões e para a sistematização de resultados e

conceitos.

Os alunos devem usar a terminologia e simbologia matemáticas sobre as sequências e regularidades, já evidenciadas anteriormente, para representarem as informações e os seus raciocínios ao longo da tarefa.

É de referir que alunos têm de mobilizar alguns dos conhecimentos adquiridos no 1.º CEB.

*Exploração da tarefa:*

**A questão 1.** apresenta como dificuldades quantificar o número mínimo de movimentos que o jogador realiza quando a quantidade de peças começa a ser elevada. Caso os alunos se deparem com esta dificuldade, o professor pode questionar os alunos nos seguintes termos “possuir um número de peças par ou ímpar, influencia para onde o jogador pode iniciar o movimento da peça menor?”. Após algum tempo de exploração, os alunos verificam que, se a torre possuir um número par ou ímpar de peças, isso vai interferir na direção para a qual o jogador deve iniciar o deslocamento da peça 1 (de menor diâmetro). Se a torre tem um número par de peças, deve-se iniciar o movimento do disco menor para a coluna do meio. Se o número de peças for ímpar, deve dirigir-se, de início, para a coluna destino. Caso não se tenham apercebido desta técnica de jogada, serão feitos mais movimentos do que o pressuposto. Para ajudar os alunos, o professor pode realizar a construção de uma tabela (como o exemplo abaixo), para os alunos verificarem os movimentos de cada peça.

Quantidade de peças	Quantidade de movimentos mínimos de cada peça					Total de movimentos
	Peça 1	Peça 2	Peça 3	Peça 4	Peça 5	
1						
2						
3						
4						
5						

O professor pode pedir aos alunos que preencham a tabela e que observem as colunas referentes à quantidade de movimentos das peças 1, 2, 3, 4 e 5 e, em seguida, as linhas. Posteriormente, questionar “o que podem concluir?”.

Quantidade de peças	Quantidade de movimentos mínimos de cada peça					Total de movimentos
	Peça 1	Peça 2	Peça 3	Peça 4	Peça 5	
1	1	0	0	0	0	1
2	2	1	0	0	0	3
3	4	2	1	0	0	7
4	8	4	2	1	0	15
5	16	8	4	2	1	31

Os alunos, após preencherem a tabela, verificam que, nas linhas, o termo seguinte é metade do termo

anterior até alcançar o número 1. Após surgir o número 1, os termos seguintes são sempre zero. Ainda na linha, observa-se que, se adicionarem os algarismos da linha toda, obtém-se o número total de movimentos. Já nas colunas, verificam que o termo seguinte é o dobro do anterior, desde que o termo anterior não seja o número zero.

**Na questão 2.** para chegarem à lei de formação, os alunos formulam possíveis conjeturas e observam a coluna com o total de movimentos. Verificam que o termo seguinte aparenta ser obtido efetuando o produto entre o termo anterior e 2, adicionado de 1 unidade, isto é,  $(1 \cdot 2) + 1 = 3$ ;  $(3 \cdot 2) + 1 = 7$ ;  $(7 \cdot 2) + 1 = 15$ ;  $(15 \cdot 2) + 1 = 31$ . Porém, não identificam uma lei de formação através desta observação.

Posteriormente, quando relacionam a quantidade de peças com o total de movimentos, verificam que, realizando o produto entre o número de peças e 2, e subtraindo 1 unidade, aparenta-se obter o número total de movimentos, isto é,  $(1 \cdot 2) - 1 = 1$ ;  $(2 \cdot 2) - 1 = 3$ ;  $(3 \cdot 2) - 1 = 5$ . No entanto, quando se utilizam 3 peças, o total de movimentos é 7 e, por esta lei de formação, não conseguem obter o número mínimo de movimentos para qualquer número de peças que utilizem.

O professor, nesta questão, para ajudar os alunos a chegarem à lei de formação, pode ir fazendo perguntas como: “o número de movimentos das peças vai aumentando ou diminuindo, consoante o aumento de número de peças?”; “o que acontece se adicionarem todos os números da linha? O que se obtém?”; “quanto aumenta a quantidade de movimentos, se se acrescentar mais uma peça à torre?”.

Seguidamente, os alunos efetuam a diferença entre a quantidade de movimentos para cada número de peças, isto é,  $3 - 1 = 2$ ;  $7 - 3 = 4$ ;  $15 - 7 = 8$ ;  $31 - 15 = 16$ . Após verem estes resultados, conseguem verificar que multiplicando por 2 se obtém o termo seguinte:

$$3 - 1 = 2$$

$$7 - 3 = 4$$

$$15 - 7 = 8$$

$$31 - 15 = 16$$

O professor, neste momento, pode questionar “a diferença encontrada entre a quantidade de movimentos para cada número de peças representa sempre uma potência de que base?”.

Os alunos experimentam colocar o resultado em forma de potência, pois verificam que o termo seguinte é sempre o dobro do termo anterior, portanto, a base da potência vai ser 2 (recorrendo-se à potenciação para indicar uma multiplicação de fatores iguais):

$$3 - 1 = 2 = 2^1$$

$$7 - 3 = 4 = 2^2$$

$$15 - 7 = 8 = 2^3$$

$$31 - 15 = 16 = 2^4$$

Os alunos concluem que do resultado das potências obtém-se uma unidade a mais do que o número total de movimentos, então:

$$2^1 - 1 = 1$$

$$2^2 - 1 = 3$$

$$2^3 - 1 = 7$$

$$2^4 - 1 = 15$$

O professor pode colocar questões como: “o que representam os expoentes dessas potências de base 2?”; “ $2^2$  é o mesmo que  $2*2$ ? E  $2^3$  é o mesmo que ter  $2*2*2$ ?”; “que operação utilizar com a coluna com o total de movimentos para se obter o número mínimo de movimentos?”.

Pode-se construir outra tabela, para facilitar a observação.

Quantidade de peças	Total de movimentos	Generalização matemática
1	1	$2^1-1=1$
2	3	$2^2-1=3$
3	7	$2^3-1=7$
4	15	$2^4-1=15$
5	31	$2^5-1=31$
		$2^n-1$

Assim, a lei de formação é  $2^n-1$ , onde  $n$  representa qualquer número de peças. Através da linguagem natural diz-se que a lei de formação é uma potência de base 2 elevado a  $n$  ( $n$  representa qualquer número de peças) subtraindo 1 unidade.

A **questão 3.** pode apresentar como dificuldade os alunos não saberem a quantidade de movimentos mínimos utilizando 9 peças. Os alunos, na lei de formação  $2^n-1$ , podem não reconhecer o que representa o  $n$  e podem não saber calcular a potência  $2^9$ . Para atenuar as dificuldades apresentadas nesta questão, o professor questiona os alunos nos seguintes termos “o que representa o  $n$  na lei de formação?”; “o que representa a potência  $2^9$ ?”; “ $2^9$  é o mesmo que  $2*9$ ?”; “ $2^9$  é o mesmo que  $9*9*9*9*9*9*9*9$  ou  $2^9$  é o mesmo que ter  $2*2*2*2*2*2*2*2*2$ ?”.

Na fase de exploração, é importante o apoio aos alunos realizado em pequenos grupos, verificando se todos participam de forma ativa.

Na discussão coletiva, analisam-se as resoluções que são apresentadas pelos alunos e o professor orienta a discussão, garantindo que as explicações e argumentações mantêm a qualidade matemática. A discussão da tarefa realiza-se após ter terminado o tempo estipulado para a execução e exploração da mesma com recurso à torre de Hanói. Na discussão matemática, apresenta-se, primeiro, a resolução dos grupos que resolveram mais informalmente as questões e vão seguindo-se os grupos que foram formalizando as resoluções (o professor define, pois foi verificando no momento em que os alunos resolviam a tarefa). Na discussão da tarefa, as ideias matemáticas que podem emergir da resolução são os diferentes tipos de sequências que existem (tratando-se de uma sequência numérica crescente), o que se entende por termo (registar a sequência 1, 3, 7, 15 e 31 e indicar o 1.º termo ou termo de ordem 1 e assim sucessivamente), lei de formação e expressão geradora. Para além disto recorda-se o que é a base e o expoente de uma potência, o que representa ter  $2^2$  (por exemplo) e como se efetuam operações com potências que tenham a mesma base e expoentes diferentes, bem como quando se tem bases diferentes e expoentes iguais (sendo a base e o expoente números naturais). Nas operações com potências destaca-se, particularmente, “Reconhecer que o produto de duas potências com a mesma base é igual a uma potência com a mesma base e cujo expoente é igual à soma dos expoentes dos fatores; Reconhecer que o produto de duas potências com o mesmo expoente é igual a uma potência com o mesmo expoente e cuja base é

igual ao produto das bases; Reconhecer que o quociente de duas potências com a mesma base não nula e expoentes diferentes (sendo o expoente do dividendo superior ao do divisor) é igual a uma potência com a mesma base e cujo expoente é a diferença dos expoentes; Reconhecer que o quociente de duas potências com o mesmo expoente (sendo a base do divisor não nula) é igual a uma potência com o mesmo expoente e cuja base é igual ao quociente das bases”<sup>7</sup>.

Devem-se estabelecer comparações entre as resoluções que são apresentadas. Nesta fase é fulcral que também ocorram novas aprendizagens sobre os conceitos, procedimentos e processos utilizados. Através da discussão, institucionalizam-se aprendizagens, que toda a turma deve partilhar, sendo um momento onde podem surgir, ou serem aperfeiçoados, novos conceitos e procedimentos, estabelecendo conexões com aprendizagens anteriores.

No quadro podem-se registar os assuntos abordados na discussão para melhor esclarecimento dos alunos. Portanto, torna-se relevante clarificar os conceitos “sequência e regularidade”, diferentes tipos de sequências que existem, o que se entende por termo ou termo de ordem, lei de formação e expressão geradora. Uma sequência é a ação de dar seguimento a algo que já foi iniciado previamente, ou ainda, sequência é sucessão, encadeamento de elementos que se sucedem. No nosso dia a dia, existem conjuntos de elementos que estão dispostos numa determinada ordem, obedecendo a uma sequência. Fala-se em sequências quando nos referimos a algo que tenha seguimento, continuação com regularidade. No que diz respeito ao conceito de regularidade, é tudo aquilo que apresenta uma ordem periódica, ou seja, que tem uma sucessão regular. Relativamente aos tipos de sequências, existem as sequências pictóricas (sequência ordenada de figuras, segundo uma determinada ordem) e sequências numéricas (lista ordenada de números, finita ou infinita, obedecendo a uma determinada ordem definida antecipadamente), cada número/elemento da lista é designado de termo da sequência ou termo de ordem. As sequências numéricas envolvem a procura de regularidades e o estabelecimento de generalizações.

As sequências pictóricas e numéricas podem ser sequências repetitivas ou sequências crescentes. Nas sequências repetitivas, há uma unidade (composta por diversos termos ou elementos) que se repete ciclicamente. Numa sequência repetitiva com um determinado comprimento, para se determinar o elemento seguinte pode-se procurar a existência de uma igualdade entre cada elemento da sequência e um dos primeiros  $n$  elementos, ou procurar a existência de uma igualdade entre cada elemento da sequência e o elemento  $n$  posições antes dele. Quando trabalham com sequências, os alunos podem continuar a sua representação, procurar regularidades e estabelecer generalizações. As sequências crescentes são compostas por elementos ou termos diferentes. Cada termo na sequência depende do termo anterior e da sua posição na respetiva sequência, que é designado por ordem do termo.

A lei de formação de uma sequência é uma descrição que permite determinar todos os termos recorrendo aos termos anteriores ou às posições que os termos ocupam. Uma lei de formação pode ser dada em linguagem natural ou em linguagem simbólica.

A expressão geradora ou expressão geral de uma sequência permite obter, para cada ordem, o termo da sequência que lhe corresponde, isto é, a expressão que permite determinar um número (termo) conhecendo a sua posição na sequência (ordem). A expressão geradora só se aplica às sequências numéricas.

---

<sup>7</sup> Objetivos retirados do Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico

*Indicações suplementares:*

Para trabalhar as sequências e regularidades, o professor pode ler um excerto do livro *O diabo dos números*, de Hans Magnus Enzensberger, particularmente, da página 97 à página 109, e desafiar os alunos a verificarem o que acontece na sequência de Fibonacci.

### Possíveis explorações dos alunos

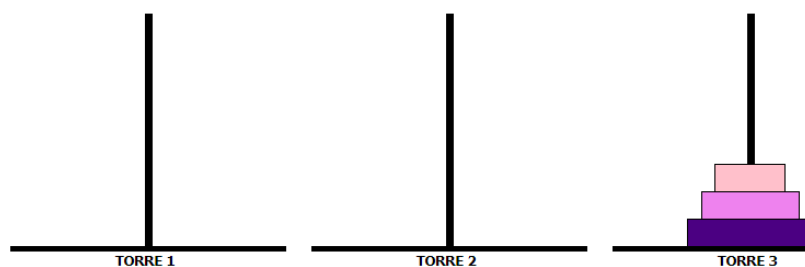
Na **questão 1**, os alunos devem utilizar a torre de Hanói para verificarem o movimento que cada peça fez.

Podem recorrer, somente, à própria torre de Hanói:

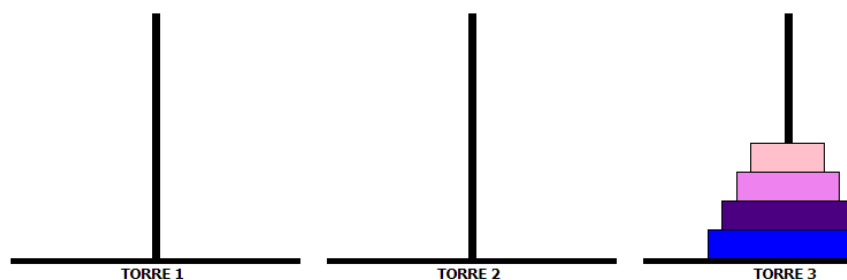
Na primeira jogada, a peça 1 faz 1 movimento.

Na segunda jogada, a peça 1 faz 2 movimentos e a peça 2 faz 1 movimento.

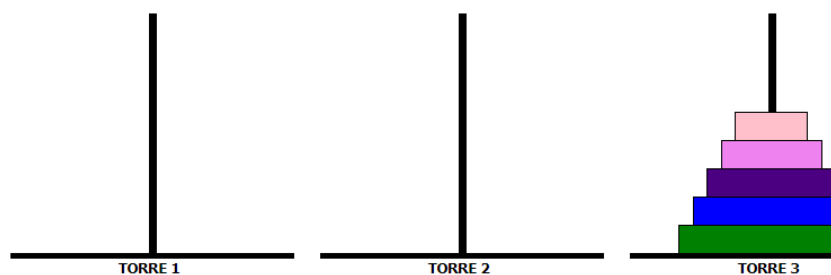
Na terceira jogada, a peça 1 faz 4 movimentos, a peça 2 faz 2 movimentos e a peça 3 faz 1 movimento.



Na quarta jogada, a peça 1 faz 8 movimentos, a peça 2 faz 4 movimentos, a peça 3 faz 2 movimentos e a peça 4 faz 1 movimento.



Na quinta jogada, a peça 1 faz 16 movimentos, a peça 2 faz 8 movimentos, a peça 3 faz 4 movimentos, a peça 4 faz 2 movimentos e a peça 5 faz 1 movimento.



Os alunos constatam, ainda, que a peça número 1 é a que realiza mais movimentos. Conforme o número de peças vai aumentando, assim também aumenta o número mínimo de movimentos de cada peça.

Sempre que se acrescenta 1 peça nova, as restantes passam a ter o dobro de movimentos mínimos.

Os alunos podem, ainda, indicar os movimentos que cada peça realiza em cada jogada:

**Com 1 peça:**

- 1.º movimento: Peça 1 na torre 3.

**Com 2 peças:**

- 1.º movimento: Peça 1 na torre 2;
- 2.º movimento: Peça 2 na torre 3;
- 3.º movimento: Peça 1 na torre 3.

**Com 3 peças:**

- 1.º movimento: Peça 1 na torre 3;
- 2.º movimento: Peça 2 na torre 2;
- 3.º movimento: Peça 1 na torre 2;
- 4.º movimento: Peça 3 na torre 3;
- 5.º movimento: Peça 1 na torre 1;
- 6.º movimento: Peça 2 na torre 3;
- 7.º movimento: Peça 1 na torre 3.

**Com 4 peças:**

- 1.º movimento: Peça 1 na torre 2;
- 2.º movimento: Peça 2 na torre 3;
- 3.º movimento: Peça 1 na torre 3;
- 4.º movimento: Peça 3 na torre 2;
- 5.º movimento: Peça 1 na torre 1;
- 6.º movimento: Peça 2 na torre 2;
- 7.º movimento: Peça 1 na torre 2;
- 8.º movimento: Peça 4 na torre 3;
- 9.º movimento: Peça 1 na torre 3;
- 10.º movimento: Peça 2 na torre 1;
- 11.º movimento: Peça 1 na torre 1;
- 12.º movimento: Peça 3 na torre 3;
- 13.º movimento: Peça 1 na torre 2;
- 14.º movimento: Peça 2 na torre 3;
- 15.º movimento: Peça 1 na torre 3.

**Com 5 peças:**

- 1.º movimento: Peça 1 na torre 3;
- 2.º movimento: Peça 2 na torre 2;
- 3.º movimento: Peça 1 na torre 2;
- 4.º movimento: Peça 3 na torre 3;
- 5.º movimento: Peça 1 na torre 1;
- 6.º movimento: Peça 2 na torre 3;
- 7.º movimento: Peça 1 na torre 3;

- 8.º movimento: Peça 4 na torre 2;
- 9.º movimento: Peça 1 na torre 2;
- 10.º movimento: Peça 2 na torre 1;
- 11.º movimento: Peça 1 na torre 1;
- 12.º movimento: Peça 3 na torre 2;
- 13.º movimento: Peça 1 na torre 3;
- 14.º movimento: Peça 2 na torre 2;
- 15.º movimento: Peça 1 na torre 2;
- 16.º movimento: Peça 5 na torre 3;
- 17.º movimento: Peça 1 na torre 1;
- 18.º movimento: Peça 2 na torre 3;
- 19.º movimento: Peça 1 na torre 3;
- 20.º movimento: Peça 3 na torre 1;
- 21.º movimento: Peça 1 na torre 2;
- 22.º movimento: Peça 2 na torre 1;
- 23.º movimento: Peça 1 na torre 1;
- 24.º movimento: Peça 4 na torre 3;
- 25.º movimento: Peça 1 na torre 3;
- 26.º movimento: Peça 2 na torre 2;
- 27.º movimento: Peça 1 na torre 2;
- 28.º movimento: Peça 3 na torre 3;
- 29.º movimento: Peça 1 na torre 1;
- 30.º movimento: Peça 2 na torre 3;
- 31.º movimento: Peça 1 na torre 3.

Os alunos podem elaborar uma tabela de acordo com os movimentos que cada peça faz, como, por exemplo:

Quantidade de peças	Quantidade de movimentos mínimos de cada peça					Total de movimentos
	Peça 1	Peça 2	Peça 3	Peça 4	Peça 5	
1	1	0	0	0	0	1
2	2	1	0	0	0	3
3	4	2	1	0	0	7
4	8	4	2	1	0	15
5	16	8	4	2	1	31

Ao observar cada linha da tabela, verifica-se que os números estão a decrescer na razão de 2. O termo seguinte é metade do anterior até alcançar o número 1. Após surgir o número 1, os termos seguintes são sempre zero. Se se adicionarem todos os termos de cada linha, obtém-se o total de movimentos.

Relativamente às colunas, os alunos verificam que o termo seguinte é o dobro do anterior. Quer isto dizer que a quantidade mínima de movimentos de cada peça se obtém da quantidade mínima de movimentos da peça anterior, efetuando o produto por 2, desde que o termo anterior não seja o número zero.

Na **questão 2**, a lei de formação é  $2^n - 1$ .

Na **questão 3**, após terem descoberto a lei de formação que permite descobrir o menor número de movimentos possíveis para qualquer número de peças, basta irem à expressão geradora e substituir o  $n$  por 9, dado  $n$  representar uma quantidade de peças qualquer. Quando se substitui  $n$  por qualquer número de peças, obtém-se o menor número de movimentos possíveis para qualquer número de peças.

Como a lei de formação é  $2^n - 1$ , então  $2^9 - 1 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 - 1 = 512 - 1 = 511$ .

Os alunos concluem que não se vence o desafio se se realizarem 515 movimentos, porque, para se construir uma torre com 9 peças, o número mínimo de movimentos necessários é 511.

## Conclusões do estudo

Findada a presente investigação é importante recordar a questão-problema orientadora deste trabalho: *Em que medida o recurso a materiais didáticos no ensino da Matemática no 2.º CEB potencia aprendizagens significativas?*. Pretendia-se identificar as potencialidades do uso de barras de Cuisenaire, tangram, espelhos, mira, papel vegetal e torre de Hanói no ensino-aprendizagem da Matemática no 2.º CEB e conceber tarefas matemáticas com recurso a materiais didáticos que sejam potenciadoras de aprendizagens significativas.

Nesta investigação optou-se pela elaboração de tarefas matemáticas privilegiando o ensino exploratório, com recurso às barras de Cuisenaire, tangram, espelho, mira, papel vegetal e torre de Hanói.

Na elaboração dos roteiros das tarefas está explícito o ano de escolaridade, as aprendizagens prévias onde se define os objetivos do programa relativos a tópicos matemáticos que os alunos já devem ter atingido (nos anos anteriores ou no próprio ano), bem como as aprendizagens visadas, ou seja, objetivos do programa relativos a tópicos matemáticos e objetivos transversais que se vão desenvolver com a tarefa. Nas orientações para apresentação e exploração da tarefa destacam-se a identificação do tipo de tarefa, aspetos matemáticos a destacar, modo de apresentação da tarefa pelo professor, o modo como os alunos vão trabalhar, acompanhamento do professor, antecipação das dúvidas e dificuldades dos alunos, bem como algumas possíveis questões colocadas pelos mesmos. Surge, também, a discussão das ideias e resultados e sistematização dos conceitos trabalhados. Para além disso apresentam-se eventuais resoluções dos alunos.

Como os roteiros apresentados neste trabalho são o suporte que permitiu concluir sobre as potencialidades que os materiais didáticos têm no ensino-aprendizagem da Matemática no 2.º CEB. A conceção das tarefas matemáticas e respetivos roteiros com recurso a materiais didáticos, revelam-se potenciadoras de aprendizagens significativas, pois os alunos raciocinam, interpretam, analisam e resolvem tarefas contextualizadas. Os materiais utilizados facilitam a aprendizagem dos números racionais não negativos, simetria axial e rotacional, sequências e regularidades e potências de expoente natural, tornando os conteúdos mais realistas.

A tarefa matemática intitulada *Comparar frações com o Cuisenaire* permitiu averiguar através do roteiro que o material didático barras de Cuisenaire potencia aprendizagens para se trabalhar números racionais não negativos, no sentido parte-todo e medida, assim como a adição e subtração de números racionais não negativos, estabelecendo-se relações entre as diferentes barras.

Na elaboração do roteiro da tarefa matemática *Frações no tangram*, na sua exploração e análise pormenorizada percebeu-se que através deste material trabalham-se as frações como medida, estabelecendo-se relações entre as 7 peças que constituem o tangram, assim como o conceito de área e perímetro.

Já no roteiro *Rosáceas*, através da planificação deste constatou-se que a utilização e manuseio de espelhos, mira e papel vegetal, estes materiais tornam-se imprescindíveis para trabalhar as isometrias do plano e fulcrais para a visualização espacial dos alunos, numa primeira fase, neste caso, para a simetria de reflexão e simetria rotacional.

O roteiro da tarefa matemática *torre de Hanói* permitiu concluir através da realização do mesmo que este material didático torna-se um potenciador de aprendizagens significativas, dado possibilitar trabalhar o

tópico sobre sequências e regularidades, bem como potências de expoente natural. Através de algumas regras que a torre de Hanói apresenta, torna-se desafiante para os alunos descobrirem uma lei de formação que sirva para qualquer número de peças.

Os materiais didáticos são mediadores na ação educativa, permitindo aos alunos concretizar e construir significados, ajudando-os no raciocínio. É de referir que, quando o professor decide utilizar algum material didático, deve fazer uma escolha criteriosa do mesmo, planejar com tempo as tarefas (prevendo eventuais dúvidas, dificuldades e possíveis resoluções que surgirão por parte dos alunos) e explorá-lo com os alunos, dando-lhes tempo para se adaptarem à tarefa, promovendo a comunicação e discussão coletiva, destacando as estratégias de resolução e efetuando registos sobre quaisquer dúvidas ocorridas e sobre conclusões a que se chegaram, como apoiam Leite (s.d), Serrazina (1990, citado por Botas & Moreira, 2013), Lorezato (2006) e Silva e Victor (2016).

Saliente-se que o uso dos materiais didáticos tem que ser útil para o conteúdo que se pretende ensinar, facilitando o processo de ensino-aprendizagem, como defendem Lorenzato (2006), Mansutti (1933), Schmitt e Ferreira (2004), Ribeiro (1995) e Botas e Moreira (2013).

Para além do material didático ser importante no processo de ensino-aprendizagem, o seu uso torna os conceitos menos abstratos e torna as aprendizagens mais significativas, como referem Turrioni e Perez (2006), Santos e Belmiro (2013), Ferreira, Nogueira e Oliveira (s.d) e Gomide (1970, citado por Botas & Moreira, 2013).

Nos estudos empíricos de Silva (2014) afirma que quando os alunos utilizam materiais didáticos, para resolver tarefas matemáticas, sentem uma maior motivação na realização da mesma, ficando mais motivados na aprendizagem dos conteúdos.

No estudo de Ferreira (2015) esta refere que a utilização de materiais didáticos torna as aulas mais dinâmicas e aumenta a curiosidade dos alunos, onde existe construção e estruturação das aprendizagens, tornado os conceitos menos abstratos.

Também Faustino (2018) relata que a manipulação de materiais didáticos ajuda no desenvolvimento da comunicação matemática e os alunos constroem o seu próprio conhecimento.

Heitor (2018) tal como Ferreira (2015) defende que a realização de tarefas matemáticas com recurso a materiais didáticos despoleta nos alunos o espírito crítico e a curiosidade, promovendo a construção de aprendizagens significativas, havendo partilha de conhecimento entre a turma.

A investigação de Silva (2019) acrescenta que a utilização de materiais didáticos ajuda na construção dos conhecimentos matemáticos e os alunos comprovam a veracidade das suas conjeturas através do material.

As tarefas matemáticas apresentadas neste trabalho têm por base aulas de cariz exploratório em que os alunos veem os seus conhecimentos e procedimentos matemáticos emergir com significado, ao mesmo tempo que treinam e desenvolvem a capacidade para resolver problemas, para questionar, para raciocinar e para comunicar matematicamente, havendo partilha de conhecimentos e ideias matemáticas, com recurso a materiais didáticos. O uso de materiais na resolução de tarefas matemáticas desafiantes revela-se como facilitador do processo de ensino-aprendizagem.

Para que ocorra a discussão coletiva na sala de aula, o professor tem de compreender o raciocínio dos alunos e deve apoiar o desenvolvimento das aprendizagens matemáticas.

Na discussão coletiva existe uma melhor compreensão dos conteúdos programáticos abordados, conceção de novas ideias, aprendizagens efetivas e duradouras, a par do desenvolvimento da comunicação matemática na sala de aula.

A tarefa apresentada com as barras de Cuisenaire revela potencialidades para trabalhar os conteúdos números racionais não negativos, como referem os autores Costa, Aves, Coelho e Tavares (2009) e Cunha e Lima (2011), abordando as frações no sentido de relação parte-todo e medida, bem como a adição e a subtração de números racionais não negativos. Também a tarefa apresentada com o material didático tangram tem potencial para trabalhar as frações, tal como defendem os autores Forster e Horbach (2012), Benevenuti e Santos (2016), Secretaria da Educação (s.d) e Pollon e Leineker (2013), dando destaque ao significado da fração como medida.

Já a tarefa com recurso ao uso dos espelhos, mira e papel vegetal justifica-se que se utilize na abordagem às isometrias do plano, mais concretamente o espelho e a mira para as simetrias de reflexão e o papel vegetal para as simetrias de rotação, como apoiam Batistela (2005, citado por Borba & Freitas, 2016) e Veloso, Bastos e Figueirinhas (2009).

A torre de Hanói, por sua vez, apresenta grande potencial para desenvolver um trabalho com sequências e regularidades e potências de expoente natural, como defendem Watanabe (2004) e Oliveira, Calejon e Brito (2016).

Deste modo pode-se afirmar que tendo por base o ensino exploratório, com tarefas matemáticas autênticas que recorrem à utilização de materiais didáticos, prevalecendo a comunicação matemática, em que o professor e os alunos assumem diferentes papéis, distintos do ensino tradicional, são promotores de aprendizagens efetivas e significativas.

O tema desta investigação surgiu por se utilizarem, nas Práticas de Ensino Supervisionadas, algumas vezes materiais didáticos na sala de aula, maioritariamente materiais didáticos estruturados. Procurou diversificar-se esses mesmos materiais, construindo alguns ou recorrendo aos materiais que as escolas cooperantes disponibilizavam (caixa de sólidos, esquadro, régua, compasso, transferidor, entre outros) ou aos que existiam na ESEV (o tangram, o geoplano, os tablets, entre outros). Sempre que estes materiais foram levados para a sala de aula, notou-se que os alunos eram mais ativos no processo de ensino-aprendizagem, o que tornava as aulas mais produtivas. De facto, os alunos eram agentes ativos no processo de aprendizagem. Talvez isso acontecesse por serem aulas diferentes daquelas a que estavam habituados.

Este trabalho de investigação é uma mais valia, pois veio acrescentar a importância dos materiais didáticos, também, no 2.º CEB, dado já existirem bastantes investigações sobre a temática em causa, mas ao nível da EPE e do 1.º CEB. No entanto, este facto não se tornou um obstáculo ao estudo, tornando-se até mesmo uma motivação para ajudar investigações futuras que conduzam a um melhor e mais consciente uso dos materiais didáticos neste ciclo de ensino. Alguns dos estudos empíricos já realizados focam-se em conteúdos programáticos muito particulares, enquanto que o presente trabalho não se foca apenas num conteúdo programático, mas sim em vários, tais como os números racionais, perímetro, área, isometrias do plano, sequências e regularidades e potências de expoente natural.

Após a realização deste estudo, verifica-se que, para além da seleção de tarefas e realização de planificações detalhadas, estas conduziram a um conjunto de reflexões que importa destacar. Assim, deve existir um conhecimento detalhado dos materiais didáticos que se pretendem utilizar, a par com uma

preparação cuidada e responsável no processo de planificação dos recursos. Os materiais didáticos devem ser usados como um instrumento que venha acrescentar valor ao desenvolvimento de competências no âmbito da Matemática.

Com esta investigação percebeu-se que é importante adotar-se um modelo pedagógico mais dinâmico e cada vez menos expositivo, pois o ensino deve ser centrado no aluno e com aprendizagens significativas para os mesmos. Através de aulas de carácter exploratório, os alunos envolvem-se de forma diferente, promovendo o trabalho de grupo e através deste trabalho surgem múltiplas representações das ideias. Se os professores cumprirem o currículo com tarefas desafiantes com recurso a materiais didáticos estarão a promover aprendizagens efetivas e com significado para os alunos.

Por último, saliente-se que este trabalho permitiu reconhecer que a prática em contexto de sala de aula é fundamental e que a análise otimizada dos roteiros que se definiram com o uso de barras de Cuisenaire, tangram, espelhos, mira, papel vegetal e a torre de Hanói saíria muito mais enriquecida com a sua operacionalização no “terreno”, que não pôde ser feita devido à situação atual de pandemia que determinou o ensino online.

## Considerações finais

Terminada esta nova etapa de formação, é importante fazer uma reflexão sobre todas as aprendizagens adquiridas nos estágios realizados, ao longo dos dois anos de Mestrado, e na realização desta investigação.

As Práticas de Ensino Supervisionadas desenvolvidas no 1.º e 2.º CEB são as unidades curriculares que estão diretamente interligadas com a profissão docente e proporcionaram experiências e aprendizagens riquíssimas, em cada escola e em cada turma onde se teve o prazer de se experienciar o “papel de professora”. Quando se iniciou esta etapa, houve uma maior consciência do que esta profissão acarreta. Efetivamente, o professor desempenha uma função importantíssima, refletida na capacidade que deve ter para proporcionar momentos que contribuam para a aprendizagem efetiva dos seus alunos. Neste âmbito, é essencial que tenha em consideração os seus interesses, gostos e motivações, apoiando-se também nos documentos curriculares em vigor. Todo este caminho foi trilhado passo a passo, evoluindo e aprimorando as práticas de ensino. O nervosismo com que se principiou este percurso foi-se atenuando com o passar do tempo. Neste processo de construção pessoal e profissional foi fundamental o apoio dos professores supervisores da ESEV e de todos os que se cruzaram neste caminho, pela sua disponibilidade. Do mesmo modo, é essencial lembrar os colegas de estágio, os professores cooperantes e todos os alunos cujo acolhimento foi extraordinário. A passagem pelos diversos contextos e diferentes anos de escolaridade permitiu uma maior e melhor preparação para, futuramente, encarar os desafios que surgirão.

A relação estabelecida com a parceira de estágio, as professoras cooperantes e os professores supervisores possibilitou o desenvolvimento e partilha de saberes, pois a realização de planificações, construção de materiais, reflexões semanais, tudo foi feito em conjunto. Este apoio foi determinante para ultrapassar inseguranças e dificuldades inerentes ao crescimento pessoal e profissional.

A reflexão introspetiva fez parte de todo este percurso, uma vez que permitiu refletir acerca das metodologias e estratégias de ensino que melhor poderiam resultar para o sucesso escolar dos alunos que se estavam a acompanhar e a partilhar conhecimento.

Foram alguns os constrangimentos sentidos durante o mestrado, de entre os quais se destacam a mudança de tema e a não implementação das tarefas devido à covid-19. Considera-se que a realização desta investigação se tornou uma mais valia para o futuro enquanto profissional da educação. Com efeito, o tema deste trabalho é interessante, pois, nos contextos em que se realizou o estágio, as professoras cooperantes utilizaram muito esporadicamente, materiais didáticos nas suas práticas de ensino. Nas práticas de ensino, em algumas aulas recorreu-se a materiais didáticos, nomeadamente o tangram, o geoplano, sólidos geométricos, AGD e ao papel. Estes materiais didáticos facilitam a aprendizagem da Matemática, permitindo ao aluno o uso e a manipulação dos mesmos no processo de resolução das tarefas matemáticas que promovem o ensino exploratório, proporcionando, assim, aprendizagens significativas aos alunos, tornando a área disciplinar de Matemática, menos abstrata e, fundamentalmente, levando a uma melhor compreensão de conceitos matemáticos envolvidos.

Deste modo, a utilização de materiais didáticos no ensino da Matemática só será vantajosa se o professor tiver objetivos claros sobre o que pretende atingir com as tarefas propostas. Uma das finalidades do ato da docência é fazer da escola um ambiente prazeroso, onde os alunos tenham vontade de aprender.

Assim, é importante desafiá-la para alterar pedagogias centradas na transmissão de conhecimentos, sendo capaz de inovar-se, na ação promover a capacidade de saber raciocinar, em aprender para intervir e, assim, transformar o processo de ensino-aprendizagem.

A compreensão da importância dos materiais didáticos no ensino-aprendizagem da Matemática deveu-se, também, à sustentação teórica apresentada na parte II deste relatório. Apoiada em tarefas matemáticas, a utilização de materiais didáticos assume grande relevância na aprendizagem dos alunos.

Este estudo foi importante para a percepção do papel-chave que o professor desempenha na orientação e criação dos seus próprios roteiros, na definição e escolha de materiais didáticos e considerando que a investigação que efetua deve estar sempre interligada com a prática. Todavia, um professor não aprende só na prática, isto é, na lecionação, por isso deve articulá-la sempre com pesquisa e formação sobre os mais variados temas, de forma a aprofundar e a enriquecer o seu próprio conhecimento.

Por último, “o caminho faz-se caminhando” e fica a crença de que o trabalho apresentado será um bom ponto de partida para novas e futuras aprendizagens, através da procura de alternativas que promovam aprendizagens significativas e, concomitantemente, promovam nos alunos o desenvolvimento de um pensamento crítico e independente, isto é, elaboração de estratégias de resolução de problemas e procura de soluções.

Este relatório final de estágio é um ponto de partida para encorajar professores a fazerem uso dos diversos materiais didáticos que se encontram disponíveis e acessíveis nas escolas, ou online, explorando as vantagens que podem trazer para o ensino-aprendizagem da Matemática. Deste modo, projeta-se para o futuro um uso mais consciente destes materiais, pelos benefícios que os mesmos oferecem na aprendizagem da Matemática.

## Referências Bibliográficas

- Adelino, P. (2016). *Ideias associadas ao conceito de número racional: análise de material didático voltado para a educação de pessoas jovens e adultas*. São Paulo: Encontro Nacional de Educação Matemática.
- Almeida, S. T. (2003). *Um estudo de pavimentação do plano utilizando caleidoscópio e o software Cabri Géomètre II* (Dissertação de mestrado). Obtido de [https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/90843/almeida\\_st\\_me\\_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/90843/almeida_st_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Alves, D., Gaideski, G., & Junior, J. (2010). *O uso do Tangram para aprendizagem de geometria plana*. Obtido de <https://tcconline.utp.br/wp-content/uploads/2012/05/O-USO-DO-TANGRAM-PARA-APRENDIZAGEM-DE-GEOMETRIA-PLANA.pdf>
- Aprendizagens Essenciais 1.º ano. (2018). Obtido de [https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/1\\_ciclo/matematica\\_1c\\_1a\\_ff\\_18julho\\_rev.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/matematica_1c_1a_ff_18julho_rev.pdf)
- Aprendizagens Essenciais 2.º ano. (2018). Obtido de [https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/1\\_ciclo/matematica\\_1c\\_2a\\_ff\\_18julho\\_rev.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/matematica_1c_2a_ff_18julho_rev.pdf)
- Aprendizagens Essenciais 3.º ano. (2018). Obtido de [https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/1\\_ciclo/matematica\\_1c\\_3a\\_ff\\_18de\\_julho\\_rev.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/matematica_1c_3a_ff_18de_julho_rev.pdf)
- Aprendizagens Essenciais 4.º ano. (2018). Obtido de [https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/1\\_ciclo/matematica\\_1c\\_4a\\_ff\\_18dejulho\\_rev.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/matematica_1c_4a_ff_18dejulho_rev.pdf)
- Aprendizagens Essenciais 5.º ano. (2018). Obtido de [https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/2\\_ciclo/5\\_matematica\\_18julho\\_rev.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/2_ciclo/5_matematica_18julho_rev.pdf)
- Aprendizagens Essenciais 6.º ano. (2018). Obtido de [https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens\\_Essenciais/2\\_ciclo/6\\_matematica\\_18julho\\_rev.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/2_ciclo/6_matematica_18julho_rev.pdf)
- Ausubel, D. P., Novak, J. D. e Hanesian, H. (1980). *Psicologia educacional*. Rio de Janeiro: Editora Interamericana.
- Batistela, R.F. (2005). *Um kit de espelhos planos para o ensino de geometria* (Dissertação de mestrado). Obtido de <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91157/000324142.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Benevenuti, L., & Santos, R. (2016). *O uso do Tangram como material lúdico pedagógico na construção da aprendizagem matemática*. São Paulo: Encontro Nacional de Educação Matemática.
- Berticelli, D. (2013). *A influência dos recursos didáticos no processo de ensino e aprendizagem da matemática*. Paraná: Congresso Nacional de Educação.

- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M. C. (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática – Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- Boldrin, M. (2009). *Barrinhas de Cuisenaire: Introdução à construção dos fatos fundamentais da adição*. Obtido de <https://pedagogiafmu.files.wordpress.com/2010/09/barrinhas-de-cuisenaire-introducao-a-construcao-dos-fatos-fundamentais-da-adicao1.pdf>
- Botas, D., & Moreira, D. (2013). A utilização dos materiais didáticos nas aulas de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, 26 (1), 253-286.
- Caldeira, M. (2009). *A importância dos materiais para uma aprendizagem significativa da matemática* (Tese de doutoramento). Obtido de <http://riuma.uma.es/xmlui/bitstream/handle/10630/4574/05TMFTHSC.pdf?sequence=1>
- Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.
- Canavarro, A., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Orgs.), *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 255-266). Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.
- Costa, A. P., Alves, C., Coelho, E., & Tavares, L. C. (2009). *Dossier Pedagógico Barrinhas do Ludo, o sonhador: Imagina, Constrói e Sonha com o Cuisenaire*. Oliveira de Azeméis: Ludomedia - Conteúdos Didáticos e Lúdicos.
- Cunha, A. C. (2008). *Ser professor: Bases de uma sistematização teórica*. Braga: Casa do professor.
- Cunha, F., & Lima, I. (2011). *Laboratório de Matemática*. Fortaleza: Universidade Aberta do Brasil.
- Decreto de Lei n.º 3/2008 de 7 de janeiro. Diário da República n.º 4 – 1.ª série. Ministério da Educação. Lisboa.
- Faustino, M. (2018). *Utilização do material manipulável como facilitador das aprendizagens matemáticas no Jardim de infância e no 1.º Ciclo do Ensino Básico* (Dissertação de mestrado). Obtido de <https://repositorio.ipsantarem.pt/bitstream/10400.15/2403/1/Relat%20Final%20-%20TESE%20-%20M%20-%20Faustino.pdf>
- Ferreira, A., Nogueira, C., & Oliveira, L. (s.d). *Os recursos didáticos como mediadores dos processos de ensinar e aprender matemática*. Obtido de <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2164-8.pdf>
- Ferreira, S. (2015). *O contributo dos materiais didáticos no processo de ensino e aprendizagem da matemática: um estudo no 4.º ano de escolaridade* Obtido de [http://repositorio.ipv.pt/bitstream/20.500.11960/1718/1/Sandra\\_Ferreira.pdf](http://repositorio.ipv.pt/bitstream/20.500.11960/1718/1/Sandra_Ferreira.pdf)
- Forster, C., & Horbach, I. (2012). *Ensino de Geometria Plana com o auxílio do Tangram*. Santa Catarina: Educação Matemática.
- Gasparin, J. L. (2005). *Uma Didática para a Pedagogia Histórico-Crítica*. Campinas: Autores Associados.
- Heitor, B. (2018). *A utilização de materiais manipuláveis na aprendizagem de números racionais representados na forma de fração* (Dissertação de mestrado). Obtido de <https://repositorio.ipl.pt/bitstream/10400.21/9592/1/Relato%20Final%20-%20PESII%20-%20Ba%20-%20Heitor%20-%20BA2015135.pdf>

- Kaleff, A. (2006). Do fazer ao concreto ao desenho em geometria: ações e atividades desenvolvidas no laboratório de ensino de geometria. In S. Lorenzato, *Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores* (pp. 113-133). Campinas: Autores Associados.
- Leite, J. (s.d). *Materiais didáticos manipuláveis no ensino e aprendizagem de geometria espacial*. Obtido de <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1664-8.pdf>
- Lorenzato, S. (2006). Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In S. Lorenzato, *Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores* (pp. 3-38). Campinas: Autores Associados.
- Mansutti, M. A. (1993). Concepção e Produção de Materiais Instrucionais em Educação Matemática. *Revista de Educação Matemática*, 1, 17-29.
- Márquez, A. D. (1967). *Didática das matemáticas elementares: o ensino das matemáticas pelo método dos números em cor ou método Cuisenaire*. Rio de Janeiro: Letra e Artes.
- Martinho, M. H., & Ponte, J. P. (2005). *A comunicação na sala de aula de matemática: Um campo de desenvolvimento profissional do professor*. Porto: Comunicação nas Actas do V.
- Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carilho, J., Silva, L., Encarnação, M., Horta, M., Calçada, M., Nery, R., & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Lisboa: Direção Geral da Educação.
- Menezes, L. (1995). *Concepções e práticas de professores de matemática: Contributos para o estudo da pergunta* (Dissertação de mestrado). Lisboa: APM.
- Menezes, L. (1997). O discurso do professor de Matemática. *Educação e Matemática*, 44, 5-11.
- Menezes, L., Ferreira, R. T., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp. 135-162). Lisboa: Instituto de Educação.
- Moreira, M. (2010). *O que é afinal aprendizagem significativa?*. Mato Grosso: Instituto de Física.
- Moreira, M. A., & Masini, E. F. S. (1982). *Aprendizagem Significativa: A teoria de David Ausubel*. São Paulo: Moraes.
- Nascimento, W., Coutinho, F., Souza, J., Costa, C., & Santana, A. (2017). *O ensino de conceitos matemáticos por meio do jogo torre de Hanói*. Paraíba: Congresso nacional de educação.
- Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2008). Recursos didáticos numa aula de ensino exploratório: da prática à representação de uma prática. Obtido de <http://www.essev.ipv.pt/mat1ciclo/textos/gd3-11om.pdf>
- Oliveira, S., Calejon, L., & Brito, A. (2016). *A utilização e aplicação do jogo torre de Hanói para o ensino de conceitos matemáticos mais atraente e eficaz*. São Paulo: Educação Matemática na Contemporaneidade.
- Padilha, D., & Martini, C. (2010). *A aplicabilidade do Tangram na matemática*. Obtido de <https://docplayer.com.br/3132800-A-aplicabilidade-do-tangram-na-matematica-resumo.html>
- Pelizzari, A., Kriegl M., Baron, M., Finck, N. & Dorocinski, S. (s.d). Teoria da aprendizagem significativa segundo Ausubel. *Revista PEC*, 2(1), 3-42.
- Perrenoud, P. (1993). *Práticas Pedagógicas Profissão Docente e Formação Perspetivas Sociológicas*. Lisboa: Publicações Dom Quixote.

- Perrenoud, P. (2002). *A prática reflexiva no ofício de professor: profissionalização e razão pedagógica*. Porto Alegre: Artmed.
- Pessoa, J. (2009). *Aprendizagem Significativa na Educação Matemática: uma proposta para a aprendizagem de Geometria Básica* (Dissertação de mestrado ao Programa de Pós-Graduação em Educação). Obtido de <http://www.fisica.ufpb.br/~romero/pdf/DissertacaoHavelange.pdf>
- Pollon, R., & Leineker, L. (2013). Tangram: Material Didático para a resolução de problemas no 6.º ano. Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor, 1, s.p. Obtido de [http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes\\_pde/2013/2013\\_uni\\_centro\\_mat\\_artigo\\_rosane\\_pollon.pdf](http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_uni_centro_mat_artigo_rosane_pollon.pdf)
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P., & Santos, L. (1998). Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante*, 7 (1), 3-32.
- Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016) Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante*, 25 (2), 77-98.
- Ponte, J. P., Oliveira, H. M., Cunha, M. H., & Segurado, M. I. (1998). *Histórias de Investigações Matemática*. Obtido de [https://www.researchgate.net/publication/261178171\\_Historias\\_de\\_investigacoes\\_matematicas](https://www.researchgate.net/publication/261178171_Historias_de_investigacoes_matematicas)
- Rêgo, R., & Rêgo, R. (2006). Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In S. Lorenzato, *Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores* (pp. 39-56). Campinas: Autores Associados.
- Ribeiro, A. (1995). *Concepções de professores do 1º Ciclo do Ensino Básico: A Matemática, o seu ensino e os materiais didáticos*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Rodrigues, B., & Ponte, J.P. (2020). Investigação Baseada em Design: Uma experiência de formação de professores em Estatística. *Educação Matemática Pesquisa*, 22 (3), 138-167.
- Roldão, C. (2007). Colaborar é preciso-Questões de qualidade e eficácia no trabalho dos professores. Noesis (71). Lisboa: Ministério da Educação.
- Santos, C., Neto, J., & Silva, J. (2007). *Jogar com a matemática dos génios*. Obtido de [http://jnsilva.ludicum.org/hm2008\\_9/Livro5.pdf](http://jnsilva.ludicum.org/hm2008_9/Livro5.pdf)
- Santos, J. C. F. (2004). *O desafio de promover a aprendizagem significativa*. Cuba: Universidade de Havana.
- Santos, M., Carvalho, P., & Muller, T. (s.d.). *Atividades de ensino utilizando o jogo da torre de Hanói*. Obtido de [https://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Encontro\\_Gaucho\\_Ed\\_Matem/minicursos/MC37.pdf](https://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Encontro_Gaucho_Ed_Matem/minicursos/MC37.pdf)
- Santos, O. K., & Belmiro, J. F. (2013). Recursos didáticos: Uma melhoria na qualidade da aprendizagem. *FIPED*, 1, s.p. Obtido de [http://www.editorarealize.com.br/revistas/fiped/trabalhos/Trabalho\\_Comunicacao\\_oral\\_idinscrito\\_fde\\_094c18ce8ce27adf61aedf31dd2d6.pdf](http://www.editorarealize.com.br/revistas/fiped/trabalhos/Trabalho_Comunicacao_oral_idinscrito_fde_094c18ce8ce27adf61aedf31dd2d6.pdf)
- Schmitt, C., & Ferreira, C. (2004). Educação matemática escolar relacionada ao cotidiano do educando. *Revista de divulgação técnico-científica do ICPG*, 2, 14-17.

- Secretaria de Educação (s.d). *Brincando com o Tangram*. Obtido de [http://www.piraquara.pr.gov.br/aprefeitura/secretariaseorgaos/educacao/uploadAddress/BRINCANDO-COM-O-TANGRAM-Matematica\[11743\].pdf](http://www.piraquara.pr.gov.br/aprefeitura/secretariaseorgaos/educacao/uploadAddress/BRINCANDO-COM-O-TANGRAM-Matematica[11743].pdf)
- Silva, A. (2019). *A utilização das Barras Cuisenaire no ensino e aprendizagem da Matemática: Uma experiência com alunos do 1.º e do 2.º Ciclo do Ensino Básico* (Dissertação de mestrado). Obtido de <http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/65935/1/Ana%20Rita%20Garrido%20Silva.pdf>
- Silva, C. (2014). *Materiais didáticos no ensino e aprendizagem da Matemática* (Dissertação de mestrado). Obtido de <https://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/2485/1/Relat%c3%b3rio%20Final.pdf>
- Silva, K, & Victor, E. (2016). *O uso de materiais didáticos no processo de ensino-aprendizagem*. São Paulo: Encontro Nacional de Educação Matemática.
- Silva, L. C. M., & Guirado, J. C. (2014). *A Aprendizagem Significativa Matemática com Estratégias Consolidadas nas Tendências Matemáticas. Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE*. Paraná: Governo do Estado.
- Stein, M., & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática. *Educação e Matemática*, 105, 22–28.
- Turrioni, A, & Perez, G. (2006). Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores. In S. Lorenzato, *Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores* (pp. 57-76). Campinas: Autores Associados.
- Veloso, E., Bastos, R., & Figueirinhas, S. (2009). *Isometrias e Simetria com materiais manipuláveis*. Obtido de <https://docplayer.com.br/3462435-Isometrias-e-simetria-com-materiais-manipulaveis.html>
- Watanabe, R. (2004). Uma lenda: Torre de Hanói. In S. Druck (org), *Explorando o ensino da Matemática: atividades* (pp. 132-135). Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica.
- Youssef, B. (2014). *Oficina Tangram-construção de conhecimentos geométricos em um ambiente colaborativo de aprendizagem*. Paraná: Secretaria de estado da educação.
- Zabalza, M. (2003). *Planificação e desenvolvimento curricular na escola*. Porto: Edições ASA.