

Maria de Lurdes da Costa e Sousa

Functores Sólidos



Universidade de Coimbra
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática

1990

Maria de Lurdes da Costa e Sousa

Functores Sólidos

*Dissertação submetida para satisfação
parcial dos requisitos do programa de
Mestrado em Álgebra*

Universidade de Coimbra
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática

1990

Este trabalho foi realizado no âmbito da linha nº1 (Álgebra)
do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra \ INIC.

Quero agradecer à Profª Manuela Sobral, que me orientou na elaboração desta dissertação, a sua disponibilidade e apoio, as suas críticas e sugestões.

Quero ainda agradecer a todos aqueles que de algum modo me apoiaram na realização deste trabalho.

ÍNDICE

SUMÁRIO	<i>i</i>
CAPÍTULO O	1
CAPÍTULO 1 . Funtores sólidos	
1. Funtores sólidos	2
2. Q -funtores localmente ortogonais.....	8
3. Q -funtores ortogonais.....	19
CAPÍTULO 2 . Categorias totais e funtores sólidos	
1. Totalidade	30
2. Totalidade e funtores sólidos.....	38
CAPÍTULO 3 . Funtores monádicos e funtores sólidos	
1. Factorizações de funtores sólidos	51
2. Exemplo de um functor monádico que não é sólido ..	60
3. Algumas condições sob as quais um functor monádico é sólido	69
REFERÊNCIAS	78

SUMÁRIO

Os funtores sólidos foram introduzidos, sob diferentes designações, por Trnková [26], Wischenewsky [27], Hoffmann [15] e Tholen [25]. Eles vieram dar resposta a várias questões tais como a da definição de um functor que, mantendo muitas das propriedades comuns aos funtores de esquecimento em Álgebra e em Topologia, tivesse ainda um comportamento suficientemente interessante. Eles dão também uma caracterização interna dos funtores que se obtêm por restrição de funtores topológicos a subcategorias reflectivas do seu domínio.

Os funtores sólidos surgem em várias situações. Com efeito, são funtores sólidos os funtores topológicos e os $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -topológicos. Também o são os funtores regulares, em particular os monádicos sobre $\mathcal{S}et$, bem como todos os monádicos sobre uma $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoria que preservam os morfismos de \mathcal{E} , quando \mathcal{E} contém os epimorfismos cindidos. Mais geralmente, são sólidos os topologicamente algébricos, família que inclui todos os anteriormente referidos.

Uma das propriedades que caracterizam um functor sólido U é a existência de um certo tipo de factorização de U -fontes. A ideia de utilizar factorizações de U -fontes para definir certos funtores é devida a Herrlich ([9], [10]), tendo essa técnica sido posteriormente desenvolvida e aplicada a outras situações.

Sendo uma generalização dos funtores topologicamente algébricos, os funtores sólidos têm ainda muitas das suas propriedades mais relevantes entre as quais salientamos o facto de serem fiéis, terem adjunto à esquerda e detectarem limites e

colimites. Além disso, ao contrário do que sucede com os funtores topologicamente algébricos, os funtores sólidos são fechados para a composição. Uma faceta que se revela fértil no estudo destes funtores é a possibilidade de exprimir o conceito de functor sólido em termos de certo tipo de inicialidade ou de finalidade.

Os funtores sólidos, quando definidos sobre uma categoria com determinadas propriedades, são um instrumento útil na recolha de informações sobre a categoria domínio. É disso exemplo a totalidade, conceito que foi introduzido por Street e Walters em [23] e que será abordado no capítulo 2 .

Os funtores monádicos criam limites e a cocompletude da categoria codomínio garante a da categoria domínio nalgumas situações. No entanto uma categoria de álgebras de Eilenberg-Moore pode não ser cocompleta ainda que a categoria base o seja ([1]). Atendendo a que os funtores sólidos detectam colimites, uma forma de abordar a questão da cocompletude de uma categoria monádica sobre uma categoria cocompleta é a de saber quando é que um functor monádico é sólido. Este é o tema principal do último capítulo.

No capítulo 1 damos a definição de functor sólido, estudamos algumas das suas propriedades e estabelecemos relações com outros tipos importantes de funtores. Ele é baseado fundamentalmente em [25]. No entanto, além dos artigos aí referenciados, utilizamos também [5], [6], [9], [10] e [13]. A proposição 3.6 é uma generalização de 7.3 em [25]. A demonstração de 3.8(2) pode ser obtida de forma análoga à de 2.5. Aqui optamos por fazer uma demonstração diferente que faz surgir 3.8 como corolário de 3.6.

No capítulo 2 pretendemos essencialmente estudar as ligações entre os conceitos de totalidade e de functor sólido. Começamos por apresentar três definições equivalentes de categoria total, provando seguidamente que toda a categoria total é completa e cocompleta. Na secção 2 estudamos algumas propriedades que envolvem as noções de totalidade, \mathcal{E} -cocompletude, \mathcal{E} -gerador e functor sólido. Por exemplo, observamos como, usando propriedades dos funtores sólidos, é possível concluir sobre a totalidade

de algumas categorias e, também, como, a presença da totalidade nos permite decidir se um dado functor é ou não sólido. As proposições 1.2 e 1.3 são adaptadas da secção 5 de [16] e da secção 2 de [6]. A proposição 2.1 é provada em [24] mas a nossa demonstração é diferente da aí apresentada. As proposições 2.2 e 2.4 são de [6] e o teorema 2.6 e a proposição 2.8 são de [3]. A proposição 2.7 é uma generalização de [3] III.2 em cuja demonstração utilizamos 1.4 de [4].

O objectivo do capítulo 3 é o estudo das relações entre os funtores sólidos e os monádicos dando especial ênfase à questão de saber quando é que um functor monádico é sólido. Em 1.1 e 1.3 baseamo-nos em [19] e [11] e 1.4 é uma generalização imediata de [1] II.3. A proposição 1.5 é inspirada na demonstração de 9.2 em [25] e 1.6 aparece como uma generalização natural da propriedade análoga para mónadas sobre categorias regulares que preservam epimorfismos regulares ([22]). A proposição 1.8 foi-nos sugerida por 9.2 e 9.3 de [25]. A análise da demonstração de 1.2 conduziu-nos ao enunciado de 3.1 e de 3.2, sendo 3.2 uma das respostas à questão proposta neste capítulo. Os resultados 3.5 e 3.6 obtidos por Adámek ([1]) são aqui demonstrados como corolários de 3.2. Finalmente 3.8 e 3.9 são baseados essencialmente em [2].

CAPÍTULO 0

Ao longo deste trabalho, denotamos as categorias por $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots, \mathcal{X}, \dots$, os objectos por letras latinas maiúsculas e os morfismos por letras latinas minúsculas. As letras \mathcal{E} e \mathcal{Q} designam classes de morfismos e as letras \mathcal{M} e \mathcal{N} classes de fontes. As letras I, J e K denotam classes quaisquer a menos que explicitemos que são conjuntos. A letra I também pode designar a categoria domínio dum functor quando queremos considerar o limite ou o colimite desse functor. Neste caso designaremos os objectos de I por letras latinas minúsculas.

Quando consideramos uma categoria \mathcal{A} , supomos sempre que, para $A, B \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}(A, B)$ é um conjunto. No entanto, no capítulo 2, a categoria $[\mathcal{A}^{\text{op}}, \text{Set}]$, para uma dada categoria \mathcal{A} , constituirá uma excepção.

Os conceitos que usamos sem previamente os definir encontram-se em [12] e [17].

Para uma categoria \mathcal{A} , utilizamos as designações $\text{Iso}(\mathcal{A})$, $\text{Epi}(\mathcal{A})$, $\text{EpiExtr}(\mathcal{A})$, $\text{EpiReg}(\mathcal{A})$, $\text{EpiCind}(\mathcal{A})$, $\text{Mono}(\mathcal{A})$, para denotar a classe dos, respectivamente, isomorfismos, epimorfismos, epimorfismos extremais, epimorfismos regulares, epimorfismos cindidos e monomorfismos. Por $\text{Fonte}(\mathcal{A})$ e $\text{MonoF}(\mathcal{A})$ denotamos a classe das fontes de \mathcal{A} e a das monofontes.

CAPÍTULO 1

FUNCTORES SÓLIDOS

Ao longo deste capítulo consideraremos o functor $U: \mathcal{A} \rightarrow X$.

Um par (x, A) com $A \in \mathcal{A}$ e $x \in X(X, UA)$ chama-se um U-morfismo. Denotaremos por $\text{Mor}(U)$ a classe dos U-morfismos e por $\text{Iso}(U)$ a subclasse dos U-morfismos que são isomorfismos em X .

Um U-epimorfismo é um U-morfismo (x, A) satisfazendo a seguinte condição: se $Uf \cdot x = Ug \cdot x$, para $f, g \in \mathcal{A}(A, B)$, então $f = g$. A respectiva subclasse será denotada por $\text{Epi}(U)$.

Uma U-fonte é uma fonte de U-morfismos.

Por dualidade obtemos as noções de U-comorfismo e de U-cofonte.

1. Functores sólidos

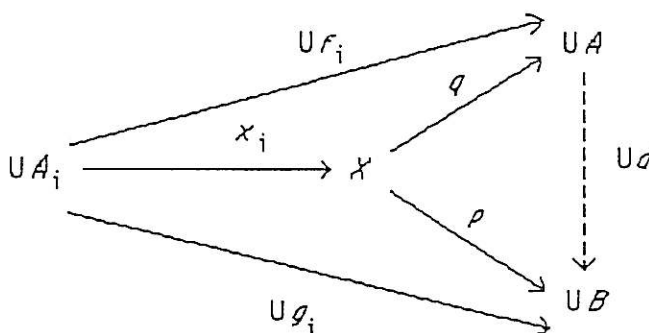
O levantamento de propriedades de uma categoria ao longo de functores constitui uma característica importante dos functores subjacentes em Álgebra e em Topologia. Os functores sólidos têm ainda essa característica relativamente a alguns aspectos nos quais estes dois tipos de functores têm um comportamento comum. Na definição de functor sólido usaremos a seguinte noção:

1.1. Definição. Um levantamento U-semifinal de uma U-cofonte

$(x_i : UA_i \rightarrow X)_I$ consiste num U-morfismo (q, A) e numa cofonte $((f_i)_I, A)$ em \mathcal{A} , verificando as seguintes condições:

(L) Para todo o $i \in I$, $q \cdot x_i = Uf_i$.

(SF) Se $((p, B), ((g_i)_I, B))$ é um par que, para todo o $i \in I$, verifica a igualdade $p \cdot x_i = Ug_i$, então existe um único morfismo em \mathcal{A} , $d : A \rightarrow B$, tal que $p = Ud \cdot q$ e $g_i = d \cdot f_i$, $i \in I$.



Por vezes chamaremos levantamento U-semifinal de $(x_i)_I$ ao U-morfismo (q, A) .

Um U-morfismo (q, A) diz-se um U-quociente se existirem uma U-cofonte $(x_i)_I$ e uma \mathcal{A} -cofonte $((f_i)_I, A)$ que verifiquem as condições (L) e (SF). Por $\text{Quot}(U)$ designaremos a classe dos U-quocientes.

1.2. Definição. Um functor U diz-se sólido se toda a U-cofonte admite um levantamento U-semifinal.

Da definição decorrem as propriedades seguintes:

1.3. Proposição. Todo o functor sólido é adjunto direito.

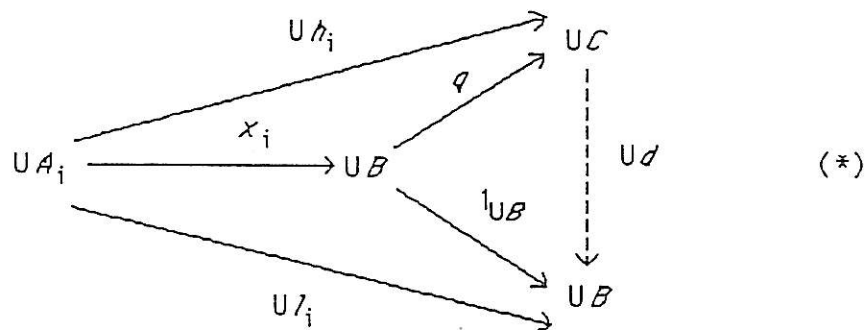
Demonstração: É consequência de 1.1. Com efeito, dado $X \in \mathcal{X}$, o U-morfismo que aparece no levantamento U-semifinal da U-cofonte vazia de codomínio X é um morfismo universal de X para U . \square

1.4.Proposição. A composição de funtores sólidos é um functor sólido.

Demonstração: É imediata. \square

1.5.Proposição. Todo o functor sólido é fiel.

Demonstração: Seja U um functor sólido e $f, g : A \rightarrow B$ morfismos de \mathcal{A} tais que $Uf = Ug$. Consideremos, para $I = \text{Mor}(\mathcal{A})$, a U -cofonte $(x_i : UA_i \rightarrow UB)_I$ com $x_i = Uf = Ug$, para $i \in I$. Seja $((q, C), (h_i, C)_I)$ o seu levantamento U -semifinal. A classe $J = \{ d : C \rightarrow B \mid d \cdot h_i \in \{f, g\}, i \in I \}$ é não vazia; basta atender a que $1_{UB} \cdot x_i = Ul_i$, para $l_i = f, i \in I$, e, nestas condições, existe um morfismo $d : C \rightarrow B$ tal que $Ud \cdot q = 1_{UB}$ e $d \cdot h_i = l_i = f, i \in I$, usando 1.1(SF).



Seja $\sigma : I \rightarrow J$ uma função definida por

$$\sigma(i) = \begin{cases} i & \text{se } i \in J \\ i_0 & \text{se } i \notin J \end{cases}$$

sendo i_0 um elemento previamente fixado em J . Consideremos agora a \mathcal{A} -cofonte $((l_i)_I, B)$ definida por

$$l_i = \begin{cases} f & \text{se } \sigma(i) \cdot h_i = g \\ g & \text{se } \sigma(i) \cdot h_i = f \end{cases}$$

Como o triângulo inferior do diagrama (*) é comutativo, existe um morfismo $d : C \rightarrow B$ tal que $d \cdot h_i = l_i, i \in I$. Como $d \in J$, vem, em particular, que

$$d \cdot h_i = \begin{cases} f & \text{se } d \cdot h_i = g \\ g & \text{se } d \cdot h_i = f \end{cases}$$

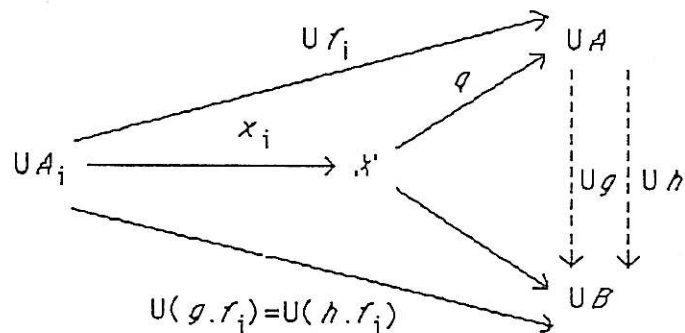
o que só pode acontecer se $f = g$. □

É fácil provar que $\text{Quot}(U)$ é fechada para a composição à esquerda com \mathcal{A} -isomorfismos, isto é, se $(q, A) \in \text{Quot}(U)$ e $f: A \rightarrow B \in \text{Iso}(\mathcal{A})$, então $(Uf \cdot q, B) \in \text{Quot}(U)$.

1.6. Corolário. Se U é sólido então $\text{Iso}(U) \subset \text{Quot}(U) \subset \text{Epi}(U)$.

Demonstração: Se $p: X \rightarrow UA$ é um isomorfismo, $((p, A), (1_A, A))$ é o levantamento U -semifinal do U -comorfismo $p^{-1}: UA \rightarrow X$, sendo a unicidade do \mathcal{A} -morfismo referido em 1.1(SF) consequência da fidelidade de U .

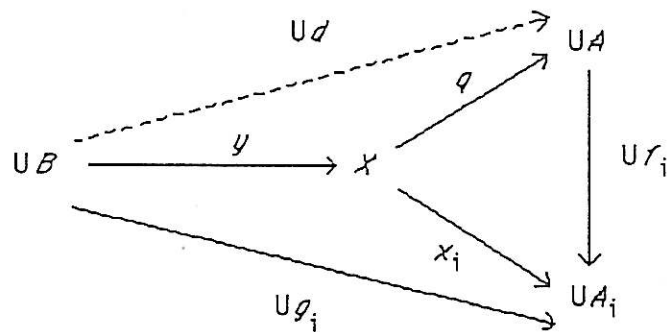
Para mostrar que a segunda inclusão também se verifica, consideremos o seguinte diagrama



onde (q, A) é o levantamento U -semifinal da U -cofonte $(x_i)_I$ e $g, h: A \rightarrow B$ são morfismos de \mathcal{A} tais que $Ug \cdot q = Uh \cdot q$. Temos então a igualdade $Ug \cdot Uf_i = Uh \cdot Uf_i$, para todo o $i \in I$, que, atendendo à fidelidade de U , implica que $g \cdot f_i = h \cdot f_i, i \in I$. Tendo em consideração que o par $((Ug \cdot q, B), ((g \cdot f_i)_I, B))$ está nas condições de 1.1(SF) existe um e um só $d: A \rightarrow B$ tal que $d \cdot f_i = g \cdot f_i, i \in I$, e $Ud \cdot q = Ug \cdot q$. Como g e h satisfazem ambas estas igualdades, concluímos que $g = h$. □

1.7.Definição. Uma factorização U-semi-inicial de uma U-fonte $(x_i : X \rightarrow UA_i)_I$ é uma factorização da forma $x_i = Uf_i \cdot q$, $i \in I$, tal que:

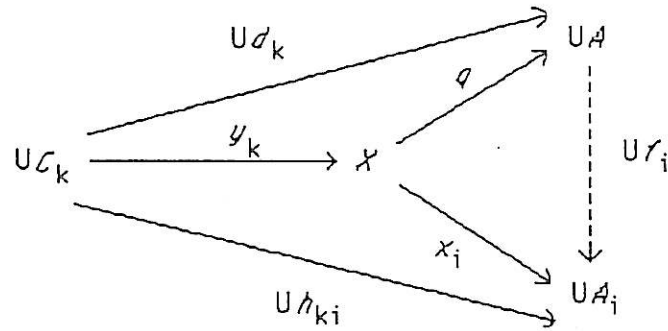
(SI) Se o U-comorfismo (B, y) e a \mathcal{A} -fonte $(B, g_i)_I$ verificam a igualdade $x_i \cdot y = Ug_i$ para todo o $i \in I$, então existe um único morfismo em \mathcal{A} , $d : B \rightarrow A$, tal que $q \cdot y = Ud$ e $f_i \cdot d = g_i$ para todo o $i \in I$.



1.8.Teorema. Para uma classe de morfismos $Q \subset \text{Epi}(U)$, as seguintes asserções são equivalentes:

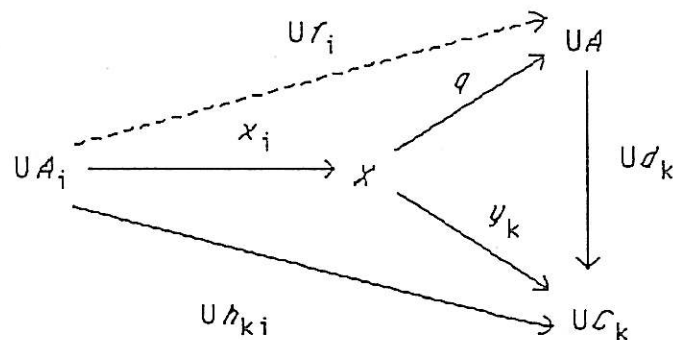
- (i) Toda a U-cofonte tem um levantamento U-semifinal cujo morfismo U-quociente pertence a Q .
- (ii) Toda a U-fonte $(x_i : X \rightarrow UA_i)_I$ tem uma factorização U-semi-inicial, $x_i = Uf_i \cdot q$, $i \in I$, com $q \in Q$.

Demonstração: Seja $(x_i : X \rightarrow UA_i)_I$ uma U-fonte. Designemos por $((C_k, y_k))_K$ a família dos U-comorfismos (C_k, y_k) com a seguinte propriedade: existe uma \mathcal{A} -fonte $(C_k, (h_{ki})_I)$ tal que $x_i \cdot y_k = Uh_{ki}$ para todo o $i \in I$. Seja $((q, A), ((d_k)_K, A))$, com $(q, A) \in Q$, o levantamento U-semifinal da U-cofonte $(y_k : UC_k \rightarrow X)$. Então, para cada $i \in I$, temos $x_i \cdot y_k = Uh_{ki}$ para todo o $k \in K$; e 1.1(SF) garante a existência de um morfismo $f_i : A \rightarrow A_i$ tal que $x_i = Uf_i \cdot q$ e $f_i \cdot d_k = h_{ki}$, para todo o $k \in K$.



Temos que $x_i = Uf_i \cdot q$, $i \in I$, é uma factorização da U -fonte $(x_i: X \rightarrow UA_i)_I$ com $q \in Q$. Resta provar que esta factorização é U -semi-inicial. Seja (B, z) um U -comorfismo e $(B, (g_i)_I)$ uma fonte em \mathcal{A} tais que $x_i \cdot z = Ug_i$, $i \in I$; então $(B, z) = (C_k, y_k)$ e $g_i = h_{ki}$ para algum $k \in K$. E, para $d = d_k$, verifica-se 1.7(SI); a unicidade de d é consequência da fidelidade de U .

Para provar a implicação (ii) \Rightarrow (i) procede-se de forma análoga ao feito na demonstração da recíproca: Dada uma U -cofonte $(x_i)_I$ consideramos a família $((y_k, C_k))_K$ dos U -morfismos para os quais existe uma cofonte $((h_{ki})_I, C_k)$, em \mathcal{A} , tal que $y_k \cdot x_i = Uh_{ki}$, $i \in I$. Se $y_k = Ud_k \cdot q$, $k \in K$, com $q \in Q$, é a factorização U -semi-inicial de $(y_k)_K$, definimos $f_i: A_i \rightarrow A$ por $q \cdot x_i = Uf_i$ e $d_k \cdot f_i = h_{ki}$ para todo o $k \in K$.



Então $((q, A), ((f_i)_I, A))$ é um levantamento U -semifinal de $(x_i)_I$. A unicidade na condição 1.1(SF) vem como consequência de q pertencer a $\text{Epi}(U)$. \square

1.9. Corolário. U é sólido se e só se toda a U -fonte $(x_i)_I$ admite uma factorização U -semi-inicial, $x_i = Uf_i \cdot q, i \in I$, com $q \in \text{Epi}(U)$. \square

1.10. Proposição. Se U é sólido então:

(i) U detecta limites, isto é, se $D: I \rightarrow \mathcal{A}$ é um functor tal que $U.D$ tem limite em X , então também D tem limite em \mathcal{A} .

(ii) U detecta colimites, isto é, verifica-se a propriedade dual de (i).

Demonstração:

(i) Se $(L, l_i: L \rightarrow U(Di))_I$ é o limite de $U.D$ e $l_i = Uf_i \cdot q, i \in I$, é a factorização U -semi-inicial, com $q \in \text{Epi}(U)$, da U -fonte $(L, (l_i)_I)$, então $(A, f_i: A \rightarrow Di)$ é limite de D .

(ii) Se para um functor $D: I \rightarrow \mathcal{A}$, $(l_i: U(Di) \rightarrow L, L)_I$ é o colimite de $U.D$ e $((q, A), (f_i, A))$ é o levantamento U -semifinal da U -cofonte $((l_i)_I, L)$ então $(f_i: Di \rightarrow A, A)$ é o colimite de D . \square

1.11. Corolário. Se U é sólido e X é completa (cocompleta), então \mathcal{A} é completa (cocompleta, respectivamente). \square

2. Q -Funtores localmente ortogonais

Relativamente ao functor $U: \mathcal{A} \rightarrow X$, consideremos as classes $Q \subset \text{Mor}(U)$ e $\mathcal{M} \subset \text{Fonte}(\mathcal{A})$, tais que Q é fechada para a composição com \mathcal{A} -isomorfismos à esquerda e \mathcal{M} é fechada para a composição com \mathcal{A} -isomorfismos à direita.

2.1. Definição. Uma (Q, \mathcal{M}) -factorização localmente ortogonal de uma U -fonte $(x_i: X \rightarrow UA_i)_I$ consiste num U -morfismo (q, A) e numa \mathcal{A} -fonte

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{q} & UA \\
 p \downarrow & \swarrow U d & \downarrow U l_i \\
 UC & \xrightarrow{U r_i} & UA_i
 \end{array}$$

Atendendo a 2.1(LO), existe um \mathcal{A} -morfismo $d : A \rightarrow C$ tal que $f_i \cdot d = l_i$, $i \in I$. Em particular, para $d \in J$,

$$r_d \cdot d = l_d = \begin{cases} g & \text{se } r_d \cdot d = h \\ h & \text{se } r_d \cdot d = g \end{cases}$$

e, portanto, $g = h$. □

2.3.Observação. Se existe uma (Q, \mathcal{M}) -factorização localmente ortogonal para toda a U -fonte quando U é o functor identidade $1_{\mathcal{A}}$, então $\text{Iso}(\mathcal{A}) \subset Q$. Na verdade, seja $f = g \cdot e$ a (Q, \mathcal{M}) -factorização localmente ortogonal do isomorfismo $f : A \rightarrow B$ em \mathcal{A} . Como $g \cdot (e \cdot f^{-1}) = 1_B$ e, atendendo a 2.2, $(e \cdot f^{-1}) \cdot g = 1_C$, então g é um isomorfismo. Temos portanto que $f \in Q$, visto que $e \in Q$.

No caso geral, a existência de (Q, \mathcal{M}) -factorizações localmente ortogonais não implica que $\text{Iso}(U) \subset Q$. No entanto, basta que Q contenha todos os U -morfismos identidades para que $\text{Iso}(U) \subset Q$. Com efeito, se $p : X \rightarrow UA$ é um U -isomorfismo cuja (Q, \mathcal{M}) -factorização localmente ortogonal é $p = Uf \cdot q$ e $1_{UA} \in Q$, vem, como consequência da igualdade $U(1_A) \cdot 1_{UA} = p \cdot p^{-1}$ e de 2.1(LO), que f é um isomorfismo.

2.4.Definição. Se $\text{Iso}(U) \subset Q$ e toda a U -fonte tem uma (Q, \mathcal{M}) -factorização localmente ortogonal dizemos que U é um (Q, \mathcal{M}) -functor localmente ortogonal.

Se $U = 1_{\mathcal{A}}$ dizemos que \mathcal{A} é uma (Q, \mathcal{M}) -categoria localmente ortogonal.

Claro que se U é um (Q, \mathcal{M}) -functor localmente ortogonal para uma certa classe \mathcal{M} também o é para $\mathcal{M} = \text{Fonte}(\mathcal{A})$. Por essa razão, muitas vezes substituiremos

(Q, \mathcal{M}) por Q deixando subentendido que $\mathcal{M} = \text{Fonte}(\mathcal{A})$.

2.5. Teorema. Consideremos um functor $U: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$.

(1) Se U é um (Q, \mathcal{M}) -functor localmente ortogonal e \mathcal{E} é a classe

$$\text{in}Q = \{ e: A \rightarrow B \in \text{Mor}(\mathcal{A}) \mid (Ue, B) \in Q \}, \text{ então:}$$

(a) Existem um functor F e transformações naturais η e ε tais que $(\eta, \varepsilon): F \dashv U$ é uma adjunção e as co-unidades $\varepsilon_A: FUA \rightarrow A$ pertencem a \mathcal{E} , para todo o $A \in \mathcal{A}$.

(b) \mathcal{A} é uma $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoria localmente ortogonal.

(2) Se \mathcal{E} é uma subclasse de $\text{Mor}(\mathcal{A})$ que verifica as condições (a) e (b), então U é um (Q, \mathcal{M}) -functor localmente ortogonal com

$$Q = {}^{\text{ex}}\mathcal{E} = \{ (Ue, \eta_X, A) \in \text{Mor}(U) \mid (e: FX \rightarrow A) \in \mathcal{E} \}, \text{ ou seja,}$$

$$Q = \{ (q, A) \in \text{Mor}(U) \mid \varepsilon_A \cdot Fq \in \mathcal{E} \}.$$

Demonstração:

Em primeiro lugar salientamos que, se U é um (Q, \mathcal{M}) -functor localmente ortogonal, como consequência de 2.1(LO), temos o seguinte: Se uma U -fonte é a imagem por U de uma \mathcal{A} -fonte, então o morfismo de Q que faz parte da sua (Q, \mathcal{M}) -factorização localmente ortogonal é a imagem por U de um morfismo de \mathcal{A} .

(1)(a): Dado um \mathcal{X} -objecto X , seja $(x_i: X \rightarrow UA_i)_I$ a U -fonte constituída por todos os U -morfismos de domínio X . Se $(x_i: X \rightarrow UA_i) = X \xrightarrow{q} UA \xrightarrow{Uf_i} UA_i$ é a (Q, \mathcal{M}) -factorização localmente ortogonal de $(x_i)_I$, então, atendendo a que $Q \subset \text{Epi}(U)$, $q: X \rightarrow UA$ é um morfismo universal de X para U .

Dado $A \in \mathcal{A}$, vejamos que $(U\varepsilon_A, A) \in Q$. Com efeito, a (Q, \mathcal{M}) -factorização localmente ortogonal de $U\varepsilon_A$ é da forma $U\varepsilon_A = Uf \cdot Ue$ com $Ue \in Q$. A igualdade $U(1_A) \cdot 1_{UA} = U\varepsilon_A \cdot \eta_{UA}$ e o facto de $1_{UA} \in Q$ implicam a existência de um morfismo d em \mathcal{A} tal que $Ud \cdot 1_{UA} = Ue \cdot \eta_{UA}$ e $f \cdot d = 1_A$.

$$\begin{array}{ccc}
 UA & \xrightarrow{1_{UA}} & UA \\
 \eta_{UA} \downarrow & \swarrow U d & \downarrow U 1_A \\
 UFUA & & UA \\
 Ue \downarrow & \nwarrow & \downarrow Uf \\
 UB & \xrightarrow{Uf} & UA
 \end{array}$$

Usando estas duas igualdades, concluímos que f é um isomorfismo e que, portanto, $U\varepsilon_A \in Q$.

(b) A classe \mathcal{E} é fechada para a composição com isomorfismos e contém todos os isomorfismos por o mesmo acontecer com Q . Seja $(f_i : A \rightarrow A_i)_I$ uma fonte em \mathcal{A} ; a (Q, \mathcal{M}) -factorização localmente ortogonal da U -fonte $(Uf_i : UA \rightarrow UA_i)_I$ é da forma $Uf_i = Um_i \cdot Ue$ com $i \in I$ e $Ue \in Q$. Notemos que U é fiel pois, se $g, h : A \rightarrow B$ são dois \mathcal{A} -morfismos tais que $Ug = Uh$, temos que $Ug \cdot 1_{UA} = Uh \cdot 1_{UA}$, e $g = h$, visto $1_{UA} \in Q \subset \text{Epi}(U)$. É agora fácil provar que $f_i = m_i \cdot e$ é uma $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorização localmente ortogonal de $(f_i)_I$.

(2) $\text{Iso}(U) \subset Q$: Se $p : X \rightarrow UA$ é um U -isomorfismo, a composição do isomorfismo Fp com ε_A é um morfismo de \mathcal{E} , pois $\varepsilon_A \in \mathcal{E}$. Então $p = U(\varepsilon_A \cdot Fp) \cdot \eta_X$ pertence a Q .

Dada uma U -fonte $(x_i : X \rightarrow UA_i)_I$, $x_i = U(\varepsilon_{A_i} \cdot Fx_i) \cdot \eta_X$ para todo o $i \in I$. Seja $\varepsilon_{A_i} \cdot Fx_i = f_i$, e a $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorização localmente ortogonal da \mathcal{A} -fonte $(\varepsilon_{A_i} \cdot Fx_i)_I$. Então $x_i = Uf_i \cdot (Ue \cdot \eta_X)$ é uma (Q, \mathcal{M}) -factorização localmente ortogonal de $(x_i)_I$. \square

2.7. Proposição. Para $Q \subset \text{Mor}(U)$ as seguintes asserções são equivalentes:

(i) (a) U é um Q -functor localmente ortogonal.

(b) \mathcal{A} tem coigualizadores.

(c) Q é fechada para a composição com epimorfismos extremais de \mathcal{A} à esquerda.

(ii) U é um $(Q, \text{MonoF}(\mathcal{A}))$ -functor localmente ortogonal.

Demonstração:

(i) \Rightarrow (ii): Sejam $(x_i : X \rightarrow UA_i)_I$ uma U -fonte e $x_i = Uf_i \cdot q$ a sua Q -factorização localmente ortogonal. Vamos provar que $(f_i)_I \in \text{MonoF}(\mathcal{A})$. Sejam $g, h : B \rightarrow A$ morfismos em \mathcal{A} tais que $f_i \cdot g = f_i \cdot h$, para todo $i \in I$, e $e : A \rightarrow E$ o seu coigualizador. Para cada $i \in I$, existe um e um só \mathcal{A} -morfismo $d_i : E \rightarrow A_i$ tal que $d_i \cdot e = f_i$. Atendendo a 2.1(LO), como $Ue \cdot q \in Q$, as igualdades $Uf_i \cdot q = Ud_i \cdot (Ue \cdot q)$, $i \in I$, implicam a existência de um \mathcal{A} -morfismo d tal que $Ud \cdot Ue \cdot q = q$.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{q} & UA & \xrightarrow{Ue} & UE \\
 \downarrow q & & & \nearrow Ud & \downarrow Ud_i \\
 UA & \xrightarrow{Uf_i} & UA_i & &
 \end{array}$$

Temos então que $d \cdot e = 1_A$, visto q ser um U -epimorfismo. Assim e é um isomorfismo e $g = h$.

(ii) \Rightarrow (i): (b) Sejam $g, h : A \rightarrow B$ \mathcal{A} -morfismos. Consideremos a \mathcal{A} -fonte $(e_i : B \rightarrow C_i)_I$ constituída por todos os morfismos e_i tais que $e_i \cdot g = e_i \cdot h$. Se $e_i = m_i \cdot e$, $i \in I$, é a sua $({}^{\text{in}}Q, \text{MonoF}(\mathcal{A}))$ -factorização localmente ortogonal (2.5), então o morfismo e é o coigualizador do par (g, h) .

(c) Seja $e : A \rightarrow B$ um epimorfismo extremal de \mathcal{A} , $(q : X \rightarrow UA) \in Q$, e $Ue \cdot q = Um \cdot p$ a $(Q, \text{MonoF}(\mathcal{A}))$ -factorização localmente ortogonal do U -morfismo $Ue \cdot q$. Por 2.1(LO) existe um \mathcal{A} -morfismo d tal que $m \cdot d = e$; como m é um monomorfismo e e é um epimorfismo extremal, m é um isomorfismo e, portanto, $Um \cdot p \in Q$, ou seja, $Ue \cdot q \in Q$. \square

Seja \mathcal{E} uma classe de morfismos de \mathcal{A} fechada para a composição com

isomorfismos.

2.8. Definição. A categoria \mathcal{A} diz-se \mathcal{E} -cocompleta se:

(a) Dados morfismos $e : A \rightarrow B$, de \mathcal{E} , e $d : A \rightarrow C$, de \mathcal{A} , existe em \mathcal{A} , e pertence a \mathcal{E} , a soma amalgamada de e ao longo de d .

(b) Toda a família $(e_i : A \rightarrow A_i)_{i \in I}$ de morfismos de \mathcal{E} tem cointersecção em \mathcal{A} e ela é um morfismo de \mathcal{E} .

2.9. Lema. Se, para $\mathcal{E} \subset \text{Mor}(\mathcal{A})$, \mathcal{A} tem \mathcal{E} -cointersecções arbitrárias então $\mathcal{E} \subset \text{Epi}(\mathcal{A})$. Em particular se \mathcal{A} é \mathcal{E} -cocompleta, $\mathcal{E} \subset \text{Epi}(\mathcal{A})$.

Demonstração: A demonstração é análoga às feitas em 1.5 e 2.2. Dado $(e : A \rightarrow B) \in \mathcal{E}$ e dois morfismos $g, h : B \rightarrow C$ tais que $g \cdot e = h \cdot e$, consideramos a família $(e_i : A \rightarrow B_i)_{i \in I}$, com $I = \text{Mor}(\mathcal{A})$ e $e_i = e$, $i \in I$. Supondo que a cointersecção desta família é dada pelo diagrama

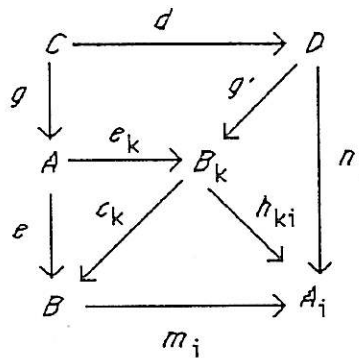
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e_i} & B \\ & \searrow d & \downarrow d_i \\ & & D \end{array}$$

consideremos $J = \{c : D \rightarrow C \mid c \cdot d_i \in \{g, h\}, i \in I\}$; definimos $\sigma : I \rightarrow J$ como em 2.2. Usando a definição de cointersecção é agora fácil concluir que $g = h$. \square

2.10. Proposição. Se $\text{Iso}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{E}$, então \mathcal{A} é \mathcal{E} -cocompleta se e só se \mathcal{A} é uma \mathcal{E} -categoria localmente ortogonal.

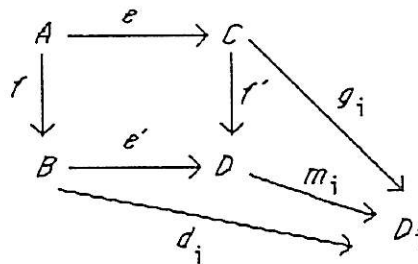
Demonstração: Seja \mathcal{A} uma categoria \mathcal{E} -cocompleta. Dada uma fonte $(f_i : A \rightarrow A_i)_{i \in I}$ consideramos a família $(e_k, (h_{ki})_{i \in I})_{k \in K}$ constituída por todos os pares $(e_k, (h_{ki})_{i \in I})$ com $e_k \in \mathcal{E}$ e $(h_{ki} : B_k \rightarrow A_i)_{i \in I}$ uma fonte tais que $f_i = h_{ki} \cdot e_k$, $i \in I$. Esta família é não vazia, visto que $\text{Iso}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{E}$. Seja $(e, (c_k)_{k \in K}, B)$ a cointersecção dos morfismos $e_k : A \rightarrow B_k$, para $k \in K$. Então $e \in \mathcal{E}$. Para cada $i \in I$, atendendo a que

$h_{ki} \cdot e_k = f_i$, $k \in K$, existe um e um só morfismo $m_i : B \rightarrow A_i$ tal que $m_i \cdot c_k = h_{ki}$ para todo o $k \in K$ e $m_i \cdot e = f_i$. Vamos provar que $f_i = m_i \cdot e$, $i \in I$, é uma \mathcal{E} -factorização localmente ortogonal. Sejam $g : C \rightarrow A$ e $d : C \rightarrow D$ morfismos com $d \in \mathcal{E}$ e $(n_i : D \rightarrow A_i)_I$ uma fonte tais que $n_i \cdot d = f_i \cdot g$, $i \in I$. Formemos a soma amalgamada (d', g') do par (d, g) . Para cada $i \in I$, a igualdade $n_i \cdot d = f_i \cdot g$ implica a existência de um único morfismo l_i tal que $l_i \cdot d' = f_i$ e $l_i \cdot g' = n_i$. Como $d' \in \mathcal{E}$, então, para algum $k \in K$, $l_i = h_{ki}$, $i \in I$ e $d' = e_k$.



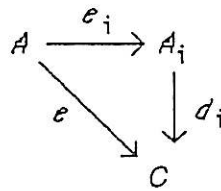
O morfismo $c_k \cdot g' : D \rightarrow B$ verifica $(c_k \cdot g') \cdot d = e \cdot g$ e $m_i \cdot (c_k \cdot g') = n_i$, $i \in I$. Além disso, é o único morfismo nestas condições, como consequência de 2.9.

Reciprocamente, seja \mathcal{A} uma \mathcal{E} -categoria localmente ortogonal. Dados dois morfismos $f : A \rightarrow B$ e $e : A \rightarrow C$, $e \in \mathcal{E}$, consideremos a família dos pares $((d_i, g_i))_I$ tais que $g_i \cdot e = d_i \cdot f$. Seja $d_i = m_i \cdot e'$ a \mathcal{E} -factorização localmente ortogonal da fonte $(d_i)_I$. Então existe um e um só morfismo f' tal que $f' \cdot e = e' \cdot f$ e $m_i \cdot f' = g_i$, para todo o $i \in I$, e (e', f') é a soma amalgamada de (e, f) com $e' \in \mathcal{E}$.



Com efeito, se r e s são morfismos tais que $r \cdot e = s \cdot f$, então, para algum $i \in I$, $r = g_i$ e $s = d_i \cdot e$, portanto, $s = m_i \cdot e'$ e $r = m_i \cdot f'$. Atendendo a 2.2, m_i é o único morfismo nestas condições.

Dada uma família $(e_i : A \rightarrow A_i)_I$ de morfismos de \mathcal{E} , consideremos a família dos pares $(g_k, (f_{ki})_I)_K$, com $g_k : A \rightarrow B_k$ um \mathcal{A} -morfismo e $(f_{ki} : B_k \rightarrow A_i)_I$ uma \mathcal{A} -fonte tais que $f_{ki} \cdot e_i = g_k$, $i \in I$. Seja $g_k = m_k \cdot e$ uma \mathcal{E} -factorização localmente ortogonal com $(e : A \rightarrow C) \in \mathcal{E}$. Então, para cada $i \in I$, existe um e um só $d_i : A_i \rightarrow C$ tal que $d_i \cdot e_i = e$ e $m_k \cdot d_i = f_{ki}$, $k \in K$. O diagrama



constitui a cointersecção dos $e_i : A \rightarrow A_i$, $i \in I$, com $e \in \mathcal{E}$. □

Como consequência de 2.7 e 2.10 temos o seguinte resultado:

2.11. Corolário. Para \mathcal{E} tal que $\text{Iso}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{E} \subset \text{Mor}(\mathcal{A})$, são equivalentes:

(i) \mathcal{A} é uma $(\mathcal{E}, \text{MonoF}(\mathcal{A}))$ -categoria localmente ortogonal.

(ii) (a) \mathcal{A} é \mathcal{E} -cocompleta.

(b) \mathcal{A} tem coigualizadores.

(c) \mathcal{E} é fechada para a composição com epimorfismos extremais à esquerda. □

Estamos agora em condições de dar duas caracterizações de functor sólido. Sobre a sua utilidade falam alguns dos resultados que incluímos neste e nos capítulos seguintes.

2.12. Teorema. Para um dado functor $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) U é um Q -functor localmente ortogonal para alguma classe $Q \subset \text{Mor}(U)$.

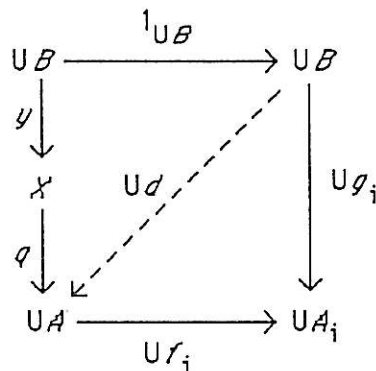
(ii) U é sólido.

(iii) Para alguma classe $\mathcal{E} \subset \text{Mor}(\mathcal{A})$, \mathcal{A} é \mathcal{E} -cocompleta e U tem adjunto

esquerdo com as co-unidades respectivas pertencentes a \mathcal{E} .

Demonstração:

(i) \Rightarrow (ii): Vamos mostrar que a Q -factorização localmente ortogonal de uma U -fonte é U -epimórfica e U -semi-inicial, concluindo assim que U é sólido (1.9). Seja $(x_i : X \rightarrow UA_i)_I$ uma U -fonte e $(X \xrightarrow{q} UA \xrightarrow{Uf_i} UA_i)_I$ a sua Q -factorização localmente ortogonal. Como já vimos, esta factorização é U -epimórfica, isto é, $q \in \text{Epi}(U)$. Resta provar que é U -semi-inicial. Seja (B, y) um U -comorfismo e $(g_i : B \rightarrow A_i)_I$ uma fonte em \mathcal{A} tais que $x_i \cdot y = Ug_i$ para todo o $i \in I$.

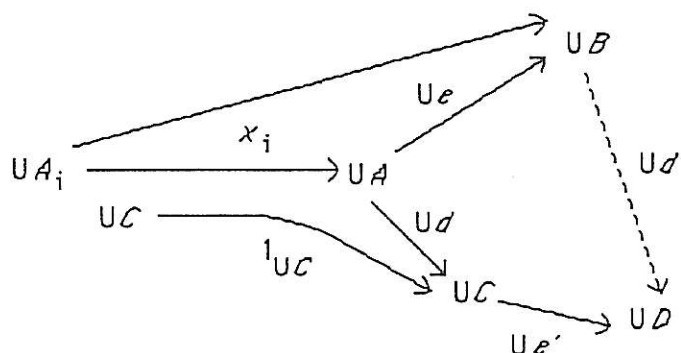


Como $1_{UB} \in Q$, existe um e um só $d : B \rightarrow A$ tal que $Ud = q \cdot y$ e $f_i \cdot d = g_i$, para todo o $i \in I$.

(ii) \Rightarrow (iii): Sejam F o adjunto esquerdo de U , cuja existência é garantida em 1.3, e $\varepsilon_A : FUA \rightarrow A$, para cada $A \in \mathcal{A}$, as respectivas co-unidades. Vejamos que $\mathcal{E} = \{e : A \rightarrow B \in \text{Mor}(\mathcal{A}) \mid (Ue, B) \in \text{Quot}(U)\}$ está nas condições pretendidas.

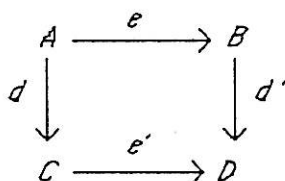
Para $A \in \mathcal{A}$, $\varepsilon_A \in \mathcal{E}$ porque $(U\varepsilon_A, A)$ é o levantamento U -semifinal da U -cofonte $((1_{UFUA}, \eta_{UA}), UFUA)$. Com efeito tem-se $U\varepsilon_A \cdot 1_{UFUA} = U\varepsilon_A$ e $U\varepsilon_A \cdot \eta_{UA} = U1_A$. E, se (p, B) é um U -morfismo para o qual existem \mathcal{A} -morfismos $h : FUA \rightarrow B$ e $d : A \rightarrow B$ tais que $p \cdot 1_{UFUA} = Uh$ e $p \cdot \eta_{UA} = Ud$, então $d : A \rightarrow B$ é o único morfismo que satisfaz $Ud \cdot U\varepsilon_A = p$, e $d \cdot 1_A = d$ e $d \cdot \varepsilon_A = h$.

Dados $(e : A \rightarrow B) \in \mathcal{E}$ e $(d : A \rightarrow C) \in \text{Mor}(\mathcal{A})$, sendo Ue o levantamento U -semifinal de alguma U -cofonte $\alpha = (x_i : UA_i \rightarrow UA)_I$, consideremos a U -cofonte β constituída por $Ud \cdot x_i : UA_i \rightarrow UC$, para $i \in I$, e por $1_{UC} : UC \rightarrow UC$. O levantamento U -semifinal de β é da forma (Ue', D) com $e' : C \rightarrow D \in \mathcal{E}$, visto que a composição do morfismo U -quociente deste levantamento com 1_{UA} é a imagem por U de um \mathcal{A} -morfismo.



Como, para cada $i \in I$, $(Ue' \cdot Ud) \cdot x_i$ é a imagem por U de um \mathcal{A} -morfismo, existe um morfismo $d' : B \rightarrow D$ tal que $Ud' \cdot Ue = Ue' \cdot Ud$. Logo $d' \cdot e = e' \cdot d$, visto U ser um functor fiel.

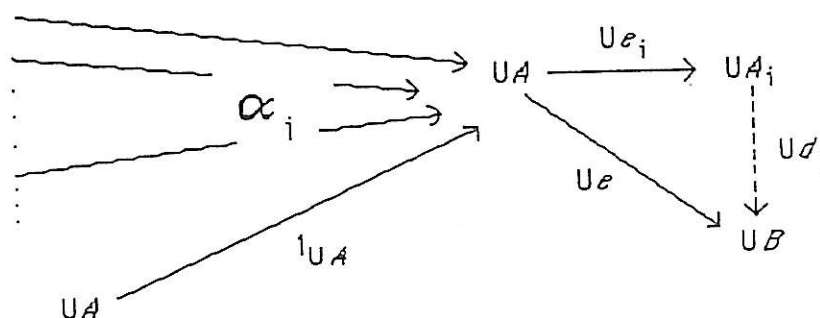
Além disso, o diagrama



é uma soma amalgamada. Com efeito, se $g : C \rightarrow E$ e $h : B \rightarrow E$ são tais que $g \cdot d = h \cdot e$, a composição de Ug com cada um dos morfismos de β é a imagem por U de um \mathcal{A} -morfismo pelo que existe um e um só morfismo $c : D \rightarrow E$ tal que $c \cdot e' = g$. Da igualdade $Uc \cdot Ud' \cdot Ue = Uh \cdot Ue$ concluímos $c \cdot d' = h$, por $Ue \in \text{Epi}(U)$.

Dada uma família $(e_i : A \rightarrow A_i)_I$ de morfismos de \mathcal{E} , cada (Ue_i, A_i) é o levantamento U -semifinal de alguma U -cofonte α_i . Consideremos a U -cofonte β constituída por todos os morfismos das U -cofontes α_i , e pelo morfismo 1_{UA} e seja

(Ue, B) o levantamento U -semifinal de β .



Como a composição de Ue com cada morfismo de β é a imagem por U de um \mathcal{A} -morfismo, existe, para cada i , um \mathcal{A} -morfismo $d_i : A_i \rightarrow B$ tal que $Ud_i \cdot Ue_i = Ue$.

Procedendo agora de forma análoga ao feito anteriormente é fácil provar que $e : A \rightarrow B$ é a cointersecção da família $(e_i : A \rightarrow A_i)_I$.

(iii) \Rightarrow (i): Se \mathcal{A} é \mathcal{E} -cocompleta, \mathcal{A} é \mathcal{E}' -cocompleta para $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \text{Iso}(\mathcal{A})$.

Portanto, sem perda de generalidade, vamos supor que \mathcal{E} contém já todos os \mathcal{A} -isomorfismos. Então, por 2.10, \mathcal{A} é uma \mathcal{E} -categoria localmente ortogonal. Estamos agora nas condições de 2.5(2), pelo que concluímos imediatamente o pretendido. \square

2.13. Corolário. Seja \mathcal{A} cocompleta e cobempotenciada. Se U é fiel e tem adjunto esquerdo então U é um functor sólido.

Demonstração: É consequência imediata da implicação (iii) \Rightarrow (ii) em 2.12, considerando a classe \mathcal{E} dos epimorfismos de \mathcal{A} . \square

3. \mathcal{Q} -Funtores ortogonais

Sejam (q, A) um U -morfismo e (B, f_i) uma \mathcal{A} -fonte. Escrevemos $(q, A) \perp (B, f_i)$ se, quando (p, B) é um U -morfismo e (A, g_i) uma \mathcal{A} -fonte tais que $Ug_i \cdot q = Uf_i \cdot p$ para todo o i , então existe um e um só \mathcal{A} -morfismo $d : A \rightarrow B$ que

satisfaz as igualdades $Ud \cdot q = p$ e $f_i \cdot d = g_i$ para todo o i .

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{q} & UA \\
 p \downarrow & \swarrow Ud & \downarrow Ug_i \\
 UB & \xrightarrow{Uf_i} & UA_i
 \end{array}$$

Consideremos $Q \subset \text{Mor}(U)$ e $\mathcal{M} \subset \text{Fonte}(\mathcal{A})$ fechadas para a composição com \mathcal{A} -isomorfismos, à esquerda e à direita, respectivamente.

3.1. Definição. Dizemos que U é um (Q, \mathcal{M}) -functor se:

(1) Toda a U -fonte $(x_i : X \rightarrow UA_i)_I$ admite uma factorização $x_i = Uf_i \cdot q$, com $q \in Q$ e $(f_i)_I \in \mathcal{M}$.

(2) Se $(q, A) \in Q$ e $(B, f_i) \in \text{Fonte}(\mathcal{A})$ então $(q, A) \perp (B, f_i)$.

Um (Q, \mathcal{M}) -functor tal que $\text{Iso}(U) \subset Q$ diz-se um (Q, \mathcal{M}) -functor ortogonal.

Se o functor identidade da categoria \mathcal{A} é um $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -functor (logo ortogonal, atendendo a 2.3) dizemos que \mathcal{A} é uma $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoria ortogonal ou apenas uma $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoria.

3.2. Observações. (1) Se U é um (Q, \mathcal{M}) -functor então, em particular, toda a U -fonte admite uma (Q, \mathcal{M}) -factorização localmente ortogonal e, por 2.2, $Q \subset \text{Epi}(U)$.

(2) Se U é um (Q, \mathcal{M}) -functor então

$$Q = \mathcal{M}^\perp = \{ (q, A) \in \text{Mor}(U) \mid (q, A) \perp (B, f_i), (B, f_i) \in \mathcal{M} \}.$$

Mas, de um modo geral, \mathcal{M} não é univocamente determinado por Q [18]. No entanto, se U é ortogonal então $\mathcal{M} = Q^\perp = \{ (B, f_i) \in \text{Fonte}(\mathcal{A}) \mid (q, A) \perp (B, f_i), (q, A) \in Q \}$.

É fácil verificar que, nestas condições, $\mathcal{M} \subset \text{Ini}(U)$, designando por $\text{Ini}(U)$ a classe das fontes de \mathcal{A} que são U -iniciais, isto é, das \mathcal{A} -fontes $(m_i)_I$ que verificam a seguinte propriedade: Se existem uma fonte $(f_i)_I$ e um U -morfismo h tais que $Um_i \cdot h = Uf_i$

para todo o $i \in I$, então existe um e um só morfismo h' em \mathcal{A} tal que $Uh' = h$ e $m_i \cdot h' = f_i, i \in I$.

(3) Um Q -functor ortogonal é um Q -functor localmente ortogonal, logo sólido. Mas um (Q, \mathcal{M}) -functor pode não ser sólido. Basta reparar que se U é um adjunto direito então é um (Q, \mathcal{M}) -functor onde Q é a classe de todos os morfismos universais de um X -objecto para U e $\mathcal{M} = \text{Fonte}(\mathcal{A})$ e que, como veremos no capítulo 3, existem funtores adjuntos direitos que não são sólidos.

3.3. Alguns funtores ortogonais.

(1) $U : \mathcal{A} \rightarrow X$ diz-se topológico se for um $(\text{Iso}(U), \text{Ini}(U))$ -functor. Topológicos são, por exemplo, os funtores de esquecimento, respectivamente, de Top em Set , e de TopGrp em Grp .

Uma noção mais geral é a seguinte: Se X é uma $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoria, dizemos que o functor $U : \mathcal{A} \rightarrow X$ é $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -topológico se para cada $(m_i)_I \in \mathcal{M}$ existe uma \mathcal{A} -fonte U -inicial $(n_i)_I$ e um U -isomorfismo h tais que $m_i = Un_i \cdot h, i \in I$. Nestas condições U é um $(\mathcal{D}, \mathcal{N})$ -functor ortogonal com $\mathcal{D} = \mathcal{E} \cap \text{Mor}(U)$ e $\mathcal{N} = \{(n_i)_I \in \text{Ini}(U) \mid (Un_i)_I \in \mathcal{M}\}$. Por exemplo os funtores de esquecimento da categoria dos espaços topológicos $T_i, i=0,1$, em Set são $(\text{EpiReg}, \text{MonoF})$ -topológicos.

(2) Seja X uma categoria regular, isto é, uma $(\text{EpiReg}, \text{MonoF})$ -categoria. Dizemos que o adjunto direito $U : \mathcal{A} \rightarrow X$ é um functor regular se U cria factorizações regulares, isto é, se $(f_i)_I$ é uma fonte em \mathcal{A} e $Uf_i = m_i \cdot e, i \in I$, é a factorização regular da X -fonte $(Uf_i)_I$, então existe uma e uma só factorização $f_i = \bar{m}_i \cdot \bar{e}, i \in I$, de $(f_i)_I$ em \mathcal{A} tal que $U\bar{m}_i = m_i$ e $U\bar{e} = e$, e, além disso, \bar{e} é um epimorfismo regular e $(\bar{m}_i)_I$ é uma monofonte.

Se U é um functor regular, é fácil mostrar que, então, U é um $(\text{EpiExtr}(U), \text{Ini}(U))$ -functor.

Vários funtores que esquecem a estrutura algébrica dos objectos são regulares.

Por exemplo os funtores de esquecimento de Grp em Set e de TopGrp em Top .

3.4. Funtores Topologicamente Algébricos.

Um functor $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$ diz-se topologicamente algébrico se toda a U -fonte admite uma factorização $(\text{Epi}(U), \text{Ini}(U))$.

Uma factorização $(\text{Epi}(U), \text{Ini}(U))$ de uma U -fonte é, em particular, uma factorização U -epimórfica e U -semi-inicial. Logo todo o functor topologicamente algébrico é sólido.

Um U -morfismo $q : X \rightarrow UA$ diz-se semi-universal se, dados uma fonte U -inicial $(m_i : B \rightarrow A_i)_I$, uma fonte $(g_i : A \rightarrow A_i)_I$ e um U -morfismo $p : X \rightarrow UB$ tais que $Um_i \cdot p = Ug_i \cdot q$, $i \in I$, então existe um único morfismo em \mathcal{A} , $d : A \rightarrow B$, tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{q} & UA \\
 p \downarrow & \swarrow U d & \downarrow Ug_i \\
 UB & \xrightarrow{Um_i} & UA_i
 \end{array}$$

é comutativo. Designamos a classe dos U -morfismos semi-universais por $\text{SUni}(U)$. É evidente que $\text{SUni}(U) = (\text{Ini}(U))^\perp$.

Uma caracterização importante dos funtores topologicamente algébricos é a seguinte:

Teorema. Um functor U é topologicamente algébrico se e só se é um $(\text{SUni}(U), \text{Ini}(U))$ -functor ortogonal.

Demonstração: É evidente que se U é um $(\text{SUni}(U), \text{Ini}(U))$ -functor ortogonal então é topologicamente algébrico.

Suponhamos que U é topologicamente algébrico. Dada uma U -fonte $(x_i : X \rightarrow UA_i)_I$, consideremos a família não vazia $(e_k)_K$ constituída por todo o

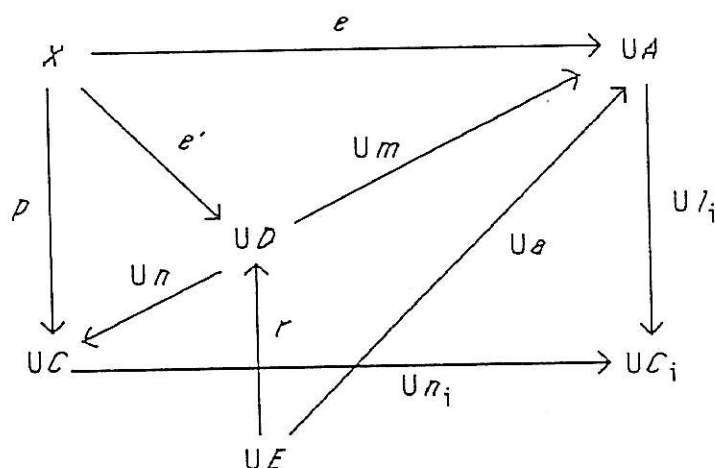
U-epimorfismo $e_k : X \rightarrow UB_k$ para o qual existe uma fonte U-inicial $(n_{ki} : B_k \rightarrow A_i)_I$ tal que $x_i = Un_{ki} \cdot e_k$ para todo o $i \in I$. Seja $X \xrightarrow{e} UA \xrightarrow{Um_k} UB_k$ a factorização $(\text{Epi}(U), \text{Ini}(U))$ da fonte $(e_k : X \rightarrow UB_k)_K$. Como $e \in \text{Epi}(U)$, $n_{ki} \cdot m_k = n_{k'i} \cdot m_{k'}$ para todos os $k, k' \in K$. Vamos provar que, para $m_i = n_{ki} \cdot m_{k'}$, $i \in I$, a factorização $x_i = Um_i \cdot e$ é $(\text{SUni}(U), \text{Ini}(U))$.

A fonte $(m_i)_I$ é U-inicial: Consideremos um morfismo $h : UC \rightarrow UA$ e uma fonte $(g_i : C \rightarrow A_i)_I$ tais que $Um_i \cdot h = Ug_i$, $i \in I$. Para cada $k \in K$, como $(n_{ki})_I$ é U-inicial, as igualdades $Un_{ki} \cdot (Um_k \cdot h) = Ug_i$, $i \in I$, implicam a existência de um único morfismo $l_k : C \rightarrow B_k$ tal que $Ul_k = Um_k \cdot h$ e $n_{ki} \cdot l_k = g_i$ para todo o $i \in I$. Atendendo à igualdade $Um_k \cdot h = Ul_k$ para todo o $k \in K$ e ao facto de $(m_k)_K$ ser U-inicial, temos um único morfismo, $h' : C \rightarrow A$, tal que $Uh' = h$ e $m_k \cdot h' = l_k$, $k \in K$, e, portanto, também $m_i \cdot h' = g_i$ para todo o $i \in I$. Como U é fiel, h' é o único morfismo nestas condições.

Para mostrar que $e \in \text{SUni}(U)$, notemos primeiro que, se $e = Um \cdot e'$, com $e' \in \text{Epi}(U)$ e $m \in \text{Ini}(U)$, então m é um isomorfismo. Com efeito, nessas condições, e' é um morfismo da família $(e_k)_K$ e, portanto, para algum $k \in K$, $e' = Um_k \cdot e$. Então, das igualdades $U(m \cdot m_k) \cdot e = e$ e $U(m_k \cdot m) \cdot e' = e'$, concluímos que $m_k = m^{-1}$.

Consideremos um U-morfismo $p : X \rightarrow UC$, uma \mathcal{A} -fonte $(l_i : A \rightarrow C_i)_I$ e uma fonte U-inicial $(n_i : C \rightarrow C_i)_I$ tais que, para todo o $i \in I$, $n_i \cdot p = l_i \cdot e$. Sejam $e' : X \rightarrow UD$ e $(m : D \rightarrow A, n : D \rightarrow C)$ um morfismo e uma fonte tais que as igualdades $e = Um \cdot e'$ e $p = Un \cdot e'$ constituem a factorização $(\text{Epi}(U), \text{Inicial}(U))$ da fonte $(e : X \rightarrow UA, p : X \rightarrow UC)$. Vamos provar que $m : D \rightarrow A$ é U-inicial e, portanto, um isomorfismo, pelo que $n \cdot m^{-1}$ será o morfismo diagonal procurado.

Sejam $r : UE \rightarrow UD$ um X -morfismo e $a : E \rightarrow A$ um \mathcal{A} -morfismo tais que $Um \cdot r = Ua$.

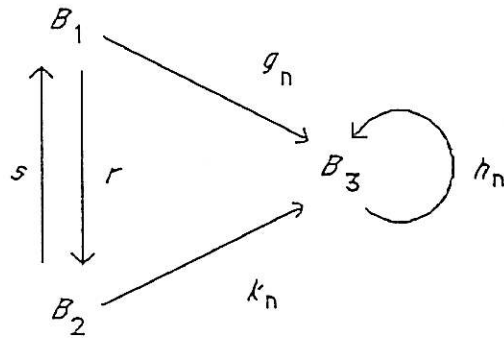


Atendendo à comutatividade do rectângulo do diagrama acima e a que $e' \in \text{Epi}(U)$, temos a igualdade $Un_i \cdot (Un \cdot r) = U(l_i \cdot a)$ para todo o $i \in I$, pelo que existe um único $d : E \rightarrow C$ tal que $Un \cdot r = Ud$. Então, visto que a fonte (m, n) é U -inicial, existe um único $r' : E \rightarrow D$ tal que (1) $Ur' = r$, (2) $n \cdot r' = d$ e (3) $m \cdot r' = a$. Atendendo a que U é fiel, r' é o único morfismo a satisfazer (1) e (3). \square

Se U é um (Q, \mathcal{M}) -functor ortogonal então é topologicamente algébrico, atendendo a 3.2(1) e (2).

O exemplo que se segue, e que aparece em [14], mostra que um functor sólido pode não ser um (Q, \mathcal{M}) -functor, já que, neste caso, não é topologicamente algébrico. Börger e Tholen [5] e Adámek [2] construíram exemplos de funtores sólidos sobre $\mathcal{S}et$ que não são topologicamente algébricos.

3.5.Exemplo: Seja X a subcategoria de $\mathcal{S}et$ cujos objectos são $B_1 = \{1\}$, $B_2 = \{2\}$, $B_3 = \mathbb{N}_0$ e cujos morfismos diferentes das identidades são g_n, h_n e k_n , $n \in \mathbb{N}_0$, e r e s , com domínios e codomínios como indicado no diagrama



e definidos do seguinte modo:

$$s(2) = 1, r(1) = 2; g_n(1) = n, k_n(2) = n, h_n(m) = n+m \quad (n, m \in \mathbb{N}_0).$$

Seja \mathcal{A} a subcategoria de X que se obtém excluindo os morfismos r e g_0 e seja $U : \mathcal{A} \rightarrow X$ o functor de inclusão. U é sólido pois toda a U -fonte admite a factorização U -epi, semi-inicial indicada no quadro seguinte:

U -fonte (X, f_i)	factorização $\text{Epi}(U)$ semi-inicial
$X = B_1$, algum $f_i \in \{g_0, r\}$	$f_i = a_i \cdot r$
$X = B_1$, nenhum $f_i \in \{g_0, r\}$	$f_i = f_i \cdot 1_{B_1}$
$X = B_2$, algum $f_i \in \{k_0, 1_{B_2}\}$	$f_i = f_i \cdot 1_{B_2}$
$X = B_2$, nenhum $f_i \in \{k_0, 1_{B_2}\}$	$f_i = b_i \cdot s$
$X = B_3$, algum $f_i = h_0$	$f_i = f_i \cdot 1_{B_3}$
$X = B_3$, algum $f_i = h_0$	$f_i = c_i \cdot h_1$

onde a_i, b_i e c_i estão definidos da única maneira possível para que as 1ª, 4ª e 6ª igualdades da direita se verifiquem.

Mas U não é topologicamente algébrico pois não existe uma factorização $(\text{Epi}(U), \text{Ini}(U))$ da U -fonte (B_3, \emptyset) . Com efeito, uma factorização $(\text{Epi}(U), \text{Ini}(U))$

de (B_3, \emptyset) seria constituída por um U -epimorfismo $q : B_3 \rightarrow UA$ e uma \mathcal{A} -fonte indexada pelo vazio, (A, \emptyset) , verificando a seguinte condição: Se $B \in \mathcal{A}$ e x é um X -morfismo de UB para UA então existe um e um só \mathcal{A} -morfismo d tal que $Ud = x$. Necessariamente teríamos $UA = A = B_3$; mas então o X -morfismo g_0 iria contradizer a U -inicialidade de (B_3, \emptyset) .

Seguidamente estudaremos algumas relações entre Q -functores localmente ortogonais e Q -functores ortogonais.

3.6.Proposição. Um Q -functor localmente ortogonal é um Q -functor ortogonal se e só se o morfismo $Ue \cdot q \in Q$ sempre que $q : X \rightarrow UA$ e $Ue : UA \rightarrow UB$ são morfismos de Q .

Demonstração: Seja U um Q -functor ortogonal. Consideremos os morfismos de Q , $q : X \rightarrow UA$ e $Ue : UA \rightarrow UB$, as \mathcal{A} -fontes $(h_i)_I$ e $(m_i)_I$ com $(m_i)_I \in Q^\perp$ e um U -morfismo r tais que $Uh_i \cdot (Ue \cdot q) = Um_i \cdot r$, $i \in I$. Usando 3.1(2) duas vezes, concluímos da existência de um único \mathcal{A} -morfismo d tal que $Ud \cdot (Ue \cdot q) = r$ e $m_i \cdot d = h_i$, $i \in I$. Como, por 3.2(2), $Q = M^\perp = (Q^\perp)^\perp$, concluímos que $Ue \cdot q \in Q$.

Reciprocamente, suponhamos que $Ue \cdot q \in Q$ quando $q, Ue \in Q$. Notemos que U é um Q -functor ortogonal se e só se toda a \mathcal{A} -fonte $(m_i)_I$ que faz parte da Q -factorização localmente ortogonal de alguma U -fonte pertence a Q^\perp . E $(m_i)_I \in Q^\perp$ se e só se a Q -factorização localmente ortogonal de $(Um_i)_I$ é da forma $Um_i = Un_i \cdot Uc$, sendo c um \mathcal{A} -isomorfismo.

Seja então

$$\begin{array}{ccccc} & q & & Um_i & \\ X & \longrightarrow & UA & \longrightarrow & UA_i, \quad i \in I, \end{array}$$

a Q -factorização localmente ortogonal de uma U -fonte e $Um_i = Un_i \cdot Uc$, $i \in I$, a Q -factorização localmente ortogonal de $(Um_i)_I$. Da comutatividade, para todo o $i \in I$, do

diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{q} & UA & \xrightarrow{Uc} & UB \\
 q \downarrow & & & & \downarrow U\eta_i \\
 UA & \xrightarrow{\quad} & UA_i & &
 \end{array}$$

Um_i

atendendo a que $Uc \cdot q \in Q$ e a 3.1(2), resulta a existência de um \mathcal{A} -morfismo $d : B \rightarrow A$ tal que $Ud \cdot Uc \cdot q = q$. Como q e Uc pertencem a $\text{Epi}(U)$ temos, por um lado, que $d \cdot c = 1_A$ e, por outro, que $c \in \text{Epi}(\mathcal{A})$; logo c é um \mathcal{A} -isomorfismo. \square

3.7. Corolário. Para uma categoria \mathcal{A} são equivalentes:

(i) \mathcal{A} é uma \mathcal{E} -categoria ortogonal.

(ii) \mathcal{A} é uma \mathcal{E} -categoria localmente ortogonal e \mathcal{E} é fechada para a composição. \square

3.8. Corolário.

(1) Seja U um (Q, \mathcal{M}) -functor ortogonal e $\mathcal{E} = {}^{\text{in}}Q$. Então

(a) U é adjunto direito e as respectivas co-unidades pertencem a \mathcal{E} .

(b) \mathcal{A} é uma $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoria

(2) Se \mathcal{E} é uma subclasse de $\text{Mor}(\mathcal{A})$ que verifica as condições (a) e (b), então U é um (Q, \mathcal{M}) -functor ortogonal com $Q = {}^{\text{ex}}\mathcal{E}$. \square

Na demonstração de 3.8 vamos utilizar o seguinte resultado:

3.9. Lema. Seja \mathcal{A} uma $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoria. Se $a : A \rightarrow B$, $b : B \rightarrow C$ e $c : C \rightarrow D$ são morfismos tais que $b \cdot a \in \mathcal{E}$ e $c \cdot b \in \mathcal{E}$, então $c \cdot b \cdot a \in \mathcal{E}$.

Demonstração: Seja $c \cdot b \cdot a = m \cdot e$ a factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ de $c \cdot b \cdot a$. Atendendo a 3.1(2) e a que $b \cdot a \in \mathcal{E}$, existe um morfismo d tal que $m \cdot d = c$. Como $c \cdot b \in \mathcal{E}$, da igualdade $m \cdot d \cdot b = 1_D \cdot c \cdot b$ concluimos da existência de um morfismo f tal que $m \cdot f = 1_D$ e $f \cdot c \cdot b = d \cdot b$; então $f \cdot m \cdot e = f \cdot c \cdot b \cdot a = d \cdot b \cdot a = e$ e, visto

$e \in \text{Epi}(\mathcal{A})$, $f \cdot m = 1_E$. Assim m é um isomorfismo e $c \cdot b \cdot a \in \mathcal{E}$. \square

Demonstração de 3.8: (1) É consequência de 2.5 e 3.7.

(2) Atendendo a 2.5 e a 3.6, basta mostrar que $Ue \cdot q \in Q$ quando $q, Ue \in Q$.
Sejam $q : X \rightarrow UA$ e $Ue : UA \rightarrow UB$ pertencentes a Q , ou seja, $\varepsilon_A \cdot Fq$ e $\varepsilon_B \cdot FUe$ são elementos de \mathcal{E} , ou seja, $\varepsilon_A \cdot Fq$ e $e \cdot \varepsilon_A$ pertencem a \mathcal{E} . Então, como $Ue \cdot q = U(e \cdot \varepsilon_A \cdot Fq) \eta_X$ e, por 3.9, $e \cdot \varepsilon_A \cdot Fq \in \mathcal{E}$, concluímos o pretendido. \square

Podemos agora enunciar um resultado que inclui e completa 2.13, utilizando 3.7, 3.8 e 2.7.

3.10. Corolário. Seja \mathcal{A} uma categoria cocompleta e cobempotenciada. Se U é fiel e tem adjunto esquerdo então existe uma classe $Q \subset \text{Epi}(U)$ tal que U é um Q -functor ortogonal e $Q^\perp \subset \text{MonoF}(\mathcal{A})$. \square

Existem vários resultados que nos fornecem condições suficientes para que uma categoria seja uma $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoria (veja, por exemplo, [8]). Combinando-os com 3.8 ou 2.7 podemos encontrar outras propriedades interessantes sobre Q -functores ortogonais. Por exemplo no corolário anterior podemos substituir a condição de \mathcal{A} ser cocompleta por \mathcal{A} ser completa e bempotenciada.

No que se segue vamos ver que todo o functor sólido é a composição de dois functores ortogonais. Para tal, dado um Q -functor localmente ortogonal, $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$, consideremos a categoria K com $\text{Obj}(K) = Q$ e sendo os K -morfismos de (p, A) para (q, B) pares (x, f) onde x é um \mathcal{X} -morfismo e $f \in \mathcal{A}(A, B)$ tais que $Uf \cdot p = q \cdot x$.

3.11. Teorema. Um functor $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$ é sólido se e só se U admite uma factorização $U = V \cdot E$ tal que V é um functor topológico e E é uma imersão plena e reflectiva.

Demonstração: Se U é um functor sólido, é um Q -functor localmente ortogonal, para algum Q . Sejam, $E : \mathcal{A} \rightarrow K$, a imersão plena que a cada \mathcal{A} -objecto A faz corresponder $(1_A, A)$ e a cada \mathcal{A} -morfismo $f : A \rightarrow B$ faz corresponder $(Uf, f) : (1_A, A) \rightarrow (1_B, B)$ e, $V : K \rightarrow X$, o functor definido em objectos por $V(p : X \rightarrow UA) = X$ e em morfismos por $V(x, f) = x$.

É fácil verificar que $U = V \cdot E$ e que, para cada $(q, A) \in K$, $(q, 1_A) : (q, A) \rightarrow (1_A, A)$ é uma \mathcal{A} -reflexão de (q, A) .

Para provar que V é topológico basta mostrar que toda a V -fonte admite uma factorização $(\text{Iso}(V), \text{Fonte}(K))$. Seja $(x_i : X \rightarrow V(p_i : Y_i \rightarrow UA_i))_I$ uma V -fonte e seja $(X \xrightarrow{q} UB \xrightarrow{Uf_i} UA_i)_I$ a Q -factorização localmente ortogonal da U -fonte $(p_i \cdot x_i : X \rightarrow UA_i)_I$. Então $(X \xrightarrow{1_X} V(q : X \rightarrow UB) \xrightarrow{V(p_i, f_i)} V(p_i : Y_i \rightarrow UA_i))_I$ é a factorização procurada.

Vejamos agora que a composição de um functor topológico V com uma imersão plena reflectiva E é um functor sólido. O functor E é um adjunto direito, ou seja, um $(\text{Universal}(E), \text{Fonte}(\mathcal{A}))$ -functor, e, por ser uma imersão plena, para cada $A \in \mathcal{A}$, $(1_{EA}, A) \in \text{Universal}(E)$. Então E é um $(\text{Universal}(E), \text{Fonte}(\mathcal{A}))$ -functor ortogonal (2.3), logo sólido. Como os funtores sólidos são fechados para a composição (1.4) e todo o functor topológico é sólido, concluímos $U = V \cdot E$ que é sólido. \square

Contrastando com a compositividade dos funtores sólidos temos o seguinte:

3.12. Corolário. Os funtores topologicamente algébricos não são fechados para a composição.

Demonstração: Todo o functor sólido é composição de dois funtores topologicamente algébricos (3.4, 3.11) mas nem todo o sólido é topologicamente algébrico (3.5). \square